Über die

# Anwendung der Doppel-Integrale

# in der Funktionen-Theorie.

Von

Oberlehrer Walther Koch.

Sorau, 1904.

Programm No. 96.

Druck von Rauert & Pittius, G. m. b. H.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

950
11 (1904)

96 b.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

# Über die Anwendung der Doppel-Integrale in der Funktionen-Theorie.

Will man ein Doppel-Integral berechnen für ein Gebiet, innerhalb dessen eine Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen eindeutig und stetig ist, so sucht man es auf zwei successive einfache Integrationen zurückzuführen unter Beachtung der für die beiden Variablen gültigen Grenzen. Ist das Gebiet z. B. ein Kreis mit dem Radius $r$ um den Coordinatenanfang, dessen Gleichung also ist

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

so ist

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

über diesen Kreis erstreckt, gleich

$$\int_{x=-r}^{+r} dx \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dafs $f(x, y)$ im ganzen Integrationsgebiete eindeutig, endlich und stetig ist. Diese Voraussetzung soll jetzt fortfallen, und es soll untersucht werden, wie sich ein Doppelintegral verhält in Punkten, die für $f(x, y)$ singuläre Punkte sind. Es möge sein $x = a$ ein ausserwesentlich singulärer Punkt $p^{\text{ter}}$, $y = b$ ein solcher $q^{\text{ter}}$ Ordnung. Dann lässt sich bekanntlich $f(x, y)$ in Form einer Reihe darstellen, die folgende Gestalt hat:

$$f(x, y) = \left(\frac{c_p}{(x-a)^p} + \frac{c_{p-1}}{(x-a)^{p-1}} + \ldots + \frac{c_1}{x-a} + c_0\right) + \left(\frac{d_q}{(y-b)^q} + \ldots + \frac{d_1}{y-b} + d_0\right) + P(x-a, y-b).$$

Hierbei bedeutet $P(x-a, y-b)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ und $y-b$ fortschreitende Potenzreihe. Führt man die Integrationen nach $x$ und $y$ gleichzeitig aus, so erhält man zunächst das unbestimmte Integral:

$$\iint f(x, y)\, dx\, dy = \left(\frac{c_p}{-p+1}(x-a)^{-p+1} + \frac{c_{p-1}}{-p+2}(x-a)^{-p+2} + \ldots + \frac{c_2}{-1}(x-a)^{-1}\right.$$
$$\left. + c_1 \log(x-a) + c_0(x-a) + \ldots\ldots\right) + \left(\frac{d_q}{-q+1}(y-b)^{-q+1} + \frac{d_{q-1}}{-q+2}(y-b)^{-q+2}\right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{d_2}{-1}(y-b)^{-1} + d_q \log(y-b) + d_0(y-b)\, x \ldots\right) + P_1(x-a, y-b).$$

Hierbei bedeutet $P_1(x-a, y-b)$ das Doppelintegral

$$\iint P(x-a, y-b).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In diesen Ausdruck hat man zuerst die obere, sodann die untere Grenze der Variablen einzusetzen, und so das bestimmte Integral zu ermitteln.

Man ersieht aus dieser Entwicklung unmittelbar das folgende Resultat:

Die Punkte $x = a$, $y = b$, welche für den Integranden aufserwesentlich singuläre Punkte $p^{\text{ter}}$, bezw. $q^{\text{ter}}$ Ordnung sind, sind auch für das unbestimmte Doppelintegral aufserwesentlich singuläre Punkte von der Ordnung $p - 1$, bezw. $q - 1$. Sind die Residuen $c_1$ und $d_1$ des Integranden in Bezug auf die Stellen $x = a$ und $y = b$ nicht gleich null, so sind diese Punkte aufserdem auch kritische Punkte.

Denn läfst man in $\log(x - a)$ die Variable einen Umlauf machen um den Punkt $a$, so ändert sich der Wert des Logarithmus um ganze Vielfache von $2\pi i$. Für das Integral kommt alsdann eine neue Singularität der Punkte $x = a$, $y = b$ hinzu, nämlich die wesentliche Singularität, welche darin besteht, dafs das Integral unendlich viele verschiedene Werte erhält, wenn die Variablen Umläufe um diese Punkte ausführen.

In dem Falle, wo die Coefficienten $c_1$ und $d_1$ der Reihenentwicklung gleich 0 sind, fällt die wesentliche Singularität fort, und die Punkte $x = a$, $y = b$ sind rein aufserwesentlich singuläre Punkte, deren Ordnung um 1 kleiner ist als im Integranden. In diesem letzteren Falle ist der Wert des Integrales eindeutig. In dem ersten Falle, wo Logarithmen bei der gliedweisen Integration der Potenzreihe erscheinen, wird das Integral ebenfalls nicht unbestimmt, nur unterscheiden sich seine einzelnen Werte um ganze Vielfache von $2\pi i$.

Letzteres tritt auch ein in dem Fall, wo die Kurve, welche das Integrationsgebiet begrenzt, direkt durch einen singulären Punkt hindurchgeht. Ist nämlich, abgesehen von diesem singulären Punkte, die Funktion im übrigen Gebiete endlich, eindeutig und stetig, so kann man über einen unendlich kleinen Kreis hin integrieren, welcher den auf der Begrenzungscurve liegenden singulären Punkt umschliefst. Das Integral von

$$\frac{1}{x - a}$$

wird alsdann gleich $2\pi i$, und man sieht, dafs die Lage des singulären Punktes direkt auf der Begrenzungscurve nur bewirkt, dafs die Werte des Integrales sich durch ganze Vielfache von $2\pi i$ unterscheiden, im übrigen aber völlig bestimmt sind. Hiermit ist das Verhalten der Doppelintegrale in der Umgebung solcher Stellen, welche für den Integranden aufserwesentlich singulär sind, vollständig betrachtet.

Ehe zu dem Falle übergegangen wird, in dem der Integrand kritische Stellen irgend einer Ordnung hat, möge ein kleines Beispiel Platz finden. Der Integrand sei

$$\frac{1}{(x-4)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1}.$$

Es soll gebildet werden

$$\iint \left\{ \frac{1}{(x-4)^2} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-1} \right\} dx\, dy$$

über einen Kreis um den Coordinatenanfang vom Halbmesser $r = 3$. Die Integration nach $x$ ergibt

$$-\frac{1}{x-4} + \log(x-2) + \frac{x}{y-1}.$$

Man sieht bei dieser Gelegenheit, dafs die oben benutzten Coefficienten $c$ und $d$ nur konstant sind inbezug auf die Variable, für welche nicht integriert wird (in unserem Beispiele $y$), dafs sie die andere Variable dagegen enthalten können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jetzt hat man nach $y$ zu integrieren; dieses ergibt:

$$-\frac{y}{x-4} + y \cdot \log(x-2) + x \cdot \log(y-1).$$

Da die Integration über das vom Kreise $x^2 + y^2 = 9$ begrenzte Gebiet ausgedehnt werden soll, hat man zu setzen

$$y = \pm \sqrt{9 - x^2}.$$

Zuerst ist das Zeichen $+$, dann das Zeichen $-$ zu gebrauchen, und der letztere Wert von dem ersten zu subtrahieren. Man erhält:

$$-\frac{2\sqrt{9-x^2}}{x-4} + 2\sqrt{9-x^2}\log(x-2) + x \cdot \log\left(\sqrt{9-x^2} - 1\right) - x \cdot \log\left(-\sqrt{9-x^2} - 1\right).$$

Endlich ist in diesem Ausdruck erst $x = +3$, dann $x = -3$ zu setzen, und wieder in der angegebenen Art zu subtrahieren. Man erhält alsdann, da alle Ausdrücke, die $\sqrt{9-x^2}$ als Faktor haben, verschwinden: $3\log(-1) - 3\log(-1) - 3\log(-1) + 3\log(-1)$. Die einzelnen Werte der Logarithmen unterscheiden sich um beliebige ganze Vielfache von $2\pi i$. Der vorstehende Ausdruck wird also gleich $2k\pi i$, wo $k$ eine beliebige ganze Zahl ist, die Null mit einbegriffen. Dieses ist also der Wert unseres bestimmten Doppelintegrales, und man sieht in der Tat, der entwickelten Theorie entsprechend, dafs der Wert vollständig bestimmt ist bis auf ganze Vielfache von $2\pi i$.

Es soll jetzt übergegangen werden zu dem Fall, dafs der Integrandus kritische Punkte enthält, und zwar speciell algebraisch kritische Punkte. Ein algebraisch kritischer Punkt $n^{\text{ter}}$ Ordnung kennzeichnet sich in der angegebenen Reihenentwicklung durch das Auftreten der Potenz $(x-a)^{\frac{1}{n}}$. Bei Umläufen um einen solchen singulären Punkt erlangt die Funktion $n$ von einander verschiedene Werte. Hat sie diese $n$ Werte durchlaufen, so kehrt sie zu ihrem Anfangswerte zurück. Es möge also in der Reihenentwicklung vorkommen ein Glied der Form $c\,(x-a)^{\frac{1}{n}}$. Es ist

$$\int c \cdot (x-a)^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{cn}{1+n}\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}}.$$

Man sieht hieraus, dafs ein Punkt, welcher für den Integranden ein kritischer Punkt $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist, auch für das Integral ein kritischer Punkt ist, und zwar ebenfalls von der Ordnung $n$. Allerdings kann man bei willkürlicher Hinzufügung einer Integrationsconstanten eine Funktion von $y$ hinzufügen, wenn man nach $x$ integriert, und umgekehrt eine solche von $x$, wenn man nach $y$ integriert. Aber dieses hat keinen Einflufs, da bei der für die Berechnung des bestimmten Integrales nötigen Subtraktion diese Glieder fortfallen. Man hat also das folgende Resultat erhalten:

> Sind die Punkte $x = a$, $y = b$ kritische Punkte irgend einer Ordnung für den Integranden, so sind diese beiden Punkte auch kritische Punkte derselben Ordnung für das Doppelintegral.

Endlich ist noch der Fall zu erledigen, dafs ein Punkt $x = a$, $y = b$ für den Integranden sowohl aufserwesentlich singulär wie kritisch ist. Dieser Fall würde sich in der Reihenentwicklung kennzeichnen durch das Auftreten der Potenzen

$$\frac{1}{(x-a)^{\frac{1}{n}}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(y-b)^{\frac{1}{q}}},$$

wo $n$ und $q$ positive ganze Zahlen sind. Es ist

$$\int \frac{dx}{(x-a)^{\frac{1}{n}}} = \frac{n}{n-1}\sqrt[n]{(x-a)^{n-1}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dasselbe gilt für den Punkt $y = b$. Hieraus ersieht man das Resultat: Ist für den Integrandus der Punkt $x = a$, $y = b$ ein aufserwesentlich singulärer und kritischer Punkt gleichzeitig, so ist dieser Punkt für das Doppelintegral kein aufserwesentlich singulärer, vielmehr bleibt dasselbe in diesem Punkte endlich. Dagegen ist er für das Doppelintegral ein kritischer Punkt, und zwar von derselben Ordnung wie für den Integranden.

Die Zahlen $n$ und $q$ dürfen nicht negativ sein, da sonst der Punkt nicht für alle Integranden, wie vorausgesetzt, ein aufserwesentlich singulärer wäre. Hiermit ist die Bedeutung als singulären Punkte des Integranden für das Doppelintegral völlig erschöpft.

Bekanntlich gibt der Satz von Green ein Mittel an die Hand, um ein über eine Fläche erstrecktes Doppelintegral zurückzuführen auf ein über eine Kurve erstrecktes einfaches Integral. Umgekehrt kann man nur solche einfache Integrale als Doppelintegrale darstellen, welche erstreckt werden über geschlossene Kurven. Hat man z. B. ein über eine grade Linie zu erstreckendes Integral von der Form

$$\int f(x)\, y^n\, dx,$$

wo $y$ eine Funktion von $x$ ist, so ist dieses keineswegs gleich dem Doppelintegral

$$\int\int f(x)\, y^n\, dx\, dy,$$

ja sogar nicht einmal immer dann, wenn die zwischen $x$ und $y$ bestehende Gleichung eine geschlossene Kurve darstellt. Denn wäre es so, so würde man haben für beliebige Grenzen von $x$ und die entsprechenden von $y$:

$$\int\int f(x)\, y^n\, dx\, dy = \int dx\, f(x) \int y^n\, dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} \int f(x)\, dx.$$

Wäre nun $y$ algebraische Funktion von $x$, und gleichzeitig $\int f(x)\, y^n\, dx$ auch, so müfste $\int f(x)\, dx$ ebenfalls algebraisch sein, d. h. $f(x)$ dürfte in dem speziellen Fall, dafs es rational in $x$ wäre, keine einfache, sondern nur mehrfache Wurzeln haben, was bekanntlich durchaus nicht der Fall zu sein braucht. Integrale dieser Form treten auf bei einer Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = a_0 + a_1\, y + a_2\, y^2 + \ldots + a_n\, y^n, \text{ (1)}$$

wo die $a$ rational in $x$ sind.

Man darf aber, wie oben gezeigt, auf der rechten Seite derselben nicht die doppelte, sondern nur die einfache Integration anwenden.

Diese Differentialgleichungen bieten ein besonderes Interesse in dem Falle dar, wo sie algebraische Integrale haben. Bleiben wir einmal bei dem Interesse, welches dieser Fall bietet, einen Augenblick dabei stehen. Ist $n = 2$, so ist die Frage sehr einfach zu erledigen. Man kann alsdann bekanntlich durch eine einfache Substitution die gegebene Differentialgleichung reduzieren auf eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, und die Frage der algebraischen Integrierbarkeit einer solchen ist längst völlig erledigt. Ist aber $n > 2$, so ist diese Substitution nicht mehr möglich. Aldann kann man die Frage der algebraischen Integrierbarkeit auf folgende Weise er-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ledigen: Bekanntlich läfst sich, wenn man eine algebraische Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades in $y$ zwischen $x$ und $y$ hat, $\frac{dy}{dx}$ darstellen als ganze Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades in $y$, deren Coefficienten rationale Funktionen von $x$ sind. Diese Darstellung ist vollständig eindeutig. Man kann also, wenn $f(x, y)$ eine gegebene algebraische Gleichung zwischen $x$ und $y$ ist, eine und nur eine Differentialgleichung der Form (1) aufstellen, welche dieses durch $f(x, y) = 0$ gegebene algebraische Integral hat. Soll die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = A_0 + A_1 y + \ldots + A_p y^p \quad (p \geqq n-1) \quad (2)$$

dasselbe algebraische Integral haben, so mufs $f(x, y)$, wenn man es als irreductibel voraussetzt, in

$$\left(A_0 + A_1 y + \ldots + A_p y^p\right) - \left(a_0 + a_1 y + \ldots + a_{n-1} y^{n-1}\right)$$

enthalten sein. Man bekommt also diejenigen Differentialgleichungen der Form (1), welche höher als $n-1^{\text{ten}}$ Grades in $y$ sind und ein algebraisches Integral haben, indem man Vielfache von $f(x, y)$ zu der rechten Seite von (2) hinzufügt.

Es ist eine wichtige Tatsache, dafs das Produkt zweier einfacher Integrale stets als ein Doppelintegral dargestellt werden kann:

$$\int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_\alpha^\beta f(y)\, dy = \iint f(x, y)\, dx\, dy,$$

wo das Doppelintegral zu erstrecken ist über das Rechteck zwischen den Grenzen $x = a$ bis $x = b$, $y = \alpha$ bis $y = \beta$. Dieser Satz gilt auch für die Integrale komplexer Variablen, nur ist das Doppelintegral dann nicht über ein Rechteck zu erstrecken, sondern über eine Figur, welche begrenzt ist von vier Kurvenstücken. Allerdings läfst sich der angegebene Satz nur dann auf Integrale komplexer Variablen verallgemeinern, wenn die einfachen Integrale ihrem Werte nach unabhängig vom Integrationswege sind, was an das Bestehen einfacher partieller Differentialgleichungen geknüpft ist. Für den letzten Satz möge ein Beispiel gegeben werden. Es ist:

$$\int x^n \arcsin. x\, dx = x \cdot \arcsin. x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Das letzte Integral kann man leicht ohne jede Substitution berechnen. Es ist

$$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{d x^2}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Jetzt sei

$$x^2 = z^2 + 1:$$

$$\int \frac{z\, dz}{z} = z, \text{ also } \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2}, \text{ mithin } \int \arcsin. x\, dx = x \arcsin. x - \sqrt{1 - x^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Punkt $x = 1$ ist ein kritischer algebraischer Punkt zweiter Ordnung: Macht die Variable einen Umlauf um ihn, so wechselt die Wurzel ihr Zeichen. Es ist weiterhin

$$\int_a^b \arcsin.\, x \cdot dx \cdot \int_\alpha^\beta \arcsin.\, y \cdot dy = \iint \arcsin.\, x \cdot \arcsin.\, y\, dx\, dy,$$

folglich

$$\iint \arcsin.\, x \cdot \arcsin.\, y\, dx\, dy = \left[ x \cdot \arcsin.\, x - \sqrt{1 - x^2} \right]_a^b \cdot \left[ y \cdot \arcsin.\, y - \sqrt{1 - y^2} \right]_\alpha^\beta.$$

Dieses Beispiel zeigt folgende Tatsache:

Hat man zu berechnen ein Doppelintegral $\iint f(x)\, f(y)\, dx\, dy$, und ist ein Punkt der Ebene ein kritischer algebraischer Punkt für $\int f(x)\, dx$, so kann es trotzdem gestattet sein, die Begrenzung des Gebietes für das Doppelintegral durch diesen Punkt hindurchzuführen, ohne dadurch den Wert des Doppelintegrales unbestimmt oder unendlich zu machen.

In unserem Fall kann man die Begrenzung führen durch den Punkt $x = +1$ und $x = -1$, welche beide kritische algebraische Punkte für $\int \arcsin.\, x\, dx$ sind.

Es wird

$$\iint \arcsin.\, x \cdot \arcsin.\, y\, dx\, dy = 4\pi^2,$$

wo das Doppelintegral über das Rechteck zu erstrecken ist, dessen Eckpunkte sind:

$$x_1 = -1,\ y_1 = -1;\ x_2 = +1,\ y_2 = -1;\ x_3 = +1,\ y_3 = +1;\ x_4 = -1,\ y_4 = +1.$$

Es ist vorhin hervorgehoben, dafs Doppelintegrale auch für komplexe Variable auf Produkte von einfachen Integralen zurückführbar sind. Wir wollen jetzt einmal ein Integral einer komplexen Variablen, dessen Integrand eine cyclometrische Funktion ist, betrachten:

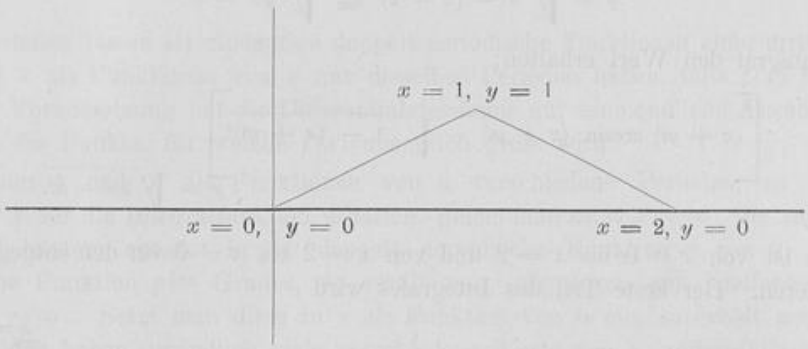
$$\int \arcsin.\, z\, dz = z \cdot \arcsin.\, z - \sqrt{1 - z^2}.$$

Ist dieses Integral für eine komplexe Variable $z$ unabhängig vom Integrationswege? Man könnte diese Frage entscheiden, indem man $z = x + iy$ einsetzt, den reellen Teil vom komplexen sondert und alsdann zusieht, ob die vorhin bereits erwähnten partiellen Differentialgleichungen befriedigt sind. Man kann diese Frage aber im vorliegenden Falle, wo das Integral in expliciter Form dargestellt ist, einfacher beantworten. Es steht zunächst fest, dafs das Integral von dem Integrationswege unabhängig ist, falls derselbe nicht durch den Punkt $z = 1$ geht und auch nicht um denselben herum. Betrachten wir daher zunächst den Fall, dafs der Weg durch den Punkt $z = x + iy = 1$ geht. Man hat für diesen Fall $x = 1$, $y = 0$; es geht durch diesen Punkt die Abscissenaxe $x =$ constans. Nehmen wir beispielsweise das Integral zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 2$, so erhält es den Wert:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left[(x+yi)\,\text{arcsin.}\,(x+yi) - \sqrt{1-(x+yi)^2}\right]_{x=2,\ y=0} - \left[(x+yi)\,\text{arcsin.}\,(x+yi) - \sqrt{1-(x+yi)^2}\right]_{x=0,\ y=0} = 2\cdot\text{arcsin.}\,2 - i\sqrt{3} + 1.$$

Es soll jetzt der Integrationsweg so gelegt werden, dafs der kritische Punkt vermieden wird. Es soll integriert werden längs der Linie $x-y=0$ von $x=0$, $y=0$ bis $x=1$, $y=1$, dann vom Punkte $x=1$, $y=1$ bis $x=2$, $y=0$ längs der Linie $x+y=2$, so dafs der Integrationsweg diese Form hat:




Für den ersten Teil des Integrationsweges ist $x=y$, also ist in dem Integranden für $x$ zu setzen $y$, und dann der Wert des Integrales zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ zu nehmen. Man erhält:

$$\left\{x\,(1+i)\,\text{arcsin.}\left[x\,(1+i)\right] - \sqrt{1-x^2\,(1+i)^2}\right\}_{x=0}^{x=1} = (1+i)\,\text{arcsin.}\,(1+i) - i\sqrt{2i+1} - 1.$$

Für den zweiten Teil des Integrationsweges ($y=x-2$) erhält man ebenso:

$$\left[x + i\,(x-2)\,\text{arcsin.}\left[x+i\,(x-2)\right] - \sqrt{1-x^2-2i\,x\,(x-2)+(x-2)^2}\right]_{x=1}^{x=2}$$

$$= 2 + \text{arcsin.}\,2 - i\sqrt{3} - 1 + i\cdot\text{arcsin.}\,(1-i) + \sqrt{2i+1}.$$

Beide Teile des Integrales zusammenaddiert, ergibt für das Gesamtintegral:

$$(1+i)\,\text{arcsin.}\,(1+i) - i\sqrt{2i+1} + \text{arcsin.}\,2 - i\sqrt{3} + i\cdot\text{arcsin.}\,(1-i) + \sqrt{2i+1}$$

$$= (1+i)\,\text{arcsin.}\,(1+i) + \sqrt{2i+1}\,(1-i) + i\cdot\text{arcsin.}\,(1-i) + \text{arcsin.}\,2 - i\sqrt{3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man hat hiermit das folgende Resultat gefunden:

Der Punkt $z = x + iy = 1$ ist für $\int \text{arcsin.}\, z\, dz$ ein kritischer Punkt, und zwar nicht in der Weise, dafs, was aus der expliciten Form selbstverständlich ist, das Integral sich ändert bei einem Umlauf der Variablen um diesen Punkt, sondern auch in der Weise, dafs der Wert des Integrales ein anderer wird, wenn man das Integral durch ihn hindurch führt, als wenn man es an ihm vorbei führt.

Es möge jetzt das Integral gebildet werden für einen geschlossenen Integrationsweg, z. B. für den Kreis, dessen Halbmesser $r = 1$, dessen Mittelpunkt der Punkt $x = 1$, $y = 0$ ist. Dieser Kreis hat die Gleichung

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Hieraus folgt

$$y = \sqrt{1 - (x - 1)^2} = \sqrt{2x - x^2},$$

also wird das Integral den Wert erhalten:

$$\left[(x + yi)\ \text{arcsin.}\ (x + yi) - \sqrt{1 - (x + yi)^2}\right]_{y = \sqrt{2x - x^2}}.$$

Alsdann ist von $x = 0$ bis $x = 2$ und von $x = 2$ bis $x = 0$ für den entgegengesetzten Wert von $y$ zu integrieren. Der erste Teil des Integrales wird

$$\left[x + i\sqrt{2x - x^2} \cdot \text{arcsin.}\left(x + i\sqrt{2x - x^2}\right) - \sqrt{1 - \left(x + i\sqrt{2x - x^2}\right)^2}\right]_{x=0}^{x=2} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Der zweite Teil wird

$$\left[x - i\sqrt{2x - x^2} \cdot \text{arcsin.}\left(x - i\sqrt{2x - x^2}\right) - \sqrt{1 - \left(x - i\sqrt{2x - x^2}\right)^2}\right]_{x=2}^{x=0} = -3 + i\sqrt{3}.$$

das Gesamtintegral also $= -2$.

Es sind oben die singulären Punkte des Doppelintegrales betrachtet worden, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ eine gegebene Funktion der beiden unabhängigen Variablen $x$ und $y$ bedeutet. Durch die Beschaffenheit dieser singulären Punkte wird bekanntlich der Verlauf des Integrals in der ganzen Ebene charakterisiert. Letztere wird durch sogenannte Verzweigungsschnitte zerlegt in verschiedene Blätter, welche längs der Verzweigungsschnitte an einander geheftet gedacht werden, und es entsteht so eine Riemannsche Fläche, auf welcher das Integral alsdann eindeutig bestimmt ist. Manche Fragen über den Verlauf der Integrale können der Natur der Sache nach nur für gewöhnliche, nicht für partielle Differentialgleichungen beantwortet werden, insonderheit die Fragen, bei denen es sich handelt um das Geschlecht der das Integral darstellenden Kurve.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man hat hiermit das f

Der Punkt $z = x +$ itischer Punkt, und zwar nicht in der Weise, dafs, was aus de st, das Integral sich ändert bei einem Umlauf der Variablen u der Weise, dafs der Wert des Integrales ein anderer wird, we rch führt, als wenn man es an ihm vorbei führt.

Es möge jetzt das Integ senen Integrationsweg, z. B. für den Kreis, dessen Halbmesser $r$ $x = 1$, $y = 0$ ist. Dieser Kreis hat die Gleichung

Hieraus folgt

also wird das Integral den Wer

$$\Big[(x + yi) \text{ arc} \qquad \sqrt{2x - x^2}.$$

Alsdann ist von $x = 0$ für den entgegengesetzten Wert von $y$ zu integrieren. Der erste

$$\Big[x + i\sqrt{2x - x^2} \cdot \arcsin.\Big(x + \qquad \sqrt{2x - x^2}\Big)^2\Big]_{x=0}^{x=2} = 1 - i\sqrt{3}.$$

Der zweite Teil wird

$$\Big[x - i\sqrt{2x - x^2} \cdot \arcsin.\Big(x - \qquad \sqrt{2x - x^2}\Big)^2\Big]_{x=2}^{x=0} = -3 + i\sqrt{3}.$$

das Gesamtintegral also $= -2$.

Es sind oben die singuläre et worden, d. h. die singulären Punkte der Differentialgleichung

wo $f(x, y)$ eine gegebene Funkti n $x$ und $y$ bedeutet. Durch die Beschaffenheit dieser singulären f des Integrals in der ganzen Ebene charakterisiert. Letztere w hnitte zerlegt in verschiedene Blätter, welche längs der Verzweig acht werden, und es entsteht so eine Riemannsche Fläche, auf utig bestimmt ist. Manche Fragen über den Verlauf der Integ h nur für gewöhnliche, nicht für partielle Differentialgleichungen beantwortet werden, insonderheit die Fragen, bei denen es sich handelt um das Geschlecht der das Integral darstellenden Kurve.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es möge ein besonders interessanter Fall einer solchen einfachen gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung betrachtet werden; es sollen sich nämlich die abhängige und die unabhängige Variable darstellen lassen als eindeutige doppelt-periodische Funktionen. Die Möglichkeit dieser Darstellung hängt durchaus ab von der Beschaffenheit der singulären Punkte. Man könnte glauben, dafs, wenn man z. B. das Integral $y = f(x)$ ausgerechnet hätte, alsdann ohne weiteres für $x$ eine beliebige doppelt-periodische Funktion eingesetzt werden könnte, und dafs dann $y$ wieder doppelt-periodisch werden müfste.

Aber dieses wäre irrtümlich. Denn wollte man z. B. in die Funktion $y = \arcsin. x$ für $x$ setzen die einfach-periodische Funktion $\sin. u$, so würde man erhalten $y = u$. Dieses wäre aber keine periodische Funktion von $u$.

Wenn in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

sich $y$ und $x$ darstellen lassen als eindeutige doppelt-periodische Funktionen einer dritten Variablen $u$, so könnten $y$ und $x$ als Funktionen von $u$ nur dieselben Perioden haben, falls $f(x)$ rational in $x$ ist. Denn unter dieser Voraussetzung hat die Differentialgleichung nur eine endliche Anzahl von singulären Punkten, nämlich die Punkte, für welche $f(x)$ unendlich grofs wird.

Hätten nun $y$ und $x$ als Funktionen von $u$ verschiedene Perioden, so würde man die singulären Stellen $x$ für die Integralfunktion erhalten, indem man setzt $x = \infty$, die zugehörigen Werte $u$ berechnet, und letztere einsetzt in die doppelt-periodische Funktion $y$ von $u$. Ist nun $x$ eine doppelt-periodische Funktion $p^{\text{ten}}$ Grades, so erhält man, abgesehen von Vielfachen der Perioden, $p$ Werte $u$ für $x = \infty$. Setzt man diese in $y$ als Funktion von $u$ ein, so erhält man, falls $y$ und $x$ verschiedene Perioden haben, unendlich viele verschiedene Werte von $y$, andernfalls nur eine endliche Anzahl verschiedener Werte. Also sieht man, dafs in dem Falle, wo $f(x)$ rational in $x$ ist, $y$ und $x$ nicht verschiedene Perioden haben dürfen. Mithin müssen $y$ und $x$ durch eine algebraische Gleichung mit einander verbunden sein; es dürfen somit, wenn man $y$ sich als explicite Funktion von $x$ dargestellt denkt, auch keine Logarithmen auftreten. Mithin müssen nach bekannten Sätzen aus der Theorie der Partialbruchzerlegung die Stellen, für die $f(x)$ unendlich wird, nur vielfache Stellen sein. Es müssen also die Residuen für diese Unendlichkeitsstellen verschwinden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf