Die semicubische Parabel.

Bei der Behandlung der analytischen Geometrie gewinnt der Lehrer selten Zeit, Curven höheren Grades zu berücksichtigen; vielmehr wird sich der Unterricht nur auf die gerade Linie, den Kreis und die Kegelschnitte erstrecken. Nun sind aber manche Curven höheren Grades geeignet, in einer Prima behandelt zu werden und bieten gute Gelegenheit, eine weitere Anwendung der analytischen Methode zu zeigen, so daß es trotz der beschränkten Zeit empfehlenswerth ist, einzelne Eigenschaften solcher Curven mit den Schülern zu besprechen. So können namentlich die Linien dritten Grades treffliche Beispiele zur Anwendung der cubischen Gleichungen liefern und verdienen daher eine besondere Berücksichtigung. In diesem Sinne habe ich es versucht, die Haupteigenschaften der semicubischen Parabel in dem Folgenden zu entwickeln, wobei ich, da es sich hier nur um Anwendung der analytischen Methode handelt, von der Differential- und Integralrechnung keinen Gebrauch gemacht habe.

§. 1. Die Evolute der Parabel. Die Normalen, welche in den Punkten ξ, η und ξ_1, η_1 einer Parabel von der Gleichung $y^2=2px$ gezogen sind, werden durch die Gleichungen

$$y-\eta=-\frac{\eta}{p}(x-\xi) \quad \text{und} \quad y-\eta_1=-\frac{\eta_1}{p}(x-\xi_1)$$

ausgedrückt. Aus denselben findet man für den Durchschnittspunkt beider Linien die Coordinaten

$$x=p+\frac{\eta\xi-\eta_1\xi_1}{\eta-\eta_1} \quad \text{und} \quad y=-\frac{\eta\eta_1(\xi-\xi_1)}{p(\eta-\eta_1)}.$$

Mit Hülfe der Gleichungen $\eta^2=2p\xi$ und $\eta_1^2=2p\xi_1$ ergeben sich die Ausdrücke

$$\frac{\xi-\xi_1}{\eta-\eta_1}=\frac{\eta+\eta_1}{2p} \quad \text{und} \quad \frac{\eta\xi-\eta_1\xi_1}{\eta-\eta_1}=\xi+\frac{\eta_1(\eta+\eta_1)}{2p},$$

so daß man nach gehöriger Substitution für den Durchschnittspunct der beiden Normalen

$$x=p+\xi+\frac{\eta_1(\eta+\eta_1)}{2p} \quad \text{und} \quad y=-\frac{\eta\eta_1(\eta+\eta_1)}{2p^2}$$

findet. Läßt man jetzt die beiden Puncte zusammenfallen, so daß $\xi_1=\xi$ und $\eta_1=\eta$ wird, so geht der Durchschnittspunct der Normalen in den Mittelpunct des Krümmungskreises über, für welchen sich die Coordinaten

$$x=p+\xi+\frac{\eta^2}{p}=p+3\xi \quad \text{und} \quad y=-\frac{\eta^3}{p^2}=-\frac{2\eta\xi}{p}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

ergeben. Die Gleichung der Linie, auf welcher sämmtliche Krümmungsmittelpuncte liegen, gewinnt man, wenn man zwischen den eben entwickelten Gleichungen und $\eta^2 = 2p\xi$ die Größen ξ und η eliminirt; dieselbe lautet

$$\frac{27}{8} p y^2 = (x-p)^3.$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Curve, welche der geometrische Ort für alle Krümmungsmittelpuncte der Parabel ist (die Evolute), wird die semicubische oder Neil'sche Parabel genannt. Figur 1. zeigt die Parabel, welche im Folgenden die Grundparabel genannt wird, nebst ihrer Evolute.

§. 2. Um die Gleichung zu vereinfachen, verschiebe man die Ordinatenaxe parallel mit sich selbst nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin um die Größe p und setze $\frac{27}{8} p = a$, worauf die Gleichung in

$$a y^2 = x^3$$

übergeht, während die Grundparabel durch

$$y^2 = 2p(x+p) \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{16a}{27}\left(x + \frac{8a}{27}\right)$$

ausgedrückt wird. Verbindet man die Gleichungen beider Curven, so gewinnt man für die Abscisse des Durchschnittspunctes

$$x_1{}^3 = \frac{16a^2 x_1}{27} + \frac{128a^3}{729},$$

welche Gleichung die Form

$$x_1{}^3 = P x_1 + Q$$

hat. Da in diesem Falle

$$Q^2 - \frac{4}{27} P^3 = 0$$

ist, so erhält man die Abscisse des Durchschnittspunctes

$$x_1 = 2\sqrt[3]{\frac{64a^3}{729}} = \frac{8a}{9}.$$

Die zugehörige Ordinate ergiebt sich aus der Parabelgleichung

$$y_1 = \pm \frac{16a}{27}\sqrt{2},$$

so daß die Curven sich in zwei Punkten schneiden, wobei die gemeinsame Sehne

$$s = \frac{32}{27}\sqrt{2}$$

ist. Mithin liegen alle Puncte, deren Abscisse kleiner als $\frac{8a}{9}$ ist, innerhalb, alle übrigen außerhalb der Grundparabel.

§. 3. Aus der Gleichung $a y^2 = x^3$ lassen sich folgende Schlüsse über die Gestalt der Curve ziehen.

1) Da für $x = 0$ auch $y = 0$, so geht die Linie durch den Anfang der Coordinaten. Dieser Punct der Curve soll (aus später zu entwickelnden Gründen) die Spitze der Curve heißen; seine Entfernungen vom Scheitel und Brennpunkte der Grundparabel sind p respect. $\frac{1}{2}p$, d. h. gleich der Hälfte und dem vierten Theile des Parameters der Grundparabel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Aus der Gleichung folgt $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a}}$, d. h. zu jeder Abscisse gehören zwei nur der Richtung nach verschiedene Ordinaten, so daß die Curve symmetrisch zu beiden Seiten der Abscissenaxe liegt und die letztere daher eine Axe der Curve ist.

3) Da ferner y für jedes noch so große positive x reell bleibt, so erstreckt sich die Curve zu beiden Seiten der Axe in das Unendliche.

4) Dagegen wird y für jedes negative x imaginair, so daß die Curve nur auf einer Seite der Ordinatenaxe liegt.

5) Es läßt sich leicht zeigen, daß jeder Punct $\xi\eta$ außerhalb, auf oder innerhalb der Curve liegt, je nachdem

$$a\eta^2 \gtreqless \xi^3.$$

6) Wendet man Polarcoordinaten an, indem man die bisherige Abscissenaxe zur Polaraxe nimmt und den Anfang der Coordinaten zum Pol, so hat man zu substituiren $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$, worauf man als Polargleichung der Curve erhält

$$ar^2 \sin\varphi^2 = r^3 \cos\varphi^3 \quad \text{oder} \quad a\frac{\operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varphi} = r.$$

Man erkennt, daß r für jedes φ nur einen Werth hat, und daß wenn man die Winkel nur in einem Sinne zählt, (so daß r immer positiv sein muß), sich von $\varphi = 90^0$ bis $\varphi = 270^0$ kein Punkt der Curve findet.

§. 4. Construction der Curve. 1) Da die Curve der geometrische Ort für den Krümmungsmittelpunkt der Grundparabel ist, so handelt es sich darum, eine Construction für den Krümmungshalbmesser der letzteren zu finden. Derselbe ist $\varrho = \sqrt{\frac{(p+2\xi)^3}{p}}$, wenn $\xi\eta$ auf einer durch die Gleichung $y^2 = 2px$ ausgedrückten Parabel liegt. Für denselben Punkt ist bekanntlich

die Normale $n = \sqrt{p(2\xi + p)}$, die Subnormale $n_1 = p$, die Subtangente $t_1 = 2\xi$,

so daß wenn man die Summe der Subnormale und Subtangente gleich s setzt

$$s = 2\xi + p$$

ist. Es erhellt sofort, daß

$$\frac{ns}{p} = \sqrt{\frac{(p+2\xi)^3}{p}} = \varrho,$$

d. h. daß der Krümmungshalbmesser die vierte Proportionale zu p, n und s ist. Construirt man hiernach ϱ und trägt dasselbe auf der Normale von der Parabel aus ab, so gewinnt man den Krümmungsmittelpunct, d. h. einen Punct der semicubischen Parabel.

2) Die Polargleichung $r = \frac{a\operatorname{tang}\varphi^2}{\cos\varphi}$ führt zu folgender Construction. Man macht $AB = a$ und zieht eine beliebige Gerade AC (Fig. 2.) bis zum Durchschnitte mit dem in B auf AB errichteten Perpendikel, so daß $BC = a\operatorname{tang}\varphi$, wenn $CAB = \varphi$ gesetzt wird. Trägt man nun an BC den Winkel $DCB = \varphi$ an, so ist $\frac{DB}{BC} = \operatorname{tang}\varphi$, d. h. $DB = a\operatorname{tang}\varphi^2$; schneidet man ferner DB von A aus auf AB ab, so daß $AE = DB$ und errichtet das Perpendikel EK, so ist K ein Punct der Curve. Es ist nämlich $\frac{AE}{AK} = \cos\varphi$, woraus, da $AE = a\operatorname{tang}\varphi^2$, sofort folgt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$AK = \frac{a \operatorname{tang} \varphi^2}{\cos \varphi},$$

was der Polargleichung entspricht.

3) Construirt man um die Ordinatenaxe als Axe eine Parabel mit dem Parameter a, so daß ihr Scheitel in den Anfang der Coordinaten fällt (Fig. 3.), so hat sie die Gleichung $x^2 = ay$. Zieht man nun durch den Anfang der Coordinaten eine beliebige Gerade von der Gleichung $y = mx$, so erhält man für den Durchschnittspunct der Geraden und der Parabel

$$x_1 = am \quad \text{und} \quad y_1 = am^2,$$

während die Gerade die Curve in einem Puncte schneidet, der die Coordinaten

$$x_2 = am^2 \quad \text{und} \quad y_2 = am^3$$

hat, woraus folgt, daß $x_2 = y_1$. Dies führt zu folgender Construction. Um die Ordinatenaxe ist die Parabel mit dem Parameter a construirt, von A die beliebige Gerade AZ gezogen, welche die Parabel in B schneidet; fällt man nun das Perpendikel BD, macht $AL = BD$ und errichtet in L die Ordinate LC, so ist C ein Punkt der semicubischen Parabel.

§. 5. Secanten. Verbindet man die Gleichung der Curve mit der Gleichung einer Geraden

$$y = mx + \mu,$$

so gelangt man nach Elimination von y zu einer kubischen Gleichung, so daß jede Gerade im Allgemeinen 3 Durchschnittspuncte mit der Curve hat. Dabei lassen sich folgende specielle Fälle unterscheiden.

1) Alle geraden Linien, welche der Abscissenaxe parallel sind, schneiden die Curve nur in einem Puncte. Verbindet man nämlich die Gleichung einer solchen Parallele $y = \beta$ mit $ay^2 = x^3$, so erhält man für x den einen Werth $x = \sqrt[3]{a\beta^2}$. Dies führt zu einer einfachen Lösung des Delischen Problems. Soll der Würfel mit der Seite b verdoppelt werden, so construire man eine Neil'sche Parabel, für welche $a = 2b$ ist, so daß ihre Gleichung lautet $2by^2 = x^3$. Zieht man nun in der Entfernung $y = b$ eine Parallele zur Abscissenaxe so ist die zum Durchschnittspuncte gehörige Abscisse die Seite des verdoppelten Würfels.

2) Die Parallelen zur Ordinatenaxe schneiden die Curve entweder in zwei Puncten, oder haben keinen Punct mit derselben gemein. Aus der Verbindung der Gleichungen

$$ay^2 = x^3 \quad \text{und} \quad x = \alpha$$

gewinnt man nehmlich für die Ordinate des Durchschnittspunctes

$$y = \pm \alpha \sqrt{\frac{\alpha}{a}},$$

welche Größe für ein negatives α imaginair wird.

3) Geht die Gerade durch die Spitze, d. h. hat sie die Gleichung $y = mx$, so hat sie außer der Spitze noch einen Punct mit der Curve gemein, dessen Coordinaten sind

$$x_1 = am^2 \quad \text{und} \quad y_1 = am^3.$$

4) Jede andere Gerade schneidet die Curve entweder in 3 oder nur in einem Puncte. Verbindet man die Gleichung

$$y = mx + \mu$$

mit der Curvengleichung, so folgt

$$x^3 - am^2x^2 - 2am\mu x - a\mu^2 = 0.$$

Um zu erkennen, ob diese cubische Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln hat, setze man

$$x = z + \frac{1}{3} am^2,$$

worauf sie übergeht in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$z^3 - \left(\frac{a^2m^4}{3} + 2am\mu\right) z - \left(\frac{2a^3m^6}{27} = \frac{2a^2m^3\mu}{3} + a\mu^2\right) = 0.$$

Bekanntlich hat die Gleichung $x^3 - Px - Q = 0$ drei reelle Wurzeln, wenn $Q^2 - \frac{4}{27}P^3 < 0$, so daß sich hier drei reelle Durchschnittspunkte ergeben, wenn

$$\left(\frac{2a^3m^6}{27} + \frac{2a^2m^3\mu}{3} + a\mu^2\right)^2 < \frac{4}{27}\left(\frac{a^2m^4}{3} + 2am\mu\right)^3.$$

Löst man die Klammern auf und zieht zusammen, so erhält man die Bedingungsgleichung

$$4am^3 + 27\mu < 0, \quad \text{d. h.} \quad m < -3\sqrt[3]{\frac{\mu}{4a}}.$$

Sobald diese Relation zwischen m und μ erfüllt ist, hat die Gerade drei reelle Durchschnittspuncte mit der Curve; ist dagegen $4am^3 + 27\mu > 0$, so werden zwei Durchschnittspuncte imaginair und die Gerade schneidet nur ein Mal. Ist jene Bedingungsgleichung erfüllt und μ positiv, so daß die Secante die Ordinatenaxe auf ihrer positiven Seite schneidet, so ist m negativ, d. h. der Winkel zwischen der Secante und dem positiven Theil der Abscissenaxe ist stumpf, während dieser Winkel bei negativem μ spitz ist.

5) Durch zwei Puncte $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ der Curve ist eine Secante gelegt; es soll der dritte Durchschnittspunct gefunden werden. Hat die Secante die Gleichung $y = mx + \mu$, so hat man zur Bestimmung von x

$$x^3 - am^2x^2 - 2am\mu x - a\mu^2 = 0.$$

Da nun die Secante durch den Punct $\xi\eta$ geht, so ist ein Werth von x gleich ξ und es ist daher

$$\xi^3 - am^2\xi^2 - 2am\mu\xi - a\mu^2 = 0.$$

Subtrahirt man diese Gleichung von der vorhergehenden, so folgt

$$x^3 - \xi^3 - am^2(x^2 - \xi^2) - 2am\mu(x - \xi) = 0.$$

Durch Division mit $(x - \xi)$ gewinnt man

$$x^2 + \xi x + \xi^2 - am^2(x + \xi) - 2am\mu = 0.$$

Da auch ξ_1 ein Werth von x sein muß, so erhält man

$$\xi_1^2 + \xi\xi_1 + \xi^2 - am^2(\xi_1 + \xi) - 2am\mu = 0.$$

Subtrahirt man wieder von der vorigen Gleichung, so wird

$$x^2 - \xi_1^2 + \xi(x - \xi_1) - am^2(x - \xi_1) = 0,$$

und wenn man durch $(x - \xi_1)$ dividirt

$$x + \xi_1 + \xi - am^2 = 0,$$

woraus sich der dritte Werth von x ergiebt

$$\xi_2 = am^2 - \xi_1 - \xi,$$

in welchem Ausdrucke noch m zu bestimmen ist. Die durch die Puncte $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ gelegte Gerade hat die Gleichung

$$y = \frac{\eta - \eta_1}{\xi - \xi_1}x + \frac{\xi\eta_1 - \xi_1\eta}{\xi - \xi_1},$$

so daß

$$m = \frac{\eta - \eta_1}{\xi - \xi_1} \quad \text{und} \quad \mu = \frac{\xi\eta_1 - \xi_1\eta}{\xi - \xi_1}.$$

Hierauf erhält man für ξ_2

$$\xi_2 = \frac{a(\eta - \eta_1)^2}{(\xi - \xi_1)^2} - \xi - \xi_1,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welcher Ausdruck sich unter Berücksichtigung von $a\eta^2 = \xi^3$ und $a\eta_1{}^2 = \xi_1{}^3$ in

$$\xi_2 = \frac{\xi\xi_1(\xi+\xi_1) - 2a\eta\eta_1}{(\xi-\xi_1)^2}$$

umformen läßt. Als zugehörige Ordinate ergiebt sich

$$\eta_2 = m\xi_2 + \mu = \frac{\eta\xi_1{}^3 - \eta_1\xi^3 + 3\xi\xi_1(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)}{(\xi-\xi_1)^3}.$$

6) Aus der vorhin gewonnenen Gleichung

$$\xi + \xi_1 + \xi_2 = am^2 = a \operatorname{tang}\varphi^2,$$

wo φ den Winkel zwischen der Secante und der Abscissenaxe bedeutet, folgt der Satz: „bei parallelen Secanten ist die Summe der drei zusammengehörigen Abscissen constant". Geht eine der Parallelen durch die Spitze, so sind ξ_1 und ξ_2 gleich Null und es bleibt $\xi = a \operatorname{tang}\varphi^2$. Sind z. B. als Gleichungen der Curve und einer Secante gegeben

$$y^2 = x^3 \quad \text{und} \quad y = \frac{7}{3}x - \frac{4}{3},$$

so daß $a = 1$ und $\operatorname{tang}\varphi = \frac{7}{3}$ ist, so erhält man nach der Elimination von y

$$x^3 - \frac{49}{9}x^2 + \frac{56}{9}x - \frac{16}{9} = 0,$$

welche Gleichung die Wurzeln $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ und $x_3 = \frac{4}{9}$ hat. Mithin ist

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{49}{9} = a \operatorname{tang}\varphi^2.$$

§. 6. Tangenten. 1) Fallen zwei Durchschnittspuncte einer Secante zusammen, so ist dieselbe eine Tangente; dies findet statt, wenn zwei Wurzeln der Gleichung (§. 5, 4.)

$$x^3 - am^2x^2 - 2am\mu x - a\mu^2 = 0$$

oder der reducirten Gleichung

$$z^3 - \left(\frac{a^2m^4}{3} + 2am\mu\right)z - \left(\frac{2a^3m^6}{27} + \frac{2a^2m^3\mu}{3} + a\mu^2\right) = 0$$

einander gleich sind. Hieraus ergiebt sich als Bedingungsgleichung des Tangirens

$$4am^3 + 27\mu = 0 \quad \text{oder} \quad m = -\sqrt[3]{\frac{27\mu}{4a}}.$$

Da für die Axe $m = 0$ und $\mu = 0$, so ist dieselbe eine Tangente, die Spitze der Berührungspunct.

2) Die Gleichung der Tangente mit dem Berührungspuncte $\xi\eta$ gewinnt man folgendermaßen. Die durch die Curvenpuncte $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ gehende Secante wird durch

$$y - \eta = \frac{\eta - \eta_1}{\xi - \xi_1}(x - \xi)$$

ausgedrückt. Da beide Puncte auf der Curve liegen, so gelten die Gleichungen $a\eta^2 = \xi^3$ und $a\eta_1{}^2 = \xi_1{}^3$, woraus man gewinnt

$$a(\eta^2 - \eta_1{}^2) = \xi^3 - \xi_1{}^3,$$

und wenn man durch $(\xi - \xi_1)$ dividirt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a(\eta+\eta_1)\frac{(\eta-\eta_1)}{\xi-\xi_1}=\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2,$$

so daß

$$\frac{\eta-\eta_1}{\xi-\xi_1}=\frac{\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2}{a(\eta+\eta_1)}.$$

Nach gehöriger Substitution erhält man als Gleichung der Secante

$$y-\eta=\frac{\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2}{a(\eta+\eta_1)}(x-\xi).$$

Läßt man jetzt beide Curvenpuncte zusammenfallen, so daß $\xi_1=\xi$ und $\eta_1=\eta$, so geht die Secante in die Tangente mit dem Berührungspuncte $\xi\eta$ über, welche durch die Gleichung

$$y-\eta=\frac{3\xi^2}{2a\eta}(x-\xi)$$

ausgedrückt wird. Mit Berücksichtigung von $a\eta^2=\xi^3$ läßt sich dieselbe leicht umformen in

$$y=\frac{3\eta}{2\xi}x-\frac{\eta}{2}.$$

3) Zu jeder Geraden mit Ausnahme der Ordinatenaxe läßt sich eine und zwar nur eine Tangente parallel ziehen. Lautet die Gleichung der Geraden $y=mx+\mu$, so ist wenn die parallele Tangente im Puncte $\xi\eta$ berührt,

$$m=\frac{3\eta}{2\xi}\quad\text{oder}\quad m=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\xi}{a}},$$

woraus sich für die Abscisse des Berührungspunktes der eine Werth ergiebt

$$\xi=\frac{4am^2}{9}.$$

4) Jede Tangente hat außer dem Berührungspuncte noch einen zweiten Punct mit der Curve gemein. Verbindet man die Gleichungen der Curve und der Tangente, so gewinnt man zur Bestimmung der Abscisse des Durchschnittspunctes die Gleichung

$$a\left(\frac{3\eta}{2\xi}x-\frac{\eta}{2}\right)^2=x^3.$$

Löst man die Klammern auf und setzt $a\eta^2=\xi^3$, so geht dieselbe in

$$x^3-\frac{9\xi}{4}x^2+\frac{3}{2}\xi^2x-\frac{\xi^3}{4}=0$$

über. Da nun zwei der Durchschnittspunkte in dem Berührungspuncte zusammenfallen, so müssen zwei Werthe von x gleich ξ sein, und die Gleichung sich daher durch $(x-\xi)^2$ theilen lassen. Führt man die Division aus, so wird

$$x-\frac{\xi}{4}=0,$$

so daß sich als Coordinaten des Durchschnittspunctes ergeben

$$\xi_1=\frac{\xi}{4}\quad\text{und}\quad\eta_1=-\frac{\eta}{8}.$$

Dieser Durchschnittspunct läßt sich auch mit Hülfe des in §. 5, 6 gefundenen Satzes bestimmen. Befindet sich unter der Schaar paralleler Secanten eine Tangente, so ist $\xi_1=\xi$, und man erhält alsdann für die Abscisse des dritten Durchschnittspunctes

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\xi_2 = a \operatorname{tang} \varphi^2 - 2\xi .$$

Da in diesem Falle $\operatorname{tang} \varphi = \frac{3\eta}{2\xi}$ ist, so wird

$$\xi_2 = \frac{9a\eta^2}{4\xi^2} - 2\xi = \frac{\xi}{4},$$

wie vorhin gefunden war.

Für die Axe, deren Berührungspunct die Spitze ist, werden beide Coordinaten des Durchschnittspunctes gleich Null, so daß auch der zweite gemeinsame Punct in die Spitze fällt.

5) Durch jeden Punkt $\xi\eta$ der Curve lassen sich daher zwei Tangenten ziehen; die eine berührt in $\xi\eta$, die andere schneidet hier und berührt in einem Puncte mit den Coordinaten $\xi_1 = 4\xi$ und $\eta_1 = -8\eta$. Die Gleichungen beider Tangenten lauten

$$y = \frac{3\eta}{2\xi} x - \frac{\eta}{2} \quad \text{und} \quad y = -\frac{3\eta}{\xi} x + 4\eta .$$

Bei jedem derartigen Tangentenpaare findet zwischen den Winkeln φ und φ_1, welche sie mit der Abscissenaxe bilden, die Relation

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \varphi_1} = -\frac{1}{2}$$

statt, wogegen die auf der Ordinatenaxe nach verschiedenen Seiten hin abgeschnittenen Strecken im Verhältniß 1 : 8 stehen. In dem Falle, wo

$$\xi = \frac{2a}{9}, \quad \text{also} \quad \eta = \pm \frac{a\sqrt{8}}{27},$$

lauten die Gleichungen beider Tangenten

$$y = \pm \frac{\sqrt{8}}{4} x \mp \frac{a\sqrt{8}}{54} \quad \text{und} \quad y = \mp \frac{\sqrt{8}}{2} x \pm \frac{4a\sqrt{8}}{27}$$

oder

$$y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}\, x \mp \frac{a\sqrt{2}}{27} \quad \text{und} \quad y = \mp \sqrt{\frac{1}{2}}\, x \pm \frac{8a\sqrt{2}}{27},$$

woraus folgt, daß die Linien sich rechtwinklig schneiden, so daß die zweite die Normale der ersten ist.

6) Als Gleichung der im Puncte $\xi\eta$ gezogenen Normale ergiebt sich leicht

$$y - \eta = -\frac{2\xi}{3\eta}(x - \xi) .$$

Da die Tangente auf der Abscissenaxe die Strecke $\frac{\xi}{3}$ abgrenzt, die Normale $\frac{3\eta^2 + 2\xi^2}{2\xi}$, so ergeben sich für die Tangente und Normale im engeren Sinne, sowie für die Subtangente und Subnormale die Ausdrücke:

$$\text{Tangente} = t = \frac{1}{3} \sqrt{9\eta^2 + 4\xi^2},$$

$$\text{Normale} = n = \frac{\eta}{2\xi} \sqrt{9\eta^2 + 4\xi^2},$$

$$\text{Subtangente} = t_1 = \frac{2}{3} \xi,$$

$$\text{Subnormale} = n_1 = \frac{3\eta^2}{2\xi} = \frac{3\xi^2}{2a}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus diesen Formeln folgt sofort

$$\frac{t_1^2}{n_1} = \frac{8a}{27} = p$$

d. h. die Subtangente ist die mittlere Proportionale zwischen der Subnormale und dem halben Parameter der Grundparabel.

§. 7. Tangenten durch bestimmte Puncte. Für eine Gerade von der Gleichung $y = mx + \mu$ war als Bedingungsgleichung des Tangirens gefunden (§. 6, 1.)

$$4am^3 + 27\mu = 0\,.$$

Soll nun die Gerade durch einen gegebenen Punct $\xi\eta$ gehen, so daß sie die Gleichung $y - \eta = m(x - \xi)$ hat, so ist $\mu = \eta - m\xi$ und die Bedingungsgleichung des Tangirens lautet

$$4am^3 - 27\xi m + 27\eta = 0 \quad \text{oder} \quad m^3 - \frac{27\xi}{4a}m + \frac{27\eta}{4a} = 0.$$

Setzt man hier $m = -m_1$, so geht sie in

$$m_1^3 - \frac{27\xi}{4a}m_1 - \frac{27\eta}{4a} = 0$$

über, und ist daher von der Form $z^3 - Pz - Q = 0$. Da hier

$$Q^2 - \frac{4}{27}P^3 = \frac{729}{16a^2}(a\eta^2 - \xi^3),$$

so hängt die Anzahl der reellen Wurzeln von der Größe $a\eta^2 - \xi^3$ ab. Liegt nun der Punct innerhalb der Curve, so ist $a\eta^2 - \xi^3 < 0$ und alle drei Werthe von m_1, mithin auch von m, sind reell, wogegen für einen Punct außerhalb der Curve $a\eta^2 - \xi^3 > 0$ ist, so daß m_1 (und m) nur einen reellen Werth hat. Liegt endlich der Punct auf der Curve, so ist $a\eta^2 - \xi^3 = 0$ und es hat jetzt m_1 drei reelle Wurzeln, unter denen sich zwei gleiche befinden. Es folgt hieraus, daß sich durch jeden Punct innerhalb der Curve drei Tangenten ziehen lassen, durch jeden Punct außerhalb aber nur eine möglich ist, während sich für jeden Punct auf der Curve zwei Tangenten ergeben (§. 6, 5).

2) Durch einen Punct x_1y_1, der in einer gegebenen Tangente liegt, sollen die beiden anderen Tangenten gelegt werden. — Wird eine durch x_1y_1 gehende Tangente durch $y - y_1 = m(x - x_1)$ ausgedrückt, so ist nach dem Vorigen

$$m^3 - \frac{27x_1}{4a}m + \frac{27y_1}{4a} = 0\,.$$

Da der Punct in der gegebenen Tangente liegt, so müssen seine Coordinaten der Gleichung

$$y = \frac{3\eta}{2\xi}x - \frac{\eta}{2}$$

genügen, und es ist daher

$$y_1 = \frac{3\eta}{2\xi}x_1 - \frac{\eta}{2},$$

so daß man gewinnt

$$m^3 - \frac{27x_1}{4a}m + \frac{27}{4a}\left(\frac{3\eta x_1}{2\xi} - \frac{\eta}{2}\right) = 0,$$

d. h.

$$m^3 - \frac{27x_1}{4a}m + \frac{81\eta x_1}{8a\xi} - \frac{27\eta}{8a} = 0\,.$$

Da nun für eine der drei Tangenten $m = \frac{3\eta}{2\xi}$ ist, so muß sich die Gleichung durch $\left(m - \frac{3\eta}{2\xi}\right)$ theilen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lassen. Führt man die Division aus unter Berücksichtigung von $a\eta^2 = \xi^3$, so erhält man zur Bestimmung der beiden anderen Werthe von m die quadratische Gleichung

$$m^3 + \frac{3\eta}{2\xi} m + \frac{9\xi - 27x_1}{4a} = 0.$$

Aus derselben folgt

$$m = -\frac{3\eta}{2\xi} \pm \frac{3}{4}\sqrt{\frac{12x_1 - 3\xi}{a}},$$

so daß man für die beiden gesuchten Tangenten die Gleichungen

$$y - y_1 = -\left(\frac{3\eta}{2\xi} + \frac{3}{4}\sqrt{\frac{12x_1 - 3\xi}{a}}\right)(x - x_1)$$

und

$$y - y_1 = -\left(\frac{3\eta}{2\xi} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{12x_1 - 3\xi}{a}}\right)(x - x_1)$$

erhält. Die beiden letzten für m gefundenen Werthe sind reell, so lange $12x_1 \geqq 3\xi$, d. h. so lange $x_1 \geqq \frac{\xi_1}{4}$. Wenn $x_1 = \frac{\xi}{4}$, so werden die beiden Werthe von m einander gleich, indem die Wurzelgröße verschwindet, so daß die beiden Tangenten zu einer zusammenfallen; in diesem Falle liegt nämlich der Punct auf der Curve (vgl. §. 6, 5). Ist $x_1 < \frac{\xi}{4}$, so sind die beiden Werthe von m imaginair; der Punct liegt in diesem Falle außerhalb der Curve und es ist nur eine Tangente möglich.

Bezeichnet man die Winkel, welche die drei Tangenten mit der Abscissenaxe bilden, mit φ, φ_1 und φ_2, so folgt sofort

$$\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = 0.$$

3) Vom Durchschnittspuncte zweier Tangenten soll die dritte gezogen werden. Die in den Puncten $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ berührenden Tangenten haben die Gleichungen

$$y = \frac{3\eta}{2\xi} x - \frac{\eta}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{3\eta_1}{2\xi_1} x - \frac{\eta_1}{2},$$

aus welchen man für den Durchschnittspunkt die Coordinaten

$$x_1 = \frac{(\eta - \eta_1)\xi\xi_1}{3(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)} \quad \text{und} \quad y_1 = \frac{(\xi - \xi_1)\eta\eta_1}{2(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)}$$

erhält. Ist nun $y = mx + \mu$ die Gleichung der Tangente, so ist

$$m^3 - \frac{27x_1}{4a} m + \frac{27y_1}{4a} = 0,$$

oder nach Einsetzung der Werthe von x_1 und y_1

$$m^3 - \frac{9\xi\xi_1(\eta - \eta_1)}{4a(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)} m + \frac{27\eta\eta_1(\xi - \xi_1)}{8a(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)} = 0.$$

Da nun zwei der Werthe von m, nämlich $\frac{3\eta}{2\xi}$ und $\frac{3\eta_1}{2\xi_1}$ bekannt sind, so muß sich die Gleichung durch $\left(m - \frac{3\eta}{2\xi}\right)$ und durch $\left(m - \frac{3\eta_1}{2\xi_1}\right)$, d. h. durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left(m^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{\eta\xi_1 + \eta_1\xi}{\xi\xi_1} + \frac{9\eta\eta_1}{4\xi\xi_1}\right)$$

theilen lassen. Führt man die Division aus unter Berücksichtigung von $a\eta^2 = \xi^3$ und $a\eta_1{}^2 = \xi_1{}^3$, so ergiebt sich

$$m + \frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad m = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1},$$

so daß man für die dritte Tangente erhält

$$y - y_1 = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1}(x - x_1),$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von x_1 und y_1

$$y = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1}x + \frac{\eta^2\xi_1 - \eta_1{}^2\xi + 2\eta\eta_1(\xi - \xi_1)}{2(\eta\xi_1 - \eta_1\xi)}.$$

Wegen der allgemein für die Tangente gültigen Gleichung $m^3 = -\frac{27\mu}{4a}$ oder $\mu = -\frac{4am^3}{27}$, geht das dritte Glied über in

$$\frac{a(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)^3}{2\xi^2\xi_1{}^2},$$

so daß die dritte Tangente auch durch die Gleichung

$$y = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1}x + \frac{a(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)^3}{2\xi^3\xi_1{}^3}$$

ausgedrückt wird.

Eine andere Lösung der Aufgabe ergiebt sich vermittelst des vorhin gefundenen Satzes: $\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = 0$, wo φ, φ_1 und φ_2 die Winkel bedeuten, welche die Tangenten mit der Abscissenaxe bilden. Da hier

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{3\eta}{2\xi} \quad \text{und} \quad \operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{3\eta_1}{2\xi_1},$$

so folgt

$$\operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{3\eta}{2\xi} - \frac{3\eta_1}{2\xi_1} = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1},$$

worauf man sofort zu der Gleichung

$$y - y_1 = -\frac{3(\eta\xi_1 + \eta_1\xi)}{2\xi\xi_1}(x - x_1)$$

gelangt.

4) Beispiel. Es ist gegeben die semicubische Parabel und der Punct $x_1 = \frac{7}{3}$, $y_1 = 3$; es sollen die Gleichungen der durch jenen Punct gehenden Tangenten gefunden werden. — Eine durch $x_1 y_1$ gehende Gerade wird durch

$$y - 3 = m\left(x - \frac{7}{3}\right) \quad \text{oder} \quad y = mx + 3 - \frac{7m}{3}$$

ausgedrückt. Soll dieselbe eine Tangente der Curve sein, so ist (nach §. 6, 1) $m^3 = -\frac{27\mu}{4a}$, d. h. da hier $a = 1$ und $\mu = 3 - \frac{7m}{3}$ ist,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$m^3 = -\frac{81}{4} + \frac{63}{4}m \quad \text{oder} \quad m^3 - \frac{63}{4}m + \frac{81}{4} = 0.$$

Setzt man $m = -m_1$, so geht die Gleichung über in

$$m^3 - \frac{63}{4}m - \frac{81}{4} = 0.$$

Wendet man hier die Formeln an, welche zur Auflösung der Gleichung

$$m^3 - Pm - Q = 0$$

führen, indem man setzt

$$m = r\cos\alpha, \quad r = \sqrt{\frac{4P}{3}} \quad \text{und} \quad \cos 3\alpha = \sqrt{\frac{27Q^2}{4P^3}},$$

so erhält man zur Bestimmung von r und 3α

$$r = \sqrt{21} \quad \text{und} \quad \cos 3\alpha = \sqrt{\frac{243}{343}},$$

woraus sich ergiebt

$$r = 4{,}5825\,.. \quad \text{und} \quad 3\varphi = 32^0\,40'\,48{,}27''.$$

Für m_1 erhält man daher die drei Werthe

$$r\,.\cos(10^0\,53'\,36{,}09''), \quad r\,.\cos(130^0\,53'\,36{,}09'') \quad \text{und} \quad r\,.\cos(109^0\,6'\,23{,}91''),$$

d. h.

$$m_1 = 4{,}5, \quad m_1 = -3 \quad \text{und} \quad m_1 = -\frac{3}{2}.$$

Da $m = -m_1$, so erhält man für m die Werthe $-\frac{9}{2}$, 3 und $\frac{3}{2}$, so daß die Gleichungen der drei Tangenten lauten

$$y = -\frac{9}{2}x + \frac{81}{6}, \quad y = 3x - 4 \quad \text{und} \quad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}.$$

§. 8. Jede Tangente der Curve ist eine Normale der Grundparabel. Verbindet man die Gleichungen der Tangente und der Grundparabel

$$y = \frac{3\eta}{2\xi}x - \frac{\eta}{2} \quad \text{und} \quad y^2 = \frac{16a}{27}\left(x + \frac{8a}{27}\right),$$

so gewinnt man als Coordinaten der Durchschnittspuncte

$$\alpha_1 = \frac{9\xi - 8a}{27} \quad \text{und} \quad \beta_2 = -\frac{4a\eta}{9\xi},$$

$$\alpha_2 = \frac{81\xi^2 + 72a\xi + 64a^2}{243\xi} \quad \text{und} \quad \beta_2 = \frac{81\eta\xi^2 + 128a^2\eta + 144a\eta\xi}{162\xi}.$$

Die Tangente der Grundparabel hat die Gleichung $\eta_1 y_1 = p(x_1 + \xi_1)$, wenn der Scheitel Anfang und die Axe Abscissenaxe ist, während ξ_1 und η_1 die Coordinaten des Berührungspunctes sind. Geht man in das hier angewendete Coordinatensystem über, so ist zu setzen

$$x_1 = x + p = x + \frac{8a}{27}, \quad \xi_1 = \alpha + \frac{8a}{27}, \quad y_1 = y, \quad \eta_1 = \beta,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so daß man für die Tangente der Grundparabel gewinnt

$$\beta y = \frac{8a}{27}\left(x + \alpha + \frac{16a}{27}\right).$$

Giebt man jetzt dem α und β die unter α_1 und β_1 oben gewonnenen Werthe, so erhält man für die Tangente, welche im Durchschnittspuncte der Curventangente mit der Grundparabel an die letztere gezogen ist, die Gleichung

$$-\frac{4a\eta}{9\xi}y = \frac{8a}{27}\left(x + \frac{16a}{27} + \frac{9\xi - 8a}{27}\right)$$

oder

$$y = -\frac{2\xi}{3\eta}x - \frac{2(9\xi + 8a)\xi}{81\eta}.$$

Vergleicht man hiermit die Gleichung der Curventangente, so folgt sofort, daß beide Linien auf einander senkrecht stehen, d. h. daß die Curventangente eine Normale der Grundparabel ist.

§. 9. Es soll die Linie gesucht werden, auf welcher die Fußpuncte der vom Brennpuncte der Grundparabel auf sämmtliche Tangenten der Curve gefällten Perpendikel liegen. — Da der Brennpunct der Grundparabel die Coordinaten $\alpha = -\frac{4a}{27}$ und $\beta = 0$ hat, so wird das von demselben auf die Tangente

$$y = \frac{3\eta}{2\xi}x - \frac{\eta}{2}$$

gefällte Perpendikel durch die Gleichung

$$y = -\frac{2\xi}{3\eta}\left(x + \frac{4a}{27}\right)$$

ausgedrückt. Verbindet man dieselbe mit der Tangentengleichung, so findet man für den Fußpunct des Perpendikels die Coordinaten

$$x = \frac{(81\eta^2 - 16a\xi)\xi}{27(9\eta^2 + 4\xi^2)} = \frac{9\xi - 4a}{27} \quad \text{und} \quad y = -\frac{2a\eta}{9\xi},$$

aus denen sich ergiebt

$$\xi = \frac{27x + 4a}{9} \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{(27x + 4a)y}{2a}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung $a\eta^2 = \xi^3$, welche zwischen den Coordinaten des Berührungspunctes stattfindet, so erhält man für die Fußpunctcurve die Gleichung

$$\frac{(27x + 4a)^2 y^2}{4a} = \frac{(27x + 4a)^3}{729} \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{4a}{27}x + \frac{16a^2}{729}.$$

Dieselbe drückt eine Parabel mit dem Parameter $\frac{4a}{27}$ aus, welche durch den Brennpunkt der Grundparabel geht und deren Axe mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Da $p = \frac{8a}{27}$, so ist der Parameter der Fußpunctparabel der vierte Theil vom Parameter der Grundparabel.

§. 10. Construction der Tangenten. Mit Hülfe der bisher entwickelten Sätze lassen sich durch jeden gegebenen Punct die Tangenten construiren, wobei folgende Fälle zu unterscheiden sind.

1) Der Punct liegt auf der Abscissenaxe. — Man verdreifacht seine Abscisse und zieht nach beiden Seiten die Ordinaten, wodurch man zwei Berührungspuncte erhält (§. 6, 6); die dritte Tangente ist die Axe. Liegt der Punct außerhalb der Curve auf der Abscissenaxe, so sind die beiden ersten Tangenten imaginair und die Axe die einzige Tangente.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Der Punct liegt auf der Ordinatenaxe. — Man trägt seine verdoppelte Ordinate auf der entgegengesetzten Seite der Ordinatenaxe ab und zieht die Parallele zur Abscissenaxe, worauf der Durchschnittspunct mit der Curve der Berührungspunct der einzigen möglichen Tangente ist.

3) Der Punct liegt auf der Curve. — Man schneidet den dritten Theil der Abscisse vom Anfang der Coordinaten aus auf der Abscissenaxe ab, verbindet diesen Punct mit dem gegebenen und erhält so die eine Tangente, welche im gegebenen Puncte berührt. Der Berührungspunct der zweiten Tangente hat zur Abscisse die vierfache Abscisse des gegebenen Punctes und ist somit leicht zu finden (§. 6, 5). Für die Spitze ergiebt sich dabei als einzige Tangente die Axe.

4) Der Punct P liegt auf keiner der Axen und auch nicht auf der Curve. — Man construirt die Fußpunctparabel (§. 9), verbindet P mit dem Brennpuncte F der Grundparabel (Fig. 4) und schlägt um PF als Durchmesser einen Kreis, welcher außer F noch drei Puncte mit der Fußpunctparabel gemein hat. Verbindet man diese drei Puncte mit P, so sind die Verbindungslinien Tangenten. Liegt P außerhalb der Curve, so erhält man außer F nur einen Durchschnittspunct des Kreises und der Parabel, so daß nur eine Tangente möglich ist.

§. 11. Der Krümmungskreis. Die in den Curvenpuncten $\xi\eta$ und $\xi_1\eta_1$ gezogenen Normalen haben (§. 6, 6) die Gleichungen

$$y-\eta=-\frac{2\xi}{3\eta}(x-\xi) \quad \text{und} \quad y-\eta_1=-\frac{2\xi_1}{3\eta_1}(x-\xi_1),$$

deren Durchschnittspunct die Abscisse

$$\alpha=\frac{3\eta\eta_1(\eta-\eta_1)+2(\eta_1\xi^2-\eta\xi_1^2)}{2(\eta_1\xi-\eta\xi_1)}$$

hat. Läßt man beide Puncte zusammenfallen, so daß $\eta_1=\eta$ und $\xi_1=\xi$, so drückt α die Abscisse des Krümmungsmittelpunctes aus; in diesem Falle würde sich aber der Ausdruck unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$ darstellen, welche man vermeidet, wenn man den Bruch durch $(\xi-\xi_1)$ hebt. Es wird alsdann

$$\alpha=\left\{3\eta\eta_1\frac{\eta-\eta_1}{\xi-\xi_1}+2\eta_1\xi+2\eta\xi_1-2\xi_1\frac{\eta-\eta_1}{\xi-\xi_1}\right\}:\left(\eta_1-\xi_1\frac{\eta-\eta_1}{\xi-\xi_1}\right).$$

Substituirt man den in §. 6, 2 gefundenen Werth

$$\frac{\eta-\eta_1}{\xi-\xi_1}=\frac{\xi^2+\xi\xi_1+\xi_1^2}{a(\eta+\eta_1)},$$

und setzt jetzt $\eta_1=\eta$ und $\xi_1=\xi$, so gewinnt man

$$\alpha=\left\{\frac{3\xi^2(3\eta^2-2\xi^2)}{2a\eta}+4\eta\xi\right\}:2\left(\eta-\frac{3\xi^3}{2a\eta}\right),$$

oder wegen $a\eta^2=\xi^3$

$$\alpha=-\frac{2a\xi^2+9\xi^2}{2a},$$

worauf sich die zugehörige Ordinate des Krümmungsmittelpunctes ergiebt

$$\beta=\frac{12\eta\xi+4a\eta}{3\xi}.$$

2) Hiernach wird die Länge des Krümmungshalbmessers

$$\varrho=\sqrt{\frac{\xi(4a+9\xi)^3}{36a^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Addirt man die (in §. 6, 6) für Subtangente und Subnormale gefundenen Ausdrücke und bezeichnet die Summe mit s, so ist

$$s = t_1 + n_1 = \frac{\xi(4a + 9\xi)}{6a},$$

worauf sich mit Berücksichtigung des für die Normale gefundenen Werthes $n = \frac{\eta}{2\xi}\sqrt{9\eta^2 + 4\xi^2} = \frac{\eta}{2}\sqrt{\frac{9\xi + 4a}{a}}$ ergiebt

$$\frac{3n \,.\, s}{n_1} = \frac{1}{6a}\sqrt{\xi(4a + 9\xi)^3} = \varrho,$$

d. h. der Krümmungshalbmesser ist die vierte Proportionale zu n_1, $3n$ und s. Mit Hülfe dieser Gleichung läßt sich der Krümmungshalbmesser für jeden gegebenen Punct der Curve construiren. Für den Anfang der Coordinaten, wo $\xi = 0$ und $\eta = 0$, wird auch $\varrho = 0$, d. h. die Curve hat hier einen Rückkehrpunct oder eine Spitze.

§. 12. Quadratur der Curve. Von einem Puncte C (Fig. 5) mit den Coordinaten xy ist die Ordinate CB gefällt; es soll der Inhalt des Flächenstückes berechnet werden, welches von dem Bogen AC, der Ordinate und der Axe begrenzt wird. — Man schneide von A aus auf der Axe eine Strecke $AA_1 = \frac{x}{n^2}$ ab und theile von A_1 aus die Abscisse weiter, so daß die einzelnen Abschnitte wie die Reihe der ungeraden Zahlen wachsen, d. h. daß

$$AA_1 = \frac{x}{n^2}, \quad A_1A_2 = \frac{3x}{n^2}, \quad A_2A_3 = \frac{5x}{n^2} \quad \text{u. s. f.}$$

Auf diese Weise wird AB in n Theile zerlegt, deren $n$ter und letzter gleich $\frac{(2n-1)x}{n^2}$ ist, so daß sie die Reihe

$$\frac{x}{n^2}, \quad \frac{3x}{n^2}, \quad \frac{5x}{n^2} \;\ldots\ldots\; \frac{(2n-1)x}{n^2}$$

bilden, deren Summe gleich x ist. Dabei sind die Entfernungen der einzelnen Puncte von A aus

$$AA_1 = \frac{x}{n^2}, \quad AA_2 = \frac{4x}{n^2}, \quad AA_3 = \frac{9x}{n^2} \;\ldots\ldots\; AA_{n-1} = \frac{(n-1)^2 x}{n^2},$$

d. h. verhalten sich wie die Quadratzahlen. Errichtet man nun in den einzelnen Theilpuncten die Ordinaten und bezeichnet sie mit y_1, y_2, y_3 u. s. f., so wird

$$y_1 = \sqrt{\frac{x^3}{an^6}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{64x^3}{an^6}} = 8\sqrt{\frac{x^3}{an^6}}, \quad y_3 = 27\sqrt{\frac{x^3}{an^6}} \;\ldots\; y_{n-1} = (n-1)^3\sqrt{\frac{x^3}{an^6}}.$$

Legt man nur durch D_1, D_2, D_3 ꝛc. Parallelen zu der Axe und verlängert die einzelnen Ordinaten bis zum Durchschnitt mit diesen Parallelen, so entstehen zwei Reihen von Rechtecken, von denen die einen (die äußeren) die Curve überragen, während die anderen (die inneren) ganz innerhalb der Curve liegen. Mithin ist die gesuchte Fläche kleiner als die Summe der äußeren S und größer als die Summe der inneren S_1:

$$S > F > S_1.$$

2) Es ist nun zunächst S zu bestimmen. Bezeichnet man die einzelnen äußeren Rechtecke, deren Anzahl gleich n ist, mit $q_1, q_2 \ldots q_n$, so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$q_1 = \frac{x}{n^2} y_1 = \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$q_2 = \frac{3x}{n^2} y_2 = \frac{3x}{n^5} \cdot 8 \cdot \sqrt{\frac{x^3}{a}} = 3 \cdot 2^3 \cdot \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$q_3 = \frac{5x}{n^2} y_3 = 5 \cdot 3^3 \cdot \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q_n = \frac{(2n-1)x}{n^2} y_n = (2n-1)n^3 \cdot \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

mithin

$$S = \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}} \left\{ 1 + 3 \cdot 2^3 + 5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 4^3 + \ldots (2n-1)n^3 \right\}.$$

Entwickelt man die einzelnen Glieder des in Klammern geschlossenen Ausdrucks und bildet die Differenzen, so gewinnt man

1	24	135	448	1125	2376	4459	.....
	23	111	313	677	1251	2083	
		88	202	364	574	832	
			114	162	210	258	
				48	48	48	

Als Summenformel dieser arithmetischen Reihe 4ten Grades ergiebt sich

$$n + \frac{23n(n-1)}{2} + \frac{88n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{114n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{48n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

welcher Ausdruck nach Zusammenziehung der einzelnen Glieder in

$$\frac{2n^5}{5} + \frac{3n^4}{4} + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{4} - \frac{n}{15}$$

übergeht, so daß man nach gehöriger Substitution erhält

$$S = x \sqrt{\frac{x^3}{a}} \left\{ \frac{2}{5} + \frac{3}{4n} + \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{4n^3} - \frac{1}{15n^4} \right\}.$$

3) Bezeichnet man die inneren Rechtecke, deren Anzahl $(n-1)$ ist, mit $r_1, r_2 \ldots r_{n-1}$, so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$r_1 = \frac{3x}{n^2}\, y_1 = 3 \,.\, \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$r_2 = \frac{5x}{n^2}\, y_2 = 5 \,.\, 2^3 \,.\, \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$r_3 = \frac{7x}{n^2}\, y_3 = 7 \,.\, 3^3 \,.\, \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{n-1} = \frac{(2n-1)x}{n^2}\, y_{n-1} = (2n-1)(n-1)^3 \,.\, \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}}.$$

Mithin ist $$S_1 = \frac{x}{n^5} \sqrt{\frac{x^3}{a}} \left\{3 + 5 \,.\, 2^3 + 7 \,.\, 3^3 + \ldots\ldots (2n-1)(n-1)^3\right\}.$$

Entwickelt man auch hier die Glieder der in Klammern eingeschlossenen Größe und bildet die Differenzen, so gewinnt man

3	40	189	576	1375	2808	. . . . .
	37	149	387	799	1433	
		112	238	412	634	
			126	174	222	
				48	48	

Als Summenformel dieser arithmetischen Reihe vom vierten Grade mit $(n-1)$ Gliedern erhält man

$$3(n-1) + \frac{37(n-1)(n-2)}{2} + \frac{112(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,3} + \frac{126(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\,.\,3\,.\,4}$$
$$+ \frac{48(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2\,.\,3\,.\,4\,.\,5},$$

welcher Ausdruck sich in

$$\frac{2n^5}{5} - \frac{3n^4}{4} + \frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{4} - \frac{n}{15}$$

zusammenziehen läßt. Nach gehöriger Substitution findet man nun

$$S_1 = x \sqrt{\frac{x^3}{a}} \left\{\frac{2}{5} - \frac{3}{4n} + \frac{1}{6n^2} + \frac{1}{4n^3} - \frac{1}{15n^4}\right\}.$$

4) Bildet man nun die Differenz $S - S_1$, so findet man dieselbe

$$S - S_1 = x \sqrt{\frac{x^3}{a}} \left\{\frac{3}{2n} - \frac{1}{2n^3}\right\}.$$

Der Ausdruck innerhalb der Klammern läßt sich offenbar kleiner machen, als jede beliebige, noch so kleine Zahl, wenn man das n nur genügend groß wählt. Läßt man n bis ins Unendliche wachsen, so verschwindet der Ausdruck innerhalb der Klammern und die Grenzen für F, nehmlich S und S_1 fallen zusammen. Man gewinnt daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$F = \frac{2}{5} x \sqrt{\frac{x^3}{a}} = \frac{2}{5} xy.$$

5) Verbindet man den Curvenpunct mit der Spitze, so ist das von der Sehne und dem Bogen begrenzte Flächenstück

$$F_1 = \frac{xy}{2} - F = \frac{xy}{10},$$

so daß $F = 4F_1$. Für $x = a$ wird $F = \frac{2}{5} a^2$ und $F_1 = \frac{a^2}{10}$.

Für den Durchschnittspunct der Curve mit der Grundparabel ist $x = \frac{8a}{9}$ und $y = \frac{16a}{27}\sqrt{2}$, so daß

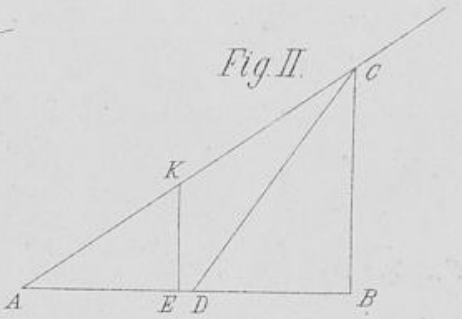
$$F = \frac{256\, a^2 \sqrt{2}}{1215};$$

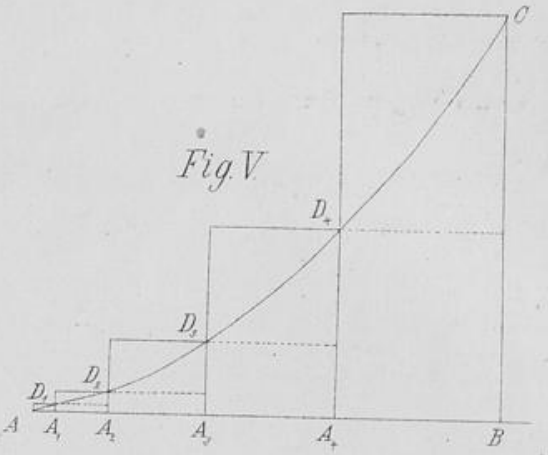
das durch die gemeinsame Ordinate, die Axe und den Bogen der Grundparabel begrenzte Flächenstück ist

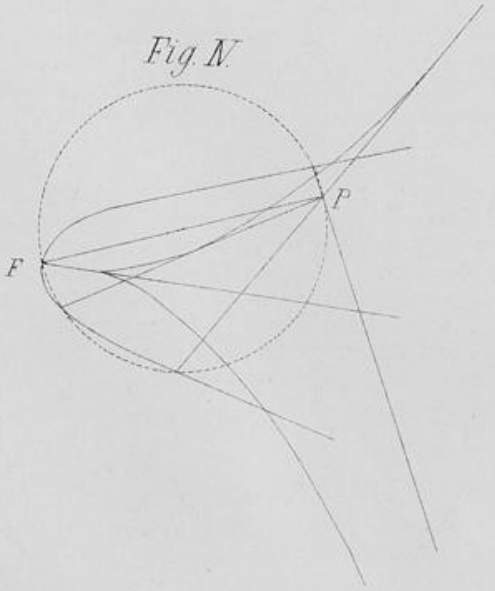
$$G = \frac{256 a^2 \sqrt{2}}{729},$$

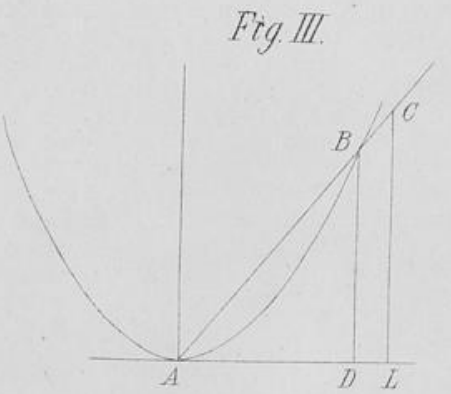
so daß sich verhält $G : F = 1215 : 729 = 5 : 3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf









Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf