Eine Zusammenstellung von Aufgaben aus der analytischen Geometrie für die Prima des Gymnasiums.

Die durch die letzte Reform der Lehrpläne vorgeschriebene Aufnahme der analytischen Geometrie, im besonderen der Theorie der Kegelschnitte, in das mathematische Unterrichtspensum der Prima des Gymnasiums legt es dem Lehrer nahe, den in der Klasse behandelten Lehrstoff auch durch Stellung von Aufgaben aus diesem Lehrgebiete praktisch zu verwerten und ihn dadurch den Schülern verständlicher und geläufiger zu machen. Die nachfolgenden Aufgaben sind demnach lediglich aus den Bedürfnissen des praktischen Unterrichtes hervorgegangen. Die Absicht des unterzeichneten Verfassers bei der Ausarbeitung dieser Aufgaben ist aber zugleich dahin gerichtet gewesen, durch dieselben den Koordinatenbegriff und die Theorie der Kegelschnitte in so engen Zusammenhang mit den übrigen mathematischen Unterrichtspensen der Prima zu bringen, dass die Schüler daran gewöhnt werden, diesen Teil der Geometrie als einen integrierenden Bestandteil der gesamten Mathematik zu betrachten. Die Aufgaben sind daher so gewählt, dass sie zugleich in die übrigen mathematischen Unterrichtsgebiete der oberen Klassen des Gymnasiums übergreifen und dem Schüler Gelegenheit geben, zugleich dasjenige, was sie in der Arithmetik, Trigonometrie, Stereometrie und Planimetrie sonst gelernt haben, zur Anwendung zu bringen.

Der Unterzeichnete glaubt somit hoffen zu dürfen, dass es ihm gelungen sein wird, durch Veröffentlichung dieser Aufgaben in dem vorliegenden Programm manchem seiner Herren Fachgenossen einen kleinen Dienst zu leisten, zumal in den bekannteren Lehrbüchern der analytischen Geometrie derartige Aufgaben sich nur zerstreut vorzufinden oder auch gar nicht berücksichtigt zu sein pflegen. Er bemerkt hierzu, dass fast sämtliche nachfolgenden Aufgaben von den Schülern der Prima des hiesigen Gymnasiums im Laufe der Jahre zum Teil in häuslichen Arbeiten, zum Teile aber auch in Klassenarbeiten (sogenannten Extemporalien), selbständig bearbeitet worden sind, und dass die dabei von den Schülern erreichten Resultate im allgemeinen als befriedigend bezeichnet werden konnten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte zweier geraden Linien, deren Gleichungen ($y = a_1\ x + b_1$ und $y = a_2\ x + b_2$) gegeben sind, sind zu suchen, ferner der Winkel φ zu bestimmen, unter welchem beide Linien sich schneiden, und endlich ist der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks zu berechnen, welches die beiden Linien mit der Abscissenachse bilden.

Beispiel: $a_1 = -8,\quad b_1 = 15\,\text{cm},\quad a_2 = 2,\quad b_2 = -7\,\text{cm}$

Res.: $x_1 = \dfrac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2} = 2{,}2\,\text{cm},\quad y_1 = \dfrac{a_1\ b_2 - a_2\ b_1}{a_1 - a_2} = 8{,}6\,\text{cm}$

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1\ a_2} = {}^2/_3,\quad \varphi = 33^0\ 41'\ 24''$$

$$F = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2}{2 a_1 a_2 (a_1 - a_2)} = 1{,}7375\ \text{qcm}.$$

2) Zwei gerade Linien L_1 und L_2 schneiden sich in einem Punkte, dessen Koordinaten $= x_1$ und y_1 gegeben sind; sie schneiden ferner die Ordinatenachse in 2 Punkten, deren Abstände vom Anfangspunkte der Koordinaten b_1 und b_2 betragen. Die beiden Winkel α_1 und α_2, welche diese beiden Linien mit der positiven Richtung der Abscissenachse mit einander bilden, sind zu bestimmen, ferner der Winkel β, unter welchem sie sich schneiden, endlich sind die Gleichungen beider geraden Linien anzugeben.

Beispiel: $x_1 = 3\,\text{cm},\ y_1 = 8\,\text{cm},\ b_1 = 10\,\text{cm},\ b_2 = 5\,\text{cm}$

Res.: $\text{tang}\ \alpha_1 = \dfrac{y_1 - b_1}{x_1} = -\,{}^2/_3,\quad \alpha_1 = 146^0\ 18'\ 36''$

$$\text{tang}\ \alpha_2 = \frac{y_1 - b_2}{x_1} = 1,\quad \alpha_2 = 45^0$$

$$\text{tang}\ \beta = \frac{(b_2 - b_1)\ x_1}{x_1^{\,2} - (b_1 - y_1)\ (y_1 - b_2)} = -5,\quad \beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 101^0\ 18'\ 36''$$

$$L_1 : y = \frac{y_1 - b_1}{x_1}\ x + b_1,\quad y = -\,{}^2/_3\ x + 10$$

$$L_2 : y = \frac{y_1 - b_2}{x_1}\ x +_2,\quad y = x + 5$$

3) Die Koordinaten der Durchschnittspunkte dreier gerader Linien sind $= x_1$ und y_1, x_2 und y_2, x_3 und y_3 gegeben. Der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks ist zu berechnen, welches von diesen drei geraden Linien eingeschlossen wird.

Beispiel: $x_1 = 6\,\text{cm},\ x_2 - 4\,\text{cm},\ x_3 = 1\,\text{cm},\ y_1 = 3\,\text{cm},\ y_2 = 5\,\text{cm},\ y_3 = 2\,\text{cm}$

Res.: $F = {}^1/_2\, x_1 (y_2 - y_3) + {}^1/_2\, x_2 (y_3 - y_1) + {}^1/_2\, x_3\ (y_1 - y_2) = 5{,}5\ \text{qcm}.$

4) Die Gleichungen dreier geraden Linien sind gegeben, nämlich $y = a_1\ x + b_1$, $y = a_2\ x + b_2$ und $y = a_3\ x + b_3$. Der Flächeninhalt F

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

desjenigen Dreiecks ist zu berechnen, das von diesen drei geraden Linien eingeschlossen wird.

Beispiel: $a_1 = -1,\ a_2 = +2,\ a_3 = +3$
$b_1 = +6\,\text{cm},\ b_2 = -3\,\text{cm},\ b_3 = +2\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad F = \frac{[a_1\,(b_2 - b_3) + a_2\,(b_3 - b_1) + a_3\,(b_1 - b_2)]^2}{2\,(a_2 - a_1)\,(a_1 - a_3)\,(a_2 - a_3)} = 24\ \text{qcm}$$

5) Die Koordinaten (x_1, y_1 und x_2, y_2) der Durchschnittspunkte eines Kreises, dessen Radius $= r$ gegeben ist, mit einer Linie, deren Gleichung in Bezug auf den Mittelpunkt des Kreises als Koordinatenanfangspunkt ($y = ax + b$) gegeben ist, sind zu bestimmen, ferner die Gleichungen der in diesen Durchschnittspunkten an den Kreis gelegten Tangenten (T_1 und T_2), und schliesslich sind die Winkel α_1, α_2 und β zu berechnen, welche diese Tangenten mit der positiven Richtung der Abscissenachse und mit einander bilden: Beispiel: $a = 1,\ b = 2\,\text{cm},\ r = 10\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad \left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{-ab \pm \sqrt{r^2\,(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2} = \left\{\begin{matrix} 6\,\text{cm}, \\ -8\,\text{cm} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b \pm a\,\sqrt{r^2\,(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2} = \left\{\begin{matrix} 8\,\text{cm}, \\ -6\,\text{cm} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \text{tang}\ \alpha_1 \\ \text{tang}\ \alpha_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pm ar^2 - b\,\sqrt{r^2\,(1 + a^2) - b^2}}{a^2\,r^2 - b^2} \left\{\begin{matrix} -0{,}75, \\ -4/3 \end{matrix}\right.$$

$$\alpha_1 = 143^0\ 7'\ 49'',\quad \alpha_2 = 126^0\ 52'\ 12''\ \beta = \alpha_1 - \alpha_2 = 16^0\ 15'\ 37''$$

$$T_1 : y = -\frac{x_1}{y_1}\,x + \frac{r^2}{y_1},\ y = -\frac{3}{4}\,x + 12{,}5$$

$$T_2 : y = -\frac{x_2}{y_2}\,x + \frac{r^2}{y_2},\ y = -\frac{4}{3}\,x - 16\,\frac{2}{3}$$

6) Zwei Kreise, deren Radien $= r_1$ und r_2 gegeben sind und deren Mittelpunkte den Abstand a von einander haben, schneiden sich. Die Koordinaten der Durchschnittspunkte beider Kreise (ξ und η), sowie die Koordinaten (x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2) der Berührungspunkte ihrer gemeinschaftlichen Tangenten sind zu bestimmen und zwar in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Abscissenachse mit der Centrale beider Kreise zusammenfällt und dessen Anfangspunkt in der Mitte dieser Centrale liegt. Schliesslich ist der Winkel α zu berechnen, welchen die gemeinschaftliche Tangente mit der Abscissenachse bildet.

Beispiel: $r_1 = 13\,\text{cm}\ r_2 = 10\,\text{cm}\ a = (12 + 5\,\sqrt{3})\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad \xi = \frac{r_1{}^2 - r_2{}^2}{2\,a} = \frac{12 - 5\,\sqrt{3}}{2} = 1{,}67\,\text{cm}$$

$$\eta = \pm\,\frac{1}{2a}\sqrt{[(a + r_1)^2 - r_2{}^2]\ [r_2{}^2 - (a - r_1)^2]} = \pm\,5\,\text{cm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1 = \frac{4\,r_1\,(r_1 - r_2) - a^2}{2a} = -\,6{,}555\,\text{cm}$$

$$x_2 = \frac{4\,r_2\,(r_1 - r_2) + a^2}{2\,a} = 13{,}234\,\text{cm}$$

$$y_1 = \pm\,\frac{r_1}{a}\sqrt{a^2 - 4\,(r_1 - r_2)^2} = \pm\,12{,}445\,\text{cm}$$

$$y_2 = +\,\frac{r_2}{a}\sqrt{a^2 - 4\,(r_1 - r_2)^2} = \pm\,9{,}574\,\text{cm}$$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{2\,(r_1 - r_2)}{\sqrt{a^2 - 4\,(r_1 - r_2)^2}} = \frac{600}{1977},\quad \alpha = 16^0\ 52'\ 58''$$

7) Eine Parabel, deren Parameter $= 2\,p$ gegeben ist, wird von einer geraden Linie, welche mit der positiven Richtung der Abscissenachse den Winkel α bildet und auf der positiven Seite der Ordinatenachse das Stück b abschneidet, geschnitten. Die Koordinaten (x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2) der beiden Punkte, in welchen die gerade Linie die Parabel schneidet, sind zu berechnen.

Beispiel: $p = 3{,}5\,\text{cm},\ b = 4{,}5\,\text{cm},\ \alpha = 152^0\ 23'\ 40''$

Res.: $\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \text{cotg}\,\alpha\,\left[p\,\text{cotg}\,\alpha - b \pm \sqrt{p\,\text{cotg}\,\alpha\,(p\,\text{cotg}\,\alpha - 2b)}\right],$

$$x_1 = 1{,}8058\,\text{cm},\ x_2 = 41{,}0055\,\text{cm}$$

$$y_1 = +\sqrt{2\,p\,x_1},\ y_2 = -\sqrt{2\,p\,x_2},\ y_1 = 3{,}5554\,\text{cm},\ y_2 = -\,16{,}9425\,\text{cm}$$

8) Eine gerade Linie schneidet eine Parabel in den beiden Punkten A und B. Die Koordinaten des Punktes A sind $= x_1$ und y_1, sowie die Ordinate des Punktes B $= y_2$ gegeben. Die Abscisse des Punktes B (x_2) ist zu suchen, ferner der Parameter 2 p, resp. die Brennweite der Parabel, sowie das Stück b, welches die gerade Linie auf der Ordinatenachse abschneidet. Endlich sind die Winkel α und φ, welche die gerade Linie mit der positiven Richtung der Abscissenachse und mit der im Punkte A an die Parabel gelegten Tangente bildet, zu bestimmen.

Beispiel: $x_1 = 4\,\text{cm},\ y_1 = 10\,\text{cm},\ y_2 = -\,15\,\text{cm}$

Res.: $2\,p = \frac{y_1^2}{x_1} = 25\text{cm},\ x_2 = \frac{x_1\,y_2^2}{y_1^2} = 9\,\text{cm},\ b = \frac{y_1 \cdot y_2}{y_1 + y_2} = 30\,\text{cm}$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{y_1^2}{x_1\,(y_1 + y_2)} = -\,5,\quad \alpha = 101^0\ 18'\ 35''$$

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{x_1\,y_1\,(y_1 - y_2)}{2\,x_1^2\,(y_1 + y_2) + y_1^3} = \frac{25}{21}$$

$$\varphi = 49^0\ 58'\ 12''$$

9) Eine gerade Linie, welche durch den Brennpunkt einer Parabel geht, schneidet dieselbe in den beiden Punkten A und B. Die Koordinaten des Punktes A sind $= x_1$ und y_1 gegeben. Gesucht sind der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Parameter der Parabel 2 p, ferner das Stück b, welches die gerade Linie auf der Ordinatenachse abschneidet, und die Winkel α und φ, welche sie mit der Abscissenachse und der im Punkte A an die Parabel gelegten Tangente bildet, endlich die Koordinaten x_2 und y_2 des zweiten Durchschnittspunktes.

Beispiel: $x_1 = 5\,\text{cm}$, $y_1 = 8\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad 2\,p = \frac{y_1^2}{x_1} = 12{,}8\,\text{cm},\quad b = \frac{-y_1^3}{2\,x_1^2 - y_1^2} = 36\frac{4}{7}\,\text{cm}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\,x_1\,y_1}{y_1^2 - 2\,x_1^2} = \frac{40}{7},\quad \alpha = 80^0\ 4'\ 25''$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y_1^3}{4\,x_1^3} = \frac{128}{125},\quad \varphi = 45^0\ 40'\ 45''$$

$$x_2 = \frac{y_1^4}{4\,x_1^3} = 8{,}192\,\text{cm},\quad y_2 = -\frac{y_1^3}{2\,x_1^2} = -10{,}24\,\text{cm}$$

10) Eine gerade Linie schneidet eine Parabel, deren Parameter $= 2\,p$ gegeben ist, in einem Punkte A, dessen Abscisse $= x_1$ gegeben ist, sie schneidet ferner auf der positiven Richtung der Ordinatenachse das gegebene Stück $+\,b$ ab. Zu suchen sind die beiden Winkel α und φ, welche die gerade Linie mit der positiven Richtung der Abscissenachse und mit der im Punkte A an die Parabel gelegten Tangente bildet, endlich das Stück z, welches diese Tangente auf der Ordinatenachse abschneidet. Beispiel: $x_1 = 13{,}5\,\text{cm}$, $b = 31{,}5\,\text{cm}$, $p = 3\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sqrt{2\,p\,x_1} - b}{x_1} = -\frac{5}{3},\quad \alpha = 120^0\ 57'\ 50''$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x_1\left(\sqrt{2\,p\,x_1} - 2\,b\right)}{2\,x_1\,(x_1 + p) - b\sqrt{2\,p\,x_1}} = -4{,}5,\quad \varphi = 102^0\ 31'\ 44''$$

$$z = {}^1/_2\sqrt{2\,p\,x_1} = 4{,}5\,\text{cm}$$

11) Von einem Punkte P, dessen Koordinaten $= x_1$ und y_1 gegeben sind, sind an eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$ gegeben ist, zwei Tangenten gelegt. Die Koordinaten, ξ_1 und η_1, sowie ξ_2 und η_2 der Berührungspunkte dieser Tangenten sind zu finden, sowie der Winkel φ, welchen sie mit einander bilden.

Beispiel: $x_1 = -7\,\text{cm}$, $y_1 = 5\,\text{cm}$, $p = 4\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad \left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} = \frac{y_1^2 - p\,x_1 \pm y_1\sqrt{y_1^2 - 2\,p\,x_1}}{p}\left\{\begin{matrix} = 24{,}5\,\text{cm}\\ = 2\,\text{cm}\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\} = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2\,p\,x_1}\left\}\begin{matrix} = 14\,\text{cm}\\ = -4\,\text{cm}\end{matrix}\right.$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{2\sqrt{y_1^2 - 2\,p\,x_1}}{2\,x_1 + p} = -\frac{9}{5},\quad \varphi = 119^0\ 3'\ 18''$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

12) Ein Kreis mit dem Halbmesser r und eine Parabel mit dem Parameter 2 p sind gegeben. Der Mittelpunkt des Kreises fällt mit dem Scheitel der Parabel zusammen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven, ferner der Winkel φ, welchen die an beide Kurven im Durchschnittspunkte gelegten Tangenten mit einander bilden, sind zu suchen. Beispiel: $r = 8\,\text{cm}$, $p = 6\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad x_1 = -p + \sqrt{r^2 + p^2} = 4\,\text{cm}$$

$$y_1 = \pm\sqrt{2\,p\,(\sqrt{r^2 + p^2} - p)}, = 4\sqrt{3} = 6{,}928\,\text{cm}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = -\sqrt{\frac{2\,(r^2 + p^2)}{p\,(\sqrt{r^2 + p^2} - p)}} = {}^5/_3\sqrt{3},\ \varphi = 109^0\ 6'\ 23''$$

13) Von dem Brennpunkte einer Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$ gegeben ist, ist mit dem gegebenen Halbmesser r ein Kreis geschlagen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu bestimmen, ferner der Winkel φ, welchen die in diesem Durchschnittspunkte an beide Kurven gelegten Tangenten mit einander bilden, endlich der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks, welches diese beiden Tangenten mit der Abscissenachse einschliessen.

Beispiel: $p = 5\,\text{cm}$, $r = 12{,}5\,\text{cm}$

Welche Werte nehmen die Resultate an, wenn $r = p$ ist?

$$\text{Res.:}\quad x_1 = \frac{2\,r - p}{2} = 10\,\text{cm},\quad y_1 = \pm\sqrt{p\,(2\,r - p)} = \pm 10\,\text{cm}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = -\sqrt{\frac{2\,r - p}{p}} = -2,\ \varphi = 116^0\ 33'\ 54''$$

$$F = \frac{r\,(2\,r - p)\sqrt{p\,(2\,r - p)}}{2\,(r - p)} = 166^2/_3\ \text{qcm}$$

Für $r = p$ wird $x_1 = \frac{p}{2}$, $y_1 = \pm p$, $\operatorname{tang}\varphi = -1$, $\varphi = 135^0$, $F = \infty$, d. h. die Tangente am Kreise geht der Abscissenachse parallel.

14) Vom Scheitel einer Parabel aus, deren Gleichung $y^2 = 2\,p\,x$ gegeben ist, ist mit der Brennweite $\frac{p}{2}$ ein Kreis geschlagen und an beide Kurven eine gemeinschaftliche Tangente gelegt. Die Koordinaten x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2, der Berührungspunkte dieser Tangente an der Parabel und am Kreise sind zu bestimmen.

Beispiel: $p = 4\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad x_1 = \frac{p}{4}(\sqrt{5} + 1),\ y_1 = \pm\frac{p}{2}\sqrt{2\,(\sqrt{5} + 1)}$$

$$x_2 = -\frac{p}{4}(\sqrt{5} - 1),\ y_2 = \pm\frac{p}{4}\sqrt{2\,(\sqrt{5} - 1)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1 = \sqrt{5} + 1 = 3{,}236\,\text{cm},\quad y_1 = \pm 2\sqrt{2\sqrt{5} + 2} = 5{,}088\,\text{cm},$$
$$x_2 = -(\sqrt{5} - 1) = -1{,}236\,\text{cm},\quad y_2 = \pm\sqrt{2\sqrt{5} - 2} = \pm 1{,}5723\,\text{cm}$$

15) Vom Scheitel einer Parabel aus, deren Gleichung $y^2 = 2px$ gegeben ist, ist mit dem gegebenen Halbmesser r ein Kreis geschlagen. Die Koordinaten der Berührungspunkte (x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2) der an beide Kurven gelegten gemeinschaftlichen Tangente sind zu bestimmen, ferner der Winkel φ, welchen diese Tangente mit der Abscissenachse bildet. Beispiel: $r = 12\,\text{cm}$, $p = 5\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad x_1 = \frac{r\left(\sqrt{r^2 + p^2} + r\right)}{p} = 60\,\text{cm}$$
$$y_1 = \pm\sqrt{2r\left(\sqrt{r^2 + p^2} + r\right)} = \pm 10\sqrt{6} = \pm 24{,}495\,\text{cm}$$
$$x_2 = \frac{r\sqrt{r^2 + p^2} - r}{p} = 2{,}4\,\text{cm}$$
$$y_2 = \pm\frac{r}{p}\sqrt{2r\left(\sqrt{r^2 + p^2} - r\right)} = \pm\frac{24}{5}\sqrt{6} = \pm 11{,}7576\,\text{cm}$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\frac{\sqrt{r^2 + p^2} - r}{2r}} = {}^1/_{12}\sqrt{6},\quad \varphi = 11^0\ 32'\ 14''$$

16) Von dem Brennpunkte einer Parabel aus, deren Gleichung $y^2 = 2px$ gegeben ist, ist mit dem gegebenen Halbmesser r ein Kreis geschlagen, welcher die Parabel schneidet, und an beide Kurven die gemeinschaftliche Tangente gelegt. Die Koordinaten (x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2) der Berührungspunkte dieser Tangente mit der Parabel und dem Kreise sind zu bestimmen, ferner der Winkel φ, welchen diese Tangente mit der Abscissenachse bildet, und endlich die Flächeninhalte F_1 und F_2 derjenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche diese Tangente mit ihren respectiven Normalen und der Abscissenachse bilden.

Beispiel: $r = 5\,\text{cm}$, $p = 6\,\text{cm}$

Welche Werte nehmen die Resultate an, wenn $r = p$ wird?

$$\text{Res.:}\quad x_1 = \frac{4r^2 - p^2}{2p} = 5{}^1/_3\,\text{cm},\quad x_2 = 0$$
$$y_1 = \pm\sqrt{4r^2 - p^2} = \pm 8\,\text{cm},$$
$$y_2 = \pm\,{}^1/_2\sqrt{4r^2 - p^2} = {}^1/_2\,y = \pm 4\,\text{cm}$$
$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{p}\sqrt{4r^2 - p^2} = {}^4/_3,\quad \varphi = 36^0\ 52'\ 12''$$
$$F_1 = \frac{2r^2}{p}\sqrt{4r^2 - p^2} = 66{}^2/_3\ \text{qcm}$$
$$F_2 = \frac{r^2}{2p}\sqrt{4r^2 - p^2} = \frac{F_1}{4} = 16{}^2/_3\ \text{qcm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $r = p$ ist

$$x_1 = {}^3/_2\, p,\ y_1 = \pm p\sqrt{3},\ x_2 = 0,\ y_2 = \pm \frac{p}{2}\sqrt{3}$$

$$\operatorname{cotg} \varphi = \sqrt{3},\ \varphi = 30^0,\ F_1 = 2\, p^2 \sqrt{3},\ F_2 = \frac{p^2}{2}\sqrt{3}$$

17) Ein gerader Kegel, dessen Normalschnitt an der Spitze den Winkel 2α hat, wird durch eine Ebene, die parallel zu einer Seitenlinie des Kegels und in dem senkrechten Abstande a von derselben durch den Kegel gelegt ist, geschnitten. Die Gleichung P der dadurch entstehenden Parabel ist zu bestimmen. Es ist ferner der Flächeninhalt S desjenigen Segmentes dieser Parabel zu berechnen, welches von der Parabel durch den Grundkreis des Kegels, der durch den Schnittpunkt der Parabelebene mit der Kegelachse gehen soll, abgeschnitten wird.

Beispiel: $a = 2\,\text{cm},\ \alpha = 60^0$

Res.: $P : y^2 = 2a \,.\, \operatorname{tang} \alpha \,.\, x,\ y^2 = 4\sqrt{3}\ x$

$$S = \frac{2\,a^2}{3 \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha} = \frac{64}{9}\sqrt{3} = 12{,}317\ \text{qcm}$$

18) Ein gerader Kegel, dessen Höhe = h gegeben ist und dessen Seitenlinie gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt ist, wird durch eine Ebene, welche durch den Fusspunkt der Höhe parallel zu einer Seitenlinie des Kegels gelegt ist, geschnitten. Die Gleichung G des Durchschnittes dieser Ebene mit dem Kegelmantel und die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte dieser Kurve mit der Peripherie des Grundkreises des Kegels sind zu bestimmen.

Beispiel: $h = 3\,\text{cm},\ \alpha = 60^0$

Res.: $G : y^2 = 2h \cos\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\alpha \,.\, x,\ y^2 = x\sqrt{3}$

$$x_1 = \frac{h}{2 \sin\alpha} = \sqrt{3} = 1{,}7329\,\text{cm},\ y_1 = h \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7329\,\text{cm}$$

19) Ein gerader Kegel, dessen Grundkreis den Halbmesser r hat und dessen Seitenlinie gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt ist, wird durch eine Ebene, welche in dem senkrechten Abstande a von der Spitze des Kegels parallel zu einer Seitenlinie desselben gelegt ist, geschnitten. Wie gross ist dasjenige Segment S, welches von der Durchschnittskurve des Kegelmantels und der Ebene durch die Grundfläche des Kegels abgeschnitten wird.

Beispiel: $a = 72\,\text{cm},\ r = 75\,\text{cm},\ \alpha = 36^0\ 52'\ 11''$

Res.: $$S = \frac{2\,(2r \sin\alpha - a)\sqrt{a\,(2r \sin\alpha - a)}}{3 \sin^2\alpha \,.\, \cos\alpha} = 1500\ \text{qcm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

20) Es ist zu beweisen, dass die von einem horizontal oder schräg unter dem Elevationswinkel α mit der Anfangsgeschwindigkeit c geworfenen Körper beschriebenen Kurven Parabeln sind, und die Parameter ($2\,p_1$ resp. $2\,p_2$) dieser Parabeln sind für beide Fälle anzugeben. (Die Acceleration der Schwerkraft ist mit g zu bezeichnen.)

$$\text{Res.:}\quad 2\,p_1 = \frac{2\,c^2}{g},\ 2\,p_2 = \frac{2\,c^2 \cos^2\alpha}{g}$$

21) Eine Ellipse mit den Achsen 2a und 2b und die Abscisse x_1 eines Punktes derselben sind gegeben. Die Winkel α, β und γ sind zu berechnen, welche die beiden nach diesem Punkte gezogenen Radien vectoren mit einander und mit der in dem Punkte an die Ellipse gelegten Tangente bilden.

Beispiel: $a = 5\,\text{m},\ b = 3\,\text{cm},\ x_1 = 4\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2\,abe\sqrt{a^2 - x_1{}^2}}{e^2 x_1{}^2 - a^2(e^2 - b^2)} = \frac{40}{9},\ \alpha = 77^0\ 19'\ 11'',$$

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{ab}{e\sqrt{a^2 - x_1{}^2}} = \frac{5}{4},\ \operatorname{tang}\gamma = \frac{ab}{e\sqrt{a^2 - x_1{}^2}} = \frac{5}{4}$$

$$\beta = \gamma = 51^0\ 20'\ 24'',\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

22) Von einer Ellipse sind die grosse Achse = 2a, die Ordinate eines Punktes der Ellipse = y_1 und der Winkel α, welchen die nach diesem Punkte gezogenen Radien vectoren mit einander bilden, gegeben. Die Abscisse x_1 jenes Punktes ist zu berechnen, ferner die beiden nach ihm gezogenen Radien vectoren r_1 und r_2 und schliesslich der Flächeninhalt der Ellipse E.

Beispiel: $a = 8\,\text{cm},\ y_1 = 4\,\text{cm},\ \alpha = 36^0\ 52'\ 12''$

$$\text{Res.:}\quad b = \sqrt{\frac{y_1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{4\,a^2 + y_1{}^2 \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}} - y_1 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\right)} = 4\sqrt{3}$$

$$b = 6{,}928\,\text{cm}$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = 4\,\text{cm},\ x_1 = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y_1{}^2}\ \text{oder}$$

$$x_1 = \sqrt{a^2 - \frac{y_1}{2}\left(y_1 + \sqrt{y_1{}^2 + 4\,a^2 \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}}\right)} = \frac{8}{3}\sqrt{6} = 6{,}532\,\text{cm}$$

$$r_1 = \sqrt{(e + x_1)^2 + y_1{}^2} = 11{,}266\,\text{cm},\ r_2 = \sqrt{(e - x_1)^2 + y_1{}^2} = 4{,}743\,\text{cm}$$

$$E = ab\,\pi = 174{,}124\,\text{qm}$$

23) Von einer Ellipse ist die Ordinate des senkrecht über dem einen Brennpunkte gelegenen Punktes = p gegeben, ferner der Winkel, welchen der von diesem Punkt aus nach dem anderen Brennpunkte gezogene Radius vector mit der Abscissenachse bildet, = α. Der Flächeninhalt E der Ellipse ist zu berechnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel: $p = 1{,}5145^{\,m}$, $\alpha = 42^0\ 12'\ 40''$

Res.: $$E = \frac{p^2 \pi \cos^3\left(45^0 \pm \frac{\alpha}{2}\right)}{(\sin\alpha)^{3/2}} = 10^{\,qm}$$

24) Von einer Ellipse sind die beiden Achsen $= 2a$ und $= 2b$ gegeben, ferner der Winkel α, welchen die nach einem Punkte der Ellipse gezogenen Radien vectoren mit einander bilden. Es sind zu suchen: erstens die Koordinaten x_1 und y_1 dieses Punktes, sowie die beiden nach ihm gezogenen Brennstrahlen, ferner die Längen der in demselben Punkte an die Ellipse gelegten Tangente t und der zugehörigen Normale n bis zu ihren Durchschnittspunkten mit der Abscissenachse, endlich der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks, welches jene Leitstrahlen mit der Abscissenachse einschliessen.

Beispiel: $a = 10^{\,cm}$, $b = 6^{\,cm}$, $\alpha = 92^0\ 17'\ 32''$

Res.: $$e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$x_1 = \pm \frac{a}{e}\sqrt{e^2 - b^2 \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}} = 6{,}25^{\,cm}, \quad y_1 = \pm \frac{b^2}{e}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 4{,}6837^{\,cm}$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = a \pm \sqrt{e^2 - b^2 \operatorname{tang}^2\frac{\alpha}{2}} \left\{\begin{matrix} r_1 = 15^{\,cm} \\ r_2 = 5^{\,cm} \end{matrix}\right.$$

$$t = \frac{b^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{a^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - b^2}} = 10{,}8165^{\,cm}, \quad n = \frac{b^2}{a\cos\frac{\alpha}{2}} = 5{,}1961^{\,cm}$$

$$F = b^2 \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 37{,}47^{\,qcm}$$

25) An eine Ellipse, deren Achsen $= 2a$ und $= 2b$ gegeben sind, ist eine Tangente gelegt, welche mit der positiven Richtung der Abscissenachse den Winkel α bildet. Die Koordinaten x_1 und y_1 des Berührungspunktes dieser Tangente sind zu berechnen, ferner die Längen dieser Tangente t und der zugehörigen Normale n vom Berührungspunkte bis zu ihren Durchschnittspunkten mit der Abscissenachse, endlich der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks, welches Normale und Tangente mit der Abscissenachse einschliessen.

Beispiel: $a = 6^{\,cm}$, $b = 4^{\,cm}$, $\alpha = 153^0\ 26'\ 6''$

Res.: $$x_1 = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2\alpha}} = 3{,}6^{\,cm}, \quad y_1 = -\frac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\alpha}} = -3{,}2^{\,cm}$$

$$t = \frac{b^2}{\sin\alpha\sqrt{b^2 + a^2 \operatorname{tang}^2\alpha}} = 7{,}1554^{\,cm}$$

$$n = \frac{b^2}{\sin\alpha\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{cotg}^2\alpha}} = 3{,}5777^{\,cm}$$

$$F = \frac{b^4 \operatorname{cotg}(\pi - \alpha)}{2(a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha)} = 12{,}8^{\,qcm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

26) In einer Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 1$ gegeben ist, stehen die nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogenen beiden Brennstrahlen auf einander senkrecht. Der Winkel α, welchen diese Tangente mit der Abscissenachse bildet, ist zu berechnen, ferner die Längen dieser Tangente t und der zugehörigen Normale n vom Berührungspunkte bis zu ihren resp. Durchschnittspunkten mit der Abscissenachse, sowie das Stück z, welches die Tangente von der Ordinatenachse abschneidet, endlich noch die zugehörige Subtangente st und Subnormale sn. Schliesslich ist anzugeben, unter welchen Bedingungen nur die Aufgabe möglich sein wird.

Beispiel: $a = 12\,\text{cm}$, $b = 3\sqrt{6}\,\text{cm}$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{e^2 - b^2} = {}^1/_2,\ \alpha = 26^0\ 33'\ 55''$$

$$t = \frac{b^2\sqrt{2}}{\sqrt{e^2 - b^2}} = 9\sqrt{2} = 12{,}7279\,\text{cm},\quad n = \frac{b^2\sqrt{2}}{a} = 4{,}5\sqrt{2} = 6{,}364\,\text{cm}$$

$$z = e = 3\sqrt{10} = 9{,}4868\,\text{cm}$$

$$st = \frac{ab^2}{e\sqrt{e^2 - b^2}} = 3{,}6\sqrt{10} = 11{,}3842\,\text{cm}$$

$$sn = \frac{b^2}{ae}\sqrt{e^2 - b^2} = 0{,}9\sqrt{10} = 2{,}846\,\text{cm}$$

Es muss $e > b$ und $a > b\sqrt{2}$ sein.

27) Von einer Ellipse sind die Koordinaten eines Punktes derselben $= x_1$ und y_1 gegeben, ferner das Stück m, welches die in diesem Punkte an die Ellipse gelegte Tangente von der Abscissenachse abschneidet. Der Flächeninhalt der Ellipse E, ferner die beiden nach jenem Punkte gezogenen Radien vectoren r_1 und r_2 und der Winkel φ, welchen letztere mit einander bilden, sind zu suchen.

Beispiel: $x_1 = 9\,\text{cm}$, $y_1 = 8\,\text{cm}$, $m = 25\,\text{cm}$

Res.: $E = my_1\,\pi\sqrt{\frac{x_1}{m - x_1}} = 150\,\pi = 471{,}2389\,\text{qcm}$

$$\text{tang}\,\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{y_1}\sqrt{\frac{(m - x_1)\,(mx_1 - p^2 - 9^2)}{m}} = 0{,}4\sqrt{5}$$

$$\varphi = 83^0\ 37'\ 16''$$

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{y_1\,[m^2 - x_1^2 - y_1^2 \pm \sqrt{m\,(m - x_1)\,(mx_1 - x_1^2 - y_1^2)}]}{m - x_1}}$$

$$r_1 = 21{,}708\,\text{cm},\quad r_2 = 8{,}292\,\text{cm}$$

28) Von einem Punkte ausserhalb, dessen Koordinaten $= x_1$ und y_1 gegeben sind, sind an eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

geben ist, zwei Tangenten gelegt. Die Koordinaten, ξ_1 und η_1, resp. ξ_2 und η_2, der beiden Berührungspunkte dieser Tangenten sind zu bestimmen, ferner der Winkel φ, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden und endlich die Abscisse m und der Winkel ϑ, unter welchem die Verbindungslinie jener beiden Berührungspunkte die Abscissenachse schneidet.

Beispiel: $x_1 = 2\,\text{m},\ y_1 = 1\,\text{m},\ a = \sqrt{3}\,\text{m},\ b = \sqrt{2}\,\text{m}$

$$\text{Res.:}\quad \left.\begin{matrix}\xi_1\\ \xi_2\end{matrix}\right\} = \frac{a^2\,(b^2 x_1 \mp y_1 \sqrt{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2})}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}$$

$$\xi_1 = \frac{3\,(4 - \sqrt{5})}{11} = 0{,}48107\,\text{m},\quad \xi_2 = \frac{3\,(4 + \sqrt{5})}{11} = 1{,}7007\,\text{m}$$

$$\left.\begin{matrix}\eta_1\\ \eta_2\end{matrix}\right\} = \frac{b^2\,(a^2 y_1 \pm x_1 \sqrt{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 - a^2 b^2})}{a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2}$$

$$\eta_1 = \frac{2\,(3 + 2\sqrt{5})}{11} = 1{,}3586\,\text{m},\quad \eta_2 = \frac{2\,(3 - 2\sqrt{5})}{11} = -\,0{,}26766\,\text{m}$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{-\,a^2 b^2\,(\xi_1 \eta_2 + \xi_2 \eta_1)}{a^4 \eta_1 \eta_2 + b^4 \xi_1 \xi_2},\quad \operatorname{tang}\varphi = \infty,\ \varphi = 90^0$$

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\eta_1 - \eta_2}{\xi_1 - \xi_2} = -\,\frac{4}{3},\ \vartheta = 143^0\ 6'\ 12''$$

$$m = \frac{\xi_2 \eta_1 - \xi_1 \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} = 1{,}5\,\text{m}$$

29) Von einer Ellipse sind die Koordinaten x_1 und y_1 eines Punktes derselben, sowie der Abstand des Mittelpunktes der Ellipse von ihren Leitlinien = m gegeben. Die beiden Halbachsen a und b der Ellipse sind zu bestimmen.

Beispiel: $x_1 = 6\,\text{m},\ y_1 = 4\,\text{m},\ m = \frac{20}{3}\sqrt{3}\,\text{m}$

$$\text{Res.:}\quad a = \sqrt{\frac{m^2 + x_1^2 \pm \sqrt{(m^2 - x_1^2)^2 - 4 m^2 y_1^2}}{2}}$$

$$b = \frac{1}{m}\sqrt{\frac{(m^2 - x^2)\,x_1^2 + 2 m^2 y_1^2 \mp x_1^2 \sqrt{(m^2 - x_1^2)^2 - 4 m^2 y_1^2}}{2}}$$

$$a = 10\,\text{m} \qquad a = \frac{4}{3}\sqrt{39} = 8{,}3267\,\text{m}$$

oder

$$b = 5\,\text{m} \qquad b = \frac{8}{5}\sqrt{13} = 5{,}7689\,\text{m}$$

30) Durch den Mittelpunkt einer Ellipse, deren grosse Achse = 2a gegeben ist, ist eine gerade Linie gelegt, welche mit der Abscissenachse den Winkel φ bildet und die Ellipse in einem Punkte schneidet, dessen Ordinate = y_1 gegeben ist. Der Flächeninhalt der Ellipse E ist zu suchen und der Winkel α, welchen die im Durchschnittspunkte an die Ellipse gelegte Tangente mit der Linie bildet.

Beispiel: $a = 5\,\text{cm},\ y_1 = 3\,\text{cm},\ \varphi = 45^0.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Res.:}\quad E = \frac{a^2 y_1 \pi}{\sqrt{a^2 - y_1^2 \operatorname{cotg}^2 \varphi}} = 58{,}904 \text{ qm}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a^2 \sin^2 \varphi \,.\, \operatorname{tang} \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi - y_1^2} = \frac{25}{7},\ \varphi = 74^0\ 21'\ 27''$$

31) Eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, wird von einer geraden Linie, welche durch einen Brennpunkt der Ellipse geht und auf der Ordinatenachse das gegebene Stück n abschneidet, geschnitten. Die Koordinaten (x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2) der Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Ellipse sind zu suchen, ferner die Winkel α_1 und α_2, resp. β, welche die in diesen Punkten an die Ellipse gelegten Tangenten mit der geraden Linie und mit einander bilden.

Beispiel: $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $n = 2\sqrt{5}$ cm

Wie gestalten sich die Resultate, wenn $n = b$ wird?

$$\text{Res.:}\qquad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{ae\,(an^2 \pm b^2 \sqrt{e^2 + n^2})}{a^2 n^2 + b^2 e^2} = \left\{\begin{matrix} {}^{10}/_{11} = 0{,}9091 \text{ cm} \\ 2\,{}^{9}/_{23} = 2{,}3913 \text{ cm} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^2 n\,(e^2 \pm a \sqrt{e^2 + n^2})}{a^2 n^2 + b^2 e^2} = \left\{\begin{matrix} {}^{9}/_{7} \sqrt{5} = 2{,}8749 \text{ cm} \\ -\,{}^{9}/_{23} \sqrt{5} = -\,0{,}875 \text{ cm} \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} \operatorname{tang} \alpha_1 \\ \operatorname{tang} \alpha_2 \end{matrix}\right\} = \frac{\pm a \sqrt{e^2 + n^2} - e^2}{en} = \left\{\begin{matrix} {}^{7}/_{20} \sqrt{5},\ \alpha_1 = 38^0\ 2'\ 53'' \\ -\,{}^{23}/_{20} \sqrt{5},\ \alpha_2 = 111^0\ 15'\ 00'' \end{matrix}\right.$$

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \big(\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)\big) = \frac{2\, e^3 n}{n^2 (a^2 + e^2) + b^2 e^2}$$

$$\operatorname{tang} \beta = {}^{64}/_{241} \sqrt{5},\ \beta = 30^0\ 42'\ 7''$$

Für $n = b$ wird

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2\, a^2 e}{a^2 + e^2},\ y_1 = b,\ y_2 = \frac{-\, b^3}{a^2 + e^2}$$

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{b^2}{en},\ \operatorname{tang} \alpha_2 = \frac{-\,(a^2 + e^2)}{en},\ \operatorname{tang} \beta = \frac{2\, e^3}{b\,(a^2 + 2\, e^2)}$$

32) Durch einen Brennpunkt einer Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist eine gerade Linie gelegt, welche die grosse Achse der Ellipse unter dem gegebenen Winkel α schneidet, und in den Durchschnittspunkten dieser Linie mit der Ellipse sind an letztere Tangenten gelegt. Die Koordinaten x_1 und y_1, x_2 und y_2 der Durchschnittspunkte der Geraden mit der Ellipse, sowie die Koordinaten ξ und η des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten unter sich und der Winkel φ, den sie mit einander bilden, sind zu bestimmen. Endlich ist zu zeigen, dass der Durchschnittspunkt der Tangenten auf der Leitlinie liegen wird und die Verbindungslinie des Tangentenschnittpunktes mit dem nächsten Brennpunkte senkrecht auf der gegebenen geraden Linie stehen muss.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel: $a = 13^m$, $b = 12^m$, $\alpha = 60^0$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a\,(ae \sin^2\alpha \mp b^2 \cos\alpha)}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha} = \left\{\begin{matrix} 9\,{}^{20}/_{31} = 9{,}6452^m \\ -1\,{}^{6}/_{7} = -1{,}8571^m \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^2 \sin\alpha\,(e \cos\alpha \mp a)}{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha} = \left\{\begin{matrix} -\,{}^{144}/_{31}\sqrt{3} = -8{,}0454^m \\ {}^{49}/_{7}\sqrt{3} = 11{,}877^m \end{matrix}\right.$$

$$\xi = \frac{a^2}{e} = 35{,}8^m, \quad \eta = \frac{b^2}{e}\cot g\,\alpha = {}^{48}/_{5}\sqrt{3} = 16{,}628^m$$

$$\tan g\,\varphi = \frac{2\,ae}{b^2}\,.\ \sin\varphi = {}^{65}/_{144}\sqrt{3}, \quad \varphi = 51^0\ 25'\ 41''$$

Die Abscisse der Leitlinie der Ellipse ist $= \frac{a^2}{e} = \xi$, und der Winkel ϑ, welchen die Verbindungslinie des Tangentenschnittpunktes und des Brennpunktes mit der Abscissenachse bildet, ist durch die Gleichung $\tan g\,\vartheta = \cot g\,\alpha$ bestimmt, woraus folgt, dass $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ und daher $\pi - (\alpha + \vartheta) = \frac{\pi}{2}$ ist.

33) Eine Ellipse, deren Halbachsen $= a$ und b gegeben sind, wird von einer geraden Linie geschnitten, welche mit der positiven Richtung der Abscissenachse den Winkel α und auf der positiven Seite der Ordinatenachse das Stück m ($m > b$) abschneidet. Die Koordinaten (x_1 und y_1, x_2 und y_2) der Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Ellipse sind zu berechnen.

Beispiel: $a = 8^m$, $b = 5^m$, $m = 6^m$, $\alpha = 135^0$

Wie gestalten sich die Resultate, wenn $m = b$ wird.

Res.: $$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{a\,(-am \tan g\,\alpha \mp b\sqrt{a^2 \tan g^2\alpha + b^2 - m^2})}{a^2 \tan g^2\alpha + b^2}$$

$$x_1 = \frac{384 - 40\sqrt{53}}{89} = 1{,}4027^m, \quad x_2 = \frac{384 + 40\sqrt{53}}{89} = 7{,}5866^m$$

$$\left.\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b\,(bm \mp a \tan g\,\alpha\sqrt{a^2 \tan g^2\alpha + b^2 - m^2})}{a^2 \tan g^2\alpha + b^2}$$

$$y_1 = \frac{150 + 40\sqrt{53}}{89} = 4{,}9574^m, \quad y_2 = \frac{150 - 40\sqrt{53}}{89} = -1{,}586^m$$

Für $m = b$ wird

$$x_1 = \frac{-2\,a^2 b \tan g\,\alpha}{a^2 \tan g^2\alpha + b^2} \text{ und } x_2 = 0, \quad y_1 = \frac{-b\,(a^2 \tan g^2\alpha - b^2)}{a^2 \tan g^2\alpha + b^2} \text{ und } y_2 = b$$

34) In ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Höhe $= h$ gegeben ist, ist eine Ellipse, deren Halbachsen $= a$ und $= b$ sind, so einbeschrieben, dass die grosse Achse a der Basis des Dreiecks parallel geht. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Berührungspunkte der Ellipse mit den Dreiecksschenkeln sind anzugeben, und zwar in Bezug auf den Fusspunkt der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Höhe als Anfangspunkt der Koordinaten, ferner sind der Flächeninhalt F und der Basiswinkel α des Dreiecks zu berechnen.

Beispiel: $h = 120\,\text{cm}$, $a = 60\,\text{cm}$, $b = 45\,\text{cm}$

Wie würden sich die Resultate gestalten, wenn die kleine Achse b der Basis des Dreiecks parallel gehen sollte?

$$\text{Res.:}\quad x_1 = \pm \frac{a\sqrt{h\,(h-2b)}}{h-b} = \pm\, 48\,\text{cm},\quad y_1 = \frac{bh}{h-b} = 72\,\text{cm}$$

$$F = ah\sqrt{\frac{h}{h-2b}} = 14400\,\text{qcm},\quad \operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{a}\sqrt{h\,(h-2b)} = 1$$

$$\alpha = 45^0$$

Wenn die kleine Achse der Dreiecksbasis parallel gehen sollte, müsste

$$x_1 = \pm \frac{b\sqrt{h\,(h-2a)}}{h-a},\quad y_1 = \frac{h-a}{ah},\quad F = bh\sqrt{\frac{h}{h-2a}} \text{ und}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{b}\sqrt{h\,(h-2a)} \text{ sein.}$$

35) Ein gerader Kegel, dessen Achsenschnitt an der Spitze den Winkel 2β hat, wird in einem Punkte seiner Achse, welcher von der Spitze des Kegels den gegebenen Abstand m hat, von einer Ebene unter dem Neigungswinkel gegen die Achse, α, schief geschnitten Wie gross sind die beiden Achsen 2a und 2b und der Flächeninhalt E der Ellipse, in welcher die Ebene den Kegelmantel schneidet? Wie gross ist ferner das Volumen V des durch jene Ebene von dem Kegel abgeschnittenen, schiefen elliptischen Kegels?

Beispiel: $\alpha = 54^0\ 27'\ 30''$, $\beta = 32^0\ 16'\ 20''$, $m = 3{,}7216\,\text{cm}$

$$\text{Res.:}\quad 2a = \frac{m \sin\alpha \,.\, \sin 2\beta}{\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha+\beta)} = 7{,}2525\,\text{cm}$$

$$2b = \frac{2\,m \sin\alpha \,.\, \sin\beta}{[\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)]^{1/2}} = 5{,}2668\,\text{cm}$$

$$E = \frac{m^2\pi \sin^2\alpha \,.\, \sin^2\beta \,.\, \cos\beta}{[\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)]^{3/2}} = 30\,\text{qcm}$$

$$V = \frac{m^3\pi \sin^3\alpha \,.\, \sin^2\beta \,.\, \cos\beta}{3\,[\sin(\alpha=\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)]^{3/2}} = 30{,}282\,\text{cbcm}$$

36) Der Mantel eines geraden Kegels wird in einem Punkte seiner Achse, welcher den Abstand m von der Spitze des Kegels hat, durch eine Ebene schief geschnitten. Diese Ebene bildet mit der längsten und kürzesten Seitenlinie des schiefen elliptischen Kegels, welchen sie von dem geraden Kegel abschneidet, die Neigungswinkel α und β. Die beiden Achsen 2a und 2b, sowie der Flächeninhalt E der Ellipse sind zu bestimmen, in welcher die Ebene den Kegelmantel schneidet, ferner das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Volumen V des abgeschnittenen schiefen elliptischen Kegels. Wie gross sind endlich der Halbmesser ρ und das Volumen K der in diesen schiefen Kegel einbeschriebenen Kugel?

Beispiel: $m = 4{,}5168^{m}$, $\alpha = 101^{0}\ 9'\ 10''$, $\beta = 35^{0}\ 42'\ 30''$

$$\text{Res.:}\quad 2a = \frac{m \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\alpha \cdot \sin\beta} = 6{,}5441^{m}$$

$$2b = \frac{2\,m \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{[\sin\alpha \cdot \sin\beta]^{1/2}}$$

$$E = \frac{m^{2}\pi \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos^{2}\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\,[\sin\alpha \cdot \sin\beta]^{3/2}} = 27{,}369^{qm}$$

$$V = \frac{m^{3}\pi \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos^{3}\frac{\alpha-\beta}{2}}{6\,[\sin\alpha \cdot \sin\beta]^{3/2}} = 16^{2}/_{3}{}^{cbm}$$

$$\rho = \frac{m \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}} = 1{,}1556^{m}$$

$$K = \frac{m^{3}\pi \cos^{3}\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos^{3}\frac{\alpha-\beta}{2}}{6 \cos^{3}\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^{3}\frac{\beta}{2}} = 6{,}4634^{cbm}$$

37) Ein gerader Kegel, dessen Normalschnitt an der Spitze den Winkel 2α hat und dessen Höhe $= h$ gegeben ist, wird durch eine Ebene, deren senkrechter Abstand von der Spitze des Kegels m beträgt, schief so geschnitten, dass diese Ebene mit der Achse des Kegels den Winkel β (wo $\beta > \alpha$ ist) bildet. Die Gleichung G und der Flächeninhalt E der Ellipse, in welcher diese Ebene den Kegelmantel schneidet, sind zu bestimmen, ferner die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte dieser Ellipse mit dem Grundkreise des Kegels.

Beispiel: $\alpha = 30^{0}$, $\beta = 45^{0}$, $m = 2^{cm}$, $h = 4^{cm}$

$$\text{Res.:}\quad G: \frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1, \quad \text{wo}$$

$$a = \frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\alpha+\beta) \sin(\beta-\alpha)} = 2\sqrt{3} = 3{,}4641^{cm}$$

$$b = \frac{m \sin\alpha}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta-\alpha)}} = 2^{cm}$$

$$E = \frac{m^{2}\pi \sin^{2}\alpha \cdot \cos\alpha}{[\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\beta-\alpha)]^{3/2}} = 4\pi\sqrt{3} = 20{,}7845^{qcm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1 = \frac{h \sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\beta-\alpha) - m \sin\beta \,.\, \cos^2 a}{\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\beta-\alpha) \,.\, \cos\beta} = 4\sqrt{2} - 6 = -03432^{cm}$$

$$y_1 = \pm \sqrt{\frac{m \cos^2\alpha\,(2\,h \sin\beta - m) - h^2 \sin(\alpha+\beta) \sin(\beta-\alpha)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}}$$

$$y_1 = \pm \tfrac{2}{3} \sqrt{6\,(6\sqrt{2} - 7)} = \pm 1{,}9902^{cm}$$

38) Durch einen geraden Kegel, dessen Grundkreis den Halbmesser r hat und dessen Seitenlinie gegen die Grundfläche unter dem Winkel α geneigt ist, ist eine Ebene, die durch den Endpunkt einer Seitenlinie des Kegels geht und gegen die Grundfläche desselben unter dem Winkel φ geneigt ist, gelegt. Der Flächeninhalt E der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Kegelmantel und das Volumen H des durch sie von dem Kegel abgeschnittenen Kegelhufes ist zu berechnen.

Beispiel: $r = 3^m$, $\alpha = 72^0\ 33'\ 34''$, $\varphi = 43^0\ 19'\ 20''$

Res.: $$E = \frac{r^2 \pi \sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)} \sqrt{\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}} = 22{,}9^{qcm}$$

$$H = \frac{r^3 \pi}{3} \operatorname{tang}\alpha \left[1 - \left(\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin(\alpha+\varphi)}\right)^{3/2}\right] = 54^{cbcm}$$

39) Ueber einer Ebene befindet sich in dem Abstande h von derselben ein leuchtender Punkt, schräg unterhalb des leuchtenden Punktes befindet sich eine Kugel mit dem Halbmesser ρ, deren Mittelpunkt von dem leuchtenden Punkte die Entfernung m hat, diese Verbindungslinie endlich des leuchtenden Punktes mit dem Mittelpunkt der Kugel bildet in ihrer Verlängerung mit der Ebene den Neigungswinkel α. Wie gross ist der schattige Teil e der Kegeloberfläche und der Schatten E, welchen die Kugel auf die Ebene wirft?

Beispiel: $m = 13^{cm}$, $\rho = 5^{cm}$, $h = 20^{cm}$, $\alpha = 60^0$

Res.: $$C = \frac{2\,\rho^2 \pi\,(m+\rho)}{m} = \frac{900}{13}\pi = 217{,}5^{qcm}$$

$$E = \frac{h^2 \rho^2 \pi \cos\beta}{m^2\,[\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta)]^{3/2}}$$

wo $\sin\beta = \frac{\rho}{m}$ und daher $\beta = 22^0\ 37'\ 12''$ ist.

$$E = 367{,}32^{qcm}$$

40) Ein leuchtender Punkt L befindet sich in dem Abstande n vom Mittelpunkte M einer Kugel, deren Halbmesser $= \rho$ gegeben ist. Der Strahl LM trifft in seiner Verlängerung und in der Entfernung LA = m schräg und unter dem Neigungswinkel α auf eine Ebene. Wie gross ist der beleuchtete (B) und der unbeleuchtete (U) Teil der Kugeloberfläche, sowie des Schatten (E), welchen die Kugel auf die Ebene wirft?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel: $\rho = 4^{cm}$, $n = 10^{cm}$, $m = 31{,}1838^{cm}$, $\alpha = 63^0\ 26'\ 8''$

Res.: $B = \frac{2\rho^2\pi(n-\rho)}{n} = 60{,}319^{qcm}$, $U = \frac{2\rho^2\pi(n+\rho)}{n} = 140{,}745^{qcm}$

$$E = \frac{m^2\rho^2\pi\sin^2\alpha\sqrt{n^2-\rho^2}}{(n^2\sin^2\alpha-\rho^2)^{3/2}} = 700^{qcm}$$

41) Von einem schiefen Kegel sind der Halbmesser des Grundkreises $= \rho$, die Achse $= a$ und die Neigung der letzteren gegen den Grundkreis $= \alpha$ gegeben. Durch den Endpunkt der kürzesten Seitenlinie dieses Kegels ist eine Ebene gelegt, welche die Achse des Kegels senkrecht schneidet. Der Flächeninhalt E der Ellipse ist zu berechnen, in welcher diese Ebene den Kegelmantel schneidet, ferner die Volumina (K und H) des schiefen elliptischen Kegels und des Kegelhufes, in welche der gegebene schiefe Kegel durch die Schnittfläche zerlegt wird.

Beispiel: $a = 3^m$, $r = 2^m$, $\alpha = 60^0$

$$\text{Res.: } E = \frac{r^3\pi\sin^2\alpha\,.\,\sin^2(\eta+\varepsilon)\sqrt{\cot g\,\eta\,.\,\cot g\,\varepsilon}}{4a\sin^2\eta\,.\,\cos^2\varepsilon}$$

$$K = \frac{E\,r\,.\,\sin\alpha\,.\,\cot g\,\eta}{3},\quad H = \frac{r\sin\alpha}{3}(ra\pi - E\cot g\,\eta)$$

wo η und ε die beiden Winkel bezeichnet, in welche der Normalschnitt des gegebenen schiefen Kegels durch die Achse zerlegt wird, und welche durch die Gleichungen

$$\cot g\,\eta = \frac{a - r\cos\alpha}{r\sin\alpha} = {}^2/_3\sqrt{3} \text{ und } \cot g\,\varepsilon = \frac{a + r\cos\alpha}{r\sin\alpha} = {}^4/_3\sqrt{3}$$

bestimmt sind, woraus sich ergiebt

$\eta = 40^0\ 53'\ 37''$, $\varepsilon = 23^0\ 24'\ 48''$ und danach
$E = 5{,}7713^{qm}$, $K = 3{,}8475^{cbm}$, $H = 7{,}0353^{cbm}$

42) Von einem schiefen Kegel sind die Achse $= a$, der Neigungswinkel derselben gegen die Grundfläche $= \alpha$ und der Winkel an der Spitze des Normalschnittes des Kegels $= 2\beta$ gegeben. Wie gross ist das Volumen V dieses Kegels? Wie gross ist ferner die Schnittfläche E, welche entsteht, wenn man von dem Endpunkte der kürzesten Seitenlinie des gegebenen Kegels aus durch ihn eine Ebene so legt, dass von ihm ein gerader elliptischer Kegel abgeschnitten wird? Wie gross sind endlich das Volumen K dieses abgeschnittenen elliptischen Kegels, sowie das Volumen H des Kegelhufes, welcher durch die Schnittfläche, andererseits von dem gegebenen Kegel abgetrennt wird?

Beispiel: $a = 2^m$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$

$$\text{Res.: } V = \frac{r^2a\pi\sin\alpha}{3} = 2{,}67413^{cbm},\ E = mn\pi$$

wo m und n die beiden Achsen der Schnittfläche bezeichnen, welche durch die Gleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$m = (a \cos \delta - r \cos (\alpha + \delta)) \operatorname{tang} \beta \text{ und}$$

$$n = \frac{(a \cos \delta - r \cos (\alpha + \delta)) \sqrt{r^2 \sin^2 (\alpha + \delta) - a^2 \sin^2 \delta}}{a \sin \alpha}$$

bestimmt sind, wobei δ die Differenz der beiden Winkel bezeichnet, in welche die Achse des gegebenen Kegels den Winkel an der Spitze des Normalschnittes zerlegt, welcher Winkel durch die Formel

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\sqrt{\sin^2 2\beta + \operatorname{tang}^2 \alpha} - \operatorname{tang} \alpha}{2 \cos^2 \beta} = \frac{3 - \sqrt{7}}{\sqrt{7} - 1} \text{ bestimmt wird,}$$

woraus sich ergiebt

$\delta = 12^0\ 8'\ 51''$, $m = 0{,}58856^{m}$, $n = 0{,}7551^{m}$, $E = 1{,}39616^{qcm}$; endlich

$$K = \frac{E m}{3} \cdot \operatorname{cotg} \beta = 0{,}47432^{cbm}$$

$$H = \frac{(r^2 a \sin \alpha - m^2 n \operatorname{cotg} \beta)\, \pi}{3} = 2{,}19981^{cbm}$$

43) Von dem Mittelpunkte einer Ellipse aus, deren Halbachsen $= a$ und $= b$ gegeben sind, ist mit einem Halbmesser, der gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den beiden Halbachsen ist, ein Kreis geschlagen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte der beiden Kurven sind zu bestimmen, ferner der Winkel φ, welchen die in diesen Durchschnittspunkten an beide Kurven gelegten Tangenten mit einander bilden. Beispiel: $a = 10^{cm}$, $b = 6^{cm}$

$$\text{Res.:} \quad x_1 = \pm \frac{a}{2} \sqrt{\frac{a + 3b}{a + b}} = \pm 2{,}5 \sqrt{7} = \pm 2{,}1128^{cm}$$

$$y_1 = \pm \frac{b}{2} \sqrt{\frac{3a + b}{a + b}} = \pm 4{,}5^{cm}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{(a - b) \sqrt{(a + 3b)(3a + b)}}{4ab} = 0{,}2 \sqrt{7}, \quad \varphi = 27^0\ 53'\ 8''$$

44) Von dem Mittelpunkte einer Ellipse aus, deren Halbachsen $= a$ und $= b$ gegeben sind, ist ein Kreis geschlagen, dessen Halbmesser gleich der mittleren Proportionale zwischen den beiden Halbachsen der Ellipse ist. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte dieser beiden Kurven, sowie der Winkel φ, welchen die in diesen Durchschnittspunkten an beide Kurven gelegten Tangenten mit einander bilden, sind zu suchen.

Beispiel: $a = 45^{cm}$, $b = 5^{cm}$

$$\text{Res.:} \quad x_1 \pm a \sqrt{\frac{b}{a + b}} = \pm 4{,}5 \sqrt{10} = \pm 14{,}2303^{cm}$$

$$y_1 = \pm b \sqrt{\frac{a}{a + b}} = \pm 1{,}5 \sqrt{10} = \pm 4{,}7435^{cm}$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{a - b}{\sqrt{ab}} = {}^8/_3, \quad \varphi = 69^0\ 26'\ 39''$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

45) Von einem Brennpunkte einer Ellipse aus, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist mit der halben Excentricität derselben $(e = \sqrt{a^2 - b^2})$ ein Kreis geschlagen, welcher die Ellipse schneidet. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu bestimmen, ferner die Winkel α und β, welche die in diesen Durchschnittspunkten an beide Kurven gelegten Tangenten, sowie die nach den Durchschnittspunkten gezogenen Radien vectoren mit einander bilden. Endlich sind die Flächeninhalte F_1 und F_2 der beiden Dreiecke zu berechnen, welche jene beiden Tangenten, resp. Radien vectoren, mit der Abscissenachse bilden.

Beispiel: $a = 20^{cm}$, $b = 12^{cm}$

Die Determination dieser Aufgabe ist anzugeben.

Res.: $x_1 = \frac{a(a-e)}{e} = 5^{cm}$, $y_1 = \pm \frac{b}{e}\sqrt{a(2e-a)} = \pm 3\sqrt{15}$
$= \pm 3{,}5283$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{b}\sqrt{a(2e-a)} = -\frac{1}{3}\sqrt{15},\ \alpha = 127^0\ 45'\ 40''$$

$$\cos\beta = \frac{2a^2 - e(2a+e)}{e(2a-e)} = -\frac{1}{4},\ \beta = 104^0\ 28'\ 39''$$

$$F_1 = \frac{ab\,e\,(2e-a)\sqrt{a(2e-a)}}{2((a^2+b^2)e - a^3)} = \frac{1440}{11}\sqrt{15} = 507{,}01^{qcm}$$

$$F_2 = b\sqrt{a(2e-a)} = 48\sqrt{15} = 185{,}904^{qcm}$$

Damit die Aufgabe möglich sei, muss $a < 2e$ sein.

46) Von einem Brennpunkte einer Ellipse aus, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist mit dem gegebenen Halbmesser r ein Kreis geschlagen, welcher die Ellipse schneidet. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte der beiden Kurven sind zu bestimmen, ferner die beiden Winkel α und β, welche die in diesen Punkten an beide Kurven gelegten Tangenten, sowie die nach den Berührungspunkten gezogenen Radien vectoren mit einander bilden.

Beispiel: $a = 15^{cm}$, $b = 10^{cm}$, $r = 20^{cm}$

Die Determination dieser Aufgabe ist anzugeben.

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$x_1 = \frac{a(a-r)}{e} = -3\sqrt{5} = -6{,}7082^{cm}$$

$$y_1 = \pm\frac{b}{e}\sqrt{r(2a-r) - b^2} = \pm 4\sqrt{5} = \pm 8{,}9443^{cm}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{1}{b}\sqrt{r(2a-r) - b^2} = -1,\ \alpha = 135^0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\cos\beta = \frac{2\,b^2 - r\,(2\,a - r)}{r\,(2\,a - r)} = 0,\ \beta = 90^0$$

Damit die Aufgabe möglich sei, muss

$$r < a + e \text{ und } r > a - e \qquad \text{sein.}$$

47) Von einem Endpunkte der grossen Achse einer Ellipse aus, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist mit der halben grossen Achse der Ellipse ein Kreis geschlagen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu berechnen, ferner die Längen r_1 und r_2 der beiden nach diesen Punkten gezogenen Radien vectoren.

Beispiel: $a = 5\,\text{cm},\ b = 3\,\text{cm}$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$x_1 = \frac{a\,(a^2 - \sqrt{a^4 - b^2 e^2})}{e^2} = {}^5/_{16}\,(25 - \sqrt{481}) = 0{,}95884\,\text{cm}$$

$$y_1 = \pm\frac{a\,b}{e^2}\sqrt{2\,\sqrt{a^4 - b^2 e^2} - (a^2 + b^2)} = \pm\,{}^{15}/_{16}\,\sqrt{2\,\sqrt{481} - 34}$$

$$= \pm\,2{,}9431\,\text{cm}$$

$$r_1 = \frac{-a\,(a - e) + \sqrt{a^4 - b^2 e^2}}{e} = \frac{\sqrt{481} - 5}{4} = 4{,}2329\,\text{cm}$$

$$r_2 = \frac{a\,(a + e) - \sqrt{a^4 - b^2 e^2}}{e} = \frac{45 - \sqrt{481}}{4} = 5{,}7671\,\text{cm}$$

48) Von dem auf der positiven Seite der Ordinatenachse gelegenen Scheitel einer Ellipse aus, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist mit der halben kleinen Achse der Ellipse als Halbmesser ein Kreis geschlagen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu bestimmen, sowie die Winkel α, β und γ, welche die in diesem Punkte an die Ellipse und den Kreis gelegten Tangenten mit der positiven Richtung der Abscissenachse und mit einander bilden.

Beispiel: $a = 2\sqrt{2}\,\text{cm},\ b = \sqrt{5}\,\text{cm}$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$x_1 = \pm\frac{a\,b}{e^2}\sqrt{2\,\sqrt{a^4 - b^2 e^2} - (a^2 + b^2)} = \pm\,{}^2/_3\,\sqrt{10} = \pm\,2{,}1082\,\text{cm}$$

$$y_1 = \frac{b\,(\sqrt{a^4 - b^2 e^2} - b^2)}{e^2} = {}^2/_3\,\sqrt{5} = 1{,}4907\,\text{cm}$$

$$\tan\alpha = -\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{2\,\sqrt{a^4 - b^2 e^2} - (a^2 + b^2)}{a^4 + b^4 - b^2 e^2 - 2\,b^2\,\sqrt{a^4 - b^2 e^2}}} = -\,{}^5/_8\,\sqrt{2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin\beta = \frac{a}{e^2}\sqrt{2\sqrt{a^4 - b^2e^2 - (a^2+b^2)}} = {}^2/_3\sqrt{2},$$

$$\alpha = 138^0\ 31'\ 39'',\ \beta = 70^0\ 31'\ 43'',\ \gamma = \alpha - \beta = 67^0\ 59'\ 56''$$

49) Vom Mittelpunkte einer Ellipse aus, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, ist mit dem gegebenen Halbmesser r ein Kreis geschlagen, und an beide Kurven sind die vier gemeinschaftlichen Tangenten gelegt. Es sollen gesucht werden: erstens die Koordinaten ξ und η der Durchschnittspunkte beider Kurven, ferner die Koordinaten x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2, der gemeinschaftlichen Tangenten an der Ellipse und am Kreise, endlich der Flächeninhalt F und der spitze Winkel α des Rhombus, welcher von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildet wird. Beispiel: $a = 15^m$, $b = 2\sqrt{14}^m$, $r = 9^m$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\xi = \pm\frac{a}{e}\sqrt{r^2 - b^2} = \pm 5\,{}^{10}/_{13} = \pm 5{,}7602^m$$

$$\eta = \pm\frac{b}{e}\sqrt{a^2 - r^2} = \pm {}^{24}/_{13}\sqrt{14} = \pm 6{,}8917^m$$

$$x_1 = \pm\frac{a^2}{re}\sqrt{r^2 - b^2} = \pm 9\,{}^8/_{13} = \pm 9{,}6154^m$$

$$y_1 = \pm\frac{b^2}{re}\sqrt{a^2 - r^2} = \pm 5\,{}^{29}/_{39} = \pm 5{,}7436^m$$

$$x_2 = \pm\frac{r}{e}\sqrt{r^2 - b^2} = \pm 3\,{}^6/_{13} = \pm 3{,}4615^m$$

$$y_2 = \pm\frac{r}{e}\sqrt{a^2 - r^2} = \pm 8\,{}^4/_{13} = \pm 8{,}3077^m$$

$$F = \frac{2r^2e^2}{\sqrt{(a^2 - r^2)(r^2 - b^2)}} = 456{,}3^{qm},\ \tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{r^2 - b^2}{a^2 - r^2}} = {}^5/_{12}$$

$$\alpha = 45^0\ 14'\ 27''$$

50) Von zwei konjugierten Ellipsen, deren Achsen $= 2a$ und $= 2b$ gegeben sind, sind die Koordinaten ξ und η der Durchschnittspunkte, sowie die Koordinaten x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2, der Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten, welche sich an beide Ellipsen legen lassen, zu berechnen. Ferner sind die Winkel α, unter welchen sich die in den Durchschnittspunkten an beide Ellipsen gelegten Tangenten schneiden, sowie die Winkel β, welche die nach denselben Durchschnittspunkten gezogenen Radien vectoren mit einander bilden, zu bestimmen. Endlich ist zu beweisen, dass die vier gemeinschaftlichen Tangenten ein ein Quadrat bilden, und der Flächeninhalt F dieses Quadrates ist anzugeben.

Beispiel: $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$

Wie vereinfachen sich die Resultate, wenn $b = e$ wird?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\xi = \eta = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm 2{,}4\,\text{cm}, \quad x_1 = y_2 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm 3{,}2\,\text{cm}$$

$$x_2 = y_1 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm 1{,}8\,\text{cm}$$

$$\tan\alpha = -\frac{(a^2 + b^2)\,e^2}{2\,a^2 b^2} = -\,{}^{175}/_{288}, \quad \alpha = 148^0\ 42'\ 56''$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = b\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^4 + b^4}} = \frac{\sqrt{337}}{15}, \quad \beta = 70^0\ 24'\ 26''$$

Das Tangentenviereck muss ein Quadrat sein, weil die halben Diagonalen einander gleich sind, nämlich $= x_1 + y_1$, und auf einander senkrecht stehen.

$$F = 2\,(a^2 + b^2) = 50\,\text{qcm}$$

Wird $b = e$, so ist $\xi = \eta = \pm \frac{a}{3}\sqrt{3}$,

$$x_1 = y_2 = \frac{a}{3}\sqrt{6}, \quad x_2 = y_1 = \frac{a}{6}\sqrt{6}, \quad F = 3\,a^2$$

$$\tan\alpha = -\,{}^3/_4, \quad \alpha = 143^0\ 7'\ 49'', \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{0{,}6}, \quad \beta = 78^0\ 26'\ 22''$$

51) Zwei Ellipsen haben denselben Mittelpunkt, ihre Halbachsen sind $= a$ und b, resp. c und d, gegeben und zwar liegt die grosse Achse der zweiten Ellipse in der Ordinatenachse der ersten Ellipse. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Ellipsen sind zu bestimmen, ferner die Gleichungen der gemeinschaftlichen Tangenten G anzugeben und endlich der Flächeninhalt R desjenigen Rhombus zu berechnen, welches diese vier gemeinschaftlichen Tangenten einschliessen.

Beispiel: $a = 10\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 13\,\text{cm}$, $d = 5\,\text{cm}$

Wie würden sich die Resultate gestalten, wenn

1) $c = a$ und $b = d$ wird,
2) $c = a$ und $d = \sqrt{a^2 - b^2} = e$ wird, d. h. wenn jede der beiden Ellipsen durch die beiden Brennpunkte der anderen geht,
3) $a : b = c : d$ und $d = e$ wird?

Res.: $$x_1 = \pm\, ad\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 c^2 - b^2 d^2}} = 4{,}5587\,\text{cm}$$

$$y_1 = \pm\, bc\sqrt{\frac{a^2 - d^2}{a^2 c^2 - b^2 d^2}} = 5{,}3403\,\text{cm}$$

$$G: y = \mp\sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - d^2}}\cdot x \pm \sqrt{\frac{a^2 c^2 - b^2 d^2}{a^2 - d^2}}, \quad y = \mp\,{}^1/_{15}\sqrt{399}\,x \pm {}^8/_3\sqrt{30}$$

$$R = \frac{2\,(a^2 c^2 - b^2 d^2)}{\sqrt{(a^2 - d^2)\,(c^2 - b^2)}} = 320{,}4\,\text{qcm}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) Für $c = a$ und $b = d$ ist

$$x_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(conf. Aufgabe No. 50) und

$G : y = \mp x \pm \sqrt{a^2 + b^2}$, $R = 2\,(a^2 + b^2)$ wird zum Quadrat.

2) Für $c = a$ und $d = e$ wird

$$x_1 = \pm \frac{ae^2}{\sqrt{a^4 - b^2 e^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{ab^2}{\sqrt{a^4 - b^2 e^2}}$$

$$G : y = \mp \frac{e^2}{b^2} x \pm \frac{1}{b^2} \sqrt{a^4 - b^2 e^2}, \quad R = \frac{a^4 - b^2 e^2}{be}$$

3) Für $a : b = c : d$ und $d = e$ wird

$$x_1 = \pm \frac{a}{e} \sqrt{\frac{a^2 e^2 - b^4}{a^2 + b^2}}, \quad y_1 = \pm \frac{ab^2}{e \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$G : y = \mp \frac{1}{b^2} \sqrt{a^2 e^2 - b^4} \,.\, x \pm \frac{e^2}{b^2} \sqrt{a^2 + b^2}, \quad R = \frac{2\,(a^2 + b^2)\, e^4}{b^2 \sqrt{a^2 e^2 - b^4}}$$

52) Eine Ellipse und eine Parabel haben den einen Brennpunkt gemeinschaftlich, während der Scheitel der Parabel in den Mittelpunkt der Ellipse fällt. Von letzterer sind die beiden Halbachsen $= a$ und $= b$ gegeben. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven, die Gleichung der in diesen Punkten an beide Kurven gelegten Tangenten, sowie die Winkel α, β und γ, welche diese Tangenten mit der Abscissenachse und mit einander bilden, sind zu bestimmen.

Beispiel: $a = 3^{\mathrm{m}}$, $b = 2\sqrt{2}^{\mathrm{m}}$

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$x_1 = \frac{a\,(a - e)^2}{b^2} = {}^3/_2 \sqrt{3} = 2{,}5981^{\mathrm{m}}$$

$$y_1 = \pm \frac{2\,(a - e)}{b} \sqrt{ae} = \pm \sqrt{6} = \pm 2{,}4495^{\mathrm{m}}$$

Gleichungen der Tangenten

an der Ellipse $\begin{cases} 2\sqrt{ae}\, y + \dfrac{b\,(a - e)\, x}{a} = \dfrac{b^3}{a - e} \\ 3\sqrt{6}\, y + 4\, y = 24 \end{cases}$

an der Parabel $\begin{cases} y = \dfrac{b\sqrt{ae}}{a - e}\, x + \dfrac{(a - e)\sqrt{ae}}{b} \\ y\sqrt{6} = 2\, x + 3 \end{cases}$

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{b\,(a - e)}{2\,a\sqrt{ae}} = {}^2/_9 \sqrt{6}, \quad \operatorname{tang} \beta = \frac{b \,.\, \sqrt{ae}}{a\,(a - e)} = {}^1/_3 \sqrt{6}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{-b\sqrt{ae}}{e\,(a - e)} = -\sqrt{6}$$

$$\alpha = 28^0\ 33'\ 40'', \quad \beta = 39^0\ 13'\ 58'', \quad \gamma = \pi - (\alpha + \beta) = 112^0\ 12'\ 22''$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

53) Eine Ellipse und eine Parabel, deren Gleichung $y^2 = 2px$ gegeben ist, fallen mit einem ihrer Brennpunkte zusammen, der Scheitel der Parabel liegt ferner in dem Mittelpunkte der Ellipse, und letztere schneidet die Parabel in den beiden Endpunkten ihres Parameters. Die beiden Halbachsen a und b der Ellipse sind zu bestimmen, ferner die Winkel α, unter welchen sich die in den Durchschnittspunkten an beide Kurven gelegten Tangenten schneiden, und schliesslich der Flächeninhalt F desjenigen Dreiecks, welches diese beiden Tangenten mit der Abscissenachse bilden. Beispiel: $p = 2^{cm}$

$$\text{Res.:} \quad a = \frac{p(1+\sqrt{2})}{p} = 1 + \sqrt{2} = 2{,}4142^{cm}$$

$$b = p\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2(1+\sqrt{2})} = 2{,}1974^{cm}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -(\sqrt{2}+1), \quad \alpha = 157^0\ 30'$$

$$F = \frac{p^2(2+\sqrt{2})}{2} = 2(2+\sqrt{2}) = 6{,}8284^{qcm}$$

54) Eine Ellipse, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist, und eine Parabel fallen so auf einander, dass die Leitlinie der Parabel mit der kleinen Achse der Ellipse und der Brennpunkt der Parabel mit einem Brennpunkte der Ellipse zusammenfallen. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu bestimmen, ferner der Winkel α, welchen die in diesem Durchschnittspunkte an beide Kurven gelegten Tangenten mit einander bilden, sowie der Winkel β, den die nach demselben Punkte gezogenen Radien vectoren der Ellipse einschliessen, schliesslich diese Radien vectoren r_1 und r_2 selbst.

Beispiel: $a = 15^{cm}$, $b = 12^{cm}$

$$\text{Res.:} \quad e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$x_1 = \frac{a^2(a-e)}{b^2} = 9\,{}^3/_8 = 9{,}375^{cm}$$

$$y_1 = \pm\frac{1}{b}\sqrt{e\,[2a^2(a-e) - b^2 e]} = \pm\,{}^3/_2\sqrt{39} \pm 9{,}3674^{cm}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{b}{(a-e)^2}\sqrt{\frac{2a^2(a-e) - b^2 e}{e}}$$

$$\operatorname{tang}\alpha = -\,{}^2/_3\sqrt{39}, \quad \alpha = 103^0\ 30'\ 22''$$

$$\cos\frac{\beta}{2} = \frac{b^3}{a\sqrt{a(a-e)(b^2+e(a-e))}} = \frac{32}{5\sqrt{55}}, \quad \beta = 119^0\ 17'\ 48''$$

$$r_1 = \frac{a^2(a-e)}{b^2} = x_1 = 9{,}375^m$$

$$r_2 = \frac{a[b^2+e(a-e)]}{b^2} = 20\,{}^5/_8 = 20{,}625^m$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

55) Eine Ellipse und eine Parabel liegen so auf einander, dass der Brennpunkt der Parabel mit einem Brennpunkte der Ellipse zusammenfällt und die Achse der Parabel in der grossen Achse der Ellipse liegt. Die Halbachsen der Ellipse sind $= a$ und $= b$ und der Parameter der Parabel $= 2p$ gegeben. Die Koordinaten x_1 und y_1 der Durchschnittspunkte beider Kurven sind zu bestimmen, ferner der Winkel α, unter welchem sich die in diesen Punkten an beide Kurven gelegten Tangenten schneiden, endlich der Winkel β, welchen die nach demselben Punkte gezogenen Radien vectoren einschliessen, sowie diese Radien vectoren r_1 und r_2 selbst.

Beispiel: $a = 5^m$, $b = 3^m$, $p = 1^m$

Wie gestalten sich die Resultate, wenn $p = e$ wird?

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$x_1 = \frac{a\,(b^2 - p\,(a - e))}{b^2} = 4\,{}^4/_9 = 4{,}4444^m$$

$$y_1 = \pm \frac{1}{b} \sqrt{p\,(a - e)\,(2\,b^2 - p\,(a - e))} = \pm\, {}^1/_3 \sqrt{17} = \pm\, 1{,}3744^m$$

$$\operatorname{tang} \alpha = - \frac{b \sqrt{p\,(a - e)\,(2\,b^2 - p\,(a - e))}}{p\,(2\,a\,(a - e) - b^2)} = -\,3\sqrt{7}\,;\ \alpha = 97^0\,10'\,51''$$

$$\cos \frac{\beta}{2} \frac{b^3}{\sqrt{(b^2 + pe)\,(b^4 - pe\,(a - e)^2)}} = \frac{27}{\sqrt{1001}}\,;\ \beta = 62^0\,50'$$

$$r_1 = \frac{(a - e)\,(b^2 + pe)}{b^2} = 1\,{}^4/_9 = 1{,}4444^m$$

$$r_2 = \frac{b^2\,(a + e) - pe\,(a - e)}{b^2} = 8\,{}^5/_9 = 8{,}5556^m$$

Für $p = e$ gehen die Resultate in die in der Aufgabe 54 angegebenen Buchstabenwerte über.

56) Eine Ellipse und eine Parabel liegen so auf einander, dass der Scheitel der Parabel in den Mittelpunkt der Ellipse und die Achse der Parabel in die grosse Achse der Ellipse fällt. Die Halbachsen der Ellipse und der Parameter der Parabel sind $= a$ und b, resp. $2p$, gegeben. An beide Kurven sind die gemeinschaftlichen Tangenten gelegt, und es sind die Koordinaten der Berührungspunkte dieser Tangenten an der Ellipse und an der Parabel, x_1 und y_1, resp. x_2 und y_2, sowie der Winkel α, den die beiden Tangenten einschliessen, zu berechnen.

Beispiel: $a = 4^m$, $b = \sqrt{6}^m$, $p = 2^m$

Wie gestalten sich die Resultate, wenn $\frac{p}{2} = \sqrt{a^2 - b^2} = e$ wird?

Res.: $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \frac{b^2 \mp \sqrt{a^2 p^2 + b^4}}{p} = \left\{\begin{matrix} -\,2^m \\ 8^m \end{matrix}\right.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y_1 = \pm \frac{b^2}{ap} \sqrt{2\left(\sqrt{a^2p^2 + b^4} - b^2\right)} = \pm {}^3/_2 \sqrt{2} = \pm 2{,}1313^{\,m}$$

$$y_2 = \pm \sqrt{2\left(\sqrt{a^2p^2 + b^4} + b^2\right)} = \pm 4 \sqrt{2} = \pm 5{,}6568^{\,m}$$

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{p}{\sqrt{2\left(\sqrt{a^2p^2 + b^4} + b^2\right)}} = {}^1/_4 \sqrt{2}, \quad \alpha = 38^0\ 56'\ 30''$$

Für $p = 2e$ wird

$$x_1 = -e, \; x_2 = \frac{a^2}{e}, \; y_1 = \pm \frac{b^2}{a}, \; y_2 = \pm 2a, \; \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = \frac{e}{a},$$

d. h. die Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten liegen in diesem Falle auf einem Parameter und der demselben entgegengesetzten Leitlinie der Ellipse.*)

C. Püschel, Professor.

*) Die Fortsetzung, enthaltend Aufgaben über die Hyberbel und geometrische Konstruktionsaufgaben aus dem Gebiete der Kegelschnitte, wird im Programme des künftigen Jahres (1898) nachfolgen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$y_1 = \pm \frac{b^2}{ap}$ $= \pm 2{,}1313\,\mathrm{m}$

$y_2 = \pm$ $\pm 5{,}6568\,\mathrm{m}$

$\tan\frac{\alpha}{2} =$ $38^0\ 56'\ 30''$

Für $p = 2$

$x_1 = -e$, x ang $\frac{\alpha}{2} = \frac{e}{a}$,

d. h. die Berühr ngenten liegen in diesem Falle auf entgegengesetzten Leitlinie der Elli

l, Professor.

*) Die Fortset und geometrische Konstruktionsaufgaben at gramme des künftigen Jahres (1898) nachfo

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf