I. Abschnitt.

Hilfskonstruktionen.

§ 1. Zwei beliebige senkrechte Gerade zu konstruieren.

1. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 1). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$. Dann beschreibe man um 2 Punkte B und C von g mit beliebigen Radien Kreise, die sich in P und Q schneiden

$$[(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)],$$

und ziehe $PQ[2R_1 + R_2]$. Die Geraden g und PQ genügen der Aufgabe."

Das Symbol der Konstruktion ist

$$\text{op} : (2R_1 + 2R_2 + 2C_1 + 2C_2) = (8;\ 4)$$

(2 Gerade, 2 Kreise).

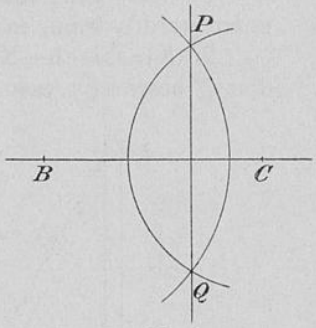

Fig. I, 1

2. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 1). — „Man beschreibe 2 beliebige, in P und Q sich schneidende Kreise $[2C_2]$. Seien B und C ihre Mittelpunkte. Man ziehe

$$BC[2R_1 + R_2] \quad \text{und} \quad PQ[2R_1 + R_2].$$

Diese Geraden genügen der Aufgabe"

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 2C_2) = (8;\ 4) \ (2 \text{ Gerade, } 2 \text{ Kreise}).$$

3. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 2). — „Man beschreibe einen beliebigen Kreis $[C_2]$ und ziehe darin einen Durchmesser $CE[R_1 + R_2]$. Dann ziehe man durch C eine beliebige, den Kreis noch in B schneidende Gerade $[R_1 + R_2]$, und ziehe $BE[2R_1 + R_2]$. Die Geraden BC und BE genügen der Aufgabe."

$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + C_2) = (8;\ 4) \ (3 \text{ Gerade, } 1 \text{ Kreis}).$$

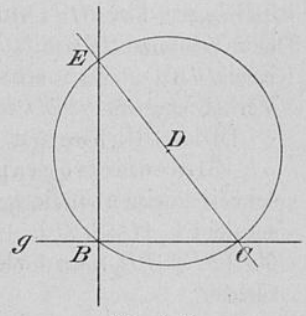

Fig. I, 2.

Diese Konstruktion kann folgendermaßen abgeändert werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3a. „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$ und einen Kreis, der g in B und C schneidet $[C_2]$, ziehe in diesem Kreise den Durchmesser $BD[2R_1 + R_2]$ und ziehe $CD[2R_1 + R_2]$."

Das Symbol bleibt dasselbe.

Liegt eine der beiden Geraden schon gezeichnet vor, so findet man die andere nach 1. oder 3a.; das Symbol vermindert sich um op : $[R_2]$.

§ 2. Auf der Geraden g im Punkte B die Senkrechte zu errichten.

1. Klassische Konstruktion. — „Man beschreibe um B einen Kreis, der g in C und C' schneidet $[C_1 + C_2]$. Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man dann die Kreise $C(\varrho)$ und $C'(\varrho)$, welche sich in A schneiden $[2C_1 + 2C_2]$, und ziehe $BA[2R_1 + R_2]$."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (9;\ 5)\ (1 \text{ Gerade, } 3 \text{ Kreise}).$$

Für den Fall, daß die Gerade g nur auf der einen Seite von B benutzt werden kann, existiert folgende

2. Klassische Konstruktion (Fig. I, 3). — „Mit beliebigem Radius ϱ beschreibe man $B(\varrho)$, der g in C schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $C(\varrho)$, der $B(\varrho)$ in D schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $D(\varrho)[C_1 + C_2]$. Dann ziehe man CD, welche $D(\varrho)$ noch in E trifft $[2R_1 + R_2]$, und ziehe $BE[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Senkrechte."

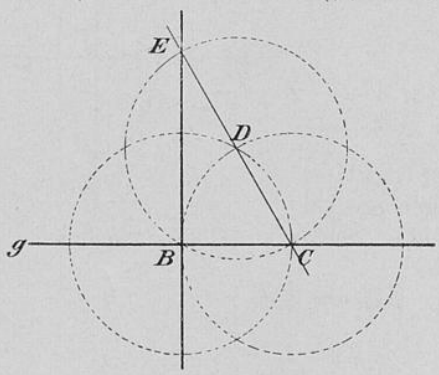

Fig. I, 3.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (12;\ 7)\ (2 \text{ Gerade, } 3 \text{ Kreise}).$$

Diese Konstruktion enthält 2 überflüssige Kreise und 2 überflüssige Zirkeleinsätze. Denn anstatt den Punkt D erst durch die beiden Kreise $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$ zu bestimmen, kann man die Zirkelspitze in einen ganz beliebigen Punkt D einsetzen und die Strecke DB in den Zirkel nehmen. Der Kreis um D mit DB als Radius tut dann denselben Dienst, wie der Kreis $D(\varrho)$; denn schneidet derselbe g noch in C, so wird er von der Verbindungslinie CD in einem Punkte E so getroffen, daß $BE \perp g$ ist.

Diese Überlegung führt zu der

3. Geometrographischen Konstruktion (Fig. I, 2). — „Man beschreibe einen beliebigen, durch B gehenden Kreis, der g noch in C schneidet $[C_1 + C_2]$. In diesem Kreise ziehe man den Durchmesser $CE[2R_1 + R_2]$, und ziehe $BE[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Senkrechte."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_2) = (8;\ 5)\ (2 \text{ Gerade, } 1 \text{ Kreis}).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist befremdend, daß diese längst bekannte Form der Konstruktion, welche ebensogut wie die klassische an die Lehre vom gleichschenkeligen Dreieck angeschlossen werden kann, so selten in Lehrbücher und selbst in ausführlichere Aufgabensammlungen aufgenommen wird, und besonders, daß ihr sogar die handgreiflich kompliziertere Form 2. vorgezogen wird, wenn die Gerade g nicht auf beiden Seiten von B benutzt werden soll oder kann (z. B. wenn B am Rande des Zeichenblattes liegt). Selbst wenn von g außer dem Punkte B nur noch 1 Punkt C gegeben wäre, würde es vorteilhafter sein, anstatt nach 2. zu verfahren, die Gerade BC erst zu ziehen und dann die Konstruktion 3. auszuführen.

4. Sind auf derselben Geraden g in n Punkten $A, B, C, D, \ldots$ die Senkrechten zu errichten, so ist es für $n > 3$ vorteilhafter, folgendermaßen zu verfahren:

„Um den beliebigen Punkt M der Ebene (Fig. I, 4) beschreibe man die n Kreise, welche durch $A, B, C, D, \ldots$ gehen $[nC_1 + nC_2]$. Der erste dieser Kreise schneide g noch in S. Dann ziehe man AM und SM, welche den durch A gehenden Kreis in S' bzw. A' schneiden $[4R_1 + 2R_2]$, und ziehe $S'A'$, welche die übrigen Kreise der Reihe nach in $B', C', D', \ldots$ trifft ($B', C', D' \ldots$ mit A' auf derselben Seite von S') $[2R_1 + R_2]$. Man ziehe AA', BB', $CC' \ldots$ $[2nR_1 + nR_2]$. Dies sind die verlangten Senkrechten.“

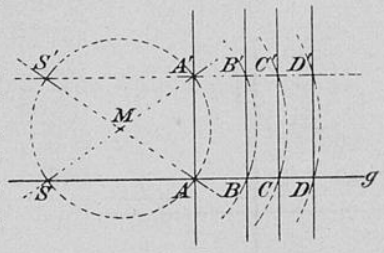

Fig. I, 4.

$$\text{op} : ([2n+6]R_1 + [n+3]R_2 + nC_1 + nC_2)$$
$$= (5n+9;\ 3n+6)\ (n+3 \text{ Gerade, } n \text{ Kreise}).$$

Durch n-malige Ausführung der Konstruktion 3. würde man zu dem Symbole $\text{op} : (4nR_1 + 2nR_2 + uC_1 + nC_2) = (8n, 5n)$ ($2n$ Gerade, n Kreise) gelangen. Die Konstruktion 4. ist also einfacher, wenn $5n + 9 < 8n$, d. h. $n > 3$ ist.

§ 3. Die Mittelsenkrechte der Strecke BC zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion. — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, die sich in A und A' schneiden $[2C_1 + 2C_2]$, und ziehe AA' $[2R_1 + R_2]$.“

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2) = (7;\ 4)\ (1 \text{ Gerade, } 2 \text{ Kreise}).$$

Das Symbol bleibt dasselbe, wenn die Strecke BC nicht wirklich gezogen, sondern nur durch ihre Endpunkte festgelegt ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 4. Vom Punkte A außerhalb der Geraden g auf diese die Senkrechte zu fällen.

1. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 5). — Um 2 beliebige Punkte B und C der Geraden g beschreibe man durch A gehende Kreise, die sich noch in A' schneiden $[(2C_1 + C_2) + (2C_1 + C_2)]$, und ziehe $AA'[2R_1 + R_2]$."

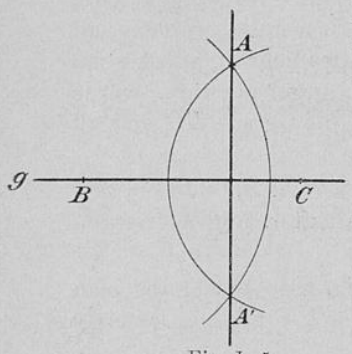

Fig I, 5.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2) = (9;\ 6)$$

(1 Gerade, 2 Kreise).

Diese Konstruktion liefert die Senkrechte auch dann mit der Einfachheit $S = 9$, wenn von der Geraden g nur 2 Punkte B und C gegeben sind.

Braucht man nur den Gegenpunkt A' von A bezüglich g, so vermindert sich das Symbol um op : $[2R_1 + R_2]$.

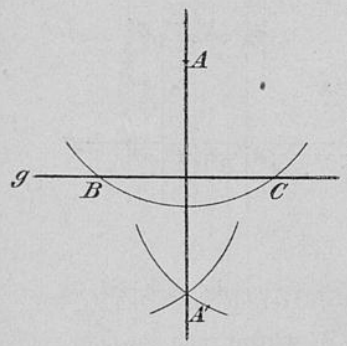

Fig. I, 6.

2. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 6). — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man $A(\varrho)$, der g in B und C trifft $[C_1 + C_2]$, dann $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, die sich noch in A' treffen $[2C_1 + 2C_2]$, und ziehe

$$AA'[2R_1 + R_2]."$$

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (9;\ 5)$$

(1 Gerade, 3 Kreise).

§ 5. Zwei beliebige Parallele zu konstruieren.

1. Konstruktion (Fig. I, 7). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$ und beschreibe einen Kreis, der g in B und C schneidet $[C_2]$. Dann schneide man auf diesem Kreise gleiche Bogen BD und CE ab (D und E auf derselben Seite von g) $[2C_1 + 2C_2]$ und ziehe $DE[2R_1 + R_2]$. Die Geraden g und DE genügen der Aufgabe."

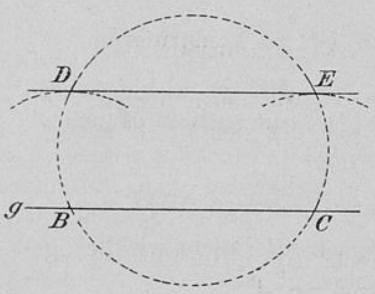

Fig. I, 7.

$$\text{op} : (2R_1 + 2R_2 + 2C_1 + 3C_2) = (9;\ 4)$$

(2 Gerade, 3 Kreise).

2. Geometrographische Konstruk-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tion (Fig. I, 8). — (Güntsche.) „Man beschreibe 2 sich schneidende gleiche Kreise $[2C_2]$. Seien M und M' ihre Mittelpunkte, P und Q ihre Schnittpunkte. Man ziehe MP und

$$M'Q\,[4R_1 + 2R_2].$$

Diese Geraden genügen der Aufgabe."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 2C_2) = (8;\ 4)$$

(2 Gerade, 2 Kreise).

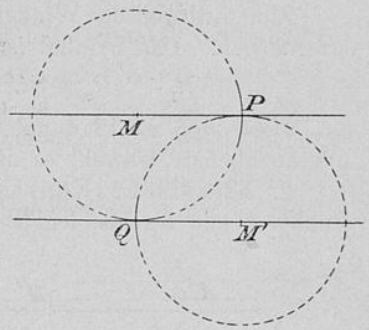

Fig. I, 8.

Eine beliebige Parallele zu einer gegebenen Geraden findet man nach 2. mit der Einfachheit 9, nach 1. mit der Einfachheit 8.

Beliebige Parallele durch 2 vorgeschriebene Punkte ergeben sich nach 2. mit $S = 10$.

§ 6. Zwei beliebige Parallele mit dem Abstand h zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 9). — „Man beschreibe einen beliebigen Kreis k mit einem Radius $> \frac{h}{2}\,[C_2]$ und ziehe darin einen Durchmesser $DD'\,[R_1 + R_2]$. Dann beschreibe man die Kreise $D(h)$ und $D'(h)$, welche k in E bzw. E' schneiden (E und E' auf verschiedener Seite von

$$DD')\,[(3C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)],$$

und ziehe DE' und $D'E\,[4R_1 + 2R_2]$. Diese Geraden genügen der Aufgabe."

$$\text{op} : (5R_1 + 3R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (15;\ 9)$$

(3 Gerade, 3 Kreise).

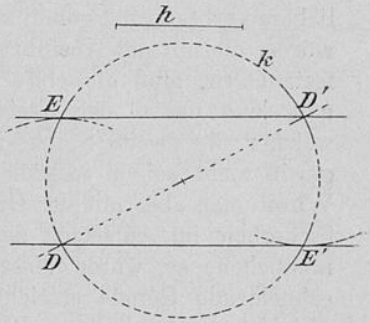

Fig. I, 9.

Eine Parallele zu einer gegebenen Geraden im Abstand h erhält man nach IV, § 3, b (Fig. IV, 2) durch

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 4C_2) = (17;\ 11)\ \text{(2 Gerade, 4 Kreise).}$$

§ 7. Durch den Punkt A außerhalb der Geraden g zu dieser die Parallele zu ziehen.

1. Klassische Konstruktion. — „Man ziehe durch A eine beliebige Gerade, welche g in B schneidet $[R_1 + R_2]$, und lege einen der bei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

B entstandenen Winkel in A an AB als Wechselwinkel an. Der freie Schenkel des angelegten Winkels ist die gesuchte Parallele."

Zum Anlegen des Winkels ist (nach § 10, a) op: $[2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_2]$ erforderlich. Das Symbol ist also

$$\text{op}: (3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (13; 8) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

Diese von Euklid gelehrte Konstruktion ist wohl noch immer die gebräuchlichste, obwohl es nicht an einfacheren fehlt.

2. Klassische Konstruktion (Fig. I, 10). — „Man verbinde den Punkt A mit irgendeinem Punkte B der Geraden $g\,[R_1 + R_2]$, trage auf dieser ein BA gleiches Stück BC ab $[2C_1 + C_2]$ und beschreibe mit ebenso großem Radius aus A und C Kreisbogen $[(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$, die sich in D treffen; dann ist $AD\,[2R_1 + R_2]$ die verlangte Parallele."

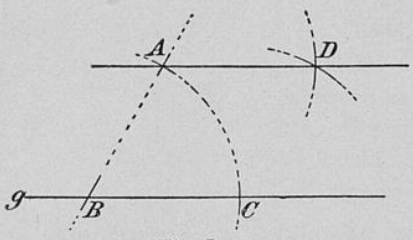

Fig. I, 10.

$$\text{op}: (3R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (12; 7)$$
(2 Gerade, 3 Kreise).

Diese Konstruktion wird als bequemer wie die vorhergehende bezeichnet, verlangt aber bis auf 1 Zirkelansatz sämtliche Elementaroperationen der Konstruktion 1. Der letzteren gegenüber würde 2. als erheblichere Verbesserung gelten können, wenn bei ihr die Gerade AB fortgelassen würde, die mit der Ausführung doch nichts zu tun hat. Um den Punkt C festzulegen, muß die erste Zirkelspitze in B, die zweite in A eingesetzt und dann um C der Kreis beschrieben werden. Zur Genauigkeit, mit welcher die zweite Spitze in A eingesetzt wird, trägt die Gerade AB gewiß nicht bei, in welcher Weise der Punkt A auch markiert sein mag. Würde man aber mit der Geraden AB den Zweck verfolgen, eine größere Sicherheit im Aufsetzen der ersten Zirkelspitze auf die Gerade g zu ermöglichen, so würde dieser Zweck ebensogut durch eine beliebige, g schneidende Gerade erreicht, und es wäre mindestens das Anlegen des Lineals an A nutzlos. Wollte man die Gerade AB als Hilfslinie für einen etwa nachfolgenden Beweis rechtfertigen, so müßte folgerichtig auch noch das Ziehen der Geraden CD vorgeschrieben werden, damit sie der Vorstellung beim Beweise zu Hilfe komme; zudem sind solche Hilfslinien in der „Konstruktion" überhaupt unzulässig, denn diese soll angeben, wie die den gegebenen Bedingungen genügende Figur durch Zeichnung erzeugt werden kann, sonst aber nichts.

Folgendes ist die weniger gebräuchliche, aber bessere Form der Konstruktion 2.:

„Von einem beliebigen Punkt B der Geraden g aus trage man auf dieser die Strecke $BC = BA$ ab $[2C_1 + C_2]$, beschreibe mit BA als

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Radius um C und A die Kreise, welche sich in D schneiden $[(C_1 + C_2) + (C_1 + C_2)]$, und ziehe $AD\,[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Parallele."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (10; 6) \text{ (1 Gerade, 3 Kreise).}$$

Aber auch diese Konstruktion ist noch einer Vereinfachung fähig, die zwar gering, aber bei der hervorragenden Wichtigkeit der Aufgabe für die Ausführung zusammengesetzter Konstruktionen nicht zu unterschätzen ist.

3. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 11).*) — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man $A(\varrho)$, der g in B schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $B(\varrho)$, der g in C schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $C(\varrho)$, der $A(\varrho)$ außer in B noch in D trifft $[C_1 + C_2]$, und ziehe $AD\,[2R_1 + R_2]$ Dies ist die gesuchte Parallele."

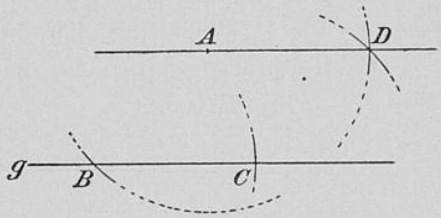

Fig. I, 11.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (9; 5)$$
(1 Gerade, 3 Kreise).

4. Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 12).*) — „Man ziehe einen beliebigen durch A gehenden Kreis, der g in B und C schneidet $[C_1 + C_2]$, mache in diesem Kreise den Bogen $CD = BA$ (A und D auf derselben Seite von g) $[3C_1 + C_2]$, und ziehe $AD\,[2R_1 + R_2]$. Dies ist die gesuchte Parallele."

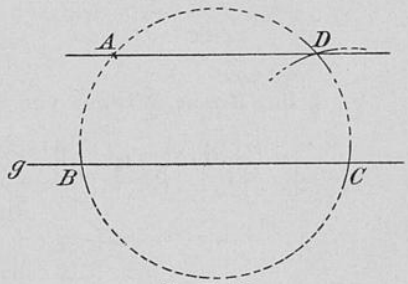

Fig. I, 12.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2) = (9; 6)$$
(1 Gerade, 2 Kreise).

5. Ist die Gerade g nicht wirklich gezogen, sondern nur durch 2 Punkte B und C bestimmt, so verfahre man folgendermaßen.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 13). — (Lemoine.) „Man nehme BC in den Zirkel $[2C_1]$ und beschreibe den Kreis $A(BC)\,[C_1 + C_2]$. Während die Spitze in A bleibt, nehme man dann AB in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe

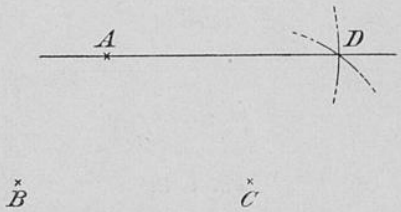

Fig. I, 13.

*) G. Müller, Zeichnende Geometrie, § 11, 9; J. K. Becker, Lehrbuch der Elementargeometrie, § 25.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Kreis $C(AB)$, der $A(BC)$ in D trifft (A und D auf derselben Seite von BC) $[C_1 + C_2]$, und ziehe $AD\,[2R_1 + R_2]$."

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_2) = (10; 7) \text{ (1 Gerade, 2 Kreise).}$$

6. Zu den 3 gegebenen Ecken A, B, C eines Parallelogramms $ABCD$ erhält man die der Ecke B gegenüberliegende 4te Ecke D nach 5. durch

$$\text{op}: (5C_1 + 2C_2) = (7; 5) \text{ (2 Kreise).}$$

§ 8. Zu der Geraden g die zu ihr bezüglich des Punktes A symmetrisch liegende Parallele zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 14). — „Man beschreibe um A einen beliebigen, g in B und C schneidenden Kreis $[C_1 + C_2]$, ziehe BA und CA, welche den Kreis in B' bzw. C' treffen $[4R_1 + 2R_2]$, und ziehe $C'B'$ $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die gesuchte Parallele."

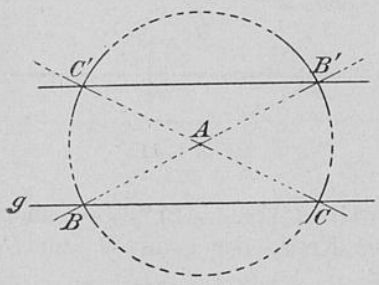

Fig. I, 14.

$$\text{op}: (6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_2) = (11; 7)$$
(3 Gerade, 1 Kreis).

§ 9. Einen Winkel von a) 60°, b) 30°, c) 45° zu konstruieren.

a) Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$, beschreibe um einen Punkt B derselben mit beliebigem Radius ϱ den Kreis $B(\varrho)$ $[C_1 + C_2]$, der g in C schneidet, dann den Kreis $C(\varrho)$ $[C_1 + C_2]$, der $B(\varrho)$ in A trifft, und ziehe $AB\,[2R_1 + R_2]$."

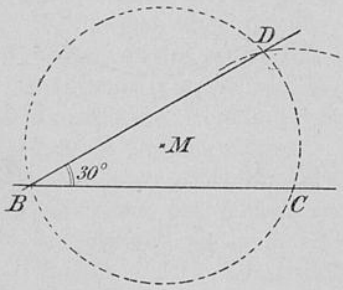

Fig. I, 15.

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + 2C_1 + 2C_2) = (8; 4)$$
(2 Gerade, 2 Kreise).

b) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 15). — (Bernès.) „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$, beschreibe um irgendeinen Punkt M der Ebene mit beliebigem Radius ϱ einen Kreis $[C_2]$, der g in B und C schneidet. Dann beschreibe man $C(\varrho)$ $[C_1 + C_2]$, der $M(\varrho)$ in D trifft, und ziehe $BD\,[2R_1 + R_2]$. Dann ist $\sphericalangle CBD = 30^0$; denn es ist $\sphericalangle CMD = 60^0$, also $\sphericalangle CBD = \frac{1}{2} \cdot CMD = 30^0$."

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + C_1 + 2C_2) = (7; 3) \text{ (2 Gerade, 2 Kreise).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

c) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 16). — „Man beschreibe einen beliebigen Kreis $M(\varrho)\,[C_2]$, dann um irgendeinen Punkt M' auf $M(\varrho)$ den Kreis $M'(\varrho)$ $[C_1 + C_2]$, der $M(\varrho)$ in E und F schneidet, beschreibe ferner $E(\varrho)\,[C_1 + C_2]$, der $M(\varrho)$ in A trifft, ziehe $EF\,[2R_1 + R_2]$, welche $E(\varrho)$ in B trifft, und ziehe

$$BA\,[2R_1 + R_2].$$

Dann ist $\sphericalangle ABF = 45^0$."

Beweis: AF ist Durchmesser von $M(\varrho)$.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 2C_1 + 3C_2) = (11; 6)$$

(2 Gerade, 3 Kreise).

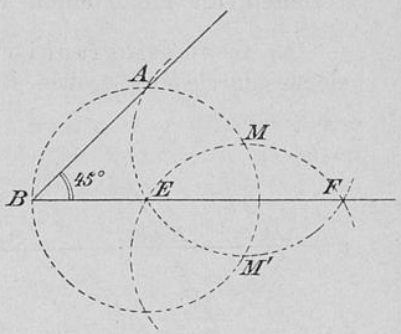

Fig. I, 16.

§ 10. An die Gerade g im Punkte B einen Winkel von a) 60^0, b) 30^0, c) 45^0 anzulegen.

a) $\text{op} : (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2) = (7; 4)$ (1 Gerade, 2 Kreise).

b) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 15). — „Um einen beliebigen Punkt M beschreibe man einen durch B gehenden Kreis, der g noch in C schneidet $[C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man $C(MB)$, der $M(MB)$ in D trifft $[C_1 + C_2]$, und ziehe $BD\,[2R_1 + R_2]$. Dann ist $\sphericalangle DBC = 30^0$."

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_2) = (7; 4)$$

(1 Gerade, 2 Kreise).

c) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 17). — „Um einen beliebigen Punkt E von g beschreibe man einen durch B gehenden Kreis $[2C_1 + C_2]$, errichte mit Hilfe dieses Kreises nach § 2, 1. auf g in E die Senkrechte, welche den Kreis in A trifft

$$[2(C_1 + C_2) + (2R_1 + R_2)],$$

und ziehe $BA\,[2R_1 + R_2]$."

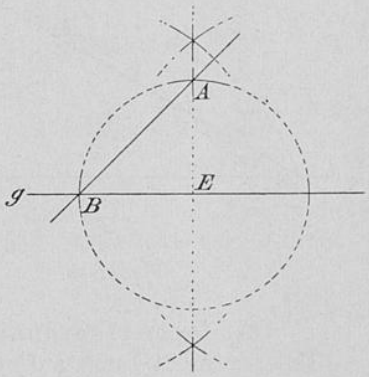

Fig. I, 17.

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 4C_1 + 3C_2) = (13; 8)$$ (2 Gerade, 3 Kreise).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 11. Durch den Punkt A außerhalb der Geraden g eine Gerade g' zu ziehen, die mit g einen Winkel von a) 60^0, b) 30^0, c) 45^0 bildet.

a) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 18). — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man $A(\varrho)$, der g in B und C schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $B(\varrho)$ und $C(\varrho)$, welche den Gegenpunkt A' von A bezüglich g bestimmen

$$[2C_1 + 2C_2].$$

Dann beschreibe man $A'(\varrho)$, der $B(\varrho)$ in D trifft $[C_1 + C_2]$, und ziehe AD $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Gerade."

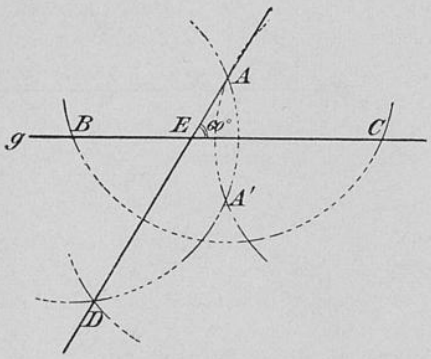

Fig. I, 18.

Beweis: Sei E der Schnittpunkt von g und AD. Es ist

$$\sphericalangle A'AD = \tfrac{1}{2} \cdot A'BD = 30^0,$$

daher $\sphericalangle AEC = 90^0 - A'AD = 60^0$.

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 4C_2) = (11; 6) \text{ (1 Gerade, 4 Kreise).}$$

b) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 19). — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man $A(\varrho)$, der g in C schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $C(\varrho)$, der $A(\varrho)$ in F schneidet $[C_1 + C_2]$, dann $F(\varrho)$, der g noch in G trifft $[C_1 + C_2]$. Nun ziehe man AG $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Gerade."

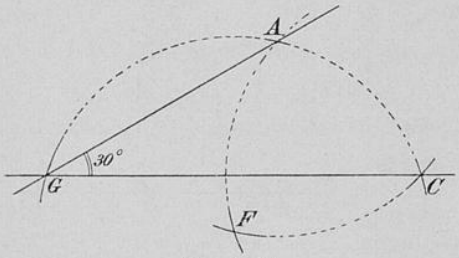

Fig. I, 19.

Beweis:

$$\sphericalangle AGC = \tfrac{1}{2} \cdot AFC = 30^0.$$

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_2) = (9; 6)$$

(1 Gerade, 3 Kreise).

c) Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 17). — „Man fälle von A aus auf g die Senkrechte AE, wozu nach § 4, 1. op : $[2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2]$ erforderlich ist. Dann beschreibe man $E(EA)$, der g in B trifft $[2C_1 + C_2]$, und ziehe $AB[2R_1 + R_2]$. Dies ist die gesuchte Gerade."

$$\text{op} : (4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 3C_2) = (15; 10) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 12. Wenn ein Winkel σ gegeben ist, in der freien Zeichenebene

a) einen Winkel $= \sigma$ zu konstruieren.

Das gewöhnliche Verfahren wird geometrographisch, wenn mit einer Geraden begonnen wird.

Geometrographische Konstruktion. — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$. Dann trage man auf den Schenkeln von σ vom Scheitel S aus gleiche Strecken SX und SY ab $[C_1 + C_2]$ und beschreibe um einen Punkt A von g den Kreis $A(SX)$, der g in B schneidet $[C_1 + C_2]$. In diesem Kreise mache man den Bogen $BD = XY[3C_1 + C_2]$ und ziehe $AD[2R_1 + R_2]$. Dann ist $\sphericalangle BAD = \sigma$."

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (12; 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

b) einen Winkel $= 2\sigma$ zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 20). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$. Um einen beliebigen Punkt M beschreibe man dann einen Kreis, der durch den Scheitel S von σ geht und die Schenkel in P und Q schneidet $[C_1 + C_2]$, und beschreibe um einen Punkt A von g den Kreis $A(MS)$, der g in B trifft $[C_1 + C_2]$. In diesem Kreise mache man Bogen $BD = PQ[3C_1 + C_2]$ und ziehe $AD[2R_1 + R_2]$. Dann ist

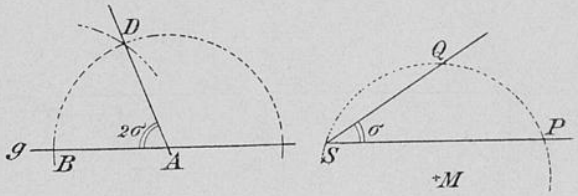

Fig. I, 20.

$$\sphericalangle BAD = PMQ = 2\sigma."$$

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (12; 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

c) einen Winkel $= \frac{\sigma}{2}$ zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 21). — „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$. Dann trage man auf den Schenkeln von σ vom Scheitel S aus gleiche Strecken SX und SY ab $[C_1 + C_2]$ und beschreibe um einen Punkt B von g den Kreis $B(SX)$, der g in A und C schneidet $[C_1 + C_2]$. In diesem Kreise mache man den Bogen $CD = XY[3C_1 + C_2]$, und ziehe $AD[2R_1 + R_2]$. Dann ist $\sphericalangle DAC = \frac{\sigma}{2}$."

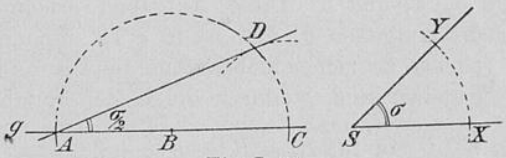

Fig. I, 21.

$$\text{op}: (2R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (12; 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise).}$$

Man beachte, daß die Konstruktion von $\frac{\sigma}{2}$ nicht mehr und genau

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieselben Operationen erfordert, als diejenige von σ, daß es also unzweckmäßig sein muß, zunächst σ zu halbieren und dann nach a) einen Winkel $= \frac{\sigma}{2}$ zu zeichnen. Auf diese Art erhält man $\frac{\sigma}{2}$ durch

$$\text{op} : (4R_1 + 3R_2 + 7C_1 + 5C_2) = (19; 11) \text{ (3 Gerade, 5 Kreise)},$$

oder durch

$$\text{op} : (2R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 6C_2) = (19; 11) \text{ (2 Gerade, 6 Kreise)},$$

je nachdem man die Halbierungslinie von σ wirklich zieht oder nur einen Punkt derselben benutzt.

d) einen Winkel $= 90^0 \pm \sigma$ zu konstruieren.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 22). — (Tarry.) „Man ziehe eine Gerade $g[R_2]$. Um einen beliebigen Punkt M beschreibe man dann einen Kreis, der durch den Scheitel S von σ geht und die Schenkel in P und Q schneidet $[C_1 + C_2]$, und beschreibe um einen Punkt B von g den Kreis $B(MS)$, der g in A trifft $[C_1 + C_2]$. In diesem Kreise mache man Bogen $AD = PQ$ $[3C_1 + C_2]$ und ziehe AD $[2R_1 + R_2]$. Dann ist $\sphericalangle BAD = 90^0 - \sigma$; denn es ist $\sphericalangle ABD = PMQ = 2\sigma$."

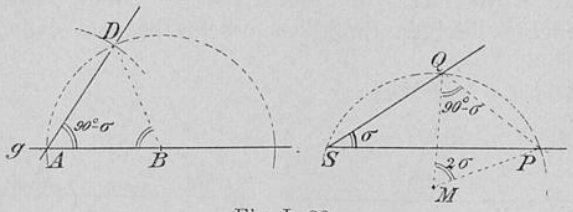

Fig. I, 22.

$$\text{op} : (2R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (12; 7) \text{ (2 Gerade, 3 Kreise)}.$$

§ 13. An die Gerade g im Punkte A einen Winkel a) $= \sphericalangle \sigma$, b) $= 2\sigma$, c) $= \frac{\sigma}{2}$, d) $= 90^0 - \sigma$ anzulegen.

a) und b) Diese Aufgaben erledigen sich in derselben Weise wie die Aufgaben a) und b) in § 12, mit dem Unterschiede, daß die dort zunächst zu ziehende beliebige Gerade und der Punkt A auf derselben hier gegeben sind, wodurch die beiden Symbole sich auf

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_2) = (11; 7) \text{ (1 Gerade, 3 Kreise)}$$

reduzieren.

c) und d) Die Konstruktionen sind dieselben wie die entsprechenden c) und d) in § 12, mit dem Unterschiede, daß die dort zunächst zu ziehende Gerade hier wegfällt und der Punkt B nicht beliebig auf g angenommen werden darf, sondern in der Entfernung XS bzw. MS von A festgelegt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden muß. Die Symbole vermindern sich also um op : $[R_2]$ und vermehren sich um op : $[C_1 + C_2]$, wodurch beide in

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_2) = (13;\ 8)\ (1 \text{ Gerade, } 4 \text{ Kreise})$$

übergehen.

§ 14. Durch den Punkt A außerhalb der Geraden g eine Gerade g' zu ziehen, die mit g einen Winkel a) $= \sigma$, b) $= 2\sigma$, c) $= \frac{\sigma}{2}$, d) $= 90^0 \pm \sigma$ bildet.

a) Winkel $g'g = \sigma$.

Das klassische Verfahren besteht darin, daß man (Fig. I, 23) an g in einem beliebigen Punkte Z einen Winkel $= \sigma$ anlegt $[2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_2]$ und zu dem freien Schenkel desselben durch A die Parallele AE zieht

$[3R_1 + 2R_2 + 5C_1 + 3C_2]$.

Dann ist AE die verlangte Gerade g'.

op : $(5R_1 + 3R_2 + 10C_1 + 6C_2)$ $= (24;\ 15)$ (3 Gerade, 6 Kreise).

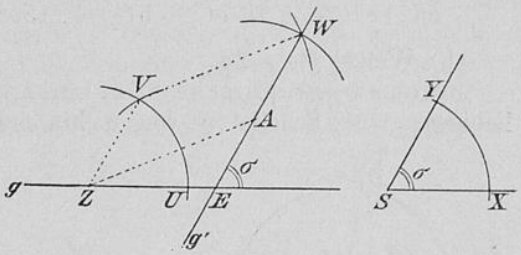

Fig. I, 23.

Eine wesentliche Vereinfachung tritt ein, wenn man es unterläßt, den durch Z und V (Fig. I, 23) bestimmten freien Schenkel des angelegten Winkels wirklich zu ziehen, und die Parallele AE durch Konstruktion der 4ten Ecke W des Parallelogramms $AZVW$ (oder $AVZW$) festlegt. Das Symbol reduziert sich dann auf

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 9C_1 + 5C_2) = (17;\ 11)\ (1 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

Man spart noch 1 C_1, wenn man den Punkt Z nicht beliebig auf g annimmt, sondern ihn durch einen Kreis mit der auf den Schenkeln von σ vom Scheitel aus abzutragenden beliebigen Strecke SX bestimmt, so daß das Parallelogramm $AZVW$ ein Rhombus wird. So gelangt man zu der Lemoineschen Konstruktion mit dem Symbol

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 8C_1 + 5C_2) = (16;\ 10)\ (1 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

Diese und eine von Herrn Güntsche angegebene Konstruktion mit der Einfachheit 16 galten bis jetzt als geometrographisch. An ihre Stelle tritt die folgende mit der Einfachheit 15.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 24). — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man um den Scheitel S von σ den Kreis $S(\varrho)$, der die Schenkel in X und Y schneidet $[C_1 + C_2]$. Dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beschreibe man $A(\varrho)$, der g in A' trifft $[C_1 + C_2]$, dann $A'(\varrho)$, der g in B' trifft $[C_1 + C_2]$, dann $B'(\varrho)$, der $A(\varrho)$ in B trifft (A und B auf derselben Seite von g) $[C_1 + C_2]$.

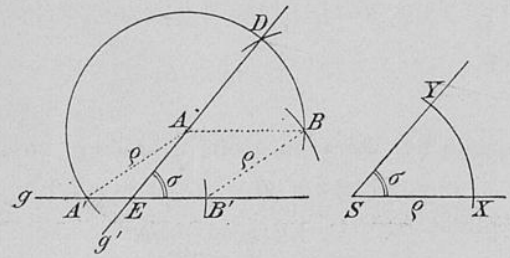

Fig. I, 24.

Nun mache man in dem Kreise $A(\varrho)$ Bogen

$$BD = XY[3C_1 + C_2]$$

und ziehe AD, welche g in E trifft $[2R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Gerade g'; denn

$$AA'B'B$$

ein Rhombus und

$$\sphericalangle AEB' = DAB = XSY = \sigma.\text{“}$$

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_2) = (15;\ 9)\ (1 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise})^{*}).$$

b) Winkel $g'g = 2\sigma$.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 25). — „Um einen beliebigen, vom Scheitel S von σ hinreichend entfernten Punkt M der Ebene beschreibe man einen Kreis, der durch S geht und die Schenkel von σ in X und Y schneidet $[C_1 + C_2]$; sein Radius sei ϱ. Dann beschreibe man $A(\varrho)$ und fahre in derselben Weise fort, wie bei der geometrographischen Konstruktion a). Dann ist AD die verlangte Gerade g'; denn es ist $\sphericalangle AEB' = DAB = XMY = 2\sigma$.“

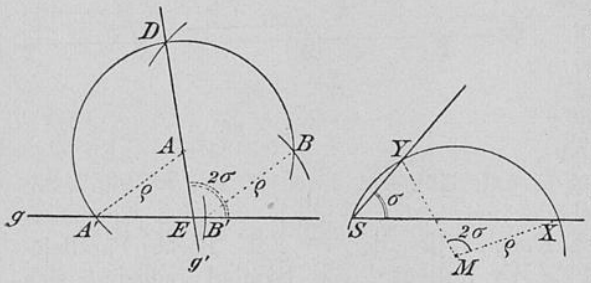

Fig. I, 25.

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 5C_2) = (15;\ 9)\ (1 \text{ Gerade, } 5 \text{ Kreise}).$$

Ändert man die geometrographische Lösung der Aufgabe a) derart

---

*) Die Verbindung der Konstruktionen § 12a und § 14a gibt eine geometrographische Konstruktion eines Dreiecks aus a, α, β.

„Man konstruiere nach § 12a einen Winkel $= \beta$, indem man a als Radius der zwei ersten Hilfskreise nimmt $[2R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_2]$. Dann ist auch die Ecke C festgelegt. Unter Benutzung des dritten Hilfskreises (des Kreises um C) ziehe man dann nach § 14a durch C eine Gerade, die den anderen Schenkel des konstruierten Winkels unter $\sphericalangle \alpha$ schneidet, was nach der obigen geometrographischen Konstruktion noch op: $[2R_1 + R_2 + 6C_1 + 4C_2]$ erfordert. Als Gesamtsymbol erhält man also

$$\text{op}: (4R_1 + 3R_2 + 13C_1 + 7C_2) = (27;\ 17)\ (3 \text{ Gerade, } 7 \text{ Kreise}).\text{“}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ab, daß man nach Festlegung von B die Kreise $B(XY)$ und $D(XY)$ beschreibt und dann anstatt DA die gemeinschaftliche Sehne dieser beiden Kreise zieht, so hat man die Gerade g' für einen Winkel $= \frac{\sigma}{2}$ mit der Einfachheit 17.

Auf dieselbe Weise kann man die Gerade g' für einen Winkel $= (90^0 - \sigma)$ mit der Einfachheit 18 erhalten, indem man die eben angedeutete Konstruktion mit $\sphericalangle\, 2 \cdot (90^0 - \sigma)$ anstatt mit $\sphericalangle\, \sigma$ ausführt. Den Winkel $2 \cdot (90^0 - \sigma)$ konstruiert man am einfachsten dadurch, daß man (Fig. I, 27) um irgendeinen Punkt N des einen Schenkels von σ einen durch S gehenden Kreis beschreibt, der den anderen Schenkel noch in Y schneidet. Dann ist $\sphericalangle\, SNY = 2 \cdot (90^0 - \sigma)$.

Man gelangt aber zu etwas einfacheren Konstruktionen der in c) und d) verlangten Geraden, wenn man von der Idee ausgeht, welche der oben erwähnten Güntscheschen Lösung*) der Aufgabe a) zugrunde liegt, nämlich: ein gleichschenkeliges Dreieck AFG so herzustellen (Fig. I, 26 u. I, 27), daß der Winkel an der Spitze F gleich σ bzw. $2 \cdot (90^0 - \sigma)$ ist und die eine Basisecke G auf g liegt. Der Kreis $F(FA)$ bestimmt dann auf g einen Punkt E, so daß AE die gesuchte Gerade g' ist; denn dann ist $\sphericalangle\, AEG = \frac{1}{2} \cdot AFG = \frac{\sigma}{2}$ bzw. $(90^0 - \sigma)$.

c) Winkel $g'g = \frac{\sigma}{2}$.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 26). — „Mit einem hinreichend großen Radius ϱ beschreibe man um den Scheitel S von σ den Kreis $S(\varrho)$, der die Schenkel in X und Y schneidet $[C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man $A(\varrho)\,[C_1 + C_2]$, ferner $A(XY)$, der g in G trifft $[3\,C_1 + C_2]$, nehme, während die Spitze in A bleibt, ϱ wieder in den Zirkel $[C_1]$ und beschreibe $G(\varrho)$, der $A(\varrho)$ in F trifft $[C_1 + C_2]$, und beschreibe $F(\varrho)$, der g noch in E trifft $[C_1 + C_2]$. Schließlich ziehe man $AE\,[2\,R_1 + R_2]$. Dies ist die verlangte Gerade g'.“

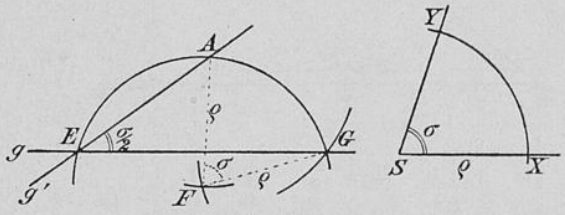

Fig. I, 26.

Beweis: $\triangle AFG \cong YSX$, also $\sphericalangle\, AFG = \sigma$, mithin

$$\sphericalangle\, AEG = \frac{AFG}{2} = \frac{\sigma}{2}.$$

op : $(2\,R_1 + R_2 + 8\,C_1 + 5\,C_2) = (16;\ 10)$ (1 Gerade, 5 Kreise).

*) Archiv f. Math. u. Ph., Bd. 6, S. 134.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d) Winkel $g'g = (90^0 - \sigma)$.

Geometrographische Konstruktion (Fig. I, 27). — „Auf dem einen Schenkel von σ nehme man in hinreichender Entfernung ϱ vom Scheitel S einen Punkt N an und beschreibe den Kreis $N(\varrho)$, der diesen Schenkel außer in S noch in X, den anderen noch in Y schneidet $[2C_1 + C_2]$. Dann beschreibe man $A(\varrho)$ $[C_1 + C_2]$, ferner $A(SY)$, der g in G trifft $[3C_1 + C_2]$, und fahre in derselben Weise fort, wie bei der Konstruktion c). Dann ist AE die verlangte Gerade g'."

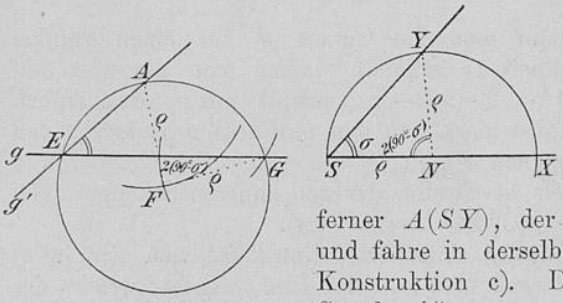

Fig. I, 27.

Beweis:

$\triangle AFG \cong SNY$, also $\sphericalangle AFG = SNY = 2 \cdot (90^0 - \sigma)$, mithin

$$\sphericalangle AEG = \frac{AFG}{2} = 90^0 - \sigma.$$

op : $(2R_1 + R_2 + 9C_1 + 5C_2) = (17; 11)$ (1 Gerade, 5 Kreise).

Anmerkung zu §§ 12, 13, 14.

Für die Aufstellung der geometrographischen Symbole mancher grundlegenden Dreieckskonstruktionen sind die Aufgaben § 12a, § 13a, § 14a noch für einen Winkel $= 90^0 \pm \frac{\sigma}{2}$ von Wichtigkeit. Man erhält die Lösungen der Reihe nach mit den Einfachheitsgraden 15, 14, 18, indem man auf (Fig. I, 28) den Schenkeln von σ die Strecke $SX = SY$ macht, dann den Kreis $X(XY)$ beschreibt, der SX in U und V trifft, und dann, ohne XY zu ziehen, die Konstruktionen § 12a, § 13a, § 14a für $\sphericalangle UXY$ bzw. $\sphericalangle VXY$, anstatt für $\sphericalangle XSY$ ausführt.

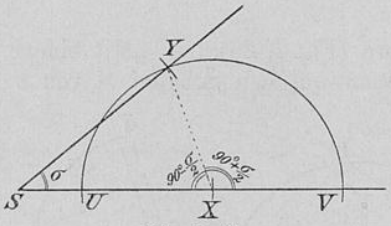

Fig. I, 28.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf