Über den Brocard'schen Kreis.

(Fortsetzung der Programmarbeiten von Ostern 1886 und 1887.)

Von

Professor Dr. Heinrich Lieber.

Zur Programmarbeit von Ostern 1887 bemerke ich zunächst, dass in derselben nicht besonders erwähnt ist, dass der erste Lemoine'sche Kreis (§ 52a) identisch ist mit dem in VII. § 114 bis § 119 behandelten Tucker'schen Kreise.

Folgende Druckfehler sind noch in den beiden Programmarbeiten aufgefunden:

In dem Programm von Ostern 1886: § 4 Z. 2 muss es heissen „schneiden" statt „scheiden". — § 31 No. 16 Z. 5 muss es heissen „DBM" statt „DBP". — § 43 Z. 8 muss es heissen „von ABC, AD ist also" statt „von ABC, ist also". — § 58 Z. 5 muss es heissen „Gegenmittellinie" statt „Mittellinie"; und Z. 9 muss es „β_1" statt „β_2" heissen.

In dem Programm von Ostern 1887: § 64 Z. 2 muss es heissen „Eine Diagonale desselben" statt „Eine Diagonale derselben". — § 65 Z. 6 muss es heissen „OM und O'M'" statt „OM und O'M". — § 72 No. 2 Z. 2 muss es heissen „$\angle$ CBD" statt „$\angle$ CAD". — § 85 Z. 7 fehlt in der letzten Formel $\frac{b \sin(\alpha - \vartheta)}{2 \cos \vartheta}$ das ϑ. — § 85 Z. 14 muss es „$C_1A_2 =$" statt „$CA_2 =$" heissen. — § 106 Z. 1 muss es heissen „§ 72, 1" statt „§ 71, 1". — § 108 Z. 1 muss es heissen „§ 106" statt „§ 104". — § 115 Z. 2 muss es heissen „§ 77" statt „§ 71".

VII. Über den Tucker'schen Kreis.

(Fortsetzung des im Programm 1887 begonnenen Abschnittes.)

120. (Fuhrmann.) A_4 sei der Durchschnittspunkt von L_1M_1 und L_2N_2, B_4 der von M_1N_1 und M_2L_2, C_4 der von N_1L_1 und N_2M_2; dann befinden sich die Dreiecke $A_4B_4C_4$ und ABC in Ähnlichkeitslage; der Ähnlichkeitspunkt ist S' (Winkelgegenpunkt von dem Mittelpunkt S von OO').

$L_1N_2M_2M_1$ ist ein Sehnenviereck (§ 114); da nun $\angle N_1L_1M_1 = M_2N_2L_2 = \beta$ (§ 116), so ist $\angle C_4L_1A_4 = C_4N_2A_4$, also ist $C_4A_4L_1N_2$ ein Sehnenviereck; mithin $\angle C_4A_4L_1 = 180^0 - C_4N_2L_1$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$= M_2M_1L_1$, also ist $C_4A_4 \parallel M_2M_1$ oder $\parallel CA$; ebenso wird bewiesen, dass $A_4B_4 \parallel AB$ und $B_4C_4 \parallel BC$ ist. — Von A_4 werde auf M_2L_2 die Senkrechte A_4X gefällt, welche AO' in X_1 treffe; da $\angle CM_2L_2 = \vartheta$, so ist $M_2L_2 \parallel AO'$, mithin ist auch $A_4X \perp AO'$; da $\angle M_2L_2N_2 = \gamma$ ist, so ist $A_4X = A_4L_2 \sin\gamma$. Ferner werde von A_4 auf L_1N_1 die Senkrechte A_4Y gefällt, welche AO in Y_1 treffe; da $\angle BN_1L_1 = \vartheta$, so ist $N_1L_1 \parallel AO$, mithin ist auch $A_4Y \perp AO$; und da $\angle M_1L_1N_1 = \beta$, so ist $A_4Y = A_4L_1 \sin\beta$. Da $\angle CL_1M_1 = BL_2N_2 = \vartheta$, so ist $A_4L_1 = A_4L_2$; mithin $A_4X : A_4Y = \sin\gamma : \sin\beta = c : b$. Da XX_1 gleich der von M_2 auf AO' gefällten Senkrechten und YY_1 gleich der von N_1 auf AO gefällten Senkrechten ist, so ist $XX_1 : YY_1 = AM_2 : AN_1 = c : b$ (VII, a). Folglich ist $A_4X : A_4Y = XX_1 : YY_1$, also $A_4X - XX_1 : A_4Y - YY_1 = c : b$ oder $A_4X_1 : A_4Y_1 = c : b$ (1). Sind u und v die von S auf AO' resp. AO gefällten Lote, so ist, da $SO = SO'$, auch $\triangle ASO = ASO'$, mithin $AO' \cdot u = AO \cdot v$, also $AO : AO' = u : v$; und da $AO : AO' = b : c$, so ist auch $u : v = b : c$. Daher werden sich die von dem Winkelgegenpunkt S' von S (§ 91) auf AO' resp. AO gefällten Lote wie $c : b$ verhalten. Ebenso verhalten sich nach (1) auch die von A_4 auf AO' resp. AO gefällten Lote, also geht AS' durch A_4.

121. (Stoll.) Schneiden sich M_1L_2 und L_1N_2 in P, N_1M_2 und M_1L_2 in Q, L_1N_2 und N_1M_2 in R (R ist hier zu unterscheiden von dem Steiner'schen Punkte R), so sind die Dreiecke PQR und ABC kollinear; das Kollineationscentrum ist der Grebe'sche Punkt K.

Da $L_2N_1 \parallel AC$ (VII, d), so ist $\angle L_2N_1N_2 = L_2M_1N_2 = \alpha$; und da $M_2L_1 \parallel AB$ (VII, d), so ist $\angle M_1M_2L_1 = M_1N_2L_1 = \alpha$; mithin $\angle PM_1N_2 = PN_2M_1$, also $PM_1 = PN_2$. Da M_1L_2 antiparallel zu AB ist (VII, b), so ist $\angle CM_1P = \beta$; und da L_1N_2 antiparallel zu AC (VII, b), so ist $\angle BN_2P = \gamma$. Da nun $PM_1 = PN_2$, so verhalten sich die von P auf b und c gefällten Lote wie $\sin\beta : \sin\gamma$. Da sich auch die von K auf b und c gefällten Lote wie $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$ verhalten (§ 38), so liegen A, K, P auf einer Geraden. Ebenso wird gezeigt, dass B, K, Q und C, K, R auf je einer Geraden liegen, so dass K das Kollineationscentrum der Dreiecke ABC und PQR ist.

122. (Stoll.) In das Sechseck $L_1L_2M_1M_2N_1N_2$ lässt sich eine Ellipse beschreiben; die Verbindungslinien von A, B, C mit den Berührungspunkten auf resp. L_1L_2, M_1M_2, N_1N_2 schneiden sich in S'; der Mittelpunkt der Ellipse liegt im Mittelpunkt von FZ.

$L_1L_2M_1M_2N_1N_2$ ist ein Brianchon'sches Sechseck, da sich seine Hauptdiagonalen in einem Punkte K schneiden (VII, e); mithin lässt sich in dasselbe ein Kegelschnitt beschreiben und zwar ist dieser Kegelschnitt eine Ellipse, weil das Sechseck konvex ist. Den Berührungspunkt der Ellipse mit L_1L_2 findet man, indem man die Diagonalen L_1M_1 und L_2N_2 zieht und ihren Schnittpunkt A_4 mit A verbindet. AA_4 geht durch den Berührungspunkt und durch S' (§ 120). Analoges gilt für die Berührungspunkte auf M_1M_2 und N_1N_2. Die Berührungspunkte auf BC und AC seien resp. S_a und S_b. Verbindet man C mit der Mitte von S_aS_b, so geht diese Linie durch den Mittelpunkt der Ellipse und die Lote aus diesem Mittelpunkte auf CB und CA verhalten sich wie $\frac{CS_b}{CS_a} = \frac{\cos(\alpha-\vartheta) + \cos(\beta-\gamma)\cos\vartheta}{\cos(\beta-\vartheta) + \cos(\alpha-\gamma)\cos\vartheta}$. Ist Y der Mittelpunkt von FZ, so ist sein Abstand von BC gleich der halben Summe der von F und Z auf BC gefällten Lote. Nun ist das von Z auf BC gefällte Lot gleich $\frac{a}{4}\,\frac{1 + \cot\vartheta\,\cot\alpha}{\cot\alpha}$ und das von F auf BC gefällte Lot gleich $\frac{a}{4}\,\frac{\cos(\beta-\gamma)}{\sin\alpha}$. Daher ist das Lot von Y auf BC gleich $\frac{a}{8\sin\alpha}\,\frac{\cos(\alpha-\vartheta) + \cos(\beta-\gamma)\cos\vartheta}{\cos\vartheta}$ und das von Y auf AC gleich

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{b}{8 \sin\beta} \frac{\cos(\beta-\vartheta) + \cos(\alpha-\gamma)\cos\vartheta}{\cos\vartheta}$. Da das Verhältnis beider Lote daher gleich $\frac{CS_b}{CS_a}$ ist, so liegt Y auf der Verbindungslinie von C mit der Mitte von S_aS_b. Da Ähnliches für die anderen Ecken gilt, so ist Y Mittelpunkt der Ellipse.

Zusatz. Die Verbindungslinien von P, Q, R (vergl. § 121) mit den Berührungspunkten auf QR, RP, PQ schneiden sich in einem Punkte T, der mit K und S′ auf derselben Geraden liegt.

VIII. Über die beiden Dreiecke, welche entstehen, wenn die Brocard'schen Winkel (§ 71—73) an die Dreiecksseiten nach aussen angetragen werden.

123. Trägt man ausserhalb des Dreiecks ABC den Winkel ϑ an AB in A, an BC in B und an CA in C an, und ferner an BA in B, an AC in A und an CB in C an, so entstehen die Dreiecke abc und a′b′c′, welche mit T und T′ bezeichnet werden mögen und welche beide dem Dreieck ABC ähnlich sind.

Es ist $\angle$ BAb = CBc = ACa = ϑ und $\angle$ ABa′ = CAc′ = BCb′ = ϑ. $\angle$ CAb = $\alpha + \vartheta$ und $\angle$ CAb = a + ϑ als Aussenwinkel; mithin a = α; da sich dasselbe für die anderen Winkel beweisen lässt, so ist abc $\backsim$ ABC und zwar gleichwendig; ebenso a′b′c′.

124. T $\cong$ T′.

$\angle$ AOB = $180^\circ - \vartheta - (\beta - \vartheta) = 180^\circ - \beta$ und $\angle$ b = β; daher ist AOBb ein Sehnenviereck, mithin $\angle$ ObB oder $\angle$ Obc = ϑ; ebenso $\angle$ Oca = ϑ und $\angle$ Oab = ϑ. Daher ist O auch erster Brocard'scher Punkt für abc, mithin gemeinschaftlicher Punkt der ähnlichen Systeme ABC und abc. Daher AB : ab = OA : Oa = $\sin\vartheta : \sin 2\vartheta = 1 : 2\cos\vartheta$. Da sich dieselbe Entwickelung für T″ machen lässt, so ist T $\cong$ T′.

125. Die Mittelpunkte h und h′ der Umkreise von T und T′ liegen in Bezug auf H symmetrisch zu den Brocard'schen Punkten des Dreiecks ABC.

$\angle$ OHh = OAa = $180^\circ - 2\vartheta$; da $\angle$ OHO′ = 2ϑ ist (§ 81), so ist O′Hh eine Gerade. Nun ist $\angle$ HOh = BOb = ϑ (AOBb ein Sehnenviereck) und da der Aussenwinkel OHO′ = 2ϑ, so ist $\angle$ OhH = ϑ, also HO = Hh und hO $\perp$ OO′. Ebenso liegt h′ auf OH und auf der Senkrechten in O′ auch OO′. H ist also Mittelpunkt des Rechtecks OO′h′h.

126. Die Brocard'schen Punkte O′ und O sind die Grebe'schen Punkte der Dreiecke T und T′.

Der Grebe'sche Punkt für abc (T) sei X; dann ist $\angle$ KOX = BOb = ϑ. Ferner OK : OX = $1 : 2\cos\vartheta$. Da nun $\angle$ KOO′ = ϑ ist (§ 81, 3) und OK : OO′ = $\frac{\frac{1}{2}OO'}{\cos\vartheta} : OO' = 1 : 2\cos\vartheta$, so erfüllt O′ beide Bedingungen, ist also identisch mit X.

127. Die Dreiecke T und T′ haben als zweite Brocard'sche Punkte die Punkte O_1 und O'_1, welche zu O und O′ in Bezug auf HO′ resp. HO symmetrisch liegen.

Dreht man $\triangle$ ABC um seinen ersten Brocard'schen Punkt O, welcher zugleich erster Brocard'scher Punkt von T ist, um $\angle$ ϑ, so fällt OA auf Oa u. s. w., ferner OK auf OO′ und OO′ in die Richtung, auf welcher der zweite Brocard'sche Punkt O_1 von T liegen muss. Da $\angle$ OO′H = $90^\circ - \vartheta$ ist (§ 81), so ist $OO_1 \perp O'H$; schneiden sich beide in L, so ist OL = OO′ $\cos\vartheta$. Da

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ferner O′ der Grebe'sche Punkt von T ist (§ 126), so verhält sich $OK : OO' = OO' : OO_1$; mithin $OO_1 = OO' \cdot \frac{OO'}{OK} = \frac{2\varrho \sin 2\vartheta}{2\varrho \sin\vartheta}$ (ϱ Radius des Brocard'schen Kreises), also $OO_1 = 2OO' \cos\vartheta = 2OL$.

128. Die Geraden D′O′ und D′O (§ 92) gehen durch die Punkte O_1 und O'_1.

Da $\angle D'O'H = 90^0 + \vartheta$ und $\angle H'O'O_1 = 90^0 - \vartheta$ ist, so ist $D'O'O_1$ eine Gerade.

IX. Über die gleichseitige Hyperbel der neun Punkte.

129. Der Ort eines Punktes Q, dessen Winkelgegenpunkt P eine gerade Linie durchläuft, ist ein Kegelschnitt, der auch durch die Eckpunkte A, B, C des Dreiecks geht.

Bewegt sich P auf einer Geraden L, so beschreiben AP nnd BP projektivische Strahlenbüschel. Die Strahlenbüschel AQ und BQ sind diesen bezüglich kongruent, also auch projektivisch und haben ausserdem keinen Strahl gemeinschaftlich. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen daher auf einem Kegelschnitt, der durch A und B und ausserdem auch durch C geht. — Da die Strahlenbüschel ausserdem in entgegengesetztem Sinne liegen, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel.

130. Die neun Punkte A, B, C, D, E, S′, Z′, H′, N liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel Γ, deren Mittelpunkt W der Mittelpunkt von H′N ist.

N und H′ seien die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel; dann ist diese durch einen dritten Punkt z. B. A bestimmt. Da nun $\angle BNA = 180^0 - \gamma$ (§ 94) $= BH'A$ (H′ Höhenschnittpunkt) und $\angle CNA = \beta = CH'A$ ist, so muss die gleichseitige Hyperbel auch durch B und C gehen; denn A ist ein Punkt der Hyperbel und AB und AC müssen Sehnen sein, da sie von den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen Winkeln erscheinen. Trifft nun die durch D′ zu H′A gezogene Parallele AN in M, so ist D′HMA ein Sehnenviereck (§ 98, Beweis); also $\angle HD'M = HAN = DNA$, und da auch $\angle HD'M = DH'A$ ist (§ 93), so ist $\angle DNA = DH'A$; mithin muss auch D nach dem vorher angeführten Satz auf derselben Hyperbel liegen. — Nun liegen A, B, C, ferner D und H′ auf diesem Kegelschnitt, daher müssen auch, da D′ und H ihre Winkelgegenpunkte sind, die Winkelgegenpunkte sämtlicher Punkte der Geraden D′H nach § 129 auf der gleichseitigen Hyperbel liegen. Auf D′H liegen aber K (Gegenpunkt E), S (Gegenpunkt S′, § 91) und Z (Gegenpunkt Z′). — Der Mittelpunkt der Hyperbel ist dann der Mittelpunkt W des Durchmessers NH′.

131. W liegt auf der Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten DH′ und EZ′ des Trapezes DH′EZ′.

Von S sei auf BC die Senkrechte SP_a gefällt, ferner von O, O′, Z resp. die Senkrechten OO_a, $O'O'_a$, ZZ_a. Da S Mittelpunkt von OO′ ist, so ist $SP_a = \frac{1}{2}(OO_a + O'O'_a) = r \sin\vartheta \sin\alpha \left(\frac{\sin(\gamma-\vartheta)}{\sin\gamma} + \frac{\sin(\beta-\vartheta)}{\sin\beta}\right) = r \sin\vartheta\ (2\cos\vartheta \sin\alpha - \sin\vartheta \sin\alpha\ [\cot\gamma + \cot\beta]) = r \sin\vartheta\ (2\cos\vartheta \sin\alpha - \sin\vartheta \sin\alpha\ [\cot\vartheta - \cot\alpha]) = r \sin\vartheta \sin(\alpha+\vartheta)$. Teilt man nun H′S in T so, dass $H'T : TS = 2 : 1$ und sind TT_a und $H'H'_a$ die von T resp. H′ auf BC gefällten Senkrechten, so ist $TT_a = \frac{2}{3} SS_a + \frac{1}{3} H'H'_a = \frac{2}{3} r \sin\vartheta \sin(\alpha+\vartheta) + \frac{2}{3} r \cos\beta \cos\gamma = \frac{2}{3} r\ [\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos(\alpha+2\vartheta) + \frac{1}{2}\cos(\beta+\gamma) + \frac{1}{2}\cos(\beta-\gamma)] = \frac{2}{3} r \cos(\beta-\vartheta)\cos(\gamma-\vartheta)$. Da sich analoge Ausdrücke für TT_b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und TT_c ergeben, so verhält sich $TT_a : TT_b : TT_c = \cos(\beta - \vartheta)\cos(\gamma - \vartheta) : \cos(\gamma - \vartheta)\cos(\alpha - \vartheta) : \cos(\alpha - \vartheta)\cos(\beta - \vartheta)$. — Da Z Mittelpunkt von KH ist, so ist $ZZ_a = \frac{1}{2}(KK_a + HH_a) = \frac{1}{2} r (\sin\alpha \operatorname{tg}\vartheta + \cos\alpha) = \frac{r}{2\cos\vartheta}\cos(\alpha - \vartheta)$, da $KK_a = \frac{a}{2\cot\vartheta}$ (§ 38) ist. Entsprechende Ausdrücke erhält man für ZZ_b und ZZ_c, so dass sich die Abstände des Punktes Z von den Seiten verhalten wie $\cos(\alpha - \vartheta) : \cos(\beta - \vartheta) : \cos(\gamma - \vartheta)$. Mithin verhalten sich die Abstände des Winkelgegenpunktes Z′ von den Seiten (§ 5) wie $\frac{1}{\cos(\alpha - \vartheta)} : \frac{1}{\cos(\beta - \vartheta)} : \frac{1}{\cos(\gamma - \vartheta)} = \cos(\beta - \vartheta)\cos(\gamma - \vartheta) : \cos(\gamma - \vartheta)\cos(\alpha - \vartheta) : \cos(\alpha - \vartheta)\cos(\beta - \vartheta)$. Da der Punkt T dieselbe Eigenschaft hat, so sind T und Z′ identisch; mithin wird H′S durch Z′ im Verhältnis 2 : 1 geteilt. Da auch DE : ES = 2 : 1 (§ 88), so ist EZ′ ∥ DH′ ∥ D′H. Da mithin DH′ und EZ′ zwei parallele Sehnen der Hyperbel sind, so geht die Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte durch den Mittelpunkt W der Hyperbel.

132. Die Verbindungslinie der Mitten der parallelen Seiten DH′ und EZ′ (vergl. § 131) ist parallel HD, geht durch den Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises und durch den Mittelpunkt S von OO′.

Die Verbindungslinie geht im Dreieck DH′N durch die Mittelpunkte von H′D und H′N, ist also parallel DH, ferner muss sie auch durch den Mittelpunkt F der Ecktransversale H′H gehen; letzterer ist aber der Mittelpunkt des Feuerbach'schen Kreises, da H′ Höhenschnittpunkt und H Mittelpunkt des Umkreises ist. Im Dreieck DSH′ ist EZ′ ∥ DH′, also geht die Verbindungslinie ihrer Mitten durch die Ecke S.

133. W ist ein Punkt des Feuerbach'schen Kreises.

Im △ HH′N ist der Mittelpunkt F des Feuerbach'schen Kreises Mittelpunkt von H′H und W Mittelpunkt von H′N; daher ist $FW = \frac{1}{2}HN = \frac{1}{2}r$, also ist FW Radius des Feuerbach'schen Kreises.

134. Die Asymptoten von Γ sind die Sehnen Wm_1 und Wm_2 des Feuerbach'schen Kreises, wo m_1m_2 der mit HD′, DH′, EZ′ parallele Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises ist.

WF halbiert die parallelen Sehnen DH′ und EZ′ der Hyperbel; verlängert man diese Sehnen bis zum Durchschnitt mit den Asymptoten, so werden auch die von den Asymptoten begrenzten Segmente der Sehnen durch WF halbiert. Dasselbe gilt von allen diesen parallelen Geraden; da nun m_1Fm_2 eine solche Gerade ist und ausserdem $\angle\, m_1Wm_2 = 90^\circ$ ist, so sind Wm_1 und Wm_2 die Asymptoten.

135. (Stegemann.) HH′ ist die Polare von K in Bezug auf die Hyperbel Γ.

H′ (HKSD′) ist ein harmonisches Büschel (§ 92). Die Transversale NK schneidet H′S in Z′ und möge H′H in H_x schneiden, so sind $NZ'KH_x$ harmonische Punkte, und da N und Z′ auf der Hyperbel liegen, so geht die Polare von K durch H_x. — DD′, HH′, SS′ schneiden sich im Punkte J. Da ferner sowohl D, E, S, als auch E, S′, D′ und D, S′, K in gerader Linie liegen, so ist DES′JSD′ ein vollständiges Vierseit; schneiden sich nun DS′ und EJ in H_y, so sind D, S′, H_y, K harmonische Punkte. Da D und S′ auf der Hyperbel liegen, so geht die Polare von K durch H_y. Da nun die Polare von K sowohl durch H_x wie durch H_y geht, so ist sie H_xH_y oder HH′.

136. (Stoll.) R, E, W liegen in gerader Linie.

H′H ist Mittellinie im Dreieck RH′N, und da H′E : EH = 2 : 1, so ist E Schwerpunkt des Dreiecks RH′N; mithin muss RE durch den Mittelpunkt W von H′N gehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

137. Errichtet man über den Seiten eines Dreiecks nach innen gleichschenklige Dreiecke mit den Ecken A′B′C′ und dem Basiswinkel φ, so liegen A′, B′, C′ in einer Geraden, wenn $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$ ist. (Vergl. § 77.)

Die Entfernungen der Punkte A′, B′, C′ von den Seiten des Dreiecks ABC sind resp.

$$\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{a}{2}\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \frac{a}{2}\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

$$\frac{b}{2}\frac{\sin(\gamma-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \frac{b}{2}\operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{b}{2}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

$$\frac{c}{2}\frac{\sin(\beta-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \frac{c}{2}\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \frac{c}{2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Sollen A′, B′, C′ in einer Geraden liegen, so muss die Determinante der Koordinaten gleich Null sein; mithin

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}\varphi & \sin\gamma - \cos\gamma\operatorname{tg}\varphi & \sin\beta - \cos\beta\operatorname{tg}\varphi \\ \sin\gamma - \cos\gamma\operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi & \sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\varphi \\ \sin\beta - \cos\beta\operatorname{tg}\varphi & \sin\alpha - \cos\alpha\operatorname{tg}\varphi & \operatorname{tg}\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt man die Determinante, so wird der Koefficient von $\operatorname{tg}\varphi^3$ identisch gleich Null, nämlich $1 - \cos\alpha^2 - \cos\beta^2 - \cos\gamma^2 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; der von $\operatorname{tg}\varphi^2$ wird $6\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$; der von $\operatorname{tg}\varphi$ wird $-4(\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma)$ und das konstante Glied ist $+2$. Wird nun die Gleichung durch $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ dividiert, so erhält man $6\operatorname{tg}\varphi^2 - 4\cot\vartheta\operatorname{tg}\varphi + 2 = 0$, hieraus $3\sin\varphi^2 - 2\cot\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi^2 = 0$; mithin $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$.

138. (Kiehl.) Der Gleichung $\sin(2\varphi + \vartheta) = 2\sin\vartheta$ genügen zwei Winkel φ und die diesen Winkeln entsprechenden Geraden stehen aufeinander senkrecht.

Sind A′B′C′ die Spitzen ähnlicher gleichschenkliger Dreiecke mit beliebigem Basiswinkel φ, $A_1B_1C_1$ die für den Basiswinkel ϑ; sind ferner S_a und K_a die Fusspunkte der von H resp. K auf BC gefällten Senkrechten; wird ferner BC von A′K in A_k und der Durchmesser HK resp. dessen Verlängerung von der Senkrechten auf BC in A_k in P geschnitten, so ist $A'S_a : A_1S_a = A'S_a : KK_a$ (§ 79) $= S_aA_k : K_aA_k = HP : KP$. Da das erste Verhältnis nur von φ und ϑ abhängt, so werden durch P auch die auf den beiden anderen Dreiecksseiten in entsprechender Weise errichteten Senkrechten B_kP und C_kP gehen; und umgekehrt: jeder Punkt P der Geraden HK wird durch die erwähnten Konstruktionen auf eins der Dreiecke A′B′C′ führen. Da ferner $A'K : A_kK = HK : PK = B'K : B_kK = C'K : C_kK$, so ist stets $\triangle A'B'C' \backsim A_kB_kC_k$ Fällt nun P in einen der beiden Schnittpunkte von HK mit dem Umkreise von ABC, so liegen $A_kB_kC_k$ in gerader Linie (Simsonlinie), mithin auch A′B′C′ in gerader Linie. Wir erhalten somit zwei Gerade A′B′C′, welche der Aufgabe genügen. Dieselben stehen aufeinander senkrecht, weil die zugehörigen beiden Geraden $A_kB_kC_k$ aufeinander senkrecht stehen.

139. Die Geraden A′B′C′, auf welche sich das Dreieck A′B′C′ reduziert, gehen durch den Schwerpunkt E und sind gemeinsame Tangenten der drei Parabeln (bc), (ca), (ab). (Vergl. XI. Untersuchungen von Artzt.)

Da die Dreiecke A′B′C′ und ABC denselben Schwerpunkt E haben (§ 85) und A′B′C′ in einer Geraden liegen, so muss diese Gerade durch E gehen. Nun sind B′C′, C′A′, A′B′ Tangenten an den Parabeln (bc), (ca), (ab), also muss A′B′C′ gemeinsame Tangente an allen sein. Dasselbe gilt für die Senkrechte auf A′B′C′ in E.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

140. (Kiehl.) Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der drei Parabeln sind parallel den Asymptoten der Hyperbel Γ der neun Punkte.

Der Durchmesser HK des Brocard'schen Kreises schneide den Umkreis von ABC in L; von L seien auf BC, CA, AB resp. die Senkrechten LL_a, LL_b, LL_c gefällt. Dann ist $L_aL_bL_c$ die Simsonsche Gerade des Punktes L, eine Asymptote der Hyperbel Γ. Wird nun die Mittelsenkrechte von BC durch KL_a in A_n geschnitten, und haben B_n, C_n entsprechende Bedeutung, so sind die Fünfecke $KLL_aL_bL_c$ und $KHA_nB_nC_n$ durch K in Ähnlichkeitslage. Da $L_aL_bL_c$ in einer Geraden liegen, so müssen auch $A_nB_nC_n$ in einer Geraden liegen und beide sind parallel. Sind K_a, K_b, K_c die Fusspunkte der Senkrechten von K auf die Seiten und S_a, S_b, S_c die Mittelpunkte der letzteren, so ist $\frac{S_aA_n}{K_aK} = \frac{L_aA_n}{L_aK}$, $\frac{S_bB_n}{K_bK} = \frac{L_bB_n}{L_bK}$, $\frac{S_cC_n}{K_cK} = \frac{L_cC_n}{L_cK}$. Da die rechten Seiten der drei Gleichungen gleich sind, so haben die in gerader Linie liegenden Punkte A_n, B_n, C_n von den Dreiecksseiten Abstände, welche sich wie die des Punktes K verhalten, folglich ist $A_nB_nC_n$ eine der gemeinschaftlichen Parabeltangenten und parallel der Simsonschen Linie von L, d. h. einer Asymptote der Hyperbel Γ.

X. Konstruktionsaufgaben zur Geometrie des Brocard'schen Kreises.

Herr Dr. A. Emmerich hat in der dem Programm des Realgymnasiums in Mülheim a. d. Ruhr (1887) beigegebenen Abhandlung 16 Dreiecksaufgaben behandelt (die siebzehnte Aufgabe hat Herr Emmerich später veröffentlicht), in welchen das Dreieck aus gewissen ausgezeichneten Punkten zu konstruieren ist. Den Aufgaben habe ich nur kurze Analysen beigefügt, da sich die weitere Ausführung, die Determination und die Behandlung besonderer Fälle in der erwähnten Programmabhandlung findet. Die Bezeichnungen sind die bisher gebrauchten und stimmen mit denjenigen der Figur überein, welche der Programmabhandlung zu Ostern 1887 beigegeben ist.

1. A, B, E. Bekannte Aufgabe. (c, t_a, t_b).

2. A, H, E. Bekannte Aufgabe.

3. A, E, K. Anal. Durch A und E ist die Mitte S_a von BC bestimmt. Ein Ort für T, den Mittelpunkt der Höhe h_a, ist S_aK (§ 57), der zweite ist der Halbkreis über AJ (J Mittelpunkt von AS_a). Da E und K, sowie H und H′ Winkelgegenpunkte sind, so ist $\angle EAH = KAT$ und daher hat man einen Ort für H, der zweite ist die Parallele durch S_a zu AT.

4. A, E, A_1. Anal. S_a ist bekannt; da $A_1K \perp A_1S_a$ und A_1K durch AS_a halbiert wird (§ 86), so ist K bestimmt, also No. 3.

5. A, K, A_1. Anal. S_a bestimmt, da es auf der von A nach der Mitte von KA_1 gezogenen Geraden und der Senkrechten auf KA_1 in A_1 liegt; also wie No. 4.

6. E, K, A_1. Anal. S_a wie in No. 5 und dann A zu finden.

7. A, H, K. Anal. Da AH und AH′, AK und AE Gegentransversalen sind, so ist $\angle H'AE = HAK$; ferner $\angle AS_aH = H'AE$ also $= HAK$ oder $= 180^0 - HAK$, je nachdem AS_aH spitz oder stumpf ist. Schneidet daher der Umkreis die Gerade AK noch in W, so ist $AWHS_a$ ein Sehnenviereck und folglich ein Ort für S_a der Kreis durch A, W, H. Ist H_a der Fusspunkt der Höhe von A auf BC, so ist das rechtwinklige Dreieck AH_aS_a der Gestalt nach bestimmt, also auch der von der Mittellinie S_aH_a gebildete Winkel AS_aH_a oder AS_aK; daher ein zweiter Ort für S_a der Kreisbogen über AK mit dem Peripheriewinkel AS_aK.

8. A, B, K. Anal. Das Dreieck ist zu konstruieren aus c, α_2, β_1. Vergl. § 58.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. A, K, C_1. Anal. Da $AB \parallel C_1K$ und $C_1B = C_1A$ ist, so ist B bekannt; mithin No. 8.

10. A, B, O. Anal. Da $\angle OBC = OAB = \vartheta$, so ist der erste Ort für C der freie Schenkel von $\angle OBC = \vartheta$, der zweite ist der Kreis durch A und O, der AB in A berührt.

11. B, O, C_1. Anal. A liegt auf OC_1 und auf dem Kreise mit C_1B um C_1; daher No. 10. $\angle BC_1A$ muss $> 120^0$ sein.

12. A, H, O. Anal. Aus $HO = r\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}$ (§ 82) findet man den Brocard'schen Winkel ϑ, mithin B u. s. w.

13. A_1, O, O'. Anal. Der Brocard'sche Kreis, H und K sind bekannt, mithin $\angle OHK = \vartheta$. Den Radius r des Umkreises findet man aus $\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}\,\vartheta^2}$, wo ϱ der Radius des Brocard-schen Kreises ist (§ 83) u. s. w.

14. A_1, H, O. Anal. Der Brocard'sche Kreis ist bekannt, ferner O', daher wie No. 13.

15. A_1, K, O. Anal. Der Brocard'sche Kreis ist bekannt, mithin auch O', also wie No. 13.

16. B, H, A_1. Anal. C ist bestimmt als symmetrischer Punkt zu B in Bezug auf HA_1, also auch $\angle A_1BC = \vartheta$; da auch $HB = r$ bekannt ist, so kennt man $HO = r\sqrt{1-4\sin\vartheta^2}$, also auch O'; daher wie No. 13.

17. A_1, B_1, C_1. Anal. Da $\triangle A_1B_1C_1 \backsim ABC$, so kann man ϑ finden; ferner ist r bekannt aus $\varrho = \frac{r}{2}\sqrt{1-3\,\mathrm{tg}\,\vartheta^2}$; da $HA_1 = HS_a - A_1S_a = r\cos\alpha - r\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\vartheta = \frac{r\cos(\alpha+\vartheta)}{\cos\vartheta}$ ist und man den Brocard'schen Kreis kennt, so ist auch H bestimmt, ferner K_1 dann der Umkreis von ABC, die Punkte B und C, da $\angle BHA_1 = CHA_1 = B_1A_1C_1 = \alpha$ ist und A durch $BA \parallel KC_1$.

XI. Über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks und deren Mittelsenkrechten.

Herr Dr. Artzt in Recklinghausen hat die in den früheren Abschnitten mitgeteilten Sätze auf einem andern Wege, als dort angegeben, hergeleitet und seine Untersuchungen in den Programmen des Gymnasiums in Recklinghausen 1884 und 1886 veröffentlicht. Ich beschränke mich daher hier auch nur darauf, die von ihm gefundenen Resultate kurz mitzuteilen, da sich die genaue Ausführung in den erwähnten Programmabhandlungen findet. Die Bezeichnungen, welche Herr Artzt eingeführt hat, weichen von den früheren teilweise ab.

A. Über ähnliche Punktreihen auf den Seiten eines Dreiecks.

Man kann die drei Geraden, durch deren Durchschnitte das Dreieck ABC entsteht, als die Träger dreier ähnlichen Punktreihen (a), (b), (c) auffassen, in denen die Punkte B und C der Reihe (a) den Punkten C und A der Reihe (b), sowie den Punkten A und B der Reihe (c) entsprechen. Dann gilt für jedes Tripel entsprechender Punkte a, b, c die Relation : $Ba : Cb : Ac = BC : CA : AB$. Die Projektionsstrahlen je zweier der genannten Reihen berühren eine Parabel. Diese drei Parabeln, welche bereits § 109 erwähnt sind, sind mit (bc), (ca), (ab) bezeichnet.

Ist α der Brennpunkt der Parabel (bc), β der von (ca), γ der von (ab) (dieselben wurden früher A_2, B_2, C_2 genannt), M der Mittelpunkt des Umkreises von $\triangle ABC$, S der Schwerpunkt dieses Dreiecks, a_0, b_0, c_0 die Mittelpunkte von resp. BC, CA, AB, so ist $\angle B\alpha C = 2A$ (vergl. § 109); $M\alpha \perp A\alpha$; Ab_0c_0 ist ein Tangentendreieck, sein Umkreis geht mithin durch α; $A\alpha$ ist Gegentrans-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

versale zur Mittellinie Aa_0; $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ schneiden sich in einem Punkte K, dem Grebe'schen Punkt und der Kreis über KM als Durchmesser wird Brocard'scher Kreis genannt; auf demselben liegt α, ebenso β und γ. Ferner ist $\alpha A = \frac{bc}{2\,t_a}$, $\alpha B = \frac{c^2}{2\,t_a}$, $\alpha C = \frac{b^2}{2\,t_a}$. Sind b_1 und c_1 die Fusspunkte der Lote von α auf AC resp. AB, so ist b_1c_1 Scheiteltangente, $b_1c_1 \perp Aa_0$ und die Strecke b_1c_1 wird von b_0c_0 halbiert. Sind $2p$, $2p_1$, $2p_2$ die Parameter der drei Parabeln, und ist l die Senkrechte von B auf Aa_0, so ist $p = \frac{l^2}{t_a} = \frac{(l \cdot t_a)^2}{t_a^3} = \frac{(ABC)^2}{t_a^3}$; daher $p : p_1 : p_2 = \frac{1}{t_a^3} : \frac{1}{t_b^3} : \frac{1}{t_c^3}$. — Die Leitlinie von (bc) ist senkrecht zu Aa_0 und geht durch den Höhenschnittpunkt h des Dreiecks Ab_0c_0, welcher ein Punkt des Feuerbach'schen Kreises ist. — Das von den drei Leitlinien gebildete Dreieck hat dieselben Winkel wie das von den Mittellinien gebildete und sein Schwerpunkt ist S.

B. Über ähnliche Punktreihen auf den Mittelsenkrechten eines Dreiecks.

Auf den Seiten des Dreiecks seien in ihren Mittelpunkten a_0, b_0, c_0 Senkrechte errichtet und auf diesen letzteren sind die Punkte a, b, c so angenommen, dass $a_0a : b_0b : c_0c = BC : CA : AB$ ist; diese Punktreihen werden mit (a), (b), (c) bezeichnet. Die Projektionsstrahlen je zweier von ihnen berühren je eine der drei Parabeln (bc), (ca), (ab).

Die Parabel (bc) hat denselben Punkt α zum Brennpunkt, welchen die vorher erwähnte Parabel hat; die Leitlinie ist AS und der Parameter $2p = \frac{ABC\,(b^2 - c^2)}{t_a^3}$. — Je drei entsprechende Punkte der Reihen (a), (b), (c) bilden ein Dreieck abc, welches durch M in die Teildreiecke Mab, Mbc, Mca zerlegt wird, von denen jedes für eine der Parabeln Tangentendreieck ist. Da α auf dem Umkreise von Mbc liegt, so bilden die Umkreise für die Dreiecke der Schar Mbc ein Büschel mit der gemeinsamen Sehne $M\alpha$; ebenso erhält man die Kreisbüschel $M\beta$ und $M\gamma$; diese drei Kreisbüschel haben den Kreis $M\alpha\beta\gamma$ gemeinschaftlich, welcher drei entsprechende Kreise repräsentiert und der Brocard'sche Kreis ist; er schneidet die Mittelsenkrechten der Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten a_1, b_1, c_1 (früher A_1, B_1, C_1); und dieses Dreieck $a_1b_1c_1$ gehört zur Schar abc.

Zum Brocard'schen Dreieck $a_1b_1c_1$ gelangt man noch auf folgende Weise: Zieht man durch drei entsprechende Punkte a, b, c Parallelen zu resp. BC, CA, AB, so erhält man ein Dreieck $A_1B_1C_1$; für alle diese Dreiecke ist K ebenfalls der Grebe'sche Punkt, mithin auch der Ähnlichkeitspunkt und folglich das Nulldreieck der Schar. — Die Winkel, welche die Seiten des Brocard'schen Dreiecks $a_1b_1c_1$ mit den entsprechenden von ABC bilden, sind gleich den Winkeln, welche der Durchmesser MK des Brocard'schen Kreises mit den Durchmessern aus A, B, C des Kreises ABC bildet.

Die Dreiecke der Schar abc haben mit $\triangle$ ABC den Schwerpunkt gemein; sie liegen mit ABC perspektivisch und das Projektionscentrum liegt auf der gleichseitigen Hyperbel der neun Punkte; ihre Kollinationsachsen berühren eine Parabel. Die Brennpunkte dieser Parabeln liegen auf dem Kreise ABC und ihre Direktrix geht durch M und H.

C. Untersuchungen über ähnliche Dreiecke, die einem festen Dreieck umschrieben sind.

Den in A und B behandelten ähnlichen Punktreihen auf den Seiten des Dreiecks stehen zwei Gruppen kongruenter gleichlaufender Strahlenbüschel aus den Ecken des Dreiecks gegenüber,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welche zu zwei Scharen von Dreiecken führen, die dem ursprünglichen Dreieck umschrieben und gleichwendig ähnlich sind und deren Nulldreiecke bezüglich die beiden Brocard'schen Punkte von ABC sind. Lässt man aber den Strahl AB nicht dem Strahle BC, sondern einem beliebigen Strahl BX und diesen einem beliebigen Strahl CY entsprechen, so gelangt man zu einer Schar dem Dreieck ABC umschriebener einander gleichwendig ähnlicher Dreiecke $\alpha\beta\gamma$.

Drehen sich die Seiten $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und $\alpha\beta$ eines solchen Dreiecks um A, B, C in demselben Sinne und um denselben Winkel λ, so entsteht, wenn λ alle möglichen Werte annimmt, eine Schar gleichwendig ähnlicher Dreiecke, die ABC in demselben Sinne umschrieben sind. Die Ermittelung der Eigenschaften einer solchen Schar führt zu zwei Arten der Umschreibung, die sich darin gleichen, dass ihre homologen Seiten durch dieselbe Ecke von ABC gehen und ihre homologen Winkel je demselben Winkel in ABC entsprechen; aber während die eine Umschreibung $\alpha\beta\gamma$ mit ABC gleichwendig ähnlich liegt, ist die andere $\alpha'\beta'\gamma'$ gegenwendig ähnlich. Zwei derartige Dreiecke werden Zwillingsdreiecke, ihre Nulldreiecke O und O′ Zwillingspunkte genannt, und zwar lassen sich sechs Paare von Zwillingsdreiecken um ABC beschreiben. Beachtet man nun, dass O im allgemeinen drei Lagen annehmen kann, und zwar a) innerhalb des Dreiecks ABC, b) ausserhalb des Dreiecks ABC, jedoch innerhalb eines der drei Innenwinkel; c) ausserhalb des Dreiecks ABC und innerhalb des Scheitelwinkels von einem der drei Innenwinkel, so findet man, dass bei den Lagen a) und c) von O $\alpha\beta\gamma$ gleichwendig ABC, bei der Lage b) gegenwendig ABC ist. Umgekehrt lässt sich auch aus den Winkeln des zu umschreibenden Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und ihrer Zuordnung zu denen des Dreiecks ABC die Lage der Nulldreiecke O und O′ bestimmen. Das Nulldreieck O liegt innerhalb ABC, wenn jedes Paar entsprechender Winkel kleiner als zwei Rechte ist; O fällt in eine Ecke von ABC, wenn der Winkel an ihr seinen entsprechenden Winkel in $\alpha\beta\gamma$ zu zwei Rechten ergänzt; O fällt in den Scheitelraum eines Innenwinkels, wenn dieser mit seinem entsprechenden grösser als zwei Rechte ist. Das Nulldreieck O′ fällt ausserhalb ABC, aber innerhalb desjenigen Innenwinkels, der allein grösser oder allein kleiner ist als der ihm entsprechende in $\alpha'\beta'\gamma'$; O′ fällt in eine Ecke von ABC, wenn der Winkel an derselben seinem entsprechenden in $\alpha'\beta'\gamma'$ gleich ist, dagegen in eine Seite, wenn der ihrem Gegenwinkel entsprechende Winkel des Dreiecks $\alpha'\beta'\gamma'$ Null ist.

Sind $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ die Maximumdreiecke zweier Zwillingsscharen, von denen ersteres gleichwendig, letzteres gegenwendig ABC ist, so ist $\alpha\beta\gamma + \alpha'\beta'\gamma' = 4\,\mathrm{ABC}$, wovon der Specialfall, dass jedes Dreieck $\alpha\beta\gamma$ gleich dem Vierfachen seines Mittendreiecks ABC ist, bekannt ist. In diesem Falle ist $\alpha'\beta'\gamma'$ ein Punkt. Bestimmt man einzeln den Inhalt der Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$, so ergiebt sich $\alpha\beta\gamma = \mathrm{ABC}\,\{2 + \mathrm{M}\}$; $\alpha'\beta'\gamma = \mathrm{ABC}\,\{2 - \mathrm{M}\}$, wo $\mathrm{M} = \cot\mathrm{A}\,(\cot\beta + \cot\gamma) + \cot\mathrm{B}\,(\cot\gamma + \cot\alpha) + \cot\mathrm{C}\,(\cot\alpha + \cot\beta)$ ist. Der Herr Verfasser bestimmt noch die Summe von gewissen Maximumdreiecken, welche zu mehreren merkwürdigen Sätzen führen und wendet sich hierauf zu der Entwickelung weiterer Eigenschaften der Zwillingspunkte O und O′. O und O′ liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel ABCH, deren Durchmesser OO′ durch den Feuerbach'schen Kreis für ABC halbiert wird und deren Asymptoten den Halbierungslinien der Winkel OAO′, OBO′, OCO′ resp. deren Nebenwinkel parallel sind.

Sind O und P zwei Winkelgegenpunkte innerhalb des Dreieks ABC und $\angle\,\mathrm{OAB} = \mathrm{PAC} = \alpha'$; $\angle\,\mathrm{OAC} = \mathrm{PAB} = \alpha''$ u. s. w., so sind O und P definiert durch $\dfrac{\sin\alpha'\,\sin\beta'\,\sin\gamma'}{\sin\alpha''\,\sin\beta''\,\sin\gamma''} = 1$ und aus dieser Gleichung lassen sich zwei Gruppen von je drei Dreiecken ABC, $\alpha\beta\gamma$, abc und $\mathrm{A_1B_1C_1}$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und $\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1$ erzeugen, in welchen je drei entsprechende Winkel der Dreiecke aus der ersten Gruppe gleich den Winkeln aus der zweiten Gruppe sind, z. B. $A = A_1$, $\alpha = B_1$, $\mathfrak{a} = C_1$ u. s. w. Entsprechen also die Winkel eines Dreiecks denen eines anderen und denen eines dritten in bestimmter Zuordnung und beträgt jedes Tripel entsprechender Winkel zwei Rechte, so existiert in jedem Dreieck ein Paar Winkelgegenpunkte, deren Eckstrahlen in allen drei Dreiecken dieselben sechs Teilwinkel α', α'', $\cdots$ erzeugen. Die drei Tripel entsprechender Winkel dieser Dreiecke liefern drei neue Dreiecke, in denen ebenfalls je ein Paar Winkelgegenpunkte existiert, deren Eckstrahlen dieselben Teilwinkel, wie in den drei ersten Dreiecken erzeugen. Mit Hülfe dieser Sätze gelangt man dadurch, dass man in dem Dreieck ABC den Punkt O, darauf seinen Winkelgegenpunkt P fixiert, zu einer ganzen Anzahl von Sätzen, welche in den beiden Programmabhandlungen zum Teil auf andere Weise gefunden sind.

D. Die Gerade der 12 harmonischen Punktreihen und ihre Gegenbilder, die Ellipse und der Kreis der 12 harmonischen Punktsysteme.

Am Schlusse der Abhandlung finden wir eine Anwendung der gefundenen allgemeinen Resultate auf die 48 ausgezeichneten Punkte des Dreiecks ABC, welche sich aus der Betrachtung der möglichen Umschreibungen zweier Dreiecke um ABC ergeben. Von diesen Dreiecken ist das eine ABC, das andere einem Dreieck ähnlich, welches sich aus den Mittellinien von ABC bilden lässt. Diese 48 Punkte liegen zu je zwölf auf vier Linien und bilden auf denselben harmonische Punktsysteme; nämlich 1) auf der Geraden, auf welcher die Seiten von ABC von den in ihren Gegenecken an den Kreis ABC gelegten Tangenten geschnitten werden; 2) auf dem Kreise, dessen einer Durchmesser den Mittelpunkt M des Kreises um ABC mit dem Winkelgegenpunkte K vom Schwerpunkte S verbindet; 3) auf der Ellipse, welche dem Dreieck ABC umschrieben ist und den Schwerpunkt S als Mittelpunkt hat; 4) auf der Kurve C^4, deren Punkte die Winkelgegenpunkte des obigen Kreises sind.

Vor kurzem hat auch Herr Professor Fuhrmann in Königsberg i. Pr. in Grunert-Hoppe, Archiv für Mathematik und Physik, 2. Reihe Band VI. den Brocard'schen Winkel behandelt; und zwar hat er die Resultate auf elementar trigonometrischem Wege abgeleitet. Der erste Teil des Aufsatzes bezieht sich auf symmetrische Relationen zwischen den Winkeln des Dreiecks und dem Brocard'schen Winkel. Der zweite Teil giebt Längen und Grössen des Dreiecks, die sich durch diesen Winkel ausdrücken lassen und damit zusammenhängende Eigenschaften des Dreiecks.

Wenn auch die Geometrie des nach M. Henri Brocard, jetzt Chef de Bataillon du Génie in Grenoble, genannten Brocard'schen Kreises durch die vorstehenden Mitteilungen, sowie durch diejenigen der Programme von Ostern 1886 und 1887 nicht erschöpft ist, so will ich doch hier abbrechen, da ich hoffentlich meinen im Anfange der Programmabhandlung von 1886 ausgesprochenen Zweck erreicht habe, durch eine übersichtliche Zusammenstellung der hauptsächlichsten Sätze weiteren Kreisen Gelegenheit gegeben zu haben, die neueren Untersuchungen über das Dreieck näher kennen zu lernen.

Stettin, im März 1888.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf