Vorwort und Einleitung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt den Zweck, einen Beitrag zu liefern zur Hebung des Interesses an der von Herrn Emile Lemoine ersonnenen Methode zur systematischen Vereinfachung der wirklichen Ausführung planimetrischer Konstruktionen, der Geometrographie.

Daß der wirklichen Ausführung der Konstruktionen seitens der Geometer nicht genügende Beachtung geschenkt werde, hat schon Jakob Steiner gerügt. Die betreffende Stelle aus „Ges. W.“ I S. 509 sei hier wörtlich angeführt, weil das Ziel und die Bedeutung der Geometrographie nicht treffender zu kennzeichnen wären als durch diese Worte eines unserer Meister.

„Es scheint, daß man im allgemeinen bis jetzt noch zu wenig Sorgfalt auf die geometrischen Konstruktionen verwendet habe. Die hergebrachte, von den Alten uns überlieferte Weise, wonach man nämlich Aufgaben als gelöst betrachtet, sobald nachgewiesen worden, durch welche Mittel sie sich auf andere, vorher betrachtete, zurückführen lassen, ist der richtigen Beurteilung dessen, was ihre vollständige Lösung erheischt, sehr hinderlich. So geschieht es denn auch, daß auf diese Weise häufig Konstruktionen angegeben werden, die, wenn man in die Notwendigkeit versetzt wäre, alles, was sie einschließen, wirklich und genau auszuführen, bald aufgegeben würden, indem man dadurch sich gewiß bald überzeugen müßte, daß es eine ganz andere Sache sei, die Konstruktionen in der Tat, d. h. mit den Instrumenten in der Hand, oder, um mich des Ausdrucks zu bedienen, bloß mit der Zunge auszuführen. Es läßt sich gar leicht sagen: ich tue das, und dann das, und dann jenes; allein die Schwierigkeit, und man kann in gewissen Fällen sagen, die Unmöglichkeit, Konstruktionen, welche in einem hohen Grade zusammengesetzt sind, wirklich zu vollenden, verlangt, daß man bei einer vorgelegten Aufgabe genau erwäge, welches von den verschiedenen Verfahren bei der gänzlichen Ausführung das einfachste sei . . ., und wieviel von dem, was die Zunge etwas leichtfertig ausführt, zu umgehen sei, wenn es darauf ankommt, alle überflüssige Mühe zu sparen, oder die größte Genauigkeit zu erreichen. Es käme also mit einem Worte darauf an: zu untersuchen, auf welche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Weise jede geometrische Aufgabe, theoretisch oder praktisch, am einfachsten, genauesten oder sichersten konstruiert werden könne."

War es nun trotz des regen Interesses, welches man seit Monge und Poncelet der konstruierenden Geometrie entgegengebracht hatte, bis auf Steiner noch niemand in den Sinn gekommen, die geometrischen Konstruktionen auf die Einfachheit und Genauigkeit ihrer wirklichen Ausführung hin zu prüfen, so war auch jene deutliche Mahnung Steiners nicht recht auf fruchtbaren Boden gefallen,*) trotzdem bezüglich der methodischen Behandlung der Konstruktionsaufgaben überhaupt seit den ersten Versuchen von von Holleben und Gerwien und nach dem Muster von Petersen u. a. erfreuliche Fortschritte erreicht sind. Es fehlte eben an einer brauchbaren allgemeinen Vergleichsmethode, und das Verdienst, eine solche geschaffen zu haben, gebührt Herrn Lemoine.

Beschäftigt mit der Aufstellung allgemeiner Prinzipien über die Einfachheit in der Mathematik, die er 1888 dem Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences zu Oran vorlegte, kam er auf den Gedanken (von der oben zitierten Äußerung Steiners hat er erst 10 Jahre später Kenntnis erhalten), zum Zwecke des Vergleichs verschiedener Lösungen desselben geometrischen Problems für die bei einer Konstruktion auszuführenden Operationen (Anlegen des Lineals an einen bestimmten Punkt, Einsatz der Zirkelspitzen, Gerade, Kreis) einfache Bezeichnungen zu setzen, die Operationen wirklich zu zählen und die Summe derselben als Maß für die Einfachheit bzw. Genauigkeit der Lösungen zu benutzen. Bald zeigte sich, daß man bislang einer argen Täuschung sich hingegeben hatte, wenn man glaubte, Einfachheit und Eleganz des Wortlauts einerseits und Einfachheit der wirklichen Ausführung andererseits seien stets gepaart oder gar gleichbedeutend. Für den allgemeinen Fall des Apollonischen Berührungsproblems z. B. ergab sich, daß die alte, in der Beschreibung sehr umständliche Vietasche Lösung, vermittelst der

*) Von den mir zur Hand liegenden Sammlungen und Lehrbüchern sind es J. K. Becker: Elementargeometrie, Borth: Die geom. Konstruktionsaufgabe, Brockmann: Planim. Konstruktionsaufgaben, G. Hoffmann: Anleitung usw., Schwering: 100 Aufgaben, in welchen das Bestreben, auch die wirkliche Ausführung der Konstruktionen zu ihrem Rechte kommen zu lassen, deutlicher zu Tage tritt. Am entschiedensten spricht aber die Wertschätzung der „Ökonomie der Konstruktionen" aus Pflieger: Elementare Planimetrie (Sammlung Schubert), wo man zahlreiche Aufgaben, wie die folgenden, findet:

„Zu einer gegebenen Geraden 2 Lote zu zeichnen, 1. mit Hilfe von 3 Kreisen, 2. mit Hilfe eines einzigen Kreises und zweier Geraden, wobei die gesuchten Lote nicht mitgezählt werden."

„Die Achse eines gegebenen Streifens mit Hilfe von 2 Kreisen und 4 Geraden zu konstruieren."

„Gegeben der Mittelpunkt eines nicht gezeichneten Kreises und eine Tangente. Mit Hilfe von 2 Kreisen den Durchmesser zu bestimmen."

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

üblichen Hilfskonstruktionen ausgeführt, 335 Operationen verlangt, die elegante und allgemein als die einfachste angesehene Lösung von Gergonne und Bobillier aber deren 500.

Im weiteren Verlauf der Untersuchungen, an denen zunächst die Herren Gaston Tarry und Evariste Bernès sich beteiligten, stellte sich die überraschende Tatsache heraus, daß die fundamentalen planimetrischen Konstruktionen, die bis dahin im wesentlichen dieselbe Gestalt behalten, in welchen sie vor 2000 Jahren von den Alten gelehrt wurden, fast durchweg teils bedeutender Vereinfachung fähig, teils durch weit einfachere neue ersetzbar sind. Wenn nun auch selbstverständlich der Gedanke fern blieb, die alten, didaktisch erprobten Konstruktionen durch die einfacheren neuen ohne weiteres ersetzen zu wollen, so war doch der Beweis erbracht, daß die Fortführung der einmal unternommenen Arbeit der Geometrie zum Nutzen gereichen müsse, und man begann in lebhaftem brieflichen Verkehr die Vereinfachung der alten Konstruktionen sowohl wie das Aufsuchen einfacher neuer systematisch zu betreiben. Allmählich gesellten sich in Frankreich und in der Folge auch in anderen Ländern neue Freunde dieses jungen Zweiges geometrischer Beschäftigung, wofür Herr Lemoine später den Namen „Geometrographie" vorschlug, hinzu, während derselbe in Deutschland unbeachtet blieb, bis Herr Lemoine im Archiv f. Math. u. Ph., 1901, 99—115, 323—341 das Wesen seiner Methode auseinandersetzte und eine Anzahl geometrographischer Konstruktionen mitteilte. Seitdem macht sich auch bei uns für die Prüfung der geometrischen Konstruktionen hinsichtlich der Einfacheit und Genauigkeit ihrer Ausführung ein regeres Interesse bemerkbar, und es stellen sich auf dem Lemoineschen Wege auch deutsche Mitarbeiter ein, von denen meines Wissens bis jetzt besonders die Herren Hermann Bodenstedt in Braunschweig und Richard Güntsche in Berlin hervorgetreten sind.

Die sehr einfachen Grundzüge der Geometrographie sind in Kürze folgende.

Jede mittels des Lineals und des Zirkels auszuführende planimetrische Konstruktion*) setzt sich aus folgenden vier Elementaroperationen zusammen:

1. Anlegen des Lineals an einen bestimmten Punkt, bezeichnet mit Operation R_1 oder kurz op: $[R_1]$;

   demgemäß wird das Anlegen des Lineals an zwei bestimmte Punkte mit op: $[2R_1]$ bezeichnet.
2. Einsetzen einer Zirkelspitze in einen bestimmten Punkt oder in einen beliebigen Punkt einer gegebenen Linie,**) bezeichnet mit op: $[C_1]$;

*) Die Anwendung der Methode auf Konstruktionen, bei welchen auch der Gebrauch des Winkelscheits zugelassen wird, lassen wir außer Betracht.

**) Herr Lemoine unterscheidet das Einsetzen der Zirkelspitze in einen be-

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

demgemäß wird das Einsetzen der beiden Zirkelspitzen in zwei bestimmte Punkte, sowie das Einsetzen der einen Spitze in einen beliebigen Punkt einer gegebenen Linie und der anderen Spitze in einen bestimmten Punkt mit op: $[2C_1]$ bezeichnet.

3. Ziehen einer Geraden längs des Lineals, bezeichnet mit op: $[R_2]$.
4. Beschreiben eines Kreises, bezeichnet mit op: $[C_2]$.

Ist nun bei einer Konstruktion l_1 mal die Operation R_1, l_2 mal die Operation R_2, m_1 mal die Operation C_1 und m_2 mal die Operation C_2 auszuführen, so heißt der Ausdruck

$$l_1 \cdot R_1 + l_2 \cdot R_2 + m_1 \cdot C_1 + m_2 \cdot C_2$$

das Symbol dieser Konstruktion; dasselbe gibt sämtliche Operationen nach Art und Anzahl an, nur die Reihenfolge derselben läßt es unbestimmt.

Unter der Annahme der Gleichwertigkeit sämtlicher Operationen heißt die Summe $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 = S$ (Simplicité) der Koeffizient oder auch der Grad der Einfachheit, auch kurz die Einfachheit, die Summe $l_1 + m_1 = E$ (Exactitude) der Genauigkeits- — Koeffizient oder — Grad, auch kurz die Genauigkeit der Konstruktion; Einfachheit und Genauigkeit sind also um so größer, je kleiner ihre Koeffizienten sind.*)

---

stimmten Punkt von dem Einsetzen auf eine gegebene Linie, und bezeichnet jene Operation mit C_1, diese mit C_2, das Beschreiben eines Kreises mit C_3. Diese Unterscheidung ist, wenn auch nicht theoretisch, so doch praktisch bedeutungslos. Ich habe von ihr im folgenden Abstand genommen, zumal mir die oben angegebene Bezeichnungsweise für die Zusammenstellung des Gesamtsymbols aus den Teilsymbolen besonders bei komplizierteren Konstruktionen bequemer scheint.

*) Die Summe $S = l_1 + l_2 + m_1 + m_2$ ist für die Beurteilung der Einfachheit nicht als Maß im eigentlichen Sinne zu betrachten. Die 4 Operationen R_1, R_2, C_1, C_2 sind verschiedener Natur, und da jede Konstruktion sich aus verschiedenen dieser 4 Elemente zusammensetzt, so ist ein objektives Maß für die Einfachheit überhaupt nicht denkbar. Der Ausdruck „Einfachheit einer geometrischen Konstruktion" bekommt also erst dann einen Sinn, und ein Vergleich der Konstruktionen bezüglich ihrer Einfachheit wird erst dann möglich, wenn man die Operationen R_1, R_2, C_1, C_2 sämtlich, oder (bei Konstruktionen mit dem Lineal bzw. dem Zirkel allein) teilweise assimiliert und sie bei der Abwägung der Einfachheit entweder mit gleichem oder mit (ein für allemal fest gewähltem) verschiedenem Gewichte belegt. Man hat dann aber kein eigentliches Maß, sondern nur die Möglichkeit eines Vergleiches vermittelst 4 verschiedener Einheiten. In welcher Weise nun die Bewertung der einzelnen Operationen für die Bildung eines Einfachheitsgrades am zweckmäßigsten zu geschehen habe, kann nur die Erfahrung zeigen. Der Umstand, daß diese 4 Operationen sich nicht in einfachere zerlegen lassen, daß ferner keine von ihnen für einfacher erklärt werden kann als die andere, hat Herrn Lemoine bestimmt, denselben gleiches Gewicht beizumessen und seiner Methode die Gesamtzahl aller bei einer Konstruktion auszuführenden Elementaroperationen als Grad der Einfachheit zugrunde zu legen. Die Zweckmäßigkeit dieses Verfahrens wird vollauf durch die zahlreichen neuen Konstruktionen bestätigt, zu welchen die Geometrographie in der kurzen Zeit ihres Bestehens geführt hat. Bei den althergebrachten Konstruktionen ist nicht nur die Gesamtzahl aller Elementaroperationen im Durchschnitt mehr als doppelt so groß,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um z. B. auszudrücken, daß bei einer Konstruktion das Lineal zweimal an einen bestimmten Punkt anzulegen, viermal eine Zirkelspitze in einen bestimmten Punkt einzusetzen, eine Gerade zu ziehen und zwei Kreise zu beschreiben sind, und sich daher die Einfachheit auf $S = 9$, die Genauigkeit auf $E = 6$ stellt, schreiben wir

$$\text{op}: (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_2) = (9\,;\,6)\ (1 \text{ Gerade, } 2 \text{ Kreise}).$$

Als Elementarkonstruktionen in geometrographischer Beziehung, aus denen jede Konstruktion durch Zusammensetzung bezw. Wiederholung hervorgeht, haben wir die folgenden anzusehen:

I. Eine beliebige Gerade zu ziehen, op: (R_2).
II. Durch einen gegebenen Punkt eine beliebige Gerade zu ziehen, op: $(R_1 + R_2)$.
III. Durch zwei gegebene Punkte die Gerade zu ziehen, op: $(2R_1 + R_2)$.
IV. Einen beliebigen Kreis zu beschreiben, op: (C_2).
V. Um einen gegebenen Punkt einen sonst beliebigen Kreis zu beschreiben, op: $(C_1 + C_2)$.
VI. Um einen gegebenen Punkt P einen Kreis zu beschreiben, der durch den gegebenen Punkt Q geht, op: $(2C_1 + C_2)$.
VII. Um einen beliebigen Punkt mit einem gegebenen Radius den Kreis zu beschreiben, op: $(2C_1 + C_2)$.
VIII. Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius den Kreis zu beschreiben, op: $(3C_1 + C_2)$.
IX. Auf einer gegebenen Geraden von einem bestimmten oder unbestimmten Punkt derselben aus eine Strecke gleich einer gegebenen abzutragen, op: $(3C_1 + C_2)$.

Die Aufgabe „durch einen gegebenen Punkt P mit einem gegebenen Radius r einen sonst beliebigen Kreis zu beschreiben“ ist nicht mehr elementar, sondern zusammengesetzt; zu ihrer Ausführung ist zunächst der Kreis $P(r)$ (d. i. der Kreis um P mit dem Radius r) und dann um einen beliebigen Punkt der Peripherie desselben mit r ein zweiter Kreis

---

sondern auch — von seltenen Ausnahmen abgesehen — die Anzahl der Elementaroperationen derselben Art erheblich größer als bei den geometrographischen.

Daß die Methode bezüglich des von ihr gebotenen Maßstabes für die Genauigkeit zu wünschen übrig läßt, muß zugegeben werden. Denn wenn eine Konstruktion im allgemeinen auch um so genauer ausfallen wird, je weniger Elementaroperationen sie erfordert, so wird die Genauigkeit doch auch noch durch andere Umstände beeinflußt, als durch die Operationen R_1 und C_1. So ist z. B. die Sicherheit, mit der ein Punkt als Schnitt zweier Linien oder eine Gerade als Verbindungslinie zweier Punkte bestimmt wird, um so geringer, je kleiner der Winkel der zwei Linien bzw. die Entfernung der zwei Punkte ist. Eine Vervollkommnung der Methode in dieser Hinsicht wird aber zu erhoffen sein, wenn die Mitarbeiter einmal zahlreicher geworden sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu beschreiben. Das Symbol dieser Konstruktion ist daher op: $(2C_1 + [C_1 + C_2] + [C_1 + C_2])$ oder

$$\text{op}: (4C_1 + 2C_2) = (6\,;\,4)\ (2\ \text{Kreise}).$$

Beim Aufsuchen geometrographischer Konstruktionen gelten, abgesehen von gelegentlicher Einführung neuer Lösungsprinzipien, folgende Regeln:

1. Man nutze die schon gezeichneten Linien nach Möglichkeit aus und ändere den logischen Verlauf der Lösung ab, wenn auf diese Weise eine der noch zu ziehenden Linien entbehrlich gemacht werden kann.

2. Von verschiedenen Lösungen derselben Aufgabe wähle man diejenige aus, welche zu dem einfachsten Symbole führt.

3. Bei jeder Aufgabe prüfe man auch alle speziellen Fälle und vereinfache für jeden derselben das allgemeine Symbol.

4. Bei der Aufstellung des Symbols einer Lösung verwende man nur allgemeingültige Konstruktionen, es sei denn, daß eine auf die Aufgabe anwendbare partikuläre Konstruktion zu einem einfacheren Symbole führte.

5. Man untersuche, ob wegen der im Verlaufe einer Konstruktion schon gezogenen Linien eine weniger einfache Hilfskonstruktion nicht doch zu einem einfacheren Gesamtsymbole führt, als eine andere, einfachere Hilfskonstruktion.

Diejenige Konstruktion einer Aufgabe, welche den kleinsten Einfachheitskoeffizienten besitzt, heißt „geometrographisch", so lange, bis etwa eine noch einfachere gefunden wird.

Die Geometrographie ist rein theoretischer Natur. Sie setzt voraus, daß die Zeichenebene stets hinreichend groß, der Zirkel je nach Bedarf hinreichend groß oder klein sei; alle Geraden und Kreise werden als vollständig ausgezogen gedacht.

Stellt sich die Geometrographie hiernach auch keineswegs direkt in den Dienst der Praxis, so fällt für diese dennoch von selbst gar mancher Gewinn ab; überdies hindert nichts, die Methode auch auf die in der Praxis unter besonderen Bedingungen auszuführenden geometrischen Zeichnungen anzuwenden.

Daß die geometrographischen Untersuchungen, auch abgesehen von ihren direkten Resultaten, geeignet sind, auf die theoretische Geometrie befruchtend zu wirken, ist aus dem Grunde natürlich, weil dieselben eine sehr aufmerksame und durchdringende Betrachtung der geometrischen Figuren erfordern.

Hierfür ließen sich jetzt schon zahlreiche Belege anführen.

Zum gründlichen Studium der Geometrographie empfiehlt sich E. Lemoine, Géométrographie ou art des constructions géométriques*),

*) Sammlung Scientia, Nr. 18, Paris, Naud et Carré, Preis 1,60 M. Dieses Werkchen wird im folgenden kurz mit Scientia zitiert.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

worin der Stand im Jahre 1901 ziemlich vollständig wiedergegeben ist. Sehr interessant und lehrreich ist die geschichtliche Entwicklung der Geometrographie in den ersten Jahren ihres Bestehens, worüber die Schriften Aufschluß geben, welche Herr Lemoine dem Congrès de l'Association française pour l'Avancement des Sciences in Oran 1888, Pau 1892, Besançon 1893 vorgelegt hat.

Die neuesten mir bekannten Fortschritte finden sich in den Arbeiten:

R. Güntsche, Beiträge zur Geometrographie, Archiv f. M. u. Ph., 3. Reihe, 3. Band, S. 191ff., 6. Band, S. 133ff.,
" Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft, 25. Juni 1902,
" Zeitschrift für math. und naturw. Unterricht, 1903, S. 20ff.,
" Unterrichtsblätter f. Math. u. Nat., 1902. Nr. 4,
H. Bodenstedt, Unterrichtsblätter f. Math. u. Nat., 1904. Nr. 3.

Die vorliegende Arbeit enthält einige Gruppen meist fundamentaler Aufgaben aus dem planimetrischen Schulpensum in geometrographischer Behandlung. Ich habe eine Anzahl bereits bekannter geometrographischer Lösungen, deren Autor stets angegeben ist, mit aufgenommen, teils wegen ihrer Anwendung auf andere Aufgaben, teils zur Abrundung der einzelnen Gruppen. Bei der Wahl der Behandlungsart für die einzelnen Aufgaben hat mich nur die Absicht geleitet, die Fruchtbarkeit der Lemoineschen Methode zu zeigen, nicht die Rücksicht auf eine etwaige Verwendung im Unterricht.

Eine Erörterung der Frage, in welcher Weise die Geometrographie im Unterricht zu verwerten sei, wird wohl am besten noch hinausgeschoben, bis sich seitens der Herren Fachkollegen an höheren Schulen eine größere Beteiligung an den geometrographischen Untersuchungen zeigt, die auch bezüglich der fundamentalen planimetrischen Aufgaben noch keineswegs als abgeschlossen zu betrachten sind.

Soviel steht fest, daß die wirkliche, saubere und exakte Ausführung der Konstruktion ein sehr wertvolles Förderungsmittel beim geometrischen Unterricht ist, und daß schon aus diesem Grunde der Schüler anzuhalten ist, bei der wirklichen Ausführung auf möglichste Einfachheit bedacht zu sein. Es fehlt nicht an Stimmen, welche letzteres deutlich aussprechen. So Herr M. Simon in Baumeisters Handbuch, IX, S. 77: „Hieran knüpft sich das, was ich 'Ökonomie der Konstruktionen' nennen möchte. Die Schüler müssen von Anfang an dazu erzogen werden, sich genau klarzumachen, welche Hilfsmittel sie zur Lösung verwenden, wieviel Kreise ihre Lösung 'kostet', und wie sie jeden Hilfskreis bestens ausnützen können. Man erhält dadurch ein ganz eigenartiges Aufgabenmaterial, welches die Schüler in hohem Grade fesselt."

Die Lemoinesche Methode bietet nun ein bequemes Mittel, in der Behandlung der planimetrischen Aufgaben auch diese Seite gebührend zu

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

berücksichtigen. Ihre Grundzüge werden auch auf den untersten Stufen sehr rasch erfaßt, und gelegentliche Versuche haben mich davon überzeugt, daß geometrographische Übungen auf die Schüler einen großen Reiz ausüben, und daß auch Schwache sich mit Eifer beteiligen. Da sich bei Beobachtung der geometrographischen Regeln fast überall und leicht Vereinfachungen darbieten, so sind die Übungen vorzüglich geeignet, in dem Schüler das Selbstvertrauen und das Bewußtsein der Selbsttätigkeit zu stärken, was ja beim geometrischen Unterricht didaktische Forderung und Ziel zugleich ist. Außerdem bieten dieselben einen schätzenswerten neuen Gesichtspunkt für Repetitionen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf