Die

Kopernikanischen Sehnen- und Dreiecksberechnungen.

Kopernikus trägt in der Praefatio und in dem ersten Buche seines Werkes „de revolutionibus orbium coelestium“ die Behauptung vor, dass die Umläufe der Himmelskörper, welche uns so überaus verwickelt und unregelmässig erscheinen und bisher nicht in genügender Weise erklärt werden konnten, sich als sehr einfache und regelmässige ergeben, wenn angenommen wird, dass die Sonne unbeweglich sei, dagegen unser Wohnsitz, die Erde, gewisse Bewegungen vollziehe, welche zugleich in ihren Einzelnheiten von ihm angegeben und erörtert werden. (Atque ita ego positis motibus, quos terrae infra in opere tribuo, multa et longa observatione tandem reperi, quod si reliquorum siderum errantium motus ad terrae circulationem conferantur et supputentur pro cujusque sideris revolutione, non modo illorum phaenomena inde sequantur, sed et siderum atque orbium omnium ordines et magnitudines, et coelum ipsum ita connectatur, ut in nulla sui parte possit transponi aliquid, sine reliquarum partium ac totius universitatis confusione.) Demnächst beabsichtigt er, durch Berechnung zu ermitteln, wie die Umläufe der Himmelskörper den Bewohnern der Erde erscheinen müssen, wenn wirklich der Erde jene Bewegungen zukommen (cum tres in summa telluris motus exposuerimus, quibus polliciti sumus apparentia siderum omnia demonstrare), und nachzuweisen, dass sich durch diese Berechnung die nämlichen Erscheinungen ergeben, welche von den Bewohnern der Erde wirklich wahrgenommen werden. Bei dieser Ableitung befindet sich Kopernikus häufig in der Lage, zu einem der Grösse nach gegebenen Kreisbogen die zugehörende Sehne, und umgekehrt, bestimmen zu müssen, oder gewisse Seiten und Winkel eines Dreiecks, welche bekannt sind, zu benutzen, um andere nicht bekannte Seiten und Winkel dieses Dreieckes zu berechnen. Kopernikus verschafft sich daher zunächst die hierzu erforderlichen Hülfsmittel, und schaltet zu diesem Zwecke zwischen dem ersten und dem zweiten Buche seines Werkes eine Reihe von rein mathematischen Entwickelungen ein. Der Inhalt der letzteren soll im Folgenden angegeben werden. In demselben sind drei Abschnitte zu unterscheiden:

In dem ersten Abschnitte wird der Zusammenhang ermittelt, welcher zwischen einem Kreisbogen, dem zu diesem gehörenden Centriwinkel, der zugehörenden Sehne und dem Radius des Kreises Statt findet. Es ergiebt sich, dass, wenn gewisse von diesen Grössen gegeben sind, die nicht gegebenen Grössen durch Rechnung gefunden werden können. Die Ergebnisse stellt Kopernikus zu einem besonderen Verzeichnisse, Canon genannt, zusammen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der zweite Abschnitt beschäftigt sich in gleicher Weise mit dem Zusammenhange, welcher zwischen den Seiten und Winkeln des ebenen Dreieckes Statt findet.

Der dritte Abschnitt enthält das Nämliche in Betreff des sphärischen Dreieckes.

I.

Es handelt sich hier hauptsächlich darum, das Verhältniss zu bestimmen, in welchem, wenn ein Bogen oder der zu ihm gehörende Centri-Winkel gegeben ist, die zugehörende Sehne zu dem Radius des Kreises steht. Zu diesem Zwecke wird überall die Sehne in solchen Theilen ausgedrückt, deren 100000 den Radius des Kreises ausmachen. Die Centri-Winkel und Bögen werden in Graden ausgedrückt, und zwar so, dass ein Winkel von 180 Grad zwei rechte Winkel beträgt, und ein Bogen von 360 Grad der Peripherie des Kreises gleich ist. Hierdurch wird bewirkt, dass 1 Grad Bogen mit 1 Grad Centri-Winkel zusammen gehört, und die Sehne eines gegebenen Bogens gleich ist der Sehne eines Centri-Winkels, welcher mit dem Bogen gleiche Anzahl von Graden hat.

Da durch die Elemente der Geometrie das Verhältniss gefunden wird, in welchem der Radius zu der Seite des einbeschriebenen regelmässigen Dreieckes, Vierecks, Fünfecks, Sechseckes und Zehnecks steht, so kann man sofort zu den Bögen von 120, 90, 72, 60, 36 die Sehnenlängen berechnen; sie betragen beziehungsweise 173205, 141422, 117557, 100000, 61803. — Die Seite des Sechseckes ist nämlich dem Radius gleich. Das Quadrat der Seite des Viereckes ist das Doppelte des Quadrates des Radius. Das Quadrat der Seite des Dreieckes (Euklid 13, 12) ist das Dreifache des Quadrates des Radius. Die Seite des Zehneckes (Euklid 13, 5 und 9) ist das grössere Stück des nach äusserem und mittlerem Verhältnisse getheilten Radius. Das Quadrat der Seite des Fünfeckes (Euklid 13, 10) ist gleich der Summe der Quadrate der Seite des Zehneckes und des Radius.

Ferner kann, wenn die Sehne eines Bogens bekannt ist, die Sehne desjenigen Bogens berechnet werden, welcher mit dem vorigen zusammen einen Halbkreis beträgt; die Summe der Quadrate der beiden Sehnen ist nämlich gleich dem Quadrate des Durchmessers des Kreises. Da zu den Bögen 36 und 72 die Sehnen 61803 und bz. 117557 gehören, so findet man zu den Bögen 144 und 108 die Sehnen 190211 und resp. 161803.

Zur ferneren Verwendung dieser Ergebnisse bedient sich Kopernikus zunächst des ptolemäischen Lehrsatzes: Das Rechteck der Diagonalen eines in den Kreis beschriebenen Viereckes ist gleich der Summe der Rechtecke von je zwei gegenüber liegenden Seiten. (Kopernikus gründet seine Ausführungen überall auf die von ihm citirten Elemente des Euklid. Da der vorstehende Lehrsatz von Euklid nicht gegeben wird, so theilt Kopernikus auch den Beweis desselben mit. Sein Beweis ist der gewöhnliche. Koppe Planimetrie §. 232.)

Kopernikus zeigt sodann, dass, wenn die Sehnen zweier Bögen gegeben sind, die Sehne der Differenz dieser Bögen gefunden werden kann. Zu den beiden Bögen AB (Fig. 1) und AC kennt man die zugehörenden Sehnen; man kann nun die zu dem Bogen BC gehörende Sehne berechnen. Wenn nämlich AD der zu dem Punkte A gehörende Durchmesser ist, so ist auch die Sehne CD bekannt, weil sie zu demjenigen Bogen gehört, welcher mit dem Bogen AC zusammen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Halbkreis beträgt. Mit Ausnahme der Seite BC kennt man nun alle Seiten des Viereckes ABCD und auch dessen beide Diagonalen. Man kennt also das Rechteck der beiden letzteren so wie das Rechteck der beiden Seiten AB und CD, kann also durch Subtraction das Rechteck der beiden Seiten AD und BC finden. Da aber AD bekannt ist, so ist jetzt auch die Seite BC gefunden. — Die zu den beiden Bögen 72 und 60 gehörenden Sehnen sind bereits gefunden. Man kann daher die zu dem Bogen 12 gehörende Sehne berechnen, sie beträgt 20905.

Wenn die zu einem Bogen gehörende Sehne bekannt ist, so kann auch die zu der Hälfte des Bogens gehörende Sehne berechnet werden. — Es sei BC (Fig. 2) der Bogen, dessen Sehne gegeben ist. Aus dem Mittelpunkt E des Kreises fälle man auf die Sehne BC das Loth EF und verlängere es, bis es den Bogen BC in D schneidet. Jeder der beiden Bögen BD und CD ist nun die Hälfte des Bogens BC. Dann ziehe man die beiden Durchmesser DG und CA. Da die beiden Dreiecke ABC und EFC sich als ähnlich ergeben, so hat man, weil CF die Hälfte von CB ist, auch EF als Hälfte von AB. Da aber Sehne BC gegeben, so kennt man auch Sehne AB, demnach auch EF, und weiter DF als den um EF verminderten Radius. Nun ist das Dreieck GBD rechtwinklig und BF senkrecht auf DG, folglich das Quadrat der Sehne BD gleich dem Rechtecke des Segmentes DF und des Durchmessers DG. Die Sehne BD kann daher gefunden werden. — Indem man dieses Ergebniss auf den Bogen 12 und weiterhin anwendet, findet man zu den Bögen 12, 6, 3, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ die Sehnenlängen beziehungsweise 20905, 10467, 5235, 2618, 1309.

In ähnlicher Weise, wie zu der Differenz zweier Bögen, kann auch die zu der Summe zweier Bögen gehörende Sehne gefunden werden, wenn die Sehnen der einzelnen Bögen gegeben sind. — Der Bogen AC (Fig. 3) sei die Summe der Bögen AB und BC, die Sehnen der letzteren seien gegeben. Es sei F der Mittelpunkt des Kreises. Man ziehe die beiden Durchmesser AD und BE. Mit den Sehnen AB und BC sind auch die Sehnen BD resp. CE gegeben. Weil noch DE = AB erwiesen werden kann, so sind mit Ausnahme der Seite CD alle Seiten des Viereckes BCDE und dessen beide Diagonalen bekannt. Man kann daher mit Anwendung des ptolemäischen Lehrsatzes die Seite CD berechnen. Diese aber ist Sehne des Bogens CD, welcher mit dem Bogen AC zusammen einen Halbkreis beträgt; daher kann auch die Sehne AC gefunden werden. (Es wird dem Leser nicht entgehen, dass für diesen Punkt eine einfachere Ableitung gegeben werden kann, welche der für die Bogen-Differenz gegebenen analog ist. Man kann, wenn BC nicht als Sehne sondern als Diagonale bezeichnet wird, die ganze dort gegebene Ableitung fast wörtlich und buchstäblich hierher übertragen.) Nun ist 1309 die Sehne des Bogens $\frac{3}{4}$. Wenn daher die Sehne irgend eines Bogens gegeben ist, so kann man mit Hülfe des Vorigen die Sehne des um $\frac{3}{4}$ vergrösserten Bogens berechnen. Man würde zur Berechnung der Sehne nicht im Stande sein, wenn es sich um den um 1 vergrösserten Bogen handelte, da die Sehne des Bogens 1 von uns noch nicht gefunden wurde. Kopernikus weiss sich jedoch hierbei auf eine für seinen Zweck genügende Weise zu helfen, indem er die folgende interessante Überlegung anstellt:

Wenn zwei ungleiche Bögen, jeder kleiner als ein Quadrant, gegeben sind, so ist das Verhältniss des grösseren Bogens zu dem kleineren Bogen grösser als das Verhältniss der zugehörenden Sehnen. — Um dieses zu beweisen, sei Bogen ABC (Fig. 4.) in B so getheilt, dass Bogen BC > BA. Nun soll $\frac{\text{Bogen BC}}{\text{Bogen BA}} > \frac{\text{Sehne BC}}{\text{Sehne BA}}$ bewiesen werden. — Man halbire den Winkel ABC durch die Sehne BD, dann ist Sehne AD = CD, also Dreieck ADC gleichschenklig, und die Grundlinie AC wird durch ein auf dieselbe aus D gefälltes

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Loth DF in F halbirt. Ferner wird AC durch BD in E geschnitten und zwar so, dass man hat EC : EA = Sehne BC : Sehne BA. Nun ist aber p. h. Bogen BC > Bogen BA, daher auch Sehne BC > Sehne BA, und daher, in Folge der gefundenen Proportion, EC > EA. Demnach muss der Punkt F in EC liegen, und da DF senkrecht auf AC, so hat man DA > DE > DF. Wenn daher ein aus D mit dem Radius DE beschriebener Kreis die Linie DA in H, DF in I schneidet, so muss H zwischen D und A, I dagegen in der Verlängerung von DF liegen. Daher hat man Sector EDI > Dreieck EDF und Sector EDH < Dreieck EDA, also $\frac{\text{Sector EDI}}{\text{Sector EDH}} > \frac{\text{Dreieck EDF}}{\text{Dreieck EDA}}$. Hieraus ergiebt sich durch eine leicht zu verfolgende Schlussweise:

$$\frac{\text{Winkel EDI}}{\text{Winkel EDH}} > \frac{EF}{EA},\ \frac{\angle EDI + EDH}{EDH} > \frac{EF + EA}{EA},\ \frac{\angle IDH}{\angle EDH} > \frac{AF}{AE},\ \frac{\angle 2IDH}{\angle EDH} > \frac{2AF}{AE},$$

$$\frac{\angle ADC}{\angle EDH} > \frac{AC}{AE},\ \frac{\angle ADC - EDH}{\angle EDH} > \frac{AC - AE}{AE},\ \frac{\angle BDC}{\angle BDA} > \frac{EC}{EA},\ \frac{\text{Bogen BC}}{\text{Bogen BA}} > \frac{\text{Sehne BC}}{\text{Sehne BA}},$$

quod erat demonstrandum.

Dieses wird nun benutzt, um zu folgern: Die Länge eines Bogens ist zwar grösser als die Länge der zu ihm gehörenden Sehne, und darum das Verhältniss von beiden grösser als die Einheit. Jedoch wird, wenn der zweite Endpunkt des Bogens sich dem ersten Endpunkte nähert und hierdurch die Länge von Bogen und Sehne abnehmen, ihr Unterschied immer weniger bemerkbar, und ihr Verhältniss nähert sich immer mehr der Einheit. Das Verhältniss wird der Einheit gleich, wenn der zweite Endpunkt des Bogens mit dem ersten zusammen fällt. Man darf daher annehmen, dass es Bögen giebt, welche so klein sind, dass jeder sich von der ihm angehörenden Sehne nicht merklich unterscheidet. Bei derartigen Bögen wird sich dann das Verhältniss zweier Bögen von dem Verhältnisse ihrer Sehnen nicht merklich unterscheiden. Für die Bögen 3 und $1\frac{1}{2}$ hat man als Sehnen gefunden 5235 und 2618, und hierbei ist wirklich $\frac{3}{1\frac{1}{2}} > \frac{5235}{2618}$. Allein für den Bogen $\frac{3}{4}$ hat man die Sehne 1309. Nach dem bewiesenen Satze sollte nun $\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} > \frac{2618}{1309}$ sein. Allein diese beiden Verhältnisse sind gleich. Hieraus folgt, dass bei der den Sehnenberechnungen zum Grunde liegenden Grösse des Radius der Fehler unmerklich ist, welchen man begeht, wenn man bei Bögen unter $1\frac{1}{2}$ das Verhältniss der Bögen dem Verhältnisse ihrer Sehnen gleich setzt. Dies zugegeben, sind wir nun berechtigt, die zu den Bögen 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ gehörenden Sehnen zn 1745, $872\frac{1}{2}$, 582 anzunehmen.

Man kann nun sämmtliche Bögen (und Winkel) von 0 bis 180 in einer Reihenfolge aufstellen, so dass jeder von ihnen um $\frac{1}{3}$ Grad grösser ist als der vorige. In dem bisher Abgeleiteten besitzt man dann hinreichende Mittel, um für jeden dieser Bögen die zugehörende Sehne zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnung stellt Kopernikus zu einem Verzeichnisse, welches er Canon nennt, zusammen. Nun sind aber (wie sich später ergeben wird) die Anwendungen, für welche der Canon bestimmt ist, der Art, dass meistentheils nicht mit den Sehnen selbst, sondern mit ihren Hälften gerechnet wird. Auch gehören öfters nicht die Bögen selbst, sondern deren Hälften zu den in der jedesmaligen Erörterung vorkommenden Stücken. Mit Rücksicht hierauf giebt Kopernikus seinem Canon schon gleich die Einrichtung, dass die eine Columne einen Bogen und hierneben die andere Columne die Hälfte der zu dem doppelten Bogen gehörenden Sehne (semissis subtensae duplae circumferentiae) enthält. Die Bögen erstrecken sich dann auf das Gebiet von 0 bis 90 und haben das Intervall $\frac{1}{6}$ Grad. Da z. B. zu dem Bogen 90 die Sehne 141422 gehört, so befindet sich in dem Canon in der Columne der Bögen die Zahl 45, und neben derselben die Zahl 70711 als sem. subt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dupl. c. Mit Hülfe des Canon kann man nun auch umgekehrt, wenn eine Sehne in Theilen des Radius gegeben ist, nach Halbirung derselben sofort die Anzahl der Grade der Hälfte des Bogens, welcher zu der gegebenen Sehne gehört, finden. Endlich wird, wenn die Länge der halben Sehne und die Grade der Hälfte des zugehörenden Bogens bekannt sind, durch den Canon unmittelbar angegeben, in wie viel gleiche Theile man die halbe Sehne theilen muss, um den 100000sten Theil des Radius zu erhalten. — Die Grade eines Peripherie-Winkels betragen die Hälfte der Grade des zugehörenden Bogens. Man kann daher die Grade des Canon ansehen als Grade eines Peripherie-Winkels, für welche die andere Columne die Hälfte der zugehörenden Sehne, in Theilen des Radius ausgedrückt, angiebt. Hieraus folgt, dass man neben den Graden eines Dreieckswinkels unmittelbar aus dem Canon die Hälfte der gegenüber liegenden Dreiecksseite, in Theilen des Radius des umschriebenen Kreises ausgedrückt, entnehmen kann.

II.

Wenn die Winkel eines Dreieckes ABC gegeben sind, so können dessen Seiten in Theilen des Radius des umbeschriebenen Kreises gefunden werden. Zu den Graden des Winkels ACB giebt nämlich der Canon unmittelbar die Hälfte der Seite AB in solchen Theilen, deren 100000 auf den Radius oder 200000 auf den Durchmesser gehen. Demnach kann man die Dreiecksseite AB und ähnlich die beiden übrigen Seiten finden.

Wenn zwei Seiten und ein Winkel eines Dreieckes gegeben sind, so können die nicht gegebenen Seiten und Winkel gefunden werden.

Dies ist zunächst klar, wenn die beiden gegebenen Seiten AB und AC gleich sind. In diesem Falle sind mit einem der Winkel auch die beiden übrigen Winkel gegeben. Zu dem Winkel ACB ergiebt dann der Canon die halbe Seite AB, also auch die Seite AB in Theilen des Radius des umschriebenen Kreises; da nun überdies die Seite AB ihrer Länge nach gegeben ist, so kann der Radius gefunden werden. Demnächst findet man mit Hülfe des gegebenen Winkels BAC auch die Hälfte der Seite BC und diese Seite selbst.

Wenn die beiden gegebenen Seiten AB und AC ungleich sind und der gegebene Winkel von ihnen eingeschlossen wird, so unterscheide man, ob dieser Winkel ein rechter, ein spitzer oder ein stumpfer ist. — Ist der Winkel BAC ein rechter, so kann durch den pythagoräischen Lehrsatz die Seite BC gefunden werden. BC aber ist der Durchmesser des umschriebenen Kreises, also ist dessen Radius bekannt. Wird nun die Hälfte der gegebenen Seite AB in Theilen dieses Radius ausgedrückt, so ergiebt sich dazu aus dem Canon die Anzahl der Grade des Winkels ACB, daher auch der Winkel ABC. — Wenn der von den beiden gegebenen Seiten AB und AC eingeschlossene Winkel BAC spitz ist, so fälle man aus B auf die erforderlichen Falles verlängerte Seite AC ein Loth BD. Nun kennt man alle Winkel des rechtwinkligen Dreieckes ADB, kann also dessen Seiten in Theilen des Radius des um ADB beschriebenen Kreises ausdrücken. Dieser Kreis aber hat das gegebene AB zum Durchmesser. Folglich können die Seiten BD und AD gefunden werden Nun kann auch CD, als Differenz von AC und AD, gefunden werden. Nunmehr sind in dem rechtwinkligen Dreiecke BDC die beiden Seiten BD und DC bekannt, also können, nach dem Vorigen, dessen Seite BC und der Winkel BCD gefunden werden. — Wenn der eingeschlossene Winkel BAC stumpf ist, so wird das aus B auf CA gefällte Loth dessen über A

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hinaus gezogene Verlängerung in D treffen. Mit einer der vorigen ganz ähnlichen Schlussweise können jetzt wieder, durch Betrachtung der beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und CDB, BD, AD, CD, dann auch die Seite BC und der Winkel BCD gefunden werden.

Endlich ist noch der Fall zu erörtern, dass mit den beiden gegebenen Seiten AB und AC ein nicht eingeschlossener Winkel, z. B. ABC, gegeben ist. Da man den Winkel ABC kennt, so entnimmt man zu demselben aus dem Canon die Hälfte der ihm gegenüber liegenden Seite AC, ausgedrückt in Theilen des Radius. Nun ist aber die Länge von AC gegeben, also kann dieser Radius gefunden werden. Jetzt ist man im Stande, auch die Hälfte der anderen gegebenen Seite AB in Theilen des Radius auszudrücken und hierzu aus dem Canon die Anzahl der Grade des Winkels ACB zu entnehmen. Dann kennt man den dritten Winkel BAC und entnimmt zu demselben aus dem Canon die Hälfte der Seite BC in Theilen des bekannten Radius ausgedrückt. Hierdurch ist Seite BC gefunden.

Für die noch rückständige Dreiecks-Aufgabe, die Winkel eines Dreieckes zu bestimmen, dessen drei Seiten gegeben sind, giebt Kopernikus zwei Lösungen.

Erste Lösung. Ist das Dreieck gleichseitig, so ist jeder Winkel ohnehin bekannt. — Ist das Dreieck gleichschenklig, so verhält sich offenbar der Schenkel zur Grundlinie, wie der Radius eines Kreises zu derjenigen Sehne, deren Centriwinkel gleich ist dem Winkel an der Spitze des gegebenen gleichschenkligen Dreieckes. Drückt man daher die halbe Grundlinie in Theilen des Schenkels aus (den ganzen Schenkel zu 100000) und sucht dieselbe in der Sehnen-Columne des Canon, so findet man hierzu die Anzahl der Grade des halben Winkels an der Spitze. Demnach sind alle Winkel des gleichschenkligen Dreieckes zu finden. — Ist das Dreieck ABC ungleichseitig und BC die grösste der drei Seiten, so muss der Winkel ACB wie der Winkel ABC ein spitzer sein. Das aus A auf BC gefällte Loth AD trifft nun CB zwischen B und C in D. Da der Winkel ACB spitz, so ist (Eucl. 2, 13) das Quadrat der ihm gegenüber liegenden Seite AB kleiner als die Summe der Quadrate der ihn einschliessenden Seiten AC und BC, und zwar ist der Unterschied gleich dem doppelten Rechtecke von BC und CD. Demnach kann dieses Rechteck als bekannt angesehen werden, und da man seine Seite BC kennt, so findet man CD, darum auch BD. In jedem der beiden Dreiecke ADC und ADB sind nun zwei Seiten und ein Winkel bekannt, man kann demnach die beiden Winkel ACB und ABC nach dem Vorigen finden.

Zweite Lösung. Auf eine andere (aliter) und wie er vermeint bequemere Weise (commodius forsitan) löst Kopernikus die vorstehende Aufgabe unter Bezugnahme auf Euclid 3, 36. Wenn man $CB < CA$ (Fig 5) voraussetzt, so beschreibe man aus C mit dem Radius CB einen Kreis. Dieser schneidet CA in D, die Verlängerung von AC in F, und die dritte Seite AB oder deren Verlängerung im Punkte E. Das Quadrat der aus A an den beschriebenen Kreis zu legenden Tangente ist nun gleich dem Rechtecke, dessen Seiten AF und AD sind; es ist aber auch gleich dem Rechtecke, dessen Seiten AB und AE sind. Die beiden bezeichneten Rechtecke sind demnach einander gleich. Von dem ersten derselben sind die beiden Seiten AF und AD (weil CB und CA gegeben sind) bekannt, von dem zweiten die Seite AB. Die nicht gegebene Seite AE desselben kann daher berechnet werden. Daher kann weiter auch BE gefunden werden. In dem gleichschenkligen Dreiecke BCE kennt man nun alle drei Seiten, kann also nach der zweiten Eventualität der vorigen Lösung den Winkel CBA finden. Die Bestimmung der beiden anderen Winkel geschieht dann durch Anwendung der bereits behandelten Lösungen. Zur Ausführung macht es übrigens keinen Unterschied, ob die Seite AB selbst oder deren Verlängerung von dem beschriebenen Kreise geschnitten wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III.

Ein sphärisches Dreieck wird auf der Oberfläche einer Kugel von Bögen dreier Hauptkreise eingeschlossen. Jeder Winkel dieses Dreieckes wird durch den Bogen gemessen, welchen seine Schenkel aus demjenigen Hauptkreise heraus schneiden, welcher den Scheitel des Winkels zum Pol hat. Der herausgeschnittene Bogen verhält sich nämlich zu dem ganzen Kreisumfange, wie der Dreieckswinkel zu vier Rechten. Die zu dem Doppelten dieses Bogens gehörende Sehne gehört demnach auch zu dem doppelten Dreieckswinkel.

Unter Bezugnahme auf Euklid 11, 23 bemerkt nun Kopernikus, dass aus drei ebenen Winkeln, wenn die Summe je zweier derselben grösser ist als der dritte Winkel, ein körperliches Dreieck construirt werden kann. Diese Winkel aber gehören dann als Centriwinkel zu drei Bögen, welche ein sphärisches Dreieck auf der Oberfläche derjenigen Kugel einschliessen, deren Mittelpunkt in die Spitze der körperlichen Ecke fällt. Demnach kann auch aus drei Bögen einer Kugel, wenn die Summe je zweier derselben grösser ist als der dritte Bogen, ein sphärisches Dreieck auf der Oberfläche der Kugel construirt werden. (Die Bezeichnung „Bogen" ist immer als „Bogen eines Hauptkreises" zu verstehen.)

Jede Seite eines sphärischen Dreiecks muss kleiner als ein Halbkreis sein.

Kopernikus beweist nun zunächst den höchst wichtigen Satz: **Wenn ein Winkel des sphärischen Dreiecks ein rechter ist, so verhält sich die der doppelten ihm gegenüber liegenden Seite angehörende Sehne zu der dem Doppelten einer anderen Seite angehörenden Sehne, wie der Durchmesser der Kugel zu der Sehne des Doppelten desjenigen Winkels, welcher jener anderen Seite gegenüber liegt.** Das sphärische Dreieck ACB (Fig. 6) sei bei C rechtwinklig. Man verlängere die Seiten AC und AB zu den Quadranten ACE und resp. ABD. Der Mittelpunkt der Kugel sei F. Nun ist der sphärische Winkel AED ein rechter, folglich Ebene EDF senkrecht auf AEF. Da Winkel ACB ein rechter, so ist Ebene BCF senkrecht auf AEF. — Nun fälle man aus B auf AF das Loth BG, aus B auf CF das Loth BI, und ziehe GI. Noch fälle man aus D auf EF das Loth DK. — Da nun DK $\perp$ EF und Ebene EDF $\perp$ AEF, so folgt DK $\perp$ AEF. Und da BI $\perp$ CF und Ebene BCF $\perp$ AEF, so folgt BI $\perp$ AEF, also Winkel BIG ein rechter. Die Linien BI und DK, beide senkrecht auf der Ebene AEF, sind parallel; ferner BG und DF, beide in der Ebene AFD auf AF senkrecht, sind parallel. Demnach sind die Dreiecke DKF und BIG ähnlich und man hat 2 BG: 2 BI = 2 DF: 2 DK, w. z. bew. war. — Hieraus folgt: Wenn von den folgenden drei Stücken eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes: Seite welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, Seite welche dem rechten Winkel anliegt, Winkel welcher der letzteren Seite gegenüber liegt —, zwei Stücke gegeben sind, so kann das dritte Stück berechnet werden.

Mit Hülfe des abgeleiteten Satzes kann man nun, wenn von einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke eine Seite und ein Winkel gegeben sind, die nicht gegebenen Seiten und Winkel berechnen. Das Dreieck CAB (Fig. 7) sei bei A rechtwinklig. Man verlängere die Seiten CA und CB zu den Quadranten CAD und resp. CBE, hat also dann $<$ CDE = CED = 90, verlängere ferner die Bögen AB und DE, bis sie sich in F schneiden. Da nun jeder der beiden Winkel FAD und FDA ein rechter ist, so sind FA und FD Quadranten. Ferner wird der Winkel DCE oder ACB durch den Bogen DE, der Winkel AFD durch den Bogen AD gemessen.

Wenn nun zunächst ein Winkel, ABC gegeben ist, so ist die gegebene Seite entweder AB

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder AC oder BC. — Ist die Seite AB die gegebene, so kennt man auch BF, und da Winkel ABC gegeben, so kennt man auch Winkel EBF. In dem rechtwinkligen Dreiecke BEF kann also, nach dem Vorhergehenden, die Seite EF gefunden werden, demnach auch ED und Winkel ACB. Mit der Seite AB und dem Winkel ACB kann weiter die Seite BC, mit der Seite BC und dem Winkel ABC auch die Seite AC gefunden werden. — Ist die Seite AC die gegebene, so kann mit Hülfe des bereits abgeleiteten Haupt-Satzes zunächst BC, daher BE, gefunden worden. Ueberdies ist mit der Seite AC auch der Bogen AD und der Winkel AFD gegeben. In dem rechtwinkligen Dreieck FEB kann also die Seite BF gefunden werden, dann AB, und hierdurch ist die Behandlung dieser Aufgabe auf die der vorigen zurück geführt. — Ist endlich BC die gegebene Seite, so findet man sofort die Seite CA und demnächst die übrigen Stücke wie vorhin. — — Wenn also ausser dem Winkel ABC noch irgend eine Seite des rechtwinkligen Dreieckes BAC gegeben ist, so können alle nicht gegebenen Stücke desselben durch Rechnung gefunden werden.

Wenn ferner in einem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke alle Winkel gegeben sind, so kann man dessen Seiten berechnen. Unter Bezugnahme auf die vorige Figur Nr. 7 ist dann durch den Winkel ACB der Bogen ED, daher auch EF gegeben. Da ferner in dem rechtwinkligen Dreieck FEB der Winkel EBF bekannt ist, so kennt man in ihm eine Seite und einen Winkel, kann also die Seite BF und hierdurch AB finden. Jetzt ist in dem gegebenen Dreiecke BAC noch eine Seite bekannt, und hierdurch dessen weitere Behandlung ermöglicht.

Die Behandlung eines rechtwinkligen Dreieckes, von welchem beide den rechten Winkel einschliessenden Seiten gegeben sind, wird von Kopernikus speciell nicht gegeben. Sie ist jedoch in der allgemeinen Behandlung eines Dreieckes, von welchem ein Winkel mit den ihn einschliessenden Seiten gegeben sind, welche Behandlung später folgt, enthalten. Man wird dort bemerken, dass sie den letzten Erörterungen ganz analog ist.

Die Entwickelungen, welche Kopernikus jetzt weiter giebt, dürfen wir bedeutend abkürzen. Wenn von einem rechtwinkligen Dreiecke ein Winkel und eine Seite gegeben sind, so können die nicht gegebenen Stücke nach dem Vorigen berechnet werden. Es bedarf daher wohl nicht noch eines Beweises, dass zwei rechtwinklige Dreiecke auf der nämlichen Kugeloberfläche, wenn sie ausser dem rechten Winkel noch in einem Winkel und einer zu diesem Winkel in beiden Dreiecken gleichmässig liegenden Seite übereinstimmen, auch in den übrigen sich in gleichmässiger Lage befindenden Seiten und Winkeln übereinstimmen, indem die Berechnung derselben nothwendig in beiden Dreiecken die nämlichen Werthe ergeben muss. Ich übergehe daher den Beweis, welchen Kopernikus in dieser Beziehung noch für erforderlich zu erachten scheint, eben so, wie einige fernere Abschnitte, in welchen sich Kopernikus in gleicher Weise mit Dreiecken überhaupt beschäftigt und nachweist, dass dieselben, die Übereinstimmung in gewissen Stücken vorausgesetzt, auch in den übrigen Stücken beziehungsweise übereinstimmen. Die Beweisführung kommt ohnehin im Wesentlichen darauf hinaus, dass sich für die Hülfsgrössen, welche bei dem Beweise zur Überleitung von den gegebenen zu den nicht gegebenen Stücken dienen, successive in beiden Dreiecken die nämlichen Werthe ergeben und daher das Endergebniss für zwei gleichmässig liegende Stücke in beiden Dreiecken des nämliche sein muss. Bemerkenswerth scheint mir nur die Behandlung des gleichschenkligen Dreieckes zu sein. Kopernikus bemerkt hierüber Folgendes: Ist das Dreieck BAC gleichschenklig und AD ein durch A senkrecht zur Grundlinie BC gelegter Hauptkreis (welcher also durch den Pol von BC gehen muss) und trifft derselbe die Grundlinie BC in D, so stimmen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und ADC in zwei Seiten und dem rechten Winkel überein, demnach auch in den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

übrigen in beiden Dreiecken gleichmässig liegenden Stücken, und man hat $\angle ABC = ACB$, so wie auch $\angle BAD = CAD$ und $DB = DC$. Die Berechnung aber muss ohnehin z. B. für den Winkel ABC aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADB den nämlichen Werth ergeben, wie für den Winkel ACB aus dem rechtwinkligen Dreiecke ADC, da beides Mal mit den nämlichen Werthen in der nämlichen Art gerechnet wird.

Es folgt nun die Behandlung eines sphärischen Dreieckes, von welchem zwei Seiten und ein Winkel gegeben sind. Sind die beiden gegebenen Seiten gleich, so handelt es sich um ein gleichschenkliges Dreieck; dessen Behandlung kann, gleichviel welcher Winkel desselben gegeben ist, auf die des rechtwinkligen Dreieckes zurück geführt werden.

Sind jedoch die gegebenen Seiten AC und AB (Fig 8) ungleich und CAB der gegebene Dreieckswinkel, so verlängere man CA und CB zu dem Quadranten CAD und resp. CBE, (woraus $\angle CDE = CED = 90^0$ folgt) lasse hierauf AB und DE in F sich schneiden. Mit AC ist AD gegeben, mit dem Winkel CAB auch der Winkel DAF. Von dem rechtwinkligen Dreiecke ADF kennt man also hinreichende Stücke, um dasselbe behandeln und dessen Seiten AF und DF und den Winkel AFD berechnen zu können. Hierdurch ist man in Stand gesetzt, das rechtwinklige Dreieck BEF zu behandeln; es sind nämlich jetzt sein Winkel BFE und seine Seite BF (als AF — AB) bekannt. Man findet demnach aus ihm die Seite BE und demnächst die Seite BC des anfänglichen Dreieckes ABC. Da ferner EF und DF in den beiden vorhin genannten Dreiecken liegen, so kann ihre Differenz DE und somit der Dreieckswinkel ACB gefunden werden. Endlich ergiebt sich der Winkel ABC als Scheitelwinkel des in einem bekannten Dreiecke liegenden Winkels EBF. (Da für den gegebenen Winkel CAB der Werth eines rechten nicht ausgeschlossen ist, so enthält Vorstehendes auch die Behandlung des rechtwinkligen Dreieckes, von welchem die den rechten Winkel einschliessenden Seiten gegeben sind. Nur würde sich in diesem Falle die Behandlung des Dreieckes AFD, da seine Seiten FA und FD jetzt Quadranten sind, noch einfacher gestalten.)

Wenn der gegebene Winkel nicht von den beiden gegebenen Seiten eingeschlossen wird, also ausser dem Winkel CAB die Seiten CA und CB gegeben sind, so gilt zunächst das Vorige auch hier in Betreff des Dreieckes ADF und der Bestimmung von dessen Stücken. Da jetzt der Winkel AFD gefunden wird und mit der Seite CB auch BE gegeben ist, so hat man zur Behandlung des rechtwinkligen Dreiecks BEF hinreichende Mittel. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke BEF und ADF gewähren jetzt in gleicher Weise, wie vorhin, die Möglichkeit der Berechnung der nicht gegebenen Stücke des Dreieckes CAB.

Wenn eine Seite und zwei Winkel eines sphärischen Dreieckes gegeben sind, so bedarf es der Erörterung nur noch für den Fall, dass keiner dieser Winkel ein rechter ist.

Wenn die Seite AC (Fig 8) mit den beiden ihr anliegenden Winkeln BAC und ACB gegeben ist, so können aus den nämlichen Gründen wie vorhin alle Stücke des rechtwinkligen Dreieckes ADF gefunden werden. Ferner ist, da Winkel ACB gegeben, der Bogen DE bekannt, und man kann, da DF als Stück des rechtwinkligen Dreiecks ADF gefunden wurde, den Bogen EF berechnen. Jetzt kennt man in dem rechtwinkligen Dreiecke BEF die Seite EF und den Winkel BFE, kann also alle Stücke desselben bestimmen. Die Stücke BF, BE und EBF ergeben dann für das Dreieck CAB bezüglich die Seiten AB, BC und den Winkel ABC.

Wenn zu der Seite AC nur ein anliegender Winkel, BAC, dagegen der gegenüberliegende Winkel ABC gegeben ist, so ist auch dies Mal in gleicher Weise das recht-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

winklige Dreieck ADF vollständig bestimmt, und man kennt in dem rechtwinkligen Dreiecke BEF den Winkel BFE. In ihm kennt man aber auch den Winkel EBF als Scheitelwinkel des gegebenen Winkels ABC. Also findet man auch jetzt alle Stücke dieses Dreieckes. Durch seine Seiten BF und BE werden, wie vorhin, die Seiten AB und BC gefunden. Endlich kann DE, als Unterschied der gefundenen Bögen DF und EF, gefunden und hierdurch auch der Winkel ACB bestimmt werden.

Sind von einem sphärischen Dreiecke alle drei Seiten gegeben, so ist es unstreitig ausreichend, wenn nachgewiesen wird, dass ein Winkel desselben gefunden werden kann. — Sind die beiden Seiten AB (Fig. 9) und AC gleich und ist D der Mittelpunkt der Kugel, so muss offenbar die in AD liegende Mitte der zu dem doppelten AB gehörenden Sehne mit der ebenfalls in AD liegenden Mitte der zu dem doppelten AC gehörenden Sehne zusammen fallen, weil die genannten Sehnen von dem Mittelpunkte D gleiche Entfernung haben. Es sei E diese Mitte, also BE und CE die Hälften der bezeichneten beiden Sehnen. In dem ebenen Dreiecke BEC kennt man nun alle drei Seiten, kann daher den Winkel BEC berechnen. Der Winkel BEC aber ist, da DE sowohl auf EB als auf EC senkrecht ist, der Neigungswinkel der beiden Ebenen DAB und DAC, durch ihn ist demnach auch der sphärische Winkel BAC gegeben. (Die vorstehende Behandlung des Dreiecks BAC konnte auch durch Benutzung des über das gleichschenklige Dreieck Erwiesenen ausgeführt werden. Verfolgt man die hierzu nöthigen Schritte im Einzelnen, so wird man wahrnehmen, dass der Gang der Arbeit im Wesentlichen der nämliche ist wie der jetzige). — Sind dagegen die Seiten des Dreieckes ABC (Fig. 10) ungleich, also z. B. $AC > AB$, so sei CF die halbe Sehne des doppelten AC, sie trifft DA in F, demnach sind CF und DF bekannt. Eben so sei BE die halbe Sehne des doppelten AB, sie trifft DA in E, demnach sind auch BE und DE bekannt. Der Mittelpunkt der Kugel soll wieder durch den Buchstaben D bezeichnet werden. Da nun Bogen $AC > AB$, so folgt $CF > BE$ und $DF < DE$, also liegt F zwischen D und E. Eine aus F mit BE gezogene Parallele schneidet DB in G. Man ziehe GC. Nun hat man $\angle DFG = DEB = 90^0$, und $\angle DFC = 90^0$. Als Neigungswinkel der beiden Ebenen BAD und CAD hat man demnach den Winkel CFG, und es handelt sich demnach jetzt nur noch um Bestimmung des letzteren. Nun findet man $DG : DB = FG : BE = DF : DE$. Da alle in diesen Proportionen vorkommenden linearen Stücke, mit Ausnahme von DG und FG, bekannt sind, so können die letztgenannten ermittelt werden. Endlich ist der zu dem gegebenen Bogen BC gehörende Centriwinkel BDC oder GDC bekannt. Man kennt daher in dem ebenen Dreiecke GDC zwei Seiten DG und DC und den von ihnen eingeschlossenen Winkel, kann also die gerade Linie CG finden. Nunmehr sind in dem ebenen Dreiecke GFC alle drei Seiten bekannt. Daher kann jetzt der Winkel CFG, um welchen allein es sich noch handelte, gefunden werden. Man kennt alsdann den Neigungswinkel der beiden Ebenen BAD und CAD, demnach auch den Winkel BAC des sphärischen Dreieckes ABC.

Die jetzt weiter folgende Darstellung hat zum Gegenstande eine Hülfsaufgabe, deren Kopernikus bedarf, um einen letzten Satz vom sphärischen Dreiecke abzuleiten. Er weist nach: Wenn ein gegebener Bogen so getheilt ist, dass jeder der Theile kleiner ist als der halbe Kreisumfang, und das Verhältniss der halben Sehne des doppelten einen Theiles zu der halben Sehne des doppelten anderen Theiles gegeben ist, so kann jeder der beiden Theile gefunden werden. — Es sei AC (Fig. 11) der in B getheilte Bogen, D der Mittelpunkt des Kreises. Die Sehne AC schneidet den Durchmesser BH in E. Die aus A und C auf BH gefällten Lothe treffen dieses in F resp. G. Nun ist das Verhältniss $AF : CG$ bekannt. Man hat aber $AE : CE =$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

AF : CG. Also kennt man das Verhältniss der Theile der Sehne AC. Diese selbst ist durch den Bogen AC gegeben, folglich können die Theile AE und CE berechnet werden. Fällt man aus D auf AC das Loth DK, so ist AK die Hälfte der Sehne AC, man kann also AK, dann weiter KE finden. Schneidet die verlängerte AD den Kreis in I, so ergiebt sich KD als halbe Sehne des Bogens CI, kann also gefunden werden. Man kennt nun zwei Seiten des rechtwinkligen Dreieckes EKD, kann also seinen Winkel EDK finden. Der Winkel KDA ist, als Hälfte des zu dem gegebenen Bogen AC gehörenden Centriwinkels, bekannt. Demnach kann die Winkel-Summe EDK + KDA oder Winkel BDA, dann weiter der Bogen AB gefunden werden.

Wenn die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes gegeben sind, so kann jede Seite desselben berechnet werden. — (Ist einer der gegebenen Winkel ein rechter, so ist der Satz bereits im Vorhergehenden erwiesen.) Es sei E (Fig. 12) der Pol der Seite BC des sphärischen Dreieckes ABC. Der Bogen EA schneidet verlängert die Seite BC in D. Man verlängere CA bis G, so dass CAG ein Quadrant, ferner BA bis F, so dass BAF ein Quadrant. Weil BF und BE Quadranten sind, so ist Winkel AFE ein rechter; eben so, weil CG und CE Quadranten sind, ist Winkel AGE ein rechter. Nun sind per hyp. alle Winkel des Dreieckes ABC gegeben. Man kennt also, da jeder der beiden Winkel EBC und ECB ein rechter ist, auch die Winkel EBF und ECG, daher auch die Bögen EF und EG. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken AFE und AGE liegt nun dem rechten Winkel die nämliche Seite AE gegenüber. Daher verhält sich, wie man ohne Schwierigkeit folgert, die Hälfte der zu dem doppelten Winkel EAF gehörenden Sehne zu der Hälfte der zu dem doppelten Winkel EAG gehörenden Sehne, wie die halbe Sehne des doppelten Bogens EF zu der halben Sehne des doppelten Bogens EG. Nun sind aber die Bögen EF und EG bekannt, folglich auch die hier als gleich erwiesenen Verhältnisse. Und da nun überdies von den beiden Winkeln EAF und EAG die Summe (= FAG oder BAC) gegeben ist, so kann durch die vorige Hülfsaufgabe jeder einzelne derselben gefunden werden. Man kennt alsdann in jedem der beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und ADC alle drei Winkel, kann also deren Seiten und hierdurch die Seiten des Dreieckes ABC berechnen.

„Haec obiter de triangulis prout instituto nostro fuerint necessaria, modo sufficiant“ bemerkt Kopernikus, nachdem er bis zu diesem Punkte gelangt ist. Auch ich will hiermit meine Arbeit beschliessen und annehmen, dass sie für den vorliegenden Zweck genügen dürfte. Der äussere Anlass zu derselben lag nämlich für mich darin, dass sich mir gegen Ende des vorigen Monates ganz unerwartet die Gelegenheit bot, das diesjährige Programm unserer Anstalt zu einer derartigen Mittheilung benutzen zu können, um auch meiner Seits zu der 400-jährigen Jubelfeier des Geburtstages des grossen Astronomen, welche in das nächste Semester fällt, für den Kreis unserer Schüler Etwas beizutragen. Den Grundzügen des Welt-Systems des Kopernikus steht selbstredend auch die Jugend nicht fern, und eben so wenig wird es bei Gelegenheit der Jubelfeier an vortrefflichen Mittheilungen fehlen, um die Kenntniss seiner Lebensverhältnisse und seiner übrigen Wirksamkeit allgemeiner zu machen. Der Inhalt des Gegenwärtigen ist in grösseren Kreisen weniger bekannt, fällt aber ganz in den Bereich der Schule. Sein Abdruck wird unseren Schülern zeigen, in welcher Weise ein Mann arbeiten musste, welchem nicht in dem nämlichen Masse, wie heute, die Leistungen Anderer zu Gebote standen und nicht die heutigen Lehrbücher, Formeln-Sammlungen und Tabellen vorgelegen haben. Um so höhere Achtung werden sie dann vor dem Manne hegen, wenn sie die Schwierigkeiten berücksichtigen, welche auch nach dieser Seite von ihm zu bekämpfen waren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich habe die Ausführungen des Kopernikus der in den jetzigen mathematischen Lehrbüchern üblichen Form angepasst, jedoch die Bezeichnung der einzelnen Begriffe im Wesentlichen beibehalten. Es dürfte den Schülern der oberen Klassen unserer Anstalt nicht schwer fallen, zu erkennen, welche Gegenstände des heutigen mathematischen Lehrstoffes und mit welchen Hülfsmitteln dieselben hier von Kopernikus behandelt werden, und wie die betreffenden Bezeichnungen und Operationen nach heutiger Ausdrucksweise sich gestalten würden. Auch aus diesem Grunde wird die gegenwärtige Mittheilung unseren Schülern zu nützlichen Studien Anlass geben. Ich habe mich daher, um nicht diese Seite der Sache aus den Augen zu setzen, jeder eigenen Andeutung hierüber enthalten.

Thorn, im September 1872.

Fasbender.

Ich benutze den noch freien Raum dieser Seite, um den Kopernikanischen Canon wenigstens theilweise im Nachstehenden abdrucken zu lassen. Die Columne A enthält die ganzen Grade der Bögen, die Columne B die zugehörenden semisses subtensarum duplarum circumferentiarum.

A.	B.	A.	B.	A.	B.
1	1745	31	51504	61	87462
2	3490	32	52992	62	88295
3	5234	33	54464	63	89101
4	6975	34	55919	64	89879
5	8715	35	57358	65	90631
6	10453	36	58779	66	91354
7	12187	37	60181	67	92050
8	13917	38	61566	68	92718
9	15643	39	62932	69	93358
10	17365	40	64279	70	93969
11	19081	41	65606	71	94552
12	20791	42	66913	72	95105
13	22495	43	68200	73	95630
14	24192	44	69466	74	96126
15	25882	45	70711	75	96592
16	27564	46	71934	76	97030
17	29237	47	73135	77	97437
18	30902	48	74314	78	97815
19	32557	49	75471	79	98163
20	34202	50	76604	80	98481
21	35837	51	77715	81	98769
22	37460	52	78801	82	99027
23	39073	53	79864	83	99255
24	40674	54	80902	84	99452
25	42262	55	81915	85	99620
26	43837	56	82904	86	99756
27	45399	57	83867	87	99863
28	46947	58	84805	88	99939
29	48481	59	85717	89	99985
30	50000	60	86602	90	100000

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

urch ge-
nüler er-
von dem
rlaubten
nung zur
n Ablauf
hätigkeit

gehendes
Engel-

er Weise.

n: Gym-
Wochen

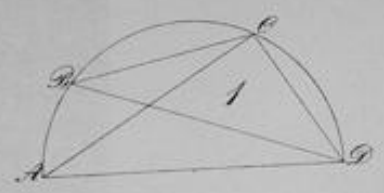
logischen
Sommer-
lang aus
e 3 Tage
tagenden
n an der

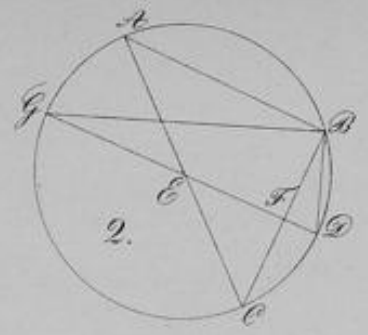
e öffent-
Stellung
Kaisers

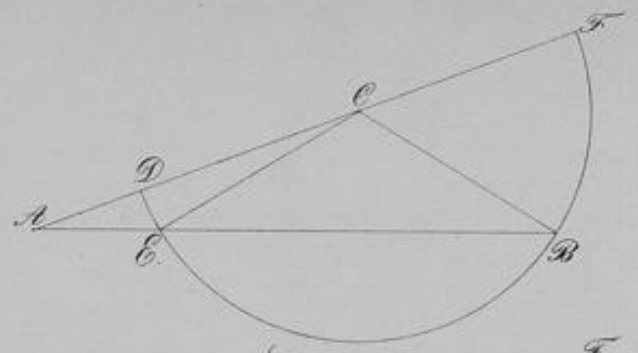
der Ver-

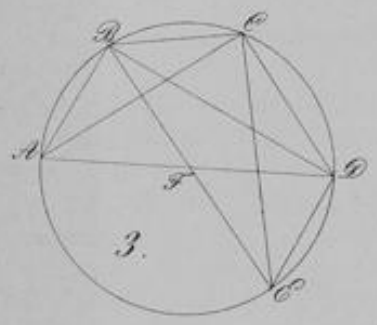
n.
von den
besucht.

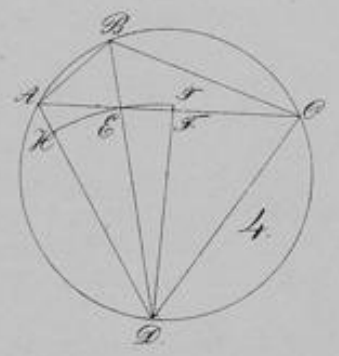
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

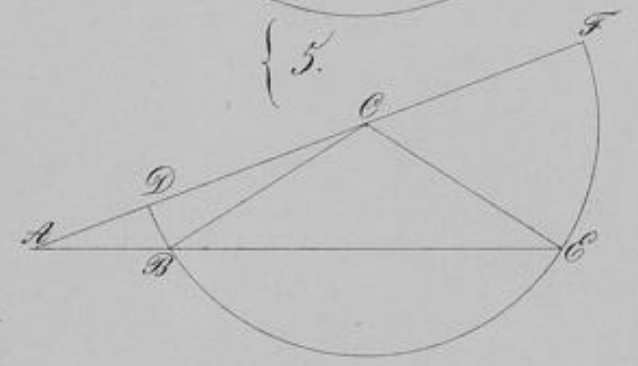


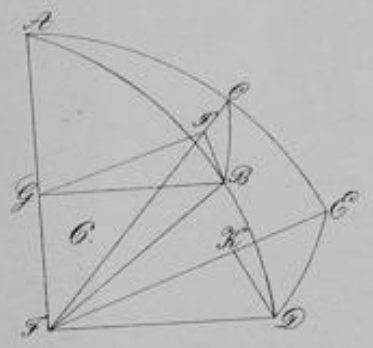


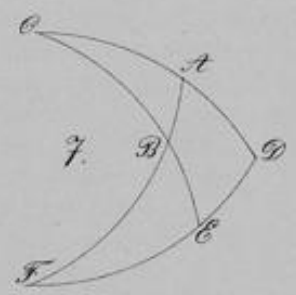


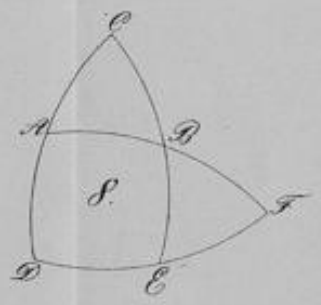


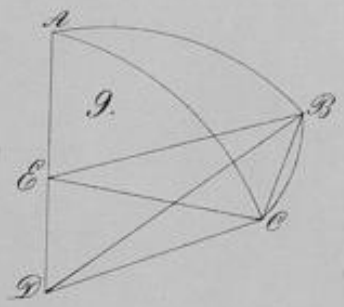


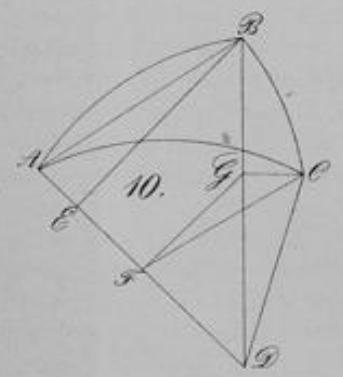


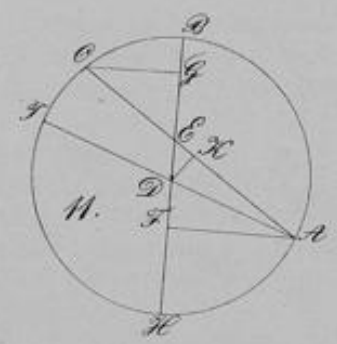


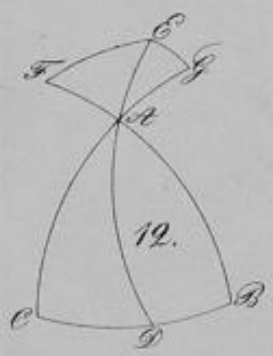












Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ic
üblicher
Es dürf
che Geg
hier vor
nach he
Mittheil
diese Se

Ich
theilweis
Bögen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf