I.

Kegelschnitte in doppelter Berührung.

Im 36. Bande des Crelleschen Journals machte Goepel auf die Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde aufmerksam und bewies den Satz, daß das Erzeugniß 2er krumm-projectivischer Gebilde, welches entsteht, wenn man die entsprechenden Elemente beider paarweise verbindet, ein Kegelschnitt ist, der den Träger der Gebilde doppelt berührt. Aus diesem Satz sollen im Folgenden die Eigenschaften der Kegelschnitte, welche sich doppelt berühren, entwickelt werden.

§ 1. Wenn von 2 Punkten eines Kegelschnitts K 2 projectivische Strahlbüschel $(\mathbf{abc}\cdots)$ und $(\mathbf{a_1 b_1 c_1}\cdots)$ ausgehen, deren Strahlen den Kegelschnitt zum 2ten Male in den Punkten $abc\cdots$ und $a_1 b_1 c_1\cdots$ treffen, so bilden diese Punkte 2 krumm-projectivische Punktreihen.

Sind $abc\cdots$ und $a_1 b_1 c_1\cdots$ 2 projectivische Punktreihen auf 2 Tangenten eines Kegelschnitts **K**, so bilden die von ihnen an **K** gezogenen Tangenten $\mathbf{abc}\cdots$ und $\mathbf{a_1 b_1 c_1}\ldots$ 2 krumm-projectivische Strahlbüschel.

Seien (Fig. I.) $abc\cdots$ und $a_1 b_1 c_1\cdots$ 2 krumm-projectivische Punktreihen auf **K**, also $(abc\cdots)$ π $(a_1 b_1 c_1\cdots)$, wenn π das Zeichen der Projectivität ist, dann sind auch die Strahlbüschel $a\,(a_1 b_1 c_1\cdots)$ und $a_1\,(abc\cdots)$ projectivisch und zwar liegen sie perspectivisch, da die entsprechenden Strahlen aa_1 und $a_1 a$ zusammenfallen. Die entsprechenden Strahlen schneiden sich daher auf einer geraden Linie (Richtlinie), deren Schnittpunkte mit **K** die Doppelpunkte (mm_1) und (nn_1) der beiden Punktreihen sind. Diese Doppelpunkte sollen im Folgenden als reell angenommen werden. Die Linien aa_1, bb_1, cc_1, $\cdots$ hüllen eine Curve **C** ein. Um die Klasse der Curve zu bestimmen, ziehe man von einem beliebigen Punkte **P** die Linien Pa, Pb, Pc, $\cdots$, welche **K** zum 2ten Mal in $a_2 b_2 c_2\cdots$ treffen. Da aber $(abc\cdots)$ π $(a_2 b_2 c_2\cdots)$ und auch $(abc\cdots)$ π $(a_1 b_1 c_1\cdots)$ ist, so ist auch $(a_2 b_2 c_2\cdots)$ π $(a_1 b_1 c_1\cdots)$. Sind **M** und **N** die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $a_2 b_2 c_2\cdots$ und $a_1 b_1 c_1\cdots$, so sind **PM** und **PN** die einzig möglichen Tangenten von **P** an die Curve **C**, diese ist also ein Kegelschnitt.

Wäre $\mathbf{P}^1$ der Berührungspunkt von aa_1 mit **C** und man wiederholt die eben angegebene Construktion, so darf das entstehende Gebilde $a_2^1 b_2^1 c_2^1\cdots$ nur einen zusammenfallenden Punkt mit $a_1 b_1 c_1\cdots$ haben, nämlich a_1; die Richtlinie dieser beiden Gebilde ist also die Tangente in a_1 an **K**. Schneiden $\mathbf{P}^1 m_1$ und $\mathbf{P}^1 n_1$ den Kegelschnitt **K** zum zweiten Mal in m_2^1 und n_2^1, so müssen sich $m_1 n_2^1$ und $n_1 m_2^1$ in einem Punkte **Q** der Tangente in a_1 schneiden; ebenso zeigt man, daß sie sich in einem Punkt der Tangente in a an **K**, also im Pol **Q** von aa_1 in Bezug auf **K** schneiden müssen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Polare von Q ist aber auch die Verbindungslinie von P^1 mit dem Schnittpunkt R von $m_1 n_1$ und $m_2^1 n_2^1$, also sind aa_1 RP^1 4 harmonische Punkte; d. h. jede Tangente der Curve C wird durch den Berührungspunkt, den Schnittpunkt mit mn und die Schnittpunkte mit K harmonisch getheilt. Da für die Tangenten mm_1 und nn_1 3 dieser Punkte zusammenfallen, so fällt auch der 4te mit ihnen zusammen. Die Curve C berührt also die Tangente mm_1 und nn_1 in ihren Berührungspunkten m und n mit K und daher K selbst in ihnen doppelt. Daraus folgt der Satz:

Die Verbindungslinien entsprechender Punkte 2er projectivischer Punktreihen auf einem Kegelschnitt K hüllen einen Kegelschnitt C ein, der den ersten in den Doppelpunkten der beiden Punktreihen doppelt berührt. Construirt man auf einer Tangente zu ihren Schnittpunkten mit K und mit der Verbindungslinie der Doppelpunkte den 4ten harmonischen, dem letzten zugeordneten, Punkt, so ist er der Berührungspunkt.

Die Verbindungslinie der Berührungspunkte heißt die Berührungssehne, ihr Pol der Berührungspol.

Schneidet die Richtlinie der beiden projectivischen Punktreihen auf K den Kegelschnitt nicht, so hüllen die Linien aa_1, bb_1, $cc_1 \cdots$ einen Kegelschnitt C ein, welcher, wie man der Analogie wegen sagt, mit K eine imaginäre doppelte Berührung hat. Die Richtlinie heißt auch in diesem Falle die (ideelle) Berührungssehne.

Haben zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte K und C die Linie A zur Berührungssehne und berührt C eine Linie, welche K in a und a_1 schneidet, so bestimmen A als Richtlinie und aa_1 als 2 entsprechende Elemente auf K 2 projectivische Punktreihen. Die Verbindungslinien hüllen einen Kegelschnitt ein, der ebenfalls A zur Berührungssehne und aa_1 zur Tangente hat. Er muß also mit C zusammenfallen und daraus folgt die Umkehrung des vorigen Satzes:

Jede Tangente eines von 2 sich doppelt berührenden Kegelschnitten wird durch den andern Kegelschnitt, den Berührungspunkt und den Schnittpunkt mit der Berührungssehne harmonisch getheilt.

Die reciproken Sätze mögen hier ohne Beweis folgen.

Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel auf einem Kegelschnitt K bestimmen einen Kegelschnitt C, der den ersten doppelt berührt und zwar bei der reellen Berührung in den Berührungspunkten der beiden Doppelstrahlen.

Sind $abc \cdots$ und $a_1 b_1 c_1 \cdots$ die projectivischen Strahlbüschel auf K, so ist $a(a_1 b_1 c_1 \cdots) \pi a_1 (abc \cdots)$ und zwar liegen diese Punktreihen perspectivisch. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich also in einem Punkt, welcher der Richtpunkt der Strahlbüschel oder der Berührungspol heißt. Seine Polare ist die Berührungssehne.

Dann gelten die ferneren Sätze:

Zieht man von einem Punkt eines von 2 sich doppelt berührenden Kegelschnitten die beiden Tangenten an den andern, die Tangente an ihn selbst und die Verbindungslinie nach dem Berührungspol, so sind diese Linien 4 harmonische Strahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von einem Punkt **R** (Fig. I.) der Berührungssehne seien an **C** die Tangenten aa_1 und ff_1 gezogen. Sind **P'** und **T** die Berührungspunkte, so schneiden sich af_1, a_1f und **P'T** in einem Punkt **S** der Berührungssehne; ferner schneiden sich af, a_1f_1 und **P'T** in dem Berührungspol **B**. Es ist daher **BS** die Polare von **R** und **BR** die von **S** in Bezug auf beide Kegelschnitte, also:

Die Polaren eines Punktes der Berührungssehne zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte fallen in eine Linie zusammen, welche durch den Berührungspol geht.

Die Pole jeder Linie durch den Berührungspol zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte fallen in einen Punkt der Berührungssehne zusammen.

Folgerung:

Jede Gerade schneidet zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte und die Berührungssehne in fünf Punkten einer Involution, von denen der letzte ein Doppelpunkt ist, während der andere auf seiner Polare liegt.

Die Tangenten von einem Punkt P an 2 sich doppelt berührende Kegelschnitte und die Verbindungslinie mit dem Berührungspol, sind fünf Strahlen einer Involution, von denen der letzte ein Doppelstrahl ist, während der andere die Verbindungslinie seines Pols mit P ist.

Ist **P** ein beliebiger Punkt, **B** der Berührungspol, so fallen die Pole von **PB** in einen Punkt der Berührungssehne zusammen. — Ist ferner **p** eine beliebige Linie, so fallen die Polaren ihres Schnittpunkts mit der Berührungssehne in eine Linie zusammen, welche durch den Berührungspol geht. Daraus folgen die Sätze:

Die Polaren eines beliebigen Punkts in Bezug auf 2 sich doppelt berührende Kegelschnitte schneiden sich in einem Punkt der Berührungssehne.

Die Pole einer beliebigen Linie in Bezug auf zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte liegen in gerader Linie mit dem Berührungspol.

§ 2. Sind aa_1 und cc_1 (Fig. II.) 2 Tangenten an den einen **C** der beiden sich doppelt berührenden Kegelschnitte **C** und **K**, P_2 ihr Schnittpunkt, a_2 und c_2 die Berührungspunkte, so schneiden sich ac_1, a_1c und a_2c_2 in einem Punkt **S** der Berührungssehne **A**, denn die Polare von P_2 in Bezug auf **K** geht durch den Schnittpunkt von ac_1 und a_1c und die Polare in Bezug auf **C** ist a_2c_2. Ist **C'** ein Kegelschnitt, welcher **K** doppelt berührt, ist ferner **A** die Berührungssehne und ac eine Tangente desselben, so ist auch a_1c_1 eine Tangente, weil ac_1 und a_1c sich auf **A** schneiden. Die Linien ac und a_2c_2 mögen sich in a_3, a_1c_1 und a_2c_2 in c_3 schneiden, dann sind Sa, Sc, Sa_3, **A** und Sc_1, Sa_1, Sc_3, **A** je 4 harmonische Strahlen, denn Sa, Sa_1, Sa_2, **A** sind 4 harmonische Strahlen, folglich sind a_3 und c_3 die Berührungspunkte von **C'** mit ac und a_1c_1, also:

Wenn die Kegelschnitte K und C sich doppelt berühren und man zieht in 2 beliebigen Punkten a_2 und c_2 die Tangenten an C, welche K in a und a_1, c und c_1 schneiden, so schneiden ac und a_1c_1 die Linie a_2c_2 in 2 Punkten a_3 und c_3, durch welche sich ein Kegelschnitt C' legen läßt, der in ihnen ac und a_1c_1 und K doppelt berührt, so daß K, C und C' dieselbe Berührungssehne haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

K und **C** mögen sich in m und n reell berühren. Zieht man von irgend einem Punkt **P** der Berührungssehne mn 2 beliebige Gerade, von denen die eine **C** in aa_1, die andere **K** in bb_1 schneidet und legt durch die 5 Punkte $mnaa_1b$ einen Kegelschnitt **K**, so hat **P** für alle 3 Kegelschnitte dieselbe Polare, welche mn, aa_1, bb_1 in den Punkten m_2, a_2, b_2 so schneidet, daß $mnPm_2$, aa_1Pa_2 und bb_1Pb_2 je 4 harmonische Punkte sind, also muß **K** auch durch b_1 gehen, folglich:

Zieht man durch irgend einen Punkt der Berührungssehne zweier sich in m und n doppelt berührender Kegelschnitte C und K 2 beliebige Gerade Paa_1 durch C und Pbb_1 durch K, so liegen die sechs Punkte $mnaa_1bb_1$ auf einem Kegelschnitt.

Umkehrung. Legt man durch die Berührungspunkte mn 2er sich doppelt berührender Kegelschnitte C und K einen Kegelschnitt **K**, welcher C in aa_1, K in bb_1 schneidet, so treffen sich aa_1 und bb_1 in einem Punkt der Berührungssehne.

Läßt man den Kegelschnitt **K** in 2 gerade Linien übergehen, so erhält man den Satz:

Zieht man durch die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte C und K, welche sich doppelt berühren, zwei beliebige Linien, so schneiden sich die durch diese Linien bestimmten Sehnen in einem Punkt der Berührungssehne.

Zieht man von 2 beliebigen Punkten der gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte an jeden eine neue Tangente, so liegen die Durchschnitte je 2er Tangenten desselben Kegelschnitts in gerader Linie mit dem Berührungspol.

Zieht man (Fig. III.) von m und n durch einen Punkt c von **C** die Linien mcb_1 und ncb, bb_1 bis zum Durchschnitt mit mn in **P**, so ist **P**c eine Tangente in c an **C** und zugleich eine Diagonale des Vierecks mnb_1b, auf welcher sich die Tangenten in m und b schneiden müssen, also:

Wenn sich 2 Kegelschnitte C und K doppelt berühren und man zieht durch einen der Berührungspunkte eine gerade Linie, so schneiden sich die Tangenten in ihren Schnittpunkten mit C und K auf der gemeinschaftlichen Tangente im andern Berührungspunkt.

Zieht man von einem Punkt einer der gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte an diese die beiden andern Tangenten, so liegen deren Berührungspunkte in gerader Linie mit dem Berührungspunkt der andern gemeinschaftlichen Tangente.

§ 3. Fig. IV. Auf einem Kegelschnitt **K** seien 4 beliebige Punkte aa_1bb_1. Die Tangenten in aa_1 und bb_1 schneiden sich in **A** und **B**, dann lassen sich durch **A** und **B** unzählige Kegelschnitte legen, welche **K** doppelt berühren. Man darf auf **K** nur ein drittes Punktpaar cc_1 annehmen, wodurch 2 projectivische Punktreihen bestimmt werden, nämlich entweder $(abc\cdots) \pi (a_1b_1c_1\cdots)$ oder $(ab_1c\cdots) \pi (a_1bc_1\cdots)$, und in den entsprechenden Punkten Tangenten ziehen, deren Durchschnitte Punkte doppelt berührender Kegelschnitte sind. Man erhält also durch **A** und **B** 2 Reihen doppelt berührender Kegelschnitte **C** und **C'**. Im ersten Fall gehen alle Berührungssehnen durch den Schnittpunkt **P** von ab_1 und a_1b, im zweiten durch den Schnittpunkt **Q** von ab und a_1b_1. Da aber aba_1b_1 ein dem Kegelschnitt **K** eingeschriebenes Viereck ist, so liegen **P** und **Q** in gerader Linie mit **A** und **B**.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist **S** der Durchschnitt der Tangenten in a und b, so folgt, daß **PS** die Polare von **Q** ist, also sind **ABPQ** 4 harmonische Punkte. Es folgt der Satz:

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte, welche durch 2 feste Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, gehen durch einen von 2 festen Punkten, welche mit den beiden ersten harmonisch liegen.

Die Berührungspole aller Kegelschnitte, welche zwei feste Gerade und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, liegen auf einer von 2 festen Geraden, welche mit den beiden ersten 4 harmonische Strahlen bilden.

Ebenso beweist man die folgenden Sätze:

Die Berührungssehnen aller Kegelschnitte, welche zwei feste Gerade und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, gehen durch einen von 2 festen Punkten, welche durch die festen Geraden harmonisch getrennt sind.

Die Berührungspole aller Kegelschnitte, welche durch 2 feste Punkte gehen und einen gegebenen Kegelschnitt doppelt berühren, liegen auf einer von 2 festen Geraden, welche durch die beiden festen Punkte harmonisch getrennt sind.

§ 4. Zwei Kegelschnitte **C** und **C**^{1} schneiden sich (Fig. V.) in den Punkten **rstu**, die 3 Paare von Verbindungslinien dieser Punkte in **xyz**. Dann ist für beide Kegelschnitte

$$\mathbf{yz} = \mathbf{X} \text{ die Polare von } \mathbf{x}$$
$$\mathbf{xz} = \mathbf{Y} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mathbf{y}$$
$$\mathbf{xy} = \mathbf{Z} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \mathbf{z}.$$

Ein Kegelschnitt **K** berühre **C** und **C**^{1} doppelt, **C** in **pp**$_1$ **C**^{1} in **qq**$_1$; die Berührungspole seien **A** und **A**^{1}, der Schnittpunkt der Berührungssehnen sei **x**^{1}; dann ist in Bezug auf alle 3 Kegelschnitte **AA**^{1} die Polare von **x**^{1}; es muß also **AA**^{1} mit einer der 3 Geraden **XYZ** und **x**^{1} mit einem der 3 Punkte **xyz** zusammenfallen.

Es giebt unendlich viele Kegelschnitte **K**, welche die beiden gegebenen **C** und **C**^{1} doppelt berühren. Diese zerfallen, je nachdem die Verbindungslinie **AA**^{1} der Berührungspole mit **X**, **Y** oder **Z** zusammenfällt, in 3 Schaaren und mögen mit K_x, K_y und K_z bezeichnet werden. Im Folgenden soll, wenn nicht anders bestimmt wird, angenommen werden, daß **AA**^{1} mit **X** und also **x**^{1} mit **x** zusammenfällt; es soll also ein Kegelschnitt **K** aus der Schaar K_x betrachtet und der Einfachheit wegen nur mit **K** bezeichnet werden.

Die Sekante **rt** schneide **K** in **EE**$_1$, die Berührungssehnen **pp**$_1$ und **qq**$_1$ in **D** und **D**^{1}, so sind die Punkte **rtEE**$_1$**D** und **rtEE**$_1$**D**^{1} je 5 Punkte in Involution, von denen **D** und **D**^{1} ein Doppelpunkt ist, also sind **rtDD**^{1}, **EE**$_1$**DD**^{1} je 4 harmonische Punkte, also:

Berühren 2 Kegelschnitte C und C^1 einen 3ten K doppelt, so schneiden sich die Berührungssehnen und 2 gemeinschaftliche Sekanten in einem Punkt und bilden 4 harmonische Strahlen.

Verlängert man die 4 gemeinschaftlichen Sekanten, die sich nicht in x schneiden, bis zum Durchschnitt mit K, so schneiden sich 4 Verbindungslinien der Durchschnittspunkte in x und bilden 2 Mal mit den Berührungssehnen 4 harmonische Strahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umkehrung.

Zieht man durch x zwei Linien, pp_1, qq_1, welche mit den gemeinschaftlichen Sekanten rs, tu 4 harmonische Strahlen bilden, so daß rs, tu und pp_1, qq_1 zugeordnete Strahlen sind, so läßt sich durch die 4 Punkte pp_1qq_1 ein Kegelschnitt K legen, welcher in ihnen C und C^1 doppelt berührt.

Die 4 gemeinschaftlichen Tangenten an **C** und **C**^{1} seien **RSTU**, die 6 Ecken des von ihnen gebildeten Vierseits $\mathfrak{xx}_1$, $\mathfrak{yy}_1$, $\mathfrak{zz}_1$. Es ergeben sich nun die reciproken Sätze:

Berühren 2 Kegelschnitte C und C^1 einen 3ten K doppelt, so liegen die Berührungspole und 2 Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten in gerader Linie und bilden 4 harmonische Punkte.

Zieht man von den 4 andern Durchschnitten $\mathfrak{yy}_1\mathfrak{zz}_1$ Tangenten an K, so liegen 4 ihrer Schnittpunkte auf X und bilden 2 Mal mit den Berührungspolen 4 harmonische Punkte.

Diese Sätze, von denen die des vorigen Paragraphen nur spezielle Fälle sind, haben Goepel im 36sten und Steiner im 45sten Bande des Crelleschen Journals ohne Beweis veröffentlicht. Außer ihnen hat Steiner in derselben Abhandlung eine Anzahl anderer Sätze ohne Beweis, wie dies in letzter Zeit bei ihm Sitte war, mitgetheilt. Im Folgenden sollen die Beweise derselben mit Hilfe des in § 1 aufgestellten Satzes gegeben werden.

§ 5. Legt man durch pp_1qq_1r einen Kegelschnitt **M**, so hat in Bezug auf diesen x die Polare **X**. Da **rs** durch x und **X** harmonisch getrennt ist, so muß **M** auch durch **s** gehen, also:

Wenn ein Kegelschnitt 2 andere doppelt berührt, so liegen die 4 Berührungspunkte mit 2 Schnittpunkten r und s auf einem Kegelschnitt M, mit den beiden andern t und u auf einem Kegelschnitt M_1.

Denkt man sich die ganze Schaar **C** und **C**^{1} doppelter berührender Kegelschnitte K_x, so läßt sich durch je 4 der Berührungspunkte ein Kegelschnitt **M** legen. Für alle diese Kegelschnitte **M** ist **X** die Polare von x; sie müssen sich also in **r** und **s** doppelt berühren oder haben noch 2 andere Punkte gemeinschaftlich. Wären im letzteren Fall α und β diese Punkte, so müßte $\alpha\beta$ durch x gehen. Construirt man zu **rs**, **tu**, $\alpha\beta$ den 4ten, dem $\alpha\beta$ zugeordneten, harmonischen Strahl $\alpha_1\beta_1$ und schneidet $\alpha\beta$ den Kegelschnitt **C** in ab, $\alpha_1\beta_1$ C^1 in a_1b_1, so liegen aba_1b_1rs auf einem Kegelschnitt **M**, der auch durch $\alpha\beta$ gehen müßte, was unmöglich ist, also:

Alle Kegelschnitte M berühren sich doppelt in r und s, alle M_1 in t und u.

Ein beliebiger μ von diesen Kegelschnitten **M** schneide **C** und **C**^{1} in $p^1p_1^1q^1q_1^1$. Durch den Punkt p^1 ist ein CC^1 doppelt berührender Kegelschnitt K_x bestimmt, der **C** in p^1 berührt. Sind p_1qq_1 die andern Berührungspunkte, so liegen $p^1p_1qq_1rs$ auf einem Kegelschnitt M^1, der μ in **r** und **s** doppelt berührt und mit ihm den Punkt p^1 gemein hat; es müssen daher M^1 und μ und also auch p_1qq_1 mit $p_1^1q^1q_1^1$ zusammenfallen, also:

Jeder Kegelschnitt M schneidet C und C^1 in solchen 4 Punkten, in denen sie von einem Kegelschnitt K doppelt berührt werden.

Die beiden Kegelschnitte K und K^1 berühren **C** und **C**^{1} doppelt in den Punkten pp_1qq_1 und $p^1p_1^1q^1q_1^1$ und schneiden sich in den Punkten $\varrho\sigma\tau v$. Die Sehnen $\varrho\sigma$ und τv müssen sich in **x**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schneiden, da x in Bezug auf K und K^1 dieselbe Polare hat. Da nun C die Kegelschnitte K und K^1 in pp_1 und $p^1p_1^1$ berührt, so sind $\varrho\sigma$, τv, pp_1, $p^1p_1^1$ und ebenso $\varrho\sigma$, τv, qq_1, $q^1q_1^1$ je 4 harmonische Strahlen, also $(\varrho\sigma, \tau v, pp_1, p^1p_1^1)\,\pi\,(\varrho\sigma, \tau v, qq_1, q^1q_1^1)\,\pi\,(\tau v, \varrho\sigma, qq_1, q^1q_1^1)$ d. h. die Strahlen $\varrho\sigma$, τv, pp_1, qq_1, $p^1p_1^1$, $q^1q_1^1$ bilden eine Involution und weil rs, tu harmonisch getrennt sind durch pp_1, qq_1 und $p^1p_1^1$, $q^1q_1^1$, so sind sie es auch durch $\varrho\sigma$, τv, also:

Die gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte KK^1 bilden mit den gemeinschaftlichen Sehnen von CC^1 4 harmonische Strahlen.

Sei W ein beliebiger durch pp_1qq_1 gelegter Kegelschnitt, welcher C in $p^1p_1^1$, C^1 in $q^1q_1^1$ schneidet, so ist durch p^1 ein Kegelschnitt M bestimmt. Da x für M, C, C^1, W dieselbe Polare X hat, so muß M auch durch $p_1^1q^1q_1^1$ gehen, also hat man den Satz:

Berührt ein Kegelschnitt K 2 andere C und C^1 doppelt, so schneidet jeder durch die 4 Berührungspunkte gelegte Kegelschnitt C und C^1 in solchen 4 Punkten, durch welche sich ein C und C^1 doppelt berührender Kegelschnitt legen läßt.

Umkehrung. Werden 2 Kegelschnitte von 2 andern doppelt berührt, so liegen die 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt.

Ein spezieller Fall hiervon ist:

Die 8 Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten 2er Kegelschnitte liegen auf einem Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt K berühre C und C^1 in pp_1qq_1 und ein Kegelschnitt M schneide CC^1 in $p^1p_1^1q^1q_1^1$, dann läßt sich durch die 8 Punkte $pp_1qq_1p^1p_1^1q^1q_1^1$ ein Kegelschnitt W legen. Die gemeinschaftlichen Sehnen $\varrho\sigma$ und τv von K und M müssen sich in x schneiden. Sind nun die Schnittpunkte von $\varrho\tau$ mit W, pp_1, qq_1, $p^1p_1^1$, $q^1q_1^1$

bezüglich ww_1, π, π_1, π^1, π_1^1, so sind $\varrho\tau ww_1\pi\pi_1$ und $\varrho\tau ww_1\pi^1\pi_1^1$ in Involution, also auch $\varrho\tau\pi\pi_1\pi^1\pi_1^1$. Da nun rt harmonisch liegt mit $\pi\pi_1$ und $\pi^1\pi_1^1$, so sind auch $rt\varrho\tau$ 4 harmonische Punkte, also:

Jeder Kegelschnitt M schneidet jeden Kegelschnitt K in solchen 4 Punkten, daß die gemeinschaftlichen Sehnen mit rs, tu 4 harmonische Strahlen bilden.

Die Kegelschnitte K und K^1 berühren C und C^1 doppelt und schneiden sich in $\varrho\sigma\tau v$. Durch den Punkt ϱ ist ein Kegelschnitt M bestimmt, welcher auch durch $\sigma\tau v$ gehen muß, weil x in Bezug auf die Kegelschnitte MKK^1 dieselbe Polare X hat, also:

Durch die 4 Schnittpunkte 2er Kegelschnitte K läßt sich ein Kegelschnitt M legen.

Durch die Punkte rstu, in denen sich C und C^1 schneiden, lege man einen beliebigen Kegelschnitt K, welcher den C und C^1 doppelt berührenden Kegelschnitt K in $r^1s^1t^1u^1$ schneidet. Die Sehnen r^1s^1 und t^1u^1 schneiden sich in x.

Sind die Schnittpunkte von r^1t^1 mit rs, tu, C, C^1, pp_1, qq_1

bezüglich ϱ^1, τ^1, $\alpha\beta$, $\alpha^1\beta^1$, π, π_1

dann sind $r^1t^1\varrho^1\tau^1\alpha\beta$ und $r^1t^1\varrho^1\tau^1\alpha^1\beta^1$ in Involution, also auch $r^1t^1\alpha\beta\alpha^1\beta^1$. Ferner sind $r^1t^1\alpha\beta\pi$ und $r^1t^1\alpha^1\beta^1\pi_1$ je 5 Punkte in Involution mit dem Doppelpunkt π resp. π_1, also sind $\pi\pi_1$ die Doppelpunkte der 6 involutorischen Punkte $r^1t^1\alpha\beta\alpha^1\beta^1$. Daher der Satz:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man durch die Schnittpunkte 2er Kegelschnitte CC^1, welche einen dritten K doppelt berühren, einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ legt, so sind die gemeinschaftlichen Sehnen von K und $\mathfrak{K}$ conjugirt harmonisch zu den Berührungssehnen.

Die Kegelschnitte **K** und $\mathbf{K}^1$, welche sich in $\varrho\sigma\tau v$ schneiden, berühren $\mathbf{CC}^1$ doppelt. Legt man durch $\varrho\sigma\tau v$ einen Kegelschnitt **W**, der **C** und $\mathbf{C}^1$ in je 4 Punkten schneidet und ist $\mathbf{p}''$ einer der Schnittpunkte von **C** und **W**, so ist durch $\mathbf{p}''$ ein Kegelschnitt **M** bestimmt. Da nun **x** in Bezug auf die Kegelschnitte $\mathbf{KK^1WCC^1M}$ dieselbe Polare **X** hat, so muß **M** noch durch 3 andere Schnittpunkte $\mathbf{p_1}''\,\mathbf{q}''\,\mathbf{q_1}''$ von **W** mit $\mathbf{CC}^1$ gehen. Ebenso geht ein zweiter Kegelschnitt $\mathbf{M}^1$ durch die 4 übrigen Schnittpunkte von **W** mit $\mathbf{CC}^1$, also:

Wenn man durch die Schnittpunkte zweier Kegelschnitte KK^1, welche 2 andere CC^1 doppelt berühren, einen beliebigen Kegelschnitt W legt, so schneidet er CC^1 in solchen 8 Punkten, daß sich 2 Mal durch 4 derselben ein CC^1 doppelt berührender Kegelschnitt legen läßt.

§ 6. Die gemeinschaftlichen Tangenten von **K** mit **C** und $\mathbf{C}^1$ (in den Punkten $\mathbf{p}\,\mathbf{p_1}\,\mathbf{q}\,\mathbf{q_1}$) mögen mit $\mathbf{PP_1QQ_1}$ bezeichnet werden. Es mögen hier nun die den Sätzen des § 5 reciproken Sätze ohne Beweis angeführt werden.

Wenn 2 Kegelschnitte CC^1 von einem dritten K doppelt berührt werden, so berühren die Tangenten PP_1QQ_1 und 2 gemeinschaftliche Tangenten RS an CC^1 die sich auf X schneiden einen Kegelschnitt $\mathfrak{M}$, PP_1QQ_1TU einen andern $\mathfrak{M}_1$.

Alle Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ berühren sich doppelt auf R und S.

Jeder Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ hat mit CC^1 4 solche gemeinschaftliche Tangenten, durch deren 4 Berührungspunkte ein diese Tangenten und CC^1 doppelt berührender Kegelschnitt K_x gelegt werden kann.

Zwei Schnittpunkte der gemeinschaftlichen Tangenten an 2 Kegelschnitte K liegen auf X und bilden mit den Durchschnittspunkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ der gemeinschaftlichen Tangenten an CC^1 4 harmonische Punkte.

Berührt ein Kegelschnitt K 2 andere CC^1 doppelt und hat mit ihnen die gemeinschaftlichen Tangenten PP_1QQ_1, so hat jeder diese Tangenten berührende Kegelschnitt $\mathfrak{W}$ mit CC^1 4 solche Tangenten gemeinschaftlich, die zugleich einen CC^1 doppelt berührenden Kegelschnitt K_x berühren.

Die 8 gemeinschaftlichen Tangenten 2er Kegelschnitte K mit CC^1 berühren einen Kegelschnitt $\mathfrak{W}$.

Jeder Kegelschnitt $\mathfrak{M}$ hat mit jedem Kegelschnitt K 4 solche Tangenten gemeinschaftlich, daß die Schnittpunkte derselben, welche auf X liegen, mit $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ 4 harmonische Punkte bilden.

Die 4 gemeinschaftlichen Tangenten 2er Kegelschnitte K berühren einen Kegelschnitt $\mathfrak{M}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn ein Kegelschnitt K 2 andere CC^1 doppelt berührt, so liegen 2 Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten von K und einem beliebigen die gemeinschaftlichen Tangenten RSTU von CC^1 berührenden Kegelschnitt auf X und sind conjugirt harmonisch mit $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$.

Jeder Kegelschnitt W, welcher die gemeinschaftlichen Tangenten 2er Kegelschnitte K berührt, hat mit CC^1 solche 8 Tangenten gemeinschaftlich, daß sich 2 Mal an 4 derselben ein C und C^1 doppelt berührender Kegelschnitt legen läßt.

§ 7. Ein Kegelschnitt **M** schneide **X** in $\delta\delta^1$, **sr** schneide **X** in **n**. Die Tangenten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ in **r** und **s** an **M** müssen sich auf **X** schneiden, in **m**; also sind, da **m** der Pol von **rs** in Bezug auf **M** ist, $\mathbf{mn}\delta\delta^1$ 4 harmonische Punkte. — Durch die 4 Schnittpunkte $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ der gemeinschaftlichen Tangenten **RSTU** läßt sich ein Kegelschnitt $\mathbf{M}^1$ der Schaar **M** legen; er schneide **X** in $\Sigma\Sigma^1$, dann sind $\mathbf{mn}\Sigma\Sigma^1$ auch 4 harmonische Punkte. Da $\Sigma\Sigma^1$ die Polare von **x** in Bezug auf $\mathbf{M}^1$ ist, so sind $\mathbf{x}\Sigma$ und $\mathbf{x}\Sigma^1$ Tangenten an $\mathbf{M}^1$. Durch **x** gehen ferner die Strahlen $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$, welche $\mathbf{M}^1$ in $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ schneiden, folglich sind die Strahlen $\mathbf{s}\,(\Sigma\Sigma^1\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1)$ in Involution und zwar sind $\mathbf{s}\Sigma$ und $\mathbf{s}\Sigma^1$ die Doppelstrahlen. Da aber $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ ein den Kegelschnitten $\mathbf{CC}^1$ gemeinsam umgeschriebenes Viereck ist, so sind $\mathbf{s}\Sigma$ und $\mathbf{s}\Sigma^1$ die Tangenten in **s** an **C** und $\mathbf{C}^1$. Dies giebt den Satz:

Die gemeinschaftlichen Tangenten $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{S}$ der Kegelschnitte M schneiden sich auf X in m; sind $\Sigma\Sigma^1$ die Pole von rs in Bezug auf CC^1 (welche auf X liegen) und n der Schnittpunkt von rs mit X, so sind $mn\Sigma\Sigma^1$ 4 harmonische Punkte.

Die Berührungssehne rs aller Kegelschnitte $\mathfrak{M}$ geht durch x; sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Polaren von $(RS) = \mathfrak{x}$ in Bezug auf C und C^1 (welche sich in x schneiden) $\mathfrak{C}$ die Verbindungslinie $x\mathfrak{x}$, so sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, rs 4 harmonische Strahlen.

Diese Sätze liefern das Mittel, die gemeinschaftlichen Tangenten aller Kegelschnitte **M** und die Berührungssehne aller $\mathfrak{M}$ zu construiren.

§ 8. Wenn **C** und $\mathbf{C}^1$ (Fig. V.) von **K** in $\mathbf{pp_1qq_1}$ doppelt berührt werden, so nennt man die 4 Sehnen $\mathbf{pq} = \mathfrak{P}$, $\mathbf{pq_1} = \mathfrak{Q}_1$, $\mathbf{p_1q} = \mathfrak{Q}$, $\mathbf{p_1q_1} = \mathfrak{P}_1$ Wechselsehnen. Man kann an die 6 Linien $\mathbf{RSTU}\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1$ einen berührenden Kegelschnitt **N** legen. Dieser hat mit $\mathbf{C}^1$ die Tangenten **RSTU** gemein. Zieht man von **q** an **N** die Tangenten $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}_{11}$, ferner die Linien $\mathbf{q}\mathfrak{x}$, $\mathbf{q}\mathfrak{x}_1$ und an $\mathbf{C}^1$ die Tangente **qA** (**A** Berührungspol), dann sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}_{11}$, $\mathbf{q}\mathfrak{x}$, $\mathbf{q}\mathfrak{x}_1$, **qA** 5 Strahlen in Involution mit dem Doppelstrahl **qA**. Der andere Doppelstrahl ist $\mathbf{qA}^1$, da $\mathbf{AA}^1\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ 4 harmonische Punkte sind. Die Punkte **A**, $\mathbf{A}^1$, $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1)$ sind aber auch 4 harmonische Punkte, also die Strahlen von **q** nach den 6 Punkten $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q}_1)$, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}_1$, **A**, $\mathbf{A}^1$ 6 involutorische Strahlen, mit den Doppelstrahlen **qA**, $\mathbf{qA}^1$, also fällt $\mathfrak{Q}_{11}$ mit $\mathfrak{Q}$ zusammen und der Kegelschnitt **N** berührt $\mathfrak{Q}$ und daher auch $\mathfrak{Q}_1$.

Zieht man an **N** von x die Tangenten **n** und $\mathbf{n}_1$, dann sind $\mathbf{nn}_1$ harmonisch conjugirt zu **xy**, **xz** und zu $\mathbf{pp}_1$, $\mathbf{qq}_1$ wegen der umgeschriebenen Vierecke $\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ und $\mathbf{pp_1qq_1}$. Aber **rs** und **tu** liegen ebenfalls harmonisch mit **xy**, **xz** und $\mathbf{pp}_1$, $\mathbf{qq}_1$, also fallen **n** und **rs**, $\mathbf{n}_1$ und **tu** zusammen. Da **X** die Polare von **x** in Bezug auf **N** ist, so sind die Berührungspunkte von **rs** und **tu** mit **N** die Schnittpunkte von **rs** und **tu** mit **X**. — Daraus folgt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werden 2 Kegelschnitte von einem dritten doppelt berührt, so berühren die 4 Wechselsehnen einen Kegelschnitt N, der auch die 4 gemeinschaftlichen Tangenten von CC^1 und 2 gemeinschaftliche Sehnen berührt oder:

Der Ort aller Wechselsehnen ist ein Kegelschnitt N, der die gemeinschaftlichen Tangenten und 2 gemeinschaftliche Sehnen in den Punkten berührt, in welchen die Polare ihres Durchschnittspunktes die Sehnen schneidet.

Der reciproke Satz heißt:

Jede 2 Paare zusammengehörige gemeinschaftliche Tangenten 2er Kegelschnitte CC^1 mit einem sie doppelt berührenden Kegelschnitt K, nämlich P und P_1, Q und Q_1, haben 4 Wechselschnitte (PQ), (PQ_1), (P_1Q) und (P_1Q_1). Der Ort aller dieser Wechselschnitte ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{N}$, welcher dem Viereck rstu umgeschrieben ist und durch rr_1 geht.

§ 9. Die Kegelschnitte $C_1\,C_2\,C_3$ berühren den Kegelschnitt K doppelt (Fig. VI.), die Berührungssehnen seien b_1, b_2, b_3 und ihre Schnittpunkte $x_1 = (b_2\,b_3)$, $x_2 = (b_1\,b_3)$, $x_3 = (b_1\,b_2)$. Ferner seien $r_1\,s_1\,t_1\,u_1$ die Schnittpunkte von $C_2\,C_3$, $r_2\,s_2\,t_2\,u_2$ von $C_1\,C_3$ und $r_3\,s_3\,t_3\,u_3$ von $C_1\,C_2$. Dann sind die Strahlbüschel $x_1\,(x_2\,x_3\,r_1\,t_1)$, $x_2\,(x_1\,x_3\,r_2\,t_2)$ und $x_3\,(x_1\,x_2\,r_3\,t_3)$ harmonisch. Schneiden nun $x_3\,r_3$ und $x_3\,t_3$ die Sehne $r_2\,s_2$ in β und β^1, $x_1\,r_1$ und $x_1\,t_1$ dieselbe Sehne in γ und γ^1 und nennt man die Schnittpunkte von $r_2\,s_2$ mit C_2 — $v\,v^1$, dann sind die Punkte $\beta\beta^1 v\,v^1 r_2\,s_2$ und $\gamma\gamma^1 v\,v^1 r_2\,s_2$ in Involution, weil 2 Kegelschnitte und ihre gemeinschaftlichen Sehnen von einer Transversale involutorisch geschnitten werden. Ist π der Schnittpunkt von $r_2\,s_2$ mit $x_1\,x_3$, so sind wegen der vorhin aufgeführten harmonischen Büschel $\beta\beta^1 x_2\,\pi$ und $\gamma\gamma^1 x_2\,\pi$ je 4 harmonische Punkte. Die Punktpaare $\beta\beta^1$ und $\gamma\gamma^1$ sind also sowohl in Involution mit $v\,v^1 r_2\,s_2$, als harmonisch mit $x_2\,\pi$ und müssen daher zusammenfallen, denn es giebt nur ein Punktpaar einer Involution, welches mit einem gegebenen Punktpaare harmonisch liegt. Es folgt also der Satz:

Wenn 3 Kegelschnitte $C_1\,C_2\,C_3$ einen 4ten K doppelt berühren, so schneiden sich 3 ihrer gemeinschaftlichen Sehnen 4 Mal in einem Punkt. (Chordalpunkt.)

Denn nachdem gezeigt ist, daß β und β^1 die Schnittpunkte von $u_1\,t_1$, $r_2\,s_2$, $r_3\,s_3$ und $r_1\,s_1$, $r_2\,s_2$, $u_3\,t_3$ sind, kann man leicht erkennen, daß es noch 2 andere Schnittpunkte von je 3 gemeinschaftlichen Sehnen giebt. Von den harmonischen Strahlenbüscheln $x_1\,(x_2\,x_3\,r_1\,t_1)$ und $x_2\,(x_1\,x_3\,r_2\,t_2)$ fallen die Strahlen $x_1\,x_2$ und $x_2\,x_1$ zusammen; die Schnittpunkte der 3 andern Strahlenpaare liegen also auf einer geraden Linie, welche durch x_3 geht. Nun schneiden sich $x_1\,r_1$ und $x_2\,r_2$ in β^1 auf $x_3\,t_3$, also müssen sich auch $x_1\,t_1$ und $x_2\,t_2$ auf $x_3\,t_3$ schneiden, d. h. die Sehnen $x_1\,t_1$, $x_2\,t_2$, $x_3\,t_3$ schneiden sich in 1 Punkt und ebenso zeigt man, daß $x_1\,r_1$, $x_2\,t_2$, $x_3\,r_3$ sich in einem Punkt schneiden.

Der reciproke Satz heißt:

Wenn 3 Kegelschnitte C_1, C_2, C_3 einen 4ten K doppelt berühren, so liegen 4 Mal 3 der Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten an C_1, C_2, C_3 je auf einer Geraden.

Spezielle Fälle dieser Sätze sind:

Wenn jeder von 3 Kegelschnitten dieselben zwei geraden Linien berührt und alle 3 in denselben Winkel eingeschrieben sind, so schneiden sich von ihren gemeinschaftlichen Sehnen 4 Mal 3 in je einem Punkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn jeder von 3 Kegelschnitten dieselben zwei geraden Linien berührt, so liegen die Schnittpunkte der noch übrigen beiden Tangenten von je 2 derselben auf einer geraden Linie.

Wenn 3 Kegelschnitte sich in denselben zwei Punkten schneiden, so schneiden sich ihre 3 übrigen gemeinschaftlichen Sehnen in einem Punkt.

Wenn 3 Kegelschnitte sich in denselben zwei Punkten schneiden, so liegen 4 Mal 3 der Durchschnittspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten je 2er in einer Geraden.

Berührt ein Kegelschnitt C_3 die gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Kegelschnitte C_1 und C_2, so schneiden sich 4 der gemeinschaftlichen Sehnen von $C_1 C_3$ und $C_2 C_3$ in einem Punkt auf der Berührungssehne von $C_1 C_2$.

In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck liegen die Durchschnittspunkte der 3 Paare von Gegenseiten in einer Geraden. (Pascalscher Satz.)

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Sechseck schneiden sich die 3 Diagonalen der Gegenecken in einem Punkt. (Lehrsatz des Brianchon.)

Der Hauptsatz dieses Paragraphen findet sich zuerst in der schon angeführten Abhandlung Goepels im 36ten Bande des Crelleschen Journals; dann in 2 Abhandlungen Steiners im 37ten und 45ten Bande des Crelleschen Journals, doch ohne Beweis. Einen Beweis, der jedoch von dem mitgetheilten durchaus verschieden ist, hat Chasles im „**Traité des sections coniques**“ gegeben. — Einen eleganten analytischen Beweis findet man in Salmons „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“, bearbeitet von Fiedler, § 280.

Eine andere Abhängigkeit dreier Kegelschnitte, die einen 4ten berühren, ist ebenfalls von Steiner in den angeführten Abhandlungen gegeben. Der Punkt x_1, wenn wir die eingeführten Bezeichnungen beibehalten, hat für **K** und $\mathbf{C}_1$ dieselbe Polare $\mathbf{X}_1$; ebenso haben für **K** und $\mathbf{C}_2$, **K** und $\mathbf{C}_3$ die Punkte x_2 und x_3 dieselben Polaren $\mathbf{X}_2$ und $\mathbf{X}_3$. Also sind X_1, X_2, X_3 die Polaren von x_1, x_2, x_3 in Bezug auf **K**. Sind y_1, y_2, y_3 die Schnittpunkte $(X_2 X_3)$, $(X_1 X_3)$, $(X_1 X_2)$, so liegen die Dreiecke $x_1 x_2 x_3$ und $y_1 y_2 y_3$ perspectivisch, d. h. die Linien $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ schneiden sich in einem Punkt, cf. Schroeter, Theorie der Kegelschnitte, pag. 160, also:

Wenn 3 Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ einen 4ten K doppelt berühren und $x_1 x_2 x_3$ die Schnittpunkte der Berührungssehnen, $X_1 X_2 X_3$ ihre Polaren in Bezug auf $C_1 C_2 C_3$ sind, so liegt das Dreieck $x_1 x_2 x_3$ perspectivisch mit dem Dreiseit $X_1 X_2 X_3$.

Umkehrung.

Wenn 3 Kegelschnitte so liegen, daß 3 ihrer gemeinschaftlichen Sehnen (von jedem Kegelschnittpaar eine) sich in einem Punkt schneiden, so läßt sich an die 3 Kegelschnitte ein 4ter doppelt berührender legen.

Wenn von 3 Kegelschnitten $C_1 C_2 C_3$ die gemeinschaftlichen Sehnen sich schneiden, von $C_2 C_3$ in x_1, $C_1 C_3$ in x_2, $C_1 C_2$ in x_3 und das Dreiseit der Polaren von $x_1 x_2 x_3$ in Bezug auf $C_1 C_2 C_3$ perspectivisch mit $x_1 x_2 x_3$ liegt, so läßt sich an die 3 Kegelschnitte ein 4ter doppelt berührender legen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn 3 Kegelschnitte so liegen, daß 3 der Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten (von jedem Kegelschnittpaar eine) in gerader Linie liegen, so läßt sich an die 3 Kegelschnitte ein 4ter doppelt berührender legen.

§ 10. Berühren mehrere Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3 \cdots$ einen andern K doppelt in denselben beiden Punkten pp_1 und man zieht von irgend einem Punkt der Berührungssehne Tangenten an alle Kegelschnitte, so liegen die Berührungspunkte in gerader Linie.

Denn die Polaren eines Punktes der Berührungssehne fallen zusammen. —

Fig. VII. Ist B der gemeinschaftliche Berührungspol jener Kegelschnitte, P ein beliebiger Punkt und sind $r_1 s_1$, $r_2 s_2$, $r_3 s_3, \cdots$ die Berührungspunkte der von P an $C_1 C_2 C_3 \cdots$ gezogenen Tangenten, dann schneiden sich pr_1 und $p_1 s_1$ in α_1, $p_1 r_1$ und pt_1 in β_1 und $\alpha_1 \beta_1$ liegen auf BP harmonisch mit B und P, weil B und P 2 Gegenecken des dem Kegelschnitt C_1 umgeschriebenen Vierseits sind. Dasselbe gilt von den entsprechenden Punkten $\alpha_2 \beta_2$, $\alpha_3 \beta_3, \cdots$ und es bilden daher $\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3 \cdots$ eine Involution mit den Doppelpunkten B und P; also ist

$$p\,(BP\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots) \pi\, p\,(BP\beta_1 \beta_2 \beta_3 \cdots \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots) \text{ oder}$$

$$p\,(BPr_1 r_2 r_3 \cdots s_1 s_2 s_3 \cdots) \pi\, p\,(BPr_1 r_2 r_3 \cdots s_1 s_2 s_3 \cdots) \text{ d. h.}$$

die Punkte $BPr_1 r_2 r_3 \cdots s_1 s_2 s_3 \cdots$ liegen auf einem Kegelschnitt. Dem Strahl pp_1 von p entspricht dabei derjenige Strahl $p_1 P_1$ von p_1, welcher von pp_1 durch B und P harmonisch getrennt ist, also:

Zieht man von einem beliebigen Punkt P an beliebig viele sich in denselben beiden Punkten pp_1 doppelt berührende Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3 \cdots$ Tangenten, so liegen alle Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher auch durch $pp_1 P$ und den gemeinschaftlichen Berührungspol B geht. Der Pol P_1 von pp_1 in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist von pp_1 durch B und P harmonisch getrennt.

Der reciproke Satz heißt:

Schneidet man beliebig viele sich in denselben beiden Punkten doppelt berührende Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3 \cdots$ durch eine Gerade p, so umhüllen alle Tangenten in den Schnittpunkten einen neuen Kegelschnitt, der p, die Berührungssehne und die gemeinschaftlichen Tangenten von $C_1 C_2 C_3 \cdots$ zu Tangenten hat und diese letztere in 2 solchen Punkten berührt, daß ihre Verbindungslinie vom Berührungspol durch p und die Berührungssehne harmonisch getrennt ist. Cf. Pfaff „Neuere Geometrie" II § 316.

Berühren sich die Kegelschnitte K und C doppelt in pp_1 und zieht man von einem beliebigen Punkt P an K und C die Tangenten Pq, Pq_1 und Pr, Ps, so muß ein Kegelschnitt K, der K in qq_1 berührt und durch r geht, auch durch s gehen; denn die Polaren von P in Bezug auf K und C, nämlich qq_1 und rs schneiden sich auf pp_1. Ist x der Schnittpunkt, so hat er in Bezug auf alle 3 Kegelschnitte dieselbe Polare, also muß eine gemeinschaftliche Sehne von K und C durch x gehen, d. h. K schneidet C in der Sehne rs. Also:

Wenn 2 Kegelschnitte K und C sich doppelt berühren und man zieht von einem beliebigen Punkt Tangenten, welche K in qq_1, C in rs berühren, so lassen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich durch diese 4 Punkte 2 Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ legen, von denen der erste K in qq_1, der zweite C in rs doppelt berührt.

Fig. VIII. Werden die Kegelschnitte CC^1 von K doppelt berührt, sind pp_1, qq_1 die Berührungspunkte, rstu die Schnittpunkte von CC^1 und zieht man von einem beliebigen Punkt P einer der gemeinschaftlichen Sehnen z. B. rs, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, Tangenten an K, C, C^1, welche diese Kegelschnitte bezüglich in $\pi\pi_1$, $\varrho\sigma$, τv berühren, so müssen $\varrho\sigma$, τv sich in einem Punkt A von rs schneiden. Es giebt nun nach dem vorigen Satz einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K in $\pi\pi_1$ doppelt berührt und durch $\varrho\sigma$ geht. Die Polaren $\pi\pi_1$ und τv von P in Bezug auf K und C^1 schneiden sich auf der Berührungssehne qq_1 in Q. Die Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und C^1 berühren K doppelt in $\pi\pi_1$ und qq_1, also muß eine gemeinschaftliche Sehne beider durch Q gehen. Da sie nach § 9 auch durch A gehen muß, so ist τv die gemeinschaftliche Sehne von $\mathfrak{K}$ und C^1, also:

Wenn 2 Kegelschnitte CC^1 einen dritten K doppelt berühren und man zieht von irgend einem Punkt P in einer solchen gemeinschaftlichen Sehne von CC^1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, Tangenten an KCC^1, so liegen die 6 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K doppelt berührt und P zum Berührungspol hat.

Wenn 2 Kegelschnitte CC^1 einen dritten K doppelt berühren und man schneidet dieselben durch eine Linie p, welche durch einen solchen Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten von CC^1 geht, der auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, so umhüllen die Tangenten in den Schnittpunkten von p mit C^1CK einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, welcher K doppelt berührt und p zur Berührungssehne hat.

Folgerungen.

1) Berühren 3 Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ einen 4ten K doppelt und zieht man von einem der 4 Chordalpunkte (§ 9), Tangenten an alle 4 Kegelschnitte, so liegen die 8 Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, welcher K doppelt berührt und den Chordalpunkt zum Berührungspol hat.

2) Berühren drei Kegelschnitte $C_1C_2C_3$ einen 4ten K doppelt, so schneidet jede der 4 Linien, auf denen 3 Durchschnitte gemeinschaftlicher Tangenten liegen (§ 9), die 4 Kegelschnitte in solchen 8 Punkten, daß die Tangenten in ihnen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ umhüllen, welcher K doppelt berührt und jene Linie zur Berührungssehne hat.

3) Berühren mehrere Kegelschnitte $C_1C_2C_3\cdots$ einen andern K doppelt und gehen zugleich durch dieselben beiden Punkte A und B, und zieht man von irgend einem Punkt P von AB Tangenten an alle Kegelschnitte, so liegen die Berührungspunkte auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitt, der P zum Berührungspol hat. (Cf. § 3.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) Berühren mehrere Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3 \cdots$ einen andern K und sind sie zugleich demselben Winkel eingeschrieben, so schneidet jede Gerade p durch den Scheitelpunkt die Kegelschnitte in solchen Punkten, daß die Tangenten in ihnen einen K doppelt berührenden Kegelschnitt umhüllen, welcher p zur Berührungssehne hat.

5) Umkehrung von 3). Wenn 2 Kegelschnitte $C_1 C_2$ einen 3ten K doppelt berühren und die Berührungspunkte $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ der von einem Punkt P an $C_1 C_2$ gezogenen Tangenten auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitt K liegen, der P zum Berührungspol hat, so liegt P auf einer gemeinschaftlichen Sehne von $C_1 C_2$.

Die Sehnen $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ und eine $a_3 b_3$ von $C_1 C_2$ müssen sich (§ 9) in einem Punkt schneiden; die Polaren $a_1 b_1$ und $a_2 b_2$ von P in Bezug auf $C_1 C_2$ schneiden sich also auf einer gemeinschaftlichen Sehne von $C_1 C_2$, also muß auch P auf derselben liegen.

6) Umkehrung von 4). Wenn 2 Kegelschnitte $C_1 C_2$ einen 3ten K doppelt berühren und die Tangenten in den Schnittpunkten einer Linie p mit $C_1 C_2$ einen Kegelschnitt K umhüllen, welcher K doppelt berührt und p zur Berührungssehne hat, so geht p durch einen Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1 C_2$.

§ 11. Aufgabe. Die Kegelschnitte K und C berühren sich doppelt. Man soll durch 2 gegebene Punkte $\varrho\sigma$ einen 3ten K doppelt berührenden Kegelschnitt C^1 construiren, so daß ein gegebener Punkt P auf einer solchen gemeinschaftlichen Sehne, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, liegt.

Fig. IX. Die Schnittpunkte von CC^1 seien rstu; rs und tu schneiden sich im Schnittpunkt der Berührungssehnen bb^1, und rs gehe durch P. Sind nun $\varrho_1 \sigma_1 \varrho_{\prime\prime} \sigma_{\prime\prime} \pi\pi^1$ die Schnittpunkte von $\varrho\sigma$ mit C, rs, tu, b, b^1, RS die Schnittpunkte mit K, so sind $\varrho_{\prime\prime}\sigma_{\prime\prime}\pi\pi^1$ 4 harmonische Punkte, $\varrho\sigma RS\pi^1$ 5 Punkte in Involution mit dem Doppelpunkte π^1, $\varrho\sigma\varrho_1\sigma_1\varrho_{\prime\prime}\sigma_{\prime\prime}$ 6 Punkte in Involution. Da man durch die 5punktige Involution π^1 bestimmen kann, so findet man $\varrho_{\prime\prime}\sigma_{\prime\prime}$ als dasjenige Punktpaar, das mit $\pi\pi^1$ harmonisch und mit $\varrho\sigma\ \varrho_1\sigma_1$ involutorisch liegt. — Die Linien $P\varrho_{\prime\prime}$ und $P\sigma_{\prime\prime}$ liefern 2 Lösungen der Aufgabe. Nimmt man den 2ten Doppelpunkt π_1 der Involution $\varrho\sigma RS\pi^1\pi_1$, so erhält man ein anderes Punktpaar $\varrho^1{}_{\prime\prime}\sigma^1{}_{\prime\prime}$ und die Linien $P\varrho^1{}_{\prime\prime}$, $P\sigma^1{}_{\prime\prime}$ liefern 2 neue Lösungen, so daß die Aufgabe im Allgemeinen 4 verschiedene Auflösungen gestattet.

Aufgabe. Gegeben sind zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte K und C und 3 Punkte $PP^1\varrho$. Man soll durch ϱ einen K doppelt berührenden Kegelschnitt C^1 so konstruiren, daß die 2 seiner gemeinschaftlichen Sehnen mit C, welche sich im Schnittpunkt der Berührungssehnen schneiden, durch P und P^1 gehen.

Fig. X. Sind b und b^1 die Berührungssehnen von CC^1 mit K und schneidet PP^1 die Linien bb^1 in aa^1, so sind PP^1aa^1 4 harmonische Punkte, also a^1 bekannt. Die Schnittpunkte von ϱa^1 mit C^1 und K seien $\varrho^1 \varkappa\varkappa^1$, dann sind $\varrho\varrho^1\varkappa\varkappa^1 a^1$ in Involution mit dem Doppelpunkt a^1. Wenn ferner cc^1 die Schnittpunkte von ϱa^1 mit den gesuchten durch PP^1 gehenden gemeinschaftlichen Sehnen von CC^1 sind, dd^1 ihre Schnittpunkte mit C, β ihr Schnittpunkt mit b, so sind cc^1 in Involution mit $dd^1\varrho\varrho^1$ und harmonisch mit $a^1\beta$, also zu konstruiren. Dann liefern cP und c^1P^1, c^1P und cP^1 die beiden Auflösungen der Aufgabe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Zwei Kegelschnitte CC^1 berühren einen 3ten K doppelt, man soll die gemeinschaftlichen Punkte von CC^1 finden.

Jeder Kegelschnitt ist bestimmt, z. B. durch 5 Punkte, zu denen die Berührungspunkte gehören. Dann bestimme man auf einer beliebigen Linie die Durchschnittspunkte dd^1 $\varrho\varrho^1$ βa^1 bezüglich mit CC^1 und den Berührungssehnen bb^1. Sind cc^1 die Schnittpunkte mit den gemeinschaftlichen Sehnen, welche durch den Punkt (bb^1) gehen, so sind cc^1 involutorisch mit $dd^1\varrho\varrho^1$ und harmonisch mit βa^1, also zu bestimmen. Verbindet man (bb^1) mit c und c^1, so erhält man die gemeinschaftlichen Sehnen.

Auf analoge Art bestimmt man die gemeinschaftlichen Tangenten der Kegelschnitte CC^1.

§ 12. Die Kegelschnitte CC^1 berühren K doppelt und schneiden sich in $rstu$, so daß rs, tu durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen gehen. Nimmt man auf rs einen beliebigen Punkt P und zieht durch ihn eine Linie, welche C in $\varrho\sigma$ schneidet, so kann man durch $\varrho\sigma$ unzählig viele Kegelschnitte legen, welche K doppelt berühren. Alle diese schneiden C^1 in solchen Punkten, daß eine gemeinschaftliche Sehne durch P geht. Legt man also umgekehrt durch P eine 2te Linie, welche C^1 in $\varrho^1\sigma^1$ schneidet, so läßt sich durch $\varrho\sigma\varrho^1\sigma^1$ ein K doppelt berührender Kegelschnitt legen, also

Wenn 2 Kegelschnitte CC^1 einen dritten K doppelt berühren und man legt durch irgend einen Punkt einer solchen gemeinschaftlichen Sehne von CC^1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, 2 Linien, so liegen die 4 Schnittpunkte, in denen die eine C, die andere C^1 schneidet, auf einem K doppelt berührenden Kegelschnitt.

Läßt man die Schnittpunkte auf C und auf C^1 zusammenfallen, so gehen die Sekanten in Tangenten über und man erhält den Satz:

Wenn 2 Kegelschnitte CC^1 einen dritten K doppelt berühren, und man zieht von einem beliebigen Punkt einer solchen gemeinschaftlichen Sehne von CC^1, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, je an C und C^1 eine Tangente, so kann man durch die Berührungspunkte einen in ihnen C und C^1 einfach berührenden Kegelschnitt legen, welcher K doppelt berührt.

Aus § 9 folgen die Sätze: Wenn 3 Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ einen 4ten K doppelt berühren, C_1 und C_2 noch von C_3 einfach berührt werden, so liegen die Berührungspunkte von C_1C_3 und C_2C_3 in gerader Linie mit einem Durchschnittspunkt gemeinschaftlicher Tangenten von C_1C_2 und die Tangenten in den Berührungspunkten von C_1C_3 und C_2C_3 schneiden sich auf einer gemeinschaftlichen Sehne von C_1C_2. —

Wenn 2 Kegelschnitte C_1 C_2 einen dritten K doppelt berühren und man zieht aus einem solchen Durchschnitt S gemeinschaftlicher Tangenten von C_1 C_2, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, 2 Linien, welche C_1 in $r_2 s_2 t_2 u_2$, C_2 in $r_1 s_1 t_1 u_1$ schneiden, während C_1C_2 sich in $r_3 s_3 t_3 u_3$ treffen, so schneiden sich 4 Mal 3 gemeinschaftlicher Sehnen von C_1C_2 und dem aus S gezogenen Linienpaar in einem Punkt, nach § 9, weil C_1C_2 und dieses Linienpaar als 3 Kegelschnitte betrachtet werden können, welche das Tangentenpaar aus S doppelt berühren. Man beweist diese Eigenschaft aber auch, wie in § 9, leicht direct. Wenn folgende Sehnen $(t_1u_1$, r_2s_2, $r_3s_3)$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$(r_1 s_1, t_2 u_2, r_3 s_3)$, $(t_1 u_1, t_2 u_2, t_3 u_3)$, $(r_1 s_1, r_2 s_2, t_3 u_3)$ sich je in einem Punkt schneiden, so lassen sich durch die Punkte $t_1 u_1 r_2 s_2$, $r_1 s_1 t_2 u_2$, $t_1 u_1 t_2 u_2$, $r_1 s_1 r_2 s_2$ 4 Kegelschnitte legen, von denen jeder **K** doppelt berührt, also:

Wenn 2 Kegelschnitte $C_1 C_2$ einen dritten K doppelt berühren und man zieht durch einen solchen Durchschnitt S gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1 C_2$, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole liegt, 2 Linien durch $C_1 C_2$, so schneiden sich 4 Mal je 2 der Verbindungslinien der 8 Schnittpunkte auf den beiden gemeinschaftlichen Sehnen von $C_1 C_2$, welche durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen gehen und durch 4 der Schnittpunkte lassen sich 4 Kegelschnitte legen, von denen jeder K doppelt berührt.

Ferner kann man durch $t_1 s_2$, $t_2 s_1$, $r_1 u_2$, $r_2 u_1$ 4 Kegelschnitte legen, welche in diesen Punkten $C_1 C_2$ einfach und außerdem **K** doppelt berühren. — Nennen wir den ersten und letzten KK^1, so müssen sich $t_1 u_1$ und $r_2 s_2$ in einem Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten von KK^1 schneiden, welcher also auf einer gemeinschaftlichen Sehne von $C_1 C_2$ liegt. — Nach dem Früheren schneiden sich die Tangenten in $t_1 u_1$ an C_2 und in $r_2 s_2$ an C_1 auf einer gemeinschaftlichen Sehne von KK^1 und beide Schnittpunkte liegen in gerader Linie mit **S**, also:

Wenn die Kegelschnitte $C_1 C_2$ von K einfach in $s_2 t_1$, von K^1 in $r_2 u_1$, alle 4 aber doppelt von K berührt werden und die Linien $s_2 t_1$ und $r_2 u_1$ sich in einem solchen Durchschnitt S gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1 C_2$ schneiden, welcher auf der Verbindungslinie der Berührungspole von $C_1 C_2$ mit K liegt, so liegt 1) ein Schnittpunkt gemeinschaftlicher Tangenten von KK^1 auf einer gemeinschaftlichen Sehne von $C_1 C_2$ 2) der Schnittpunkt S gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1 C_2$ auf einer gemeinschaftlichen Sehne von KK^1.

Seien KK^1 2 Kegelschnitte, welche C_1 in $a_1 a_1^1$, C_2 in $a_2 a_2^1$, C_3 in $a_3 a_3^1$ einfach berühren; werden ferner alle 5 von **K** doppelt berührt und schneiden sich die Linien $a_1 a_1^1$, $a_2 a_2^1$, $a_3 a_3^1$ in demselben Durchschnitt **S** gemeinschaftlicher Tangenten von KK^1, so liegt **S** auch auf den gemeinschaftlichen Sehnen von $C_1 C_2$, $C_1 C_3$ und $C_2 C_3$ und ist also ein Chordalpunkt von $C_1 C_2 C_3$. — Die Linien $a_1 a_2$ und $a_1^1 a_2^1$, $a_1 a_3$ und $a_1^1 a_3^1$, $a_2 a_3$ und $a_2^1 a_3^1$ schneiden sich in den Durchschnitten T_3, T_2, T_1 gemeinschaftlicher Tangenten von $C_1 C_2$, $C_1 C_3$, $C_2 C_3$ und zugleich liegen diese Punkte auf derselben gemeinschaftlichen Sehne von KK^1, also ist $T_1 T_2 T_3$ eine gerade Linie, deren Pole in Bezug auf $C_1 C_2 C_3$ auf den Linien Sa_1, Sa_2, Sa_3 liegen müssen, weil T_1 der Pol von Sa_1 in Bezug auf C_1, T_2 der Pol von Sa_2 in Bezug auf C_2, T_3 der Pol von Sa_3 in Bezug auf C_3 ist. Daraus folgt:

Berühren 3 Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ einen 4ten K doppelt und werden selbst von einem fünften K doppelt berührenden Kegelschnitt K einfach in $a_1 a_2 a_3$ berührt, so liegen diese Berührungspunkte auf der Verbindungslinie eines Chordalpunktes von $C_1 C_2 C_3$ mit dem Pol einer Geraden, auf welcher 3 Durchschnitte gemeinsamer Tangenten von $C_1 C_2 C_3$ liegen, diesen Pol genommen in Bezug auf C_1, C_2, C_3.

Durch diesen Satz wird die Aufgabe gelöst: „Es sind 3 Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ gegeben, welche einen 4ten **K** doppelt berühren; man soll einen 5ten K konstruiren, welcher **K** doppelt und $C_1 C_2 C_3$ einfach berührt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die im vorigen Satz angegebene Construction liefert 2 Kegelschnitte. Da es 4 Gerade, auf denen Durchschnittspunkte gemeinschaftlicher Tangenten liegen, und 4 Chordalpunkte von $C_1 C_2 C_3$ gibt und jede Verbindung einer solchen Linie mit einem Chordalpunkt 2 Auflösungen der Aufgabe gibt, so hat dieselbe im Allgemeinen 32 Auflösungen.

Mit gewissen Modifikationen enthält diese Aufgabe die Auflösungen aller derjenigen Aufgaben, die entstehen, wenn man einen oder zwei oder alle 3 Kegelschnitte $C_1 C_2 C_3$ je in einen Punkt oder eine Gerade übergehen läßt. Treten außerdem noch an Stelle von K 2 Punkte oder 2 Gerade, so erhält man die Construction der Kegelschnitte aus Punkten und geraden Linien. —

Spezielle Fälle.

1) Schneiden sich 3 Kegelschnitte in denselben 2 Punkten A und B und zieht man von dem Durchschnittspunkt P der 3 andern gemeinschaftlichen Sehnen Tangenten an die 3 Kegelschnitte, so liegen ihre Berührungspunkte auf einen neuen Kegelschnitt, der die Linien PA und PB in A und B berührt.

2) Zieht man von einem Punkt P der gemeinschaftlichen Sehne AB an alle Kegelschnitte, welche durch 4 Punkte ABCD gehen, Tangenten, so liegen ihre Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt, der PC und PD in C und D berührt.

3) Zieht man von einem Punkt P der gemeinschaftlichen Sehne AB aller Kegelschnitte, welche zugleich demselben Winkel eingeschrieben sind, Tangenten an diese Kegelschnitte, so liegen alle Berührungspunkte auf 2 geraden Linien, die sich im Scheitelpunkt des Winkels schneiden.

§ 13. Die Kegelschnitte $K K_1 K_2 \cdots$ berühren die beiden CC^1 doppelt; seien $AA^1, A_1 A_1^1, A_2 A_2^1 \cdots$ die Berührungspole, so bilden dieselben auf X (§ 4) eine involutorische Punktreihe mit den Doppelpunkten $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$, also ist $(AA_1 A_2 \cdots A^1 A_1^1 A_2^1 \cdots \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1) \pi (A^1 A_1^1 A_2^1 \cdots AA_1 A_2 \cdots \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1)$. Sind P und P^1 die Pole einer Geraden G in Bezug auf C und C^1, $p p_1 p_2 \cdots$ in Bezug auf $K K_1 K_2 \cdots$, dann liegen in gerader Linie die Punkte pPA und pP^1A^1, $p_1 PA_1$ und $p_1 P^1 A_1^1$, $p_2 PA_2$ und $p_2 P^1 A_2^1, \cdots$, also sind $pp_1 p_2 \cdots$ die Durchschnitte der projectivischen Strahlbüschel $P(AA_1 A_2 \cdots \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1)$ und $P^1(A^1 A_1^1 A_2^1 \cdots \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1)$ und liegen folglich auf einem Kegelschnitt K, der auch durch PP^1 geht. — Man kann die gemeinschaftlichen Sehnen rs, tu auch als 2 doppelt berührende Kegelschnitte betrachten, deren Berührungspole $\Sigma\Sigma^1$ und $\Sigma_1 \Sigma_1^1$ (cf. § 7) sein mögen, dann schneiden sich auch $P\Sigma$ und $P^1\Sigma^1$, $P\Sigma_1$ und $P^1\Sigma_1^1$ auf K; also:

Werden 2 Kegelschnitte CC^1 von beliebig vielen andern der Schaar K_x (cf. § 4), $K K_1 K_2 \cdots$ doppelt berührt, so liegen die Pole irgend einer Geraden G in Bezug auf alle K_x auf einem Kegelschnitt K, der auch durch die Schnittpunkte $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gemeinsamer Tangenten von CC^1 geht.

Um den Beweis für die Fälle anwenden zu können, wenn einer oder beide Kegelschnitte CC^1 in ein Linienpaar übergehen, muß man ihm eine etwas andere Form geben.

G schneide die Berührungssehnen $bb_1 b_2 \cdots b^1 b_1^1 b_2^1 \cdots$ von CC^1 mit $K K_1 K_2 \cdots$ in den Punkten $pp_1 p_2 \cdots p^1 p_1^1 p_2^1 \cdots$, dann ist $(bb_1 b_2 \cdots) \pi (b^1 b_1^1 b_2^1 \cdots)$, also auch $(pp_1 p_2 \cdots) \pi (p^1 p_1^1 p_2^1 \cdots)$. Nun sind die Linien pPA, $p_1 PA_1$, $p_2 PA_2, \cdots$ und pP^1A^1, $p_1 P^1 A_1^1$, $p_2 P^1 A_2^1 \cdots$ die Polaren von $pp_1 p_2 \cdots$ und $p^1 p_1^1 p_2^1 \cdots$ in Bezug auf C und C^1, also $(pp_1 p_2 \cdots) \pi P(pp_1 p_2 \cdots)$, $(p^1 p_1^1 p_2^1 \cdots) \pi P^1 (pp_1 p_2 \cdots)$, folglich $P(pp_1 p_2 \cdots) \pi P^1 (pp_1 p_2 \cdots)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wird die Gerade G die unendlich ferne Gerade der Ebene, so geht der vorige Satz über in:

Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte K_x, welche 2 gegebene CC^1 doppelt berühren, liegen auf einem durch $\mathfrak{x}\mathfrak{x}_1$ gehenden Kegelschnitt.

Geht G durch $\mathfrak{x}$, so liegen PP^1 in gerader Linie mit $\mathfrak{x}$ und da $\mathfrak{x}$ ein Doppelpunkt der Involution der Berührungspole ist, so entspricht der Strahl $PP^1\mathfrak{x}$ sich selbst in den beiden Strahlbüscheln PP^1, welche durch PP^1 und die Berührungspole bestimmt sind. Dieselben liegen daher perspectivisch und da $\mathfrak{x}_1$ ebenfalls ein Doppelpunkt ist, so muß er auf dem perspectivischen Durchschnitt G_1 liegen. Der Kegelschnitt K geht in diesem Fall in das Linienpaar GG_1 über; also:

Die Pole einer Geraden, in Bezug auf alle CC^1 doppelt berührenden Kegelschnitte K_x, durch $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{x}_1$ liegen wieder auf einer Geraden durch $\mathfrak{x}_1$ oder $\mathfrak{x}$.

Sind $bb_1b_2\cdots b^1b_1^1b_2^1\cdots$ die Berührungssehnen von CC^1 mit $KK_1K_2\cdots$, $PP^1pp_1p_2\cdots$ die Polaren eines beliebigen Punktes S in Bezug auf $CC^1KK_1K_2\cdots$, so schneiden sich in einem Punkt pPb, pP^1b^1, p_1Pb_1, $p_1P^1b_1^1$, p_2Pb_2, $p_2P^1b_2^1$, $\cdots$, also sind $pp_1p_2\cdots$ Verbindungslinien entsprechender Punkte der projectivischen Punktreihen $P(bb_1b_2\cdots)$ und $P^1(b^1b_1^1b_2^1\cdots)$, daher sind $PP^1pp_1p_2\cdots$ Tangenten eines Kegelschnitts K, welchen auch die gemeinschaftlichen Sehnen rs, tu berühren, da sie die Doppelstrahlen der Involution $bb_1b_2\cdots b^1b_1^1b_2^1\cdots$ sind. — Verbindet man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ mit S und construirt zu den Verbindungslinien und den von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}_1$ ausgehenden Tangenten von CC^1 die 4ten harmonischen, den Linien $\mathfrak{x}S$ und $\mathfrak{x}_1S$ zugeordneten, Strahlen, so sind auch diese Tangenten von K; also:

Die Polaren eines Punktes S in Bezug auf alle 2 gegebene Kegelschnitte CC^1 doppelt berührenden Kegelschnitte K_x, umhüllen einen Kegelschnitt K, der auch die gemeinschaftlichen Sehnen rs, tu von CC^1 berührt.

Auch der Beweis dieses Satzes muß eine etwas veränderte Form erhalten, um ihn auf die Fälle anwenden zu können, in denen einer oder beide Kegelschnitte CC^1 in ein Punktpaar übergehen.

Die Verbindungslinien von S mit den Berührungspolen $AA_1A_2\cdots A^1A_1^1A_2^1\cdots$ seien $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots$ $\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^1\cdots$, dann ist $(\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots) \pi (\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^1\cdots)$. Es sind aber die Punkte (pbP), (p_1b_1P), (p_2b_2P), $\cdots$, (pb^1P^1), $(p_1b_1^1P^1)$, $(p_2b_2^1P^1)$, $\cdots$ die Pole von $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots$, $\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^1\cdots$ in Bezug C und C^1, also $P(pp_1p_2\cdots) \pi (\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\cdots)$ und $P^1(pp_1p_2\cdots) \pi (\mathfrak{P}^1\mathfrak{P}_1^1\mathfrak{P}_2^1\cdots)$, daher auch $P(pp_1p_2\cdots) \pi P^1(pp_1p_2\cdots)$.

Liegt der Punkt S auf der gemeinschaftlichen Sehne rs, so schneiden sich PP^1 auf rs, und da rs ein Doppelstrahl der Involution der Berührungssehnen ist, so entspricht der Punkt (PP^1) sich selbst, folglich liegen die projectivischen Punktreihen $P(bb_1b_2\cdots)$ und $P^1(b^1b_1^1b_2^1\cdots)$ perspectivisch. Der 2te Doppelstrahl tu schneidet PP^1 in entsprechenden Punkten, also schneiden sich alle Polaren auf tu, d. h.

Die Polaren eines Punktes S auf einer der gemeinschaftlichen Sehnen rs oder tu von CC^1 in Bezug auf alle doppelt berührenden Kegelschnitte K_x schneiden sich in einem Punkt der andern gemeinschaftlichen Sehne.

Sind K_z, K_z^1, K_z^{11}, $\cdots$ Kegelschnitte der Schaar K_z (Vgl. § 4), $\Sigma\Sigma^1$ die Pole von rs für CC^1, $pp^1p^2\cdots$ die Pole von rs für $K_zK_z^1K_z^{11}\cdots$, so liegen nach dem ersten Satz dieses Paragraphen $\Sigma\Sigma^1pp^1p^{11}\cdots\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1$ auf einem Kegelschnitt K. Man muß rt und su ebenfalls als 2 zur Schaar K_z gehörende Kegelschnitte betrachten. Sind $\alpha\alpha^1$ und $\beta\beta^1$ ihre Berührungspole, so liegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\Sigma\alpha r$, $\Sigma'\alpha' r$, $\Sigma\beta s$, $\Sigma'\beta' s$ in gerader Linie auf den Tangenten in **r** und **s** an **C** und **C'**; also schneiden sich $\Sigma\alpha$ und $\Sigma'\alpha'$ in **r**, $\Sigma\beta$ und $\Sigma'\beta'$ in **s**, und es geht **K** durch **r** und **s** und gehört, da er auch durch $\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 \Sigma\Sigma'$ geht, zur Schaar **M** (§ 5). — Sind $K_y K_y' K_y'' \cdots$ Kegelschnitte der Schaar K_y, so liegen $\Sigma\Sigma' \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 rs$ auch auf einem Kegelschnitt der Schaar **M**, welcher mit dem vorigen zusammenfällt, also:

Alle Pole der Sehne rs in Bezug auf alle K_y und K_z, nebst ihren Polen $\Sigma\Sigma'$ in Bezug auf CC', liegen in dem Kegelschnitt der Schaar M, welcher durch $rs\mathfrak{z}\mathfrak{z}_1\mathfrak{y}\mathfrak{y}_1$ geht.

Alle Polaren des Tangentendurchschnitts $\mathfrak{x}$ in Bezug auf alle K_y und K_z, nebst ihren Polaren $\sigma\sigma'$ in Bezug auf CC' berühren den Kegelschnitt der Schaar M (§ 6) der R, S, rt, ru, st, su zu Tangenten hat.

Folgerungen.

In Bezug auf alle Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt C doppelt berühren und 2 gemeinschaftliche Tangenten haben, 1) umhüllen alle Polaren eines Punktes 2 Kegelschnitte, von denen der eine die Sehnen rs und tu, der andere rt und su berührt, wenn die eine Tangente C in ru, die andere in st schneidet, 2) liegen alle Pole einer Geraden auf 2 Kegelschnitten, welche beide durch den Tangentendurchschnitt gehen.

In Bezug auf alle Kegelschnitte, welche einen gegebenen Kegelschnitt C doppelt berühren und durch 2 gegebene Punkte gehen, 1) umhüllen alle Polaren eines Punktes 2 Kegelschnitte, welche die Verbindungslinie der Punkte berühren; 2) liegen alle Pole einer Geraden auf 2 Kegelschnitten, von denen der eine durch die Schnittpunkte (RS) und (TU), der andere durch (RT) und (SU) geht, wenn RU die Tangenten von dem einen Punkt, ST die vom andern an C sind.

In Bezug auf alle Kegelschnitte, welche durch dieselben 4 Punkte gehen, 1) schneiden sich die Polaren eines beliebigen Punktes in einem Punkt 2) liegen alle Pole einer Geraden auf einem Kegelschnitt, welcher durch den Schnittpunkt der Diagonalen und durch die Schnittpunkte der Gegenseiten des von den 4 Punkten gebildeten Vierecks geht.

Man muß nämlich im ersten Theil die Verbindungslinien der Punktpaare als Berührungssehnen betrachten. Sind **bb'** 2 solche Berührungssehnen, so kann man sie auch ansehen als einen Kegelschnitt durch die 4 Punkte. Die projectivischen Punktreihen, in denen **bb'** von den Polaren des beliebigen Punktes geschnitten werden, haben daher im Punkt (**bb'**) einen sich selbst entsprechenden Punkt und liegen also perspectivisch.

In Bezug auf alle einem Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte 1) liegen alle Pole einer Geraden in gerader Linie; 2) umhüllen alle Polaren eines Punktes einen Kegelschnitt, welcher die beiden Diagonalen und die Verbindungslinie der Schnittpunkte der Gegenseiten berührt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In Bezug auf alle Kegelschnitte, welche durch 2 Punkte gehen, und 2 Gerade berühren 1) umhüllen alle Polaren eines Punktes 2 Kegelschnitte, welche die Verbindungslinie der Punkte berühren; 2) liegen alle Pole einer Geraden auf 2 Kegelschnitten, welche durch den Tangentendurchschnitt gehen.

In diesem letzten Fall liegen alle Berührungssehnen der Kegelschnitte K mit dem Punktpaar auf dessen Verbindungslinie und alle Berührungspole mit dem Linienpaar in seinem Schnittpunkt. Um also den allgemeinen Beweis anwenden zu können, muß man zunächst den Satz beweisen:

Für alle Kegelschnitte der Schaar K_x, welche durch 2 Punkte MN gehen und 2 Gerade mn berühren, sind die Berührungspole mit MN projectivisch zu den Berührungssehnen mit mn.

Wir betrachten **MN** als Kegelschnitt **C**, **mn** als **C'**; dann fallen mit **MN** alle Berührungssehnen **b**, mit (**mn**) alle Berührungspole $\mathbf{A}^1$ zusammen. Die Berührungspole mit **MN** seien (Fig. **XI.**) $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots$, die Berührungssehnen mit **mn** $\mathbf{b}^1\mathbf{b}_1^1\mathbf{b}_2^1\cdots$. Für alle K_x gehen alle Berührungssehnen durch **x**, für K_y durch **y** und **MN** sind durch **xy** harmonisch getrennt. — Für $K_1K_2\cdots$ ändern sich die Punkte **ABDEF** in $A_1B_1D_1E_1F_1$, $A_2B_2D_2E_2F_2,\cdots$. Die Punkte $\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\cdots$ liegen auf der festen Geraden $\mathbf{A}^1\mathbf{y}$. Da **AF**, A_1F_1, $A_2F_2\cdots$ sich in **N** schneiden, so ist $(\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots)\ \pi\ (\mathbf{F}\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2\cdots)\ \pi\ \mathbf{x}\ (\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\cdots)$, weil **BF**, B_1F_1, $B_2F_2,\cdots$ sich in **x** schneiden; ferner $\mathbf{x}\ (\mathbf{B}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2\cdots)\ \pi\ \mathbf{N}\ (\mathbf{D}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\cdots)\ \pi\ \mathbf{x}\ (\mathbf{D}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\cdots)\ \pi\ \mathbf{x}\ (\mathbf{b}^1\mathbf{b}_1^1\mathbf{b}_2^1\cdots)$, also $(\mathbf{A}\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\cdots)\ \pi\ (\mathbf{b}^1\mathbf{b}_1^1\mathbf{b}_2^1\cdots)$.

Jetzt kann der allgemeine Beweis unmittelbar angewendet werden. —

§ 14. Sind **K** und **C** 2 sich doppelt berührende Kegelschnitte mit der Berührungssehne **b** und zieht man in den Punkten $\alpha\beta\gamma\delta\cdots$ von **C** Tangenten an **C**, welche **K** in aa^1, bb^1, cc^1, $dd^1,\cdots$ schneiden, dann liegen die Schnittpunkte $\mathbf{b}_1\mathbf{c}_1\mathbf{d}_1\cdots$ von ab^1 und a^1b, ac^1 und a^1c, ad^1 und $a^1d,\cdots$ auf der Berührungssehne und es gehen auch die Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta,\cdots$ durch $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{d}_1,\cdots$. Ist $\mathbf{a}_1$ der Schnittpunkt von aa^1 mit **b**, so ist

$$a^1\ (a_1b_1c_1d_1\cdots)\ \pi\ \alpha\ (a_1b_1c_1d_1\cdots)\ \pi\ (abcd\cdots)\ \pi\ (\alpha\beta\gamma\delta\cdots).$$

Zieht man von a die 2te Tangente an **C** und nennt $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\cdots$ die Schnittpunkte derselben mit den Tangenten in $\alpha\beta\gamma\delta\cdots$, so ist die Punktreihe $(\alpha\beta\gamma\delta\cdots)$ projectivisch mit $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\cdots)$ und folglich auch $(abcd\cdots)$ projectivisch mit $(\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\cdots)$ und weil a und α_1 zusammenfallen, so hat man den Satz:

Alle Tangenten des einen von 2 sich doppelt berührenden Kegelschnitten bestimmen auf einer von ihnen und auf dem andern Kegelschnitt 2 projectivische Punktreihen, die einen entsprechend gemeinsamen Punkt haben.

Die Kegelschnitte **K** und K_1 mögen von **C** doppelt berührt werden; seien **b** und b_1 die Berührungssehnen. Bezeichnet man den einen Schnittpunkt von KK_1 mit (aa_1), weil er zu beiden Kegelschnitten gehört und zieht durch (aa_1) an **C** eine Tangente, welche **K** in a^1, K_1 in a_1^1 schneidet und **C** in α berührt; zieht man ferner eine beliebige Tangente durch η auf **C** an **C**, so schneidet diese **K** und K_1 in 4 Punkten $ee^1e_1e_1^1$ und diese sollen so bezeichnet werden, daß ae^1 und a^1e, $a_1e_1^1$ und $a_1^1e_1$ sich auf **b** und b_1 in den Punkten **E** und E_1 schneiden; dann liegen $\alpha\eta EE_1$ in gerader Linie. Alle Tangenten an **C** in den Punkten $\beta\gamma\delta\eta\varphi\cdots$ bestimmen auf **K** und K_1 2 projectivische Punktreihen $(abcde\cdots a^1b^1c^1d^1e^1\cdots)$ und $(a_1b_1c_1d_1e_1\cdots a_1^1b_1^1c_1^1d_1^1e_1^1\cdots)$, die in aa_1 einen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gemeinschaftlichen entsprechenden Punkt haben. — Auf b und b_1 werden durch die Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$, .. 2 perspectivische Punktreihen ($BCDE\ldots$) und ($B_1C_1D_1E_1\ldots$) bestimmt. Wählt man irgend 2 Punkte derselben z. B. DD_1, so schneiden die Strahlen aD und aD_1 die Kegelschnitte K und K_1 in 2 entsprechenden Punkten d^1 und d_1^1 und die Strahlen a^1D und $a_1^1D_1$ in 2 andern entsprechenden Punkten d und d_1. Die Strahlbüschel a^1 ($abc..\ a^1b^1c^1\ldots$) und a_1^1 ($a_1b_1c_1..\ a_1^1b_1^1c_1^1\ldots$) sind projectivisch und weil die entsprechenden Strahlen a^1a und $a_1^1a_1$ zusammenfallen, in perspectivischer Lage. Bezeichnet man mit ($\gamma\gamma_1$) den Schnittpunkt der Berührungssehnen b und b_1, und zieht die Linie (aa_1) ($\gamma\gamma_1$), so trifft dieselbe einen gemeinschaftlichen Punkt von KK_1, in welchem 2 entsprechende Punkte $c^1c_1^1$ der Punktreihen ($abc\ldots\ a^1b^1c^1\ldots$) und ($a_1b_1c_1\ldots\ a_1^1b_1^1c_1^1\ldots$) zusammenfallen. Die Linie ac ist also der perspectivische Durchschnitt der Strahlbüschel a^1 und a_1^1. Daraus folgt, daß die Punktreihen ($abc\ldots\ a^1b^1c^1\ldots$) und ($a_1b_1c_1\ldots\ a_1^1b_1^1c_1^1\ldots$) außer ($aa_1$) und ($c^1c_1^1$) keine entsprechend gemeinschaftlichen Punkte mehr haben können. Denn sind r und s die beiden andern Schnittpunkte von KK_1, so kann weder ar noch as durch ($\gamma\gamma_1$) gehen; noch auch können sich a^1r und a_1^1r oder a^1s und a_1^1s auf ac treffen. Man hat also den Satz:

Wenn 2 Kegelschnitte K und K_1 einen dritten C doppelt berühren, so bestimmen die Tangenten von C auf K und K_1 2 projectivische Punktreihen, welche 2 Paar zusammenfallende entsprechende Punkte besitzen.

Umkehrung.

1. Sind auf einer Geraden G und einem Kegelschnitt K 2 projectivische Punktreihen $abcd\cdots$ und $a_1b_1c_1d_1\cdots$, welche in (aa_1) einen entsprechend gemeinsamen Punkt haben, so umhüllen die Linien G, bb_1, cc_1, $\cdots$ einen Kegelschnitt C, welcher K doppelt berührt.

Denkt man sich nämlich einen Kegelschnitt C, welcher G, bb_1, cc_1 und K doppelt berührt und wäre dd_1 keine Tangente desselben, so könnte man doch von d die Tangente an ihn ziehen, welche K in 2 Punkten d_1^1 und $d_1^{1\,1}$ schneidet und es ist entweder $(abcd) \pi (a_1b_1c_1d_1^1)$ oder $\pi (a_1b_1c_1d_1^{1\,1})$. Es sei das erstere der Fall. Da nun aber auch $(abcd) \pi (a_1b_1c_1d_1)$, so muß $(a_1b_1c_1d_1) \pi (a_1b_1c_1d_1^1)$ sein, d. h. die Punkte d_1 und d_1^1 müssen zusammenfallen und dd_1 ist eine Tangente von C.

2. Zwei projectivische Punktreihen auf 2 Kegelschnitten K und K_1, welche 2 entsprechend gemeinsame Punkte haben, erzeugen einen Kegelschnitt C, welcher K und K_1 doppelt berührt.

Die Punktreihen seien $abcd\ldots$ und $a_1b_1c_1d_1\ldots$, die entsprechend gemeinsamen Punkte (aa_1), (bb_1). Ist C ein Kegelschnitt, welcher K und K_1 doppelt so berührt, daß ab durch den Schnittpunkt der Berührungssehnen geht, und welcher außerdem cc_1 berührt, so bestimmen die Tangenten von C 2 projectivische Punktreihen, welche in (aa_1) und (bb_1) entsprechend gemeinsame Punkte haben. Wäre d_1^1 der Punkt auf K_1, welcher dem Punkt d entspricht, so wäre $(abcd) \pi (a_1b_1c_1d_1^1)$. Da aber $(abcd) \pi (a_1b_1c_1d_1)$, so ist auch $(a_1b_1c_1d_1) \pi (a_1b_1c_1d_1^1)$ und die Punkte d_1 und d_1^1 müssen zusammenfallen, d. h. dd_1 ist eine Tangente.

Reye gibt von diesen Sätzen in seiner „Geometrie der Lage" andere Beweise mit Hilfe räumlicher Gebilde, der Regelflächen; doch hat er die doppelte Berührung nicht gefolgert.

Im 54ten Bande des Crelleschen Journals hat Schroeter die allgemeineren Sätze bewiesen, wenn die projectivischen Punktreihen keine entsprechend gemeinsamen Punkte haben:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Erzeugniß einer krummen Punktreihe auf einem Kegelschnitt mit einer projectivischen Punktreihe auf einer Geraden ist eine Curve von der dritten Klasse und 4ten Ordnung, welche die gegebene Gerade zur Doppeltangente hat und den gegebenen Kegelschnitt dreimal berührt.

Das Erzeugniß zweier projectivischer Punktreihen auf 2 beliebigen Kegelschnitten ist eine Curve 4ter Klasse und 6ter Ordnung, welche 3 Doppeltangenten hat und jeden der Kegelschnitte 4 Mal berührt.

Aehnlich, wie dort, können die Beweise für die speziellen Fälle dieser Sätze gegeben werden. Weil sie unabhängig bewiesen, als Ausgangspunkt für die Theorie der doppelten Berührung dienen können, so mag ihr Beweis hier eine Stelle finden.

Auf der Geraden **G** und dem Kegelschnitt **K** seien die projectivischen Punktreihen $a\,b\,c\,d\cdots$ und $a_1\,b_1\,c_1\,d_1\cdots$, welche den Punkt $(a\,a_1)$ entsprechend gemein haben. Nimmt man auf der Linie $b\,b_1$ einen beliebigen Punkt **P** und nennt $\mathfrak{P}$ den Schnittpunkt von $b\,b_1$ mit **K**, so sind die Strahlbüschel **P** $(a\,b\,c\,d\cdots)$ und $\mathfrak{P}$ $(a_1\,b_1\,c_1\,d_1\cdots)$ projectivisch und in perspectivischer Lage. Der perspectivische Durchschnitt geht durch $(a\,a_1)$ und schneidet **K** noch in einem Punkt **Q**. Dann sind Pa_1, Pb_1, **PQ** die einzig möglichen Tangenten von einem Punkt **P** an die erzeugte Curve. Da aber von jedem Punkt eine Tangente durch $(a\,a_1)$ geht, so zerfällt der Strahlbüschel $a\,a_1$, $b\,b_1$, $c\,c_1$ $d\,d_1$, $\cdots$ in einen Strahlbüschel I. Ordnung mit dem Scheitel $(a\,a_1)$ und einen II. Ordnung, dessen sämmtliche Strahlen also einen Kegelschnitt **C** umhüllen. — Um von einem Punkt **P** von $b\,b_1$ die zweite Tangente an **C** zu finden, ziehe man **Pc** und Pc_1, welche sich in η schneiden mögen, $a\eta$ und verbinde den Durchschnittspunkt e_1 von $a\eta$ und **K** mit **P**, so ist Pe_1 die zweite Tangente von **P** an **C**. Wählen wir statt des Punktes **P** den Berührungspunkt **B** von $b\,b_1$ mit **C**, und schneiden sich **Bc** und Pc_1 in β, so muß $a\beta$ durch b_1 gehen, weil von **B** sich außer $b\,b_1$ keine weitere Tangente an **C** ziehen läßt. Um also auf einer beliebigen Tangente $b\,b_1$ den Berührungspunkt **B** zu bestimmen, zieht man Pc_1 und $a\,b_1$, verbindet ihren Schnittpunkt β mit c und erhält im Durchschnitt von $b\,b_1$ mit $c\beta$ den Berührungspunkt **B**.

Wenn einer der Verbindungsstrahlen z. B. $m\,m_1$ den Kegelschnitt **K** in m_1 berührt, so muß er, wie aus dem Vorigen folgt, auch **C** in m_1 berühren. In diesem Falle geht die Polare von m in Bezug auf **K** durch m_1. Alle Polaren **abcd**$\cdots$ von $a\,b\,c\,d\cdots$ in Bezug auf **K** schneiden sich in einem Punkt Π, dem Pol von **G** und es ist Π (**abcd**$\cdots$) π $(a\,b\,c\,d\cdots)$ π $\mathfrak{B}$ $(a\,b\,c\,d\cdots)$, wenn $\mathfrak{B}$ ein Punkt von **K** ist. Beide Strahlbüschel erzeugen aber einen Kegelschnitt **K**, der durch $(a\,a_1)$ geht und **K** außer in $\mathfrak{B}$ noch in zwei Punkten m_1 und n_1 schneidet, in welchen Punkten **K** und **C** sich doppelt berühren. Somit ist die erste Umkehrung erwiesen und ebenso beweist man den reciproken Satz:

Zwei projectivische Strahlbüschel I. und II. Ordnung, die einen Strahl entsprechend gemein haben, erzeugen einen Kegelschnitt, der den vom Strahlbüschel II. Ordnung umhüllten doppelt berührt.

Man kann den Beweis auch auf folgende Art führen. Nachdem gezeigt ist, daß die erzeugte Curve ein Kegelschnitt ist, construire man die 2te Tangente von b_1 an denselben. Man zieht zu dem Zweck Pc_1 und b_1c, verbindet den Schnittpunkt dieser Linien mit $(a\,a_1)$, so schneidet die Verbindungslinie beider Punkte den Kegelschnitt **K** in einem Punkt B_1 und b_1B_1 ist die zweite Tangente von b_1. Jedem Punkt, wie b_1, entspricht ein Strahl aB, und umgekehrt jedem Strahl aB_1 ein einziger Punkt b_1. Sind nun die Strahlen aB_1, aC_1, aD_1, $\cdots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die den Punkten $b_1, c_1, d_1, \cdots$ entsprechenden, so sind die beiden Gebilde projectivisch und es ist auch $(b_1 c_1 d_1 \cdots) \pi (B_1 C_1 D_1 \cdots)$ d. h. alle Tangenten des erzeugten Kegelschnitts schneiden K in 2 projectivischen Punktreihen, folglich berühren sich C und K doppelt. Hiermit ist die 1. Umkehrung bewiesen.

Auf den Kegelschnitten K und K_1 seien 2 projektivische Punktreihen $abcd \cdots$ und $a_1 b_1 c_1 d_1 \cdots$ die in (aa_1) und (bb_1) 2 entsprechende gemeinsame Punkte haben. Die Linien aa_1, bb_1, cc_1, $dd_1 \cdots$ werden eine Curve C einhüllen. Um ihre Klasse zu bestimmen, ziehe man durch einen beliebigen Punkt P Gerade nach $abcd \ldots$, welche K noch in $a^1 b^1 c^1 d^1 \cdots$ treffen. Ist dann A ein beliebiger Punkt von K, so ist das Büschel $A(abcd \cdots a^1 b^1 c^1 d^1 \cdots)$ involutorisch. Ist A_1 ein beliebiger Punkt von K_1, so ist $A(abcd \cdots) \pi A_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 \cdots)$. Das Erzeugniß der Büschel A und A_1 ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{K}$. Wird dieser von den Strahlen des Büschels $A(abcd \cdots a^1 b^1 c^1 d^1 \cdots)$ in $\alpha\beta\gamma\delta \cdots \alpha^1\beta^1\gamma^1\delta^1 \cdots$ geschnitten, so treffen sich $\alpha\alpha^1, \beta\beta^1, \gamma\gamma^1, \cdots$ in einem Punkt R. Deshalb ist auch $A_1 (\alpha\beta\gamma\delta \cdots \alpha^1\beta^1\gamma^1\delta^1 \cdots)$ involutorisch. Die Strahlen dieses Büschels schneiden K_1 in den Punkten $a_1 b_1 c_1 d_1 \cdots a_1^1 b_1^1 c_1^1 d_1^1 \cdots$, welche $abcd \ldots a^1 b^1 c^1 d^1 \ldots$ entsprechen und $a_1 a_1^1$, $b_1 b_1^1$, $c_1 c_1^1, \ldots$ schneiden sich in einem Punkt P_1. Um P und P_1 sind die projektivischen Strahlbüschel $P(abcd \ldots)$ und $P_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$ entstanden und erzeugen einen Kegelschnitt, welcher durch (aa_1) und (bb_1) geht, K in mn, K_1 in $m^0 n^0$ schneidet, dann sind Pa, Pb, Pm^0, Pn^0 und $P_1 a_1$, $P_1 b_1$, $P_1 m$, $P_1 n$ die möglichen Tangenten von P und P_1 an C. Da aber von jedem Punkt P 2 Tangenten durch (aa_1) und (bb_1) gehen, so zerfällt der Strahlbüschel IV. Ordnung aa_1, bb_1, cc_1, $dd_1 \ldots$ in 2 Büschel I. und einen II. Ordnung, so daß C ein Kegelschnitt ist. —

Nimmt man P auf einer Tangente cc_1 und statt der Punkte AA_1 die Durchschnitte von cc_1 mit K und K_1, so geht der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ in die Gerade ab über. Dem Punkt P entspricht ein Punkt P_1 und die Büschel $P(abcd \ldots)$ und $P_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$ erzeugen einen Kegelschnitt M, der durch $abc_1 PP_1$ geht und K nur noch in einem Punkt Q schneidet, so daß PQ die 2te Tangente von P an C ist. Bewegt sich P auf cc_1 und gelangt in die Lagen $P'P'' \ldots$, so bewegt sich P_1 auf der, der Geraden Pc, entsprechenden Geraden. Sind $P_1' P_1'' \ldots$ die entsprechenden Punkte, so erzeugen die projectivischen Büschel P' und P_1', P'' und P_1'', ... Kegelschnitte M', M'', .. welche, außer in abc_1, K_1 noch in $Q'Q'' \ldots$ schneiden. Die Punktreihe $(QQ'Q'' \ldots)$ ist projektivisch mit $(P'P_1'P_1'' \ldots)$. Ist Π der Berührungspunkt auf cc_1, so entspricht ihm ein Punkt Π_1 und die Büschel Π und Π_1 erzeugen einen Kegelschnitt M, welcher durch ab geht und K_1 in c_1 berührt. Rechnet man also c_1 zur Reihe $QQ'Q'' \ldots$ und entspricht ihm Π_1 in der Reihe $P_1 P_1' P_1'' \ldots$, so ist Π, welcher dem Π_1 in der Reihe $PP'P'' \ldots$ entspricht, der Berührungspunkt von cc_1 mit C. Einfacher findet man den Berührungspunkt auf cc_1, wenn man noch andere Tangenten dd_1, ee_1, ff_1, $gg_1 \ldots$, zu Hilfe nimmt. Die Tangenten cc_1 und dd_1 werden von ee_1, ff_1, $gg_1, \ldots$ in projektivischen Punktreihen geschnitten. Construirt man auf cc_1 den dem Schnittpunkt von cc_1 und dd_1 entsprechenden Punkt, so ist dieser der Berührungspunkt Π. Aus der ersten Construction von Π läßt sich erkennen, daß, wenn eine Tangente mm_1 von C auch K_1 berührt, m_1 ihr gemeinschaftlicher Berührungspunkt mit C und K_1 ist, daß sich also C und K_1 in m_1 berühren. — Nimmt man die Polaren **abcd** ... von $abcd \ldots$ in Bezug auf K_1, so bilden dieselben einen Büschel II. Ordnung und es ist $(\mathbf{abcd} \ldots) \pi (abcd \ldots) \pi (a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$. Die Polare von a ist die Tangente in (aa_1) an K_1 und die projectivischen Büschel $a_1 (a_1 b_1 c_1 d_1 \ldots)$ und $(\mathbf{abcd} \ldots)$, welche (aa_1) oder **a** entsprechend gemein haben, erzeugen einen Kegelschnitt, welcher durch (aa_1), (bb_1) geht und K_1 noch in 2 Punkten $m_1 n_1$ schneidet, in denen C den K_1 berührt. Ebenso zeigt man, daß C den Kegelschnitt K doppelt berührt und damit ist auch die 2te Umkehrung erwiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es mag an dieser Stelle erwähnt werden, daß man ähnliche allgemeine Sätze, wie die von Schröter gegebenen, erhält, wenn man statt projectivischer Punktreihen ein-zweideutige Punktreihen nimmt. Wenn nämlich eine Punktreihe abcd... einer Punktinvolution $a_1\ a_2\ b_1\ b_2\ c_1\ c_2 \cdots$ so zugeordnet wird, daß jedem Punkt a ein Punktpaar $a_1\ a_2$ und jedem Punkt a_1 und a_2 eines Punktpaars derselbe Punkt a entspricht, so nennt Weyr in seiner „Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde" diese beiden Punktreihen in ein-zweideutiger Beziehung. Dann gelten die Sätze:

Zwei ein-zweideutige Punktreihen auf einem Kegelschnitt erzeugen eine Curve III. Klasse und IV. Ordnung, welche den Kegelschnitt 3 Mal berührt und eine Doppeltangente hat.

Zwei ein-zweideutige Punktreihen auf einer Geraden G und einem Kegelschnitt K, erzeugen, wenn die eindeutige Reihe auf G ist, eine Curve IV. Klasse, VI. Ordnung, welche K 4 Mal berührt und 3 Doppeltangenten hat, von denen eine G ist.

Zwei ein-zweideutige Punktreihen auf einer Geraden G und einem Kegelschnitt K erzeugen, wenn die zweideutige Reihe auf G ist, eine Curve V. Klasse VIII. Ordnung, welche K fünfmal berührt und G zu einer 4fachen Tangente hat.

Der beschränkte Raum erlaubt es nicht, die Beweise dieser Sätze mitzutheilen und zu zeigen, wie man durch Spezialisirung wieder zu Kegelschnitten gelangt.

§. 15. Die konjugirten Durchmesser eines Kegelschnitts bilden einen involutorischen Strahlbüschel, welcher bei der Hyperbel 2 reelle, bei der Ellipse 2 imaginäre Ordnungsstrahlen hat. Die beiden letzteren schneiden die unendlich ferne Gerade in 2 imaginären Punkten. Wird der involutorische Büschel von der Art, daß je 2 konjugirte Durchmesser auf einander senkrecht stehen, so heißt der Kegelschnitt ein Kreis. Alle Kreise müssen aber dieselben beiden imaginären Punkte gemeinschaftlich haben, weil die Strahlen der involutorischen Büschel der Durchmesser parallel sind und je 2 parallele Strahlen die unendlich ferne Gerade in demselben Punkt schneiden. Diese beiden Punkte mögen Normalpunkte der Ebene heißen. Die nach ihnen gerichteten imaginären Strahlen müssen als Tangenten der Kreise in jenen Punkten angesehen werden und concentrische Kreise berühren sich also in ihren gemeinschaftlichen imaginären Punkten doppelt.

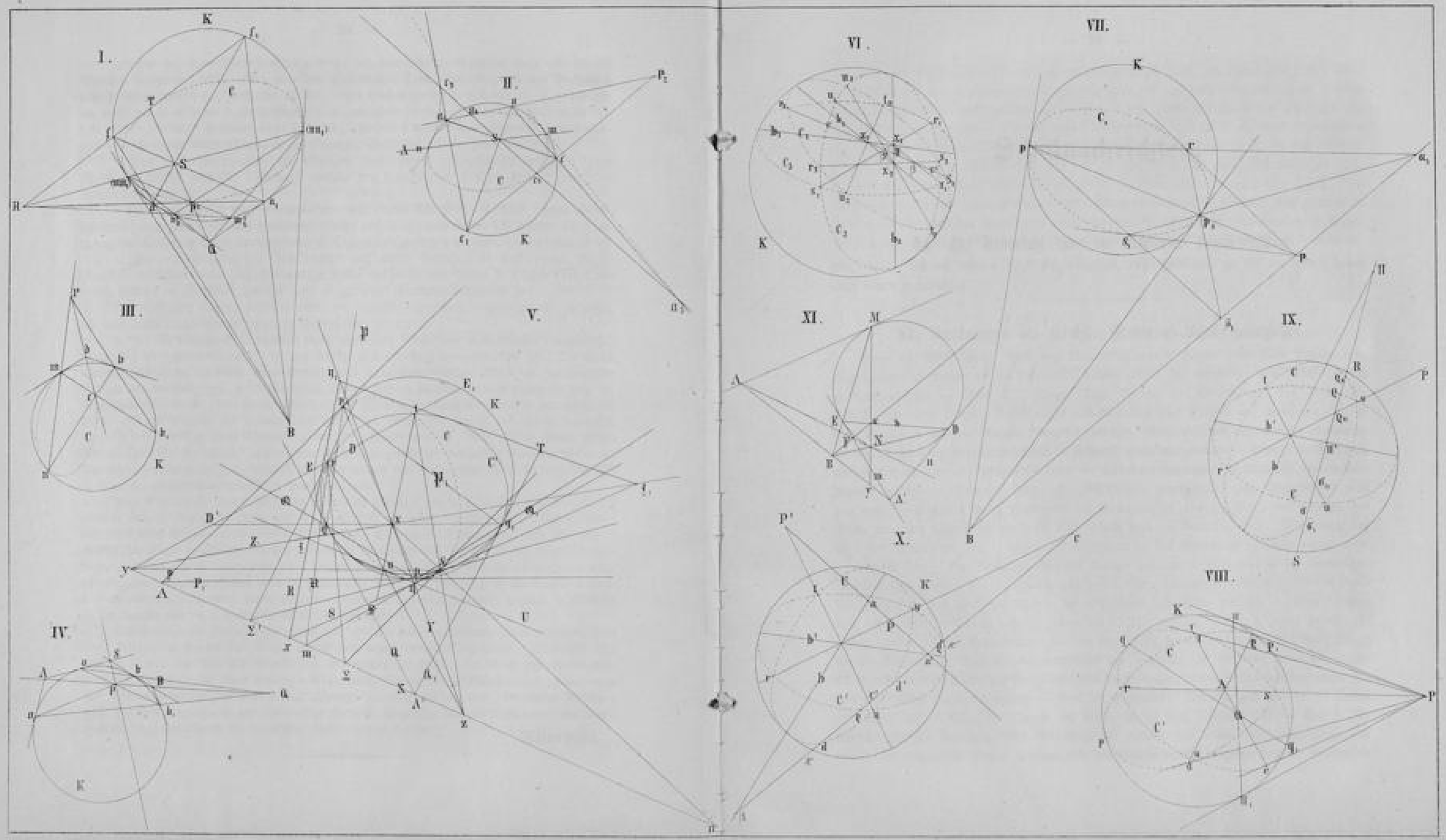
Jeder Brennpunkt eines Kegelschnitts ist dadurch bestimmt, daß je 2 Strahlen desselben, die auf einander senkrecht stehen, in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirte Strahlen sind. Dieselben bilden also einen rechtwinkligen involutorischen Strahlbüschel. Die von den Brennpunkten nach den Normalpunkten der Ebene gerichteten Strahlen müssen als Tangenten des Kegelschnitts in ihnen betrachtet werden. Haben also 2 Kegelschnitte einen Brennpunkt gemein, so kann man sie als demselben Winkel eingeschrieben ansehen; haben sie beide Brennpunkte gemein, so kann man sie als demselben Vierseit eingeschrieben betrachten; haben sie einen Brennpunkt und seine Directrix gemein, so berühren sie sich doppelt und die Directrix ist die Berührungssehne.

Auf Grund dieser Betrachtungen erhält man aus den früher entwickelten Sätzen eine große Zahl neuer Sätze, über concentrische Kreise, einfach und doppelt confocale Kegelschnitte. Besonders folgt auch die Theorie der Aehnlichkeitspunkte und Potenzlinien der Kreise, die Lösung des Berührungsproblems und ein großer Theil derjenigen Sätze, welche Steiner in den Abhandlungen „Ueber einige neue Bestimmungsarten der Curven II. Ordnung" im 45ten Bande und „Elementare Auflösung einer geometrischen Aufgabe und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte" im 37ten Bande des Crelle'schen Journals entwickelt hat.

Milinowski.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf