Beiträge

zur

Begründung der Fresnelschen Hypothese der doppelten Cirkularpolarisation im Bergkrystall

von

A. Piper.

Wissenschaftliche Beilage

zum

Programm der Grossherzoglichen Realschule I. O. zu Schwerin

Ostern 1884.

Schwerin.

G. Hilb's Buchdruckerei.

1884.

1884. Progr. No. 600.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In den Comptes rendus vom Jahre 1880 teilt der französische Physiker Gouy in zwei kurzen Abhandlungen mit, dass einige Erscheinungen auf dem Gebiet der Rotationspolarisation, welche bisher nur mit Hülfe der Fresnelschen Hypothese über die Drehung der Polarisationsebene im Bergkrystall erklärt werden konnten und deshalb für Stützen dieser Hypothese galten, sich auch allein aus den allgemeinen Prinzipien der Diffraktion ohne jegliche Hypothese ableiten lassen; es muss daher in diesen Fällen die Hypothese Fresnels als solche überflüssig erscheinen. Es soll nun in dieser Abhandlung auf Grund der Messungen von Biot, Broch, Stefan und v. Lang der Nachweis geliefert werden, dass die Fresnelsche Hypothese zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene des Lichts im Bergkrystall auch fernerhin in ihrer bisherigen Form beibehalten werden muss.

Im Jahre 1817 legte Biot der Akademie der Wissenschaften zu Paris eine Abhandlung [1]) vor, in welcher er seine Untersuchungen über das optische Verhalten des Bergkrystalls in linear polarisiertem Licht mittheilte. Das wichtige Resultat dieser Untersuchungen ist der Nachweis der Drehung der Polarisationsebene durch den Quarz, den Biot durch Ausführung folgenden Experimentes gab. Er liess homogenes durch einen Nicol linear polarisiertes Licht durch eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte fallen, welche er so eingestellt hatte, dass die Richtung des Lichtstrahls parallel der optischen Axe war. Hinter der Platte wurde ein zweiter Nicol aufgestellt. Bei gekreuzter Stellung der beiden Nicols ist dann bei andern einaxigen Krystallen die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel, bei dem Quarz muss man einen der beiden Nicols um eine Anzahl von Graden drehen, um die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel zu erhalten. Biot fand nun, dass dieser Winkel, um den der Nicol aus der gekreuzten Stellung gedreht werden muss, direkt proportional sei der Dicke der Quarzplatte. Es ergab sich ferner eine Abhängigkeit des Winkels von der Farbe des homogenen Lichts. Derselbe war am kleinsten, wenn rotes Licht, am grössten, wenn violettes Licht angewandt wurde. Bei einer Quarzplatte von 1 mm Dicke fand Biot folgende Winkel:

mittleres Rot	mittleres Orange	mittleres Gelb	mittleres Grün	mittleres Blau	mittleres Indigo	mittleres Violett
19°,0	21°,4	24°,0	27°,8	32°,3	36°,1	40°,8

Aus diesen Versuchen und Messungen geht hervor, dass die Polarisationsebene der in der Richtung der Axe durch den Bergkrystall hindurchtretenden Strahlen gedreht wird,

[1]) Biot, Comptes rendus II, pag. 41.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und zwar um ebensoviel Bogengrade, als man den Nicol aus der gekreuzten Stellung drehen muss, um vollständige Dunkelheit zu erzeugen. Dieser Winkel ist, wie Biot auf Grund seiner Messungen ausführte, nahezu proportional dem reciproken Quadrat der Wellenlänge des Lichtstrahls.

Eine theoretische Erklärung der durch Biots Untersuchungen nachgewiesenen Drehung der Polarisationsebene wurde von Fresnel gegeben. Im Jahre 1817 hatte derselbe vor Veröffentlichung der Untersuchungen Biots, welche erst im Jahre 1819 erfolgte, eine merkwürdige Modifikation des Lichts, die Cirkularpolarisation, entdeckt.[1]) Er hatte durch eine mathematische Untersuchung gezeigt, dass die in einer geraden Linie gelegenen Ätherteilchen durch zwei transversale Undulationen, welche gleiche Amplitude, Schwingungsdauer und Wellenlänge, aber einen Gangunterschied von $\frac{2n-1}{4}$ Wellenlängen haben und sich in zwei auf einander senkrechten Ebenen fortpflanzen, deren Durchschnitt die Punktreihe der Ätherteilchen ist, in Kreisen bewegt werden, deren Ebenen senkrecht stehen auf der Geraden und deren Mittelpunkte in dieser Geraden gelegen sind. In einem jeden beliebigen Zeitpunkte t liegen dann alle Ätherteilchen auf einer Spirale, deren Projection auf eine die Axe der Schraubenlinie senkrecht schneidende Ebene ein Kreis ist und deren Gänge die Länge einer Undulation haben. Einen Lichtstrahl, welcher durch solche Schwingungen der Ätherteilchen entsteht, bezeichnet Fresnel als cirkular polarisierten Lichtstrahl, und zwar nennt er denselben rechts oder links circular polarisiert, je nachdem die Spirale rechts oder links gewunden ist. Zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene eines Lichtstrahls, welcher den Bergkrystall in der Richtung der optischen Axe durchdringt, nahm Fresnel nun an, dass der Lichtstrahl bei dem Eintritt in den Quarz in zwei cirkular polarisierte Strahlen von gleicher Amplitude, aber entgegengesetzter Drehung zerlegt werde und dass diese beiden Strahlen sich mit ungleicher Geschwindigkeit durch den Quarz fortpflanzen. Nach dem Austritt aus dem Quarz setzen sich die beiden Schwingungen durch Interferenz wieder zu einem linear polarisierten Lichtstrahl zusammen, dessen Ebene aber gegen die Ebene des in den Quarz eintretenden Lichtstrahls gedreht erscheint. Eine mathematische Ableitung dieses Resultats hat Fresnel in seinen Werken nicht mitgeteilt, es möge daher hier folgende Ableitung Platz finden.

Die Schwingungen eines linear polarisierten Lichtstrahls seien dargestellt durch die Gleichung

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = a \sin \chi$$

Durch Zerlegung von $a \sin \chi$ und gleichzeitige Addition und Subtraktion der imaginären Grösse $i \frac{a}{2} \cos \chi$ resultiert

$$y = V_1 + V_2 = \begin{cases} \frac{a}{2} \sin \chi + i \frac{a}{2} \cos \chi \\ + \frac{a}{2} \sin \chi - i \frac{a}{2} \cos \chi \end{cases}$$

[1]) Fresnel, Annales de chim. et de phys. T. XXVIII, pag. 141.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es stellen
$$\begin{cases} V_1 = y_1 + i\,z_1 = \frac{a}{2}\sin\chi + i\,\frac{a}{2}\cos\chi \\ V_2 = y_2 + i\,z_2 = \frac{a}{2}\sin\chi - i\,\frac{a}{2}\cos\chi \end{cases}$$
je eine cirkulare Schwingung dar von gleicher Amplitude, denn da $y_1 + i\,z_1$ die rechtwinklige Zusammenfügung der beiden Strecken y_1 und z_1 bedeutet, so ist die Entfernung des schwingenden Äthermoleküls aus der Ruhelage stets
$$r = \sqrt{y_1^{\,2} + z_1^{\,2}} = \sqrt{y_2^{\,2} + z_2^{\,2}} = \sqrt{\frac{a^2}{4}\sin^2\chi + \frac{a^2}{4}\cos^2\chi} = \frac{a}{2}$$
Die Richtung der beiden Schwingungen ist aber entgegengesetzt, da die Vorzeichen von $\cos\chi$ entgegengesetzte sind. Pflanzt sich nun die erstere cirkulare Schwingung mit der Geschwindigkeit c_1, die zweite mit der Geschwindigkeit c_2 durch eine Quarzplatte von der Dicke d fort, so werden die beiden Schwingungen nach dem Austritt aus dem Quarz repräsentiert durch die Gleichungen
$$V_1 = y_1 + i\,z_1 = \frac{a}{2}\sin\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_1 T}\right) + i\,\frac{a}{2}\cos\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_1 T}\right)$$
$$V_2 = y_2 + i\,z_2 = \frac{a}{2}\sin\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_2 T}\right) - i\,\frac{a}{2}\cos\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_2 T}\right)$$
Durch Interferenz der beiden Schwingungen resultiert:
$$V_1 + V_2 = y_1 + y_2 + i\,(z_1 + z_2) = \frac{a}{2}\left[\sin\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_1 T}\right) + \sin\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_2 T}\right)\right]$$
$$+ i\,\frac{a}{2}\left[\cos\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_1 T}\right) - \cos\left(\chi - \frac{2\pi d}{c_2 T}\right)\right]$$
Durch Trennung des reellen und imaginären Teils ergiebt sich dann:
$$Y = y_1 + y_2 = a\cos\frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\sin\left[\chi - \frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right]$$
$$Z = z_1 + z_2 = a\sin\frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right)\sin\left[\chi - \frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}\right)\right]$$
Die beiden Schwingungen Y und Z haben gleiche Phase, es resultiert aus ihrer Interferenz also ein linear polarisierter Lichtstrahl. Die Lage der Polarisationsebene zu den Koordinatenebenen ist gegeben durch die Gleichung:
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{Z}{Y} = \operatorname{tg}\frac{\pi d}{T}\left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2}\right) = \operatorname{tg}\pi d\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right);\quad \varphi = \pi d\,.\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\ \lambda_2}$$
Es ist also hiernach der Winkel φ, um den die Polarisationsebene durch den Quarz gedreht wird, direkt proportional der Dicke des Quarzes und eine Funktion der Wellenlängen, also auch der Geschwindigkeiten der beiden cirkular polarisierten Strahlen. Die beobachtete Drehung wird also durch Fresnels Annahmen vollkommen erklärt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Vorhandensein der beiden cirkular polarisierten Lichtstrahlen und die verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben hat Fresnel durch folgendes Experiment festgestellt. Aus einem rechts drehenden Bergkrystall liess Fresnel ein gleichschenkliges Prisma mit einer brechenden Kante von 152° und aus einem links drehenden Quarz liess er zwei Prismen mit brechenden Kanten von 76° schneiden und diese drei Prismen wurden zu einem geraden Cylinder zusammengelegt. Sie waren so geschnitten, dass die Axe des Cylinders mit den Krystallaxen der drei Prismen zusammenfiel. Nach der Hypothese muss sich ein der Axe parallel einfallender linear polarisierter Lichtstrahl in zwei cirkular polarisierte Strahlen zerlegen, welche sich beide in derselben Richtung mit verschiedener Geschwindigkeit durch das erste Prisma fortpflanzen, und zwar wird der links cirkular polarisierte der schnellere sein. Im zweiten Prisma wird der links cirkular polarisierte Strahl langsamer fortgepflanzt als der andere, er wird also zu dem Einfallslote stärker hingebrochen als der zweite Strahl. Bei dem Übergang in das dritte links circular polarisierende Prisma wird der erstere Strahl sich mehr vom Einfallslote entfernen als der zweite Strahl. In Folge dessen muss der erstere Strahl sich weiter von der Axe des Cylinders entfernen als der zweite Strahl, beide Strahlen werden in verschiedener Richtung austreten und beide müssen entgegengesetzt cirkular polarisiert sein. Diesen Schluss hat das Experiment Fresnels bestätigt und damit die Hypothese begründet, dass durch den Quarz ein parallel der Axe eintretender linear polarisierter Lichtstrahl in zwei cirkular polarisierte Strahlen zerlegt wird und dass dieselben sich mit verschiedener Geschwindigkeit im Quarz fortpflanzen. In welcher Weise aber der Winkel φ von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden cirkular polarisierten Lichtstrahlen abhängt und welche Funktion der Wellenlänge des eintretenden linear polarisierten Lichtstrahls dieser Winkel ist, ist durch jenes Experiment nicht festgestellt. Bevor wir darauf weiter eingehen, muss hier einer Ableitung der Rotationspolarisation aus Differenzialgleichungen der Bewegung der schwingenden Ätherteilchen Erwähnung geschehen, welche von Cauchy zuerst gegeben und von V. v. Lang weiter durchgeführt ist.

Cauchy leitet in einer Abhandlung vom Jahre 1842[1]) aus den Differenzialgleichungen, welche die Bewegung des Lichts in isotropen Medien respräsentieren, durch Addition eines Gliedes von der Form: $\mathfrak{b}^2\left(\frac{dy}{dz} - \frac{dz}{dy}\right)$ die Differenzialgleichungen für isotrope cirkularpolarisierende Medien ab und zeigt, dass Integrale dieser letzteren Differenzialgleichungen von der Form: $Ae^{i(ux + vy + wz + \lambda)}$ bei Vernachlässigung des imaginären Teils derselben die Lichterscheinungen cirkular polarisierender Medien repräsentieren. Ein solches Verfahren bezeichnet V. v. Lang in der Einleitung zu seiner Abhandlung über die Theorie der Cirkularpolarisation[2]) als ein blosses mathematisches Kunststück ohne physikalische Bedeutung und weist nach, dass die von Cauchy aufgestellten Differenzialgleichungen auch ohne solche Vernachlässigung zu Gleichungen führen, welche die Erscheinung der Rotationspolarisation

---

[1]) Cauchy, Comptes rendus XV pag. 1082.

[2]) V. v. Lang, Pogg. Ann. 119. pag. 74.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

darstellen. Die Schwingung eines elliptisch polarisierten Lichtstrahls ist gegeben durch die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} \xi = a \sin \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) \\ \eta = a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) \end{array}\right.$$

$$\zeta = o$$

wenn ξ, η, ζ die Ausschläge des Ätherteilchens und z die Entfernung vom Erregungszentrum bedeutet und wenn ξ und η in die Richtung der Hauptaxen der Ellipsen fallen. Die Differenzialgleichungen für die Bewegung des Lichts in isotropen Medien sind allgemein:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \mathfrak{a}^2\left(\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{d^2\xi}{dy^2} + \frac{d^2\xi}{dz^2}\right) = o$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \mathfrak{a}^2\left(\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{d^2\eta}{dy^2} + \frac{d^2\eta}{dz^2}\right) = o$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \mathfrak{a}^2\left(\frac{d^2\zeta}{dx^2} + \frac{d^2\zeta}{dy^2} + \frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) = o$$

Diese Gleichungen gehen durch obige spezielle Wahl der Koordinatenaxen über in

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - \mathfrak{a}^2\frac{d^2\xi}{dz^2} = o$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \mathfrak{a}^2\frac{d^2\eta}{dz^2} = o$$

Die Differenzialgleichungen für isotrope Medien führt V. v. Lang durch Addition eines Gliedes von der Form: $(\mathfrak{c}^2 - \mathfrak{a}^2)\frac{d^2\zeta}{dxdz} - \mathfrak{d}^2\left(\frac{d\eta}{dz} - \frac{d\zeta}{dy}\right)$ über in die Differenzialgleichungen für die Bewegung des Lichts in einaxigen cirkular polarisierenden Medien. Der erste Teil dieses Gliedes verschwindet durch die Transformation der Koordinaten, da $\zeta = o$ ist. Da auch $\frac{d\zeta}{dx} = o$ und $\frac{d\zeta}{dy} = o$ ist, so lauten die Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathfrak{a}^2\frac{d^2\xi}{dz^2} + \mathfrak{d}^2\frac{d\eta}{dz}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mathfrak{a}^2\frac{d^2\eta}{dz^2} - \mathfrak{d}^2\frac{d\xi}{dz}$$

Durch Substitution der Werte von ξ und η wird:

$$\frac{d\xi}{dz} = + a\frac{2\pi}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct); \quad \frac{d^2\xi}{dz^2} = - a\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

$$\frac{d\eta}{dz} = - a_1\frac{2\pi}{\lambda}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct); \quad \frac{d^2\eta}{dz^2} = - a_1\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

Die Differenzialgleichungen lauten:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = - \mathfrak{a}^2 a\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) - \mathfrak{d}^2\frac{2\pi}{\lambda}a_1\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

$$= - \mathfrak{a}^2 a\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) - \mathfrak{d}_1{}^2\frac{4\pi^2}{\lambda^2}a_1\sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\mathfrak{a}^2 a \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) - \mathfrak{d}^2 \frac{2\pi}{\lambda} a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$
$$= -\mathfrak{a}^2 a \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) - \mathfrak{d}_1{}^2 \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct)$$

wenn wir $\mathfrak{d}^2 \frac{\lambda}{2\pi} = \mathfrak{d}_1{}^2$ setzen.

Nun können die letzten Glieder dieser beiden Gleichungen angesehen werden als zweite Differenzialquotienten von:

$$\begin{cases} \xi_1 = a_1 \sin\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) \\ \eta_1 = a \cos\frac{2\pi}{\lambda}(z - ct) \end{cases}$$

Die obigen Differenzialgleichungen würden also zu denselben Resultaten führen, wenn $\frac{d\eta}{dz}$ durch $\frac{d^2\xi_1}{dz^2}$ und $\frac{d\xi}{dz}$ durch $\frac{d^2\eta_1}{dz^2}$ ersetzt würde. Durch weitere Rechnung ergiebt sich, dass für die eine Schwingung $a = +a_1$, für die andere $a = -a_1$ sein muss, wenn die Wellennormale mit der Krystallaxe zusammenfällt, und die Addition der Differenzialquotienten $\frac{d\eta}{dz}$ resp. $\frac{d\xi}{dz}$ ist also gleichbedeutend mit der Annahme Fresnels, dass sich im Quarz parallel der Axe zwei entgegengesetzt cirkular polarisierte Strahlen fortpflanzen. Zu diesem Resultat wird denn auch V. v. Lang durch seine Rechnungen geführt. Im zweiten Teil der Arbeit entwickelt er Formeln, welche zur Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Strahlen benutzt werden können. Wir werden darauf später zurückkommen.

Schon vor Cauchy hat Mac Cullagh ähnliche Differenzialgleichungen der Ätherschwingungen im Quarz aufgestellt [1]), indem er, ohne für sein Verfahren irgend welche Begründung zu geben, die dritten Differenzialquotienten vor ξ und η zu den für isotrope Medien gültigen Differenzialgleichungen addiert. In gleicher Weise, wie es bei den von Cauchy aufgestellten Gleichungen geschehen, lässt sich auch hier zeigen, dass diese Differenzialgleichungen die Hypothese Fresnels implicite enthalten, und es steht damit fest, dass die hier angeführten, zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene aufgestellten Differenzialgleichungen nur als andere Ausdrucksformen der Fresnelschen Hypothese anzusehen sind.*)

Wenn nun im Folgenden eine Begründung dieser Hypothese gegeben werden soll, so wird das nach zwei Richtungen hin geschehen können. Es wird erstlich nachzuweisen sein, dass sich die physikalischen Erscheinungen auf dem Gebiet der Rotationspolarisation

---

[1]) Mac Cullagh Pogg. Ann. E II pag. 425.

*) Anmerkung: Die Theorie der Rotationspolarisation ist weiter durchgeführt von Eisenlohr, Neumann, Clebsch und Ketteler. Während Neumann und Clebsch für die von Mac Cullagh und Cauchy zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene eingeführten Zusatzglieder die mechanische Deutung geben „die relative Verrückung eines Ätherteilchens gegen ein anderes wirke auf letzteres ebenso, wie das Element eines elektrischen Stromes auf einen Magnetpol", wird Eisenlohr durch Voraussetzung einer unsymmetrischen Lagerung der Äthermoleküle und Ketteler durch Annahme ungleicher Reibungskräfte auf die Annahmen der Fresnelschen Hypothese geführt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ohne Schwierigkeit aus den gemachten Annahmen ableiten lassen und dass die aus letzteren durch Rechnung abgeleiteten Resultate vollkommen übereinstimmen mit denen, welche Biot, Broch, Stefan und V. v. Lang aus ihren Messungen erhielten. Ein zweites Kriterium für die Brauchbarkeit der Hypothese werden wir erhalten durch die Untersuchung, ob die Annahmen allgemeiner oder sehr spezieller Art sind. Es sind die von Fresnel gemachten Annahmen ganz spezieller Natur. Die Cirkularpolarisation ist ein spezieller Fall der elliptischen Polarisation, beide gehen nur unter bestimmten Bedingungen aus der Interferenz linear polarisierter Lichtstrahlen hervor. Auch die Annahme, dass beide cirkular polarisierten Strahlen gleiche Amplitude haben, ist ganz speziell. Es ist also zweitens zu zeigen, dass die aus allgemeinern Annahmen durch Rechnung abgeleiteten Resultate nicht mehr mit den Ergebnissen der Messungen übereinstimmen.

Aus den Messungen Biots geht hervor, dass der Drehungswinkel φ unabhängig ist sowohl von der Amplitude des in den Bergkrystall eintretenden linear polarisierten Lichtstrahls als auch von der Entfernung des Erregungszentrums der Schwingungen dieses Strahls von der Quarzplatte. Das aus den Annahmen Fresnels abgeleitete Resultat stimmt hiermit überein. Auch dass der Winkel φ direkt proportional der Dicke der Quarzplatte ist, wird durch die Messungen bestätigt. Es soll sich ferner nach Biot durch Vergleichung der Drehungswinkel mit den Werten der zugehörigen Wellenlängen das Gesetz ergeben, dass der Winkel angenähert proportional ist den reciproken Quadraten der Wellenlängen. Biot multiplicierte die von ihm gefundenen Werte der Drehungswinkel mit den von Fresnel aus den Messungen Newtons bei den Farben dünner Blättchen abgeleiteten Wellenlängen:

	φ	$10^6 \lambda$	$\varphi \lambda^2$
Äusserstes Rot	17°,4964	634,4	704167
Rot — Orange	20°,4798	586,4	704229
Orange — Gelb	22°,3138	561,8	704267
Gelb — Grün	25°,6752	523,7	704171
Grün — Blau	30°,0460	484,1	704136
Blau — Indigo	34°,5717	451,3	704126
Indigo — Violett	37°,6829	432,3	704229
Äusserstes Violett	44°,0827	399,7	704265

Da diese Produkte höchstens um eine Einheit der vierten Stelle differieren, so könnte hiernach das Biotsche Theorem als begründet erscheinen, doch haben spätere Messungen ein Wachsen von $\varphi \lambda^2$ mit abnehmenden Werten der Wellenlänge unzweifelhaft festgestellt.

Im Jahre 1846 veröffentlichte Broch im Repertorium der Physik eine Arbeit über besondere Gesetze der Wellenbewegung [1]). Er untersucht in derselben auch die Drehung der Polarisationsebene durch den Bergkrystall und giebt eine Methode an, welche sehr genaue Messungen des Drehungswinkels gestattet. Er stellt zwei Nicols so auf, dass ihre Axen in einer geraden Linie liegen. Der erste Nicol ist um seine Axe drehbar. Zwischen den beiden Nicols wird eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatte so angebracht, dass

[1]) Broch, Doves Repertorium VII, pag. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die optische Axe den Axen der Nicols parallel ist. Dieser Apparat wird auf eine schmale Spalte gerichtet, durch welche das Sonnenlicht einfällt. Zwischen den Apparat und den Beobachter wird dann noch ein Glasprisma so gestellt, dass die brechende Kante der Spaltöffnung parallel ist. In dem durch das Prisma erzeugten Spektrum treten ausser den Fraunhoferschen Linien noch ein oder bei grösserer Dicke der Platte mehrere breitere dunkle Streifen auf. Dieselben entsprechen denjenigen Lichtstrahlen, deren Polarisationsebene nach dem Austritt aus der Quarzplatte senkrecht steht auf der Ebene des zweiten Nicols, die also in Folge dessen ausgelöscht werden. Der Winkel, um den der erste Nicol aus der gekreuzten Stellung bei Beobachtung eines solchen Streifens gedreht ist, ist gleich dem Drehungswinkel des durch den zweiten Nicol ausgelöschten Lichtstrahls. Ändert man den Winkel, den die Polarisationsebenen der beiden Nicols mit einander bilden, so ändert sich damit auch die Lage der Streifen im Spektrum.

Stellt man die Quarzplatte so, dass sie nur die halbe Spalte verdeckt, so kann man zugleich die Fraunhoferschen Linien und die dunklen Streifen, welche dieselbe Lage im Spektrum einnehmen, beobachten. Auf diese Weise sind die Drehungswinkel der Polarisationsebene der verschiedenen Fraunhoferschen Linien mit grosser Genauigkeit zu messen. Als Mittelwerte der Winkel φ für eine Quarzplatte von 1 mm Dicke aus 18 Messungen, welche Broch an rechts und links drehenden Quarzplatten von verschiedener Dicke anstellte, giebt Broch an:

	B	C	D	E	F	G
$\varphi =$	$15^0,30$	$17^0,24$	$21^0,67$	$27^0,46$	$32^0,50$	$42^0,20$
$\log \varphi \lambda^2 =$	0,85962.	0,87096.	0,87570.	0,88057.	0,88208.	0,89440.

Das Wachsen dieses Produktes hebt Broch ausdrücklich hervor mit den Worten:

„Nach Biot soll $\varphi \lambda^2$ eine constante Grösse sein. Es ist aber aus den obigen Resultaten klar, dass dies bei Weitem nicht der Fall ist.“

Schon einige Jahre früher [1]) war Cauchy durch theoretische Untersuchungen zu dem Resultat gelangt, dass zwischen dem Drehungswinkel φ und dem Brechungsexponenten nicht cirkular polarisierender Medien eine Analogie bestehe, derart, dass auch der Winkel φ der von ihm für den Brechungsexponenten aufgestellten Formel $n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \ldots$ genügen müsse; auch hatte er in einer zweiten Abhandlung [2]) desselben Jahres auf Grund der von Biot an einer Lösung von acidum tartaricum vorgenommenen Messungen nachgewiesen, dass das Produkt $\varphi \lambda^2$ wachse mit abnehmender Wellenlänge. Nach Cauchy genügt es, bei Berechnung des Drehungswinkels die beiden ersten Glieder der Reihe zu berücksichtigen. Für Bergkrystall ergeben sich aus Brochs Messungen als Werte der beiden Konstanten nach Stefans Berechnung $a = -1,581$; $b = \frac{8,0403}{10^6}$, so dass der Winkel φ bestimmt ist durch die Gleichung: $\varphi = -1,581 + \frac{8,0403}{\lambda^2 10^6}$.

Die hiernach berechneten, zu den Fraunhoferschen Linien gehörigen Winkel würden sein:

	B	C	D	E	F	G
$\varphi =$	$15^0,41$	$17^0,08$	$21^0,61$	$27^0,84$	$32^0,70$	$42^0,09$

[1]) Cauchy, Comptes rendus XV (1842).
[2]) Cauchy, Comptes rendus XV.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Winkel unterscheiden sich von den durch Brochs Messungen bestimmten noch durchschnittlich um mehr als ein Zehntel Grad. Eine bedeutend grössere Annäherung wird erreicht, wenn man nach Boltzmanns Vorgang noch das folgende Glied der Cauchyschen Reihe hinzunimmt.[1]) Aus den von Stefan beobachteten Werten der Rotationswinkel hat Boltzmann als Werte der drei Konstanten gefunden:

$$a = -0{,}3395;\ b = \frac{7{,}24678}{10^6};\ c = \frac{0{,}12943}{10^{12}}.$$

Die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Rotationswinkeln sind:

B	C	D	E	F	G	H
$-0^0{,}04$	$0^0{,}02$	$0^0{,}03$	$0^0{,}01$	$0^0{,}02$	$-0^0{,}08$	$0^0{,}04$

Eine fast ebenso grosse Annäherung erreicht Boltzmann mit der von ihm zuerst aufgestellten und theoretisch begründeten Formel:

$$\varphi = \frac{7{,}07018}{10^6 \lambda^2} + \frac{0{,}14983}{10^{12} \lambda^4},$$

welche also der Cauchyschen Formel mit zwei Konstanten vorzuziehen ist.

Durch die zahlreichen Messungen von Croullebois, Soret und Sarasin, welche zum Teil bis über die Fraunhofersche Linie R hinaus ausgedehnt wurden, ist dann festgestellt, dass die Boltzmannsche Formel mit zwei Konstanten zur Berechnung der Rotationswinkel der ultravioletten Strahlen bis zur Linie O vollkommen genügt, dass sie aber für die Drehungswinkel von P, Q, R selbst bei Hinzufügung des folgenden Gliedes ungenaue Werte liefert.

Es ist hier noch anzuführen, dass bei Berechnung des Drehungswinkels auch die Temperatur zu berücksichtigen ist. Der Rotationswinkel wächst mit zunehmender Temperatur und genügt nach den Messungen von V. v. Lang[2]), Soret[3]), Sohnke[4]) und Joubert[5]) der Formel: $\varphi = \varphi_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$, wenn t die Zahl der Grade nach Celsius bedeutet.

Die Werte der Konstanten sind:

	α	β
V. v. Lang	0,00149	0
Soret	0,000179	0
Sohnke	0,0000999	0,000000318
Joubert	0,000146324	0,000000329

Die Untersuchungen von Sohnke erstreckten sich bis 170°, die von Joubert bis 1500°, doch sind die von Joubert angegebenen Werte der Konstanten nur gültig für das Intervall von -20 bis $+100$ Grad.

Die Fresnelsche Hypothese führt zu der Gleichung:

$$\varphi = \pi d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$$

oder

$$\varphi \lambda_2 = \pi d \lambda (n_1 - n_2),$$

wenn mit n_1 und n_2 die Brechungsquotienten der beiden Cirkularschwingungen bezeichnet

[1]) Boltzmann Pogg. Ann. Jubelband pag. 128.
[2]) V. v. Lang, Sitzungsberichte der Wiener Akademie LXXI pag. 703.
[3]) Soret, Comptes rendus XCIII (1882).
[4]) Sohnke, Pogg. Ann., Neue Folge III pag. 516.
[5]) Joubert, Journ. de physique VIII pag. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden. Da nun das Produkt $\varphi \lambda^2$ mit abnehmender Wellenlänge wächst, so muss der Wert von $\lambda (n_1 - n_2)$ in gleicher Weise zunehmen, und da die Wellenlänge der violetten Lichtstrahlen etwa um ein Drittel kleiner ist als die Wellenlänge des roten Lichts, so muss die Differenz $n_1 - n_2$ für violette Strahlen mehr als anderthalbmal so gross sein als für rote Strahlen. Auch diese Forderung der Fresnelschen Hypothese ist durch einen von Stefan im Jahre 1864[1]) ausgeführten Versuch bestätigt. Stefan stellte zwischen den Fresnelschen Polarisationsapparat und ein Spektrometer eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene linksdrehende Quarzplatte so auf, dass ein Teil des polarisierten Sonnenlichts die Platte in der Richtung der optischen Axe durchsetzte. Es traten in Folge dessen ausser den Fraunhoferschen Linien eine Anzahl von Interferenzstreifen auf, und diese Streifen wanderten nach dem roten Ende des Spektrums, wenn durch Drehung des Polarisators das links cirkular oder elliptisch polarisierte Licht in rechts cirkular oder elliptisch polarisiertes übergeführt wurde. Ist die Dicke der Quarzplatte gleich d und ist n der Brechungsquotient dieser Platte, so erhält das die Platte durchdringende Licht gegen das direkt in das Spektrometer gelangende den Gangunterschied: $(n - 1) d$. Die Lage der Interferenzstreifen ist also bestimmt durch Gleichungen von der Form:

$$(n - 1) d = \frac{2 m + 1}{2} \lambda,$$

wenn m eine ganze Zahl bedeutet.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich, dass bei einer Vergrösserung des Gangunterschiedes der Wert von λ wachsen muss, dass also eine Verschiebung der Interferenzstreifen nach dem roten Ende des Spektrums stattfindet. Wenn also bei Anwendung einer links drehenden Quarzplatte durch die Umwandlung von linkscirkular polarisiertem Licht in rechtscirkular polarisiertes eine Wanderung der Streifen nach dem roten Ende des Spektrums veranlasst wurde, so ist damit bewiesen, dass im linksdrehenden Quarz das linkscirkular polarisierte Licht sich schneller fortpflanzt als das rechtscirkular polarisierte. Aus der Fresnelschen Hypothese ergab sich die Gleichung:

$$\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} (n_1 - n_2).$$

Bei Anwendung von linkscirkular polarisiertem Licht ist die Lage der Interferenzstreifen gegeben durch die Gleichung:

$$(n_1 - 1) d = \frac{2 m_1 + 1}{2} \lambda,$$

bei Anwendung von linkscirkular polarisiertem Licht lautet diese Gleichung:

$$(n_2 - 1) d = \frac{2 m_2 + 1}{2} \lambda.$$

Für einen bestimmten Wert von λ ergiebt sich:

$$\frac{n_1 - n_2}{\lambda} . d = m_1 - m_2.$$

Die Zahl $m_1 - m_2$ bestimmt die Verschiebung der Interferenzstreifen, sie giebt an, wie viel Streifen durch die der Wellenlänge λ angehörige Stelle des Spektrums rücken müssen. Die

[1]) Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Akademie L pag. 380.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werte von $m_1 - m_2$ sind von Stefan für die Fraunhoferschen Linien gemessen, sie sind andererseits aus den Werten von $\frac{\varphi}{\pi}$ berechnet, und es ergab sich eine vollständige Übereinstimmung. Bei Anwendung einer links drehenden Quarzplatte von 5,045 mm Dicke fand Stefan:

	B	C	D	E	F	G	H
$\varphi =$	78°	87°	109°	139°	165°	214°	257°
$m_1 - m_2 =$	0,44	0,48	0,61	0,77	0,92	1,19	1,43

Durch diesen Versuch ist also festgestellt, dass zwei entgegengesetzt cirkular oder elliptisch polarisierte Lichtstrahlen im Quarz sich in der Richtung der Axe mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen und dass der Drehungswinkel des austretenden linear polarisierten Lichtstrahls bestimmt ist durch die Gleichung:

$$\varphi = \pi\, d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Nun ist noch kurz die Frage zu berühren: In welchem Zusammenhang steht die Cirkularpolarisation mit der gewöhnlichen Doppelbrechung der einaxigen Krystalle und wie verhält sich linear polarisiertes Licht, wenn die Wellennormale der Krystallaxe nicht parallel ist?

Bei Erklärung der bekannten Ringfiguren, welche senkrecht zur optischen Axe geschnittene Quarzplatten liefern, hat Airy[1]) die Hypothese aufgestellt, dass die von Fresnel angenommenen Cirkularschwingungen bei geneigter Incidenz des Lichtstrahls übergehen in zwei elliptische Schwingungen und dass diese durch kontinuierliche Abnahme der kleinen Axen der Ellipsen in zwei lineare Schwingungen übergeführt werden, wenn die Neigung des Lichtstrahls gegen die optische Axe bis 90° gewachsen ist. Mit Hülfe dieser Hypothese hat Airy die durch den Quarz hervorgerufenen Lichterscheinungen vollkommen erklärt; auch alle späteren theoretischen Untersuchungen gehen von diesen Annahmen aus oder führen, wenn sie von besonderen Konstitutionen des Lichtäthers im Quarz ausgehen, zu diesen Resultaten. Einen experimentellen Nachweis der beiden elliptischen Schwingungen, welcher dem angeführten Fresnelschen Versuch ganz analog ist, hat Croullebois[2]) im Jahre 1871 gegeben, indem er zwei entgegengesetzt drehende Quarzprismen zu einer Säule zusammenlegt, deren Axe mit der Krystallaxe einen Winkel von 10 Grad bildet, und so den parallel der Säulenaxe einfallenden linear polarisierten Lichtstrahl in zwei elliptisch polarisierte Strahlen zerlegt, welche das zweite Prisma in verschiedenen Richtungen durchsetzen, also getrennt wahrgenommen werden. Die Verhältnisse der Ellipsenaxen und die Differenzen der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten sind von Jamin[3]) gemessen. V. v. Lang[4]) hat mit einem Prisma, dessen brechende Kante auf der Krystallaxe senkrecht stand, die Brechungsindices der beiden elliptischen Wellen bestimmt; auch hat er eine theoretisch begründete Formel[5]) aufgestellt, welche die Berechnung der

[1]) Airy, Pogg. Ann. XXIII.
[2]) Croullebois, Ann. de chim. (4) XXVIII pag. 433.
[3]) Jamin, Annales de chim. (3) XXX pag. 55.
[4]) V. v. Lang, Sitzungsberichte der Wiener Akademie LX (1870).
[5]) V. v. Lang, Pogg. Ann. E. VIII pag. 608 (1878).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beiden Brechungsindices für verschiedene Einfallswinkel und für Licht verschiedener Brechbarkeit gestattet. Es ist nach V. v. Lang:

$$\left.\begin{matrix}\frac{1}{n_1{}^2}\\ \frac{1}{n_2{}^2}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\rho \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2 \sin^4\rho + \frac{1}{\chi^4}}, \text{*)}$$

wenn mit ρ der von dem einfallenden Strahl mit der Krystallaxe gebildete Winkel, mit α und γ der ordentliche und ausserordentliche Brechungsquotient des Quarzes und mit χ eine numerische Grösse bezeichnet wird, welche für das gelbe Licht der Natriumflamme den Wert $\chi = 227{,}624$ hat. Dieser Wert ist von V. v. Lang folgendermassen berechnet. Nach obiger Formel ist für $\rho = 0$:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\alpha^2} \pm \frac{1}{\chi^2}$$

oder

$$n = \alpha\left(1 \pm \frac{\alpha^2}{\chi^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \alpha\left(1 \mp \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\chi^2} + \ldots\right)$$

und daher

$$n_2 - n_1 = \frac{\alpha^3}{\chi^2}.$$

Es ist nun

$$\varphi = \frac{\pi d}{\lambda}(n_2 - n_1),$$

also

$$\chi^2 = \frac{\pi d \alpha^3}{\varphi \lambda}.$$

Durch Substitution dieses Wertes in die obige Reihe erhalten wir:

$$n_1 = \alpha\left(1 - \frac{\varphi\lambda}{2\pi d \alpha}\right); n_2 = \alpha\left(1 + \frac{\varphi\lambda}{2\pi d\alpha}\right); \frac{n_1 + n_2}{2} = \alpha$$

und es ergiebt sich damit der Satz, dass der ordentliche Brechungsindex das arithmetische Mittel aus den beiden Indices des Axendurchganges wird und zwar für alle Farben. V. v. Lang zieht aus seinen Messungen, welche übrigens nur auf λ_D ausgedehnt sind, den Schluss, dass es in der Nähe der optischen Axe keine Welle mit konstanter Geschwindigkeit mehr giebt und dass bei einer Neigung des einfallenden Lichtstrahls gegen die Krystallaxe von mehr als 25 Grad die Wirkung der Cirkularpolarisation nicht mehr nachgewiesen werden kann, so dass der Quarz bei noch grösserem Neigungswinkel sich wie ein gewöhnlicher einaxiger Krystall verhält.

Durch die bisher angeführten Untersuchungen ist festgestellt, dass der in den Bergkrystall parallel der Axe eintretende lineare Lichtstrahl in zwei Strahlen zerlegt wird, welche sich mit verschiedener Geschwindigkeit aber in gleicher Richtung durch den Quarz fortpflanzen und dass die Differenz der reciproken Wellenlängen dieser Strahlen dem Rotations-

---

*) Anmerkung: In der Arbeit vom Jahre 1870 leitet V. v. Lang, ausgehend von Cauchy's Theorie, die Formel ab:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)\sin^2\rho \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\gamma^2}\right)^2 \sin^4\rho + \frac{\cos^4\rho}{\chi^4}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

winkel φ proportional ist. Der Winkel φ ist ferner direkt proportional der Dicke der Quarzplatte, dagegen unabhängig von der Amplitude des ursprünglichen Lichtstrahls und von der Entfernung des Erregungszentrums dieses Strahls von der Oberfläche des Bergkrystalls. Jede Annahme, welche zur Erklärung der Drehung der Polarisationsebene aufgestellt wird, muss zu diesen Resultaten führen.

Wir können nun untersuchen, ob sich diese Resultate nicht auch aus Annahmen, welche allgemeiner als die von Fresnel gemachten sind, werden ableiten lassen. Bei allen diesen Annahmen wird es sich immer um die Zerlegung einer linearen Schwingung in eine Anzahl von anderen Schwingungen handeln; es wird daher vor Allem festzustellen sein, in welcher Weise sich eine lineare Schwingung in mehrere Komponenten zerlegen lässt. Da cirkulare und elliptische Schwingungen sich stets als Resultat der Interferenz zweier linearer Schwingungen auffassen lassen, so werden wir uns nur zu beschäftigen haben mit der Möglichkeit der Zerlegung einer linearen Schwingung in mehrere lineare Schwingungen und zwar in solche von gleicher Schwingungsdauer, da ein Lichtstrahl von bestimmter Farbe sich in allen Medien mit gleicher Schwingungsdauer fortpflanzt. Auch werden die verschiedenen Komponenten im Augenblick der Zerlegung gleiche Wellenlänge haben müssen, da lineare Schwingungen von verschiedener Wellenlänge sich nicht zu einer linearen Schwingung von einfacher Periode zusammensetzen, also auch nicht aus einer solchen hervorgehen können.

Zwei Wellen, welche sich in gleicher Richtung in derselben Ebene fortpflanzen, setzen sich zu einer ebenen Welle in dieser Ebene zusammen. Umgekehrt wird sich also eine ebene Welle stets in zwei solche Komponenten zerlegen lassen. Man kann dann ausserdem in einer beliebigen andern Ebene, welche aber jene Punktreihe auch enthält, zwei Schwingungen von gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Phase annehmen, da diese beiden Schwingungen sich gegenseitig aufheben, wenn sie zur Interferenz gelangen. Interferiert dagegen je eine dieser beiden Wellen mit je einer der aus Zerlegung der ursprünglichen ebenen Welle hervorgegangenen Schwingungen, so entstehen im Allgemeinen, vorausgesetzt, dass alle vier Schwingungen gleiche Wellenlänge und Schwingungsdauer haben, elliptische Schwingungen von entgegengesetzter Drehung. Diese beiden Wellen können durch Spezialisierung der Amplituden und Phasen in cirkulare Schwingungen übergeführt werden.

Es lässt sich zweitens eine ebene Schwingung in zwei Komponenten, welche in verschiedenen Ebenen schwingen, zerlegen, doch muss die Phasendifferenz dieser beiden Wellen eine ganze Anzahl von halben Wellenlängen betragen. Es lässt sich dann jede der beiden Schwingungen wieder in zwei Wellen zerlegen, welche beide mit verschiedener Amplitude und Phase sich in derselben Ebene fortpflanzen.

Schliessen wir vorerst den Fall aus, dass sich in einer Punktreihe ausser dem linear polarisierten Strahl noch zwei Schwingungen von gleicher Amplitude und entgegengesetzter Phase fortpflanzen, welche sich durch Interferenz aufheben, so werden wir nur die Zerlegung eines linear polarisierten Strahls in zwei Komponenten, die in verschiedenen Ebenen schwingen, zu berücksichtigen haben; denn zwei in derselben Ebene stattfindende Schwingungen setzen sich, ob sie sich nun mit gleicher oder ungleicher Geschwindigkeit durch den Quarz fortpflanzen, stets wieder zu einer Schwingung in dieser Ebene zusammen. Es kann also eine solche Zerlegung eine Drehung der Polarisationsebene nicht bewirken.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bilden zwei Ebenen mit der xy-Ebene, der Ebene des linear polarisierten Strahls $y = a \sin 2\pi\xi$, die Winkel ω_1 und ω_2, und machen wir diese beiden Ebenen zur xY- und xZ-Ebene, so entstehen bei einer Zerlegung des Strahls nach diesen beiden Ebenen die beiden Schwingungen:

$$Y = \frac{a \sin \omega_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\xi$$

$$Z = \frac{a \sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\xi.$$

Pflanzen sich diese beiden Schwingungen durch den Quarz mit gleicher Geschwindigkeit fort, so setzen sie sich bei dem Austritt durch Interferenz zu einer Schwingung in der Ebene der ursprünglichen Welle zusammen, da für jeden Wert von x die Gleichung besteht: $\frac{Y}{Z} = \frac{\sin \omega_2}{\sin \omega_1}$, mithin y mit Y den Winkel ω_2 und mit Z den Winkel ω_1 bildet. Erteilt dagegen der Quarz den beiden Schwingungen verschiedene Geschwindigkeit, so werden nach der Interferenz die Äthermoleküle in Kurven höherer Ordnung bewegt, die Schwingung ist also nicht linear.[1]) Auch wenn man jede der beiden Gleichungen nochmals zerlegt, so würde man wieder zu diesen Resultaten kommen. Eine Zerlegung in dieser Weise führt also nicht zum Ziel.

Eine lineare Schwingung

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - D}{\lambda}\right)$$

lässt sich in zwei in dieser Ebene stattfindende Schwingungen

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x - a}{\lambda}\right)$$

zerlegen. Es sind α_1, α_2 und a an die beiden Bedingungen gebunden:

$$A^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\,\alpha_1\,\alpha_2 \cos 2\pi \frac{a}{\lambda}; \quad \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha_2}{A} \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}.\ ^{2})$$

Zerlegt man jede dieser beiden Schwingungen in zwei Komponenten nach den beiden Ebenen xY und xZ, so erhält man die vier Schwingungen:

$$Y_1 = \frac{\alpha_1 \sin \omega_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\xi; \quad Y_2 = \frac{\alpha_2 \sin \omega_2}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\left(\xi + \frac{a}{\lambda}\right)$$

$$Z_1 = \frac{\alpha_1 \sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\xi; \quad Z_2 = \frac{\alpha_2 \sin \omega_1}{\sin(\omega_1 + \omega_2)} \sin 2\pi\left(\xi + \frac{a}{\lambda}\right).$$

Es setzen sich nun Y_1 und Z_2 und ebenso Z_1 und Y_2 je zu einer elliptischen Schwingung zusammen. Beide Schwingungen drehen die Ätherteilchen in gleicher Richtung, weil a für beide Schwingungen denselben Wert hat. Wenn diese beiden Wellen sich im Quarz mit

---

[1]) Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik I § 122.
[2]) „ „ „ „ I § 118.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen, so setzen sie sich wieder zu einer ebenen Schwingung in der x y-Ebene zusammen, da auch hier für jeden Wert von x die beiden Gleichungen:

$$\frac{Y_1}{Z_1} = \frac{\sin \omega_2}{\sin \omega_1} \text{ und } \frac{Y_2}{Z_2} = \frac{\sin \omega_2}{\sin \omega_1}$$

bestehen. Mit verschiedener Geschwindigkeit aber pflanzen sich zwei elliptische Wellen von gleicher Wellenlänge und gleicher Drehung nach Stefans Messungen nicht fort. Es wird also nur durch eine Zerlegung des linear polarisierten Lichtstrahls in der Art, wie Fresnel sie angenommen, eine Drehung der Polarisationsebene möglich sein.

Wir sehen die Schwingung des in der xy-Ebene linear polarisierten Lichtstrahls

$$y = b \sin 2\pi\xi$$

an als entstanden aus den beiden Schwingungen:

$$y_1 = \frac{b}{\alpha} \sin 2\pi\xi \text{ und } y_2 = \frac{b(\alpha - 1)}{\alpha} \sin 2\pi\xi.$$

Es mögen sich zugleich in einer anderen Ebene, der xz-Ebene, die beiden Schwingungen

$$z_1 = c \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a}{\lambda}\right) \text{ und } z_2 = - c \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a}{\lambda}\right)$$

fortpflanzen, welche sich durch Interferenz aufheben. Lassen wir aber je eine dieser Schwingungen mit je einer der beiden Komponenten interferieren, so entstehen die beiden elliptischen Schwingungen:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b}{\alpha} \sin 2\pi\xi \\ z_1 = c \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a}{\lambda}\right) \end{cases} \text{ und } \begin{cases} y_2 = \frac{b(\alpha - 1)}{\alpha} \sin 2\pi\xi \\ z_2 = c \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a + {}^1/_2 \lambda}{\lambda}\right) \end{cases}$$

Die beiden elliptischen Wellen versetzen die Äthermoleküle in Schwingungen entgegengesetzter Drehung, weil der Gangunterschied von z_1 und z_2 eine halbe Wellenlänge beträgt. Es möge sich die eine Welle durch den Quarz von der Dicke d mit der Geschwindigkeit c_1, die andere mit der Geschwindigkeit c_2 fortpflanzen. Die Wellenlängen seien resp. λ_1 und λ_2. Geht dann bei dem Austritt aus dem Quarz aus der Interferenz der beiden Wellen eine lineare Schwingung hervor? Wir zerlegen die beiden elliptischen Schwingungen oder die vier linearen Schwingungen in Komponenten nach zwei auf einander senkrechten Ebenen, der xY-Ebene und der xZ-Ebene. Es möge die xY-Ebene mit der xy-Ebene den Winkel φ, mit der xz-Ebene den Winkel $\varphi + \omega$ bilden. Die Summe der in die xY-Ebene fallenden Komponenten ist:

$$Y = \frac{b}{\alpha} \cos\varphi \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \frac{b(\alpha - 1)}{\alpha} \cos\varphi \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)$$
$$+ c \cos(\varphi + \omega) \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right) - c \cos(\varphi + \omega) \sin 2\pi \left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso ist die Summe der in die xZ-Ebene fallenden Komponenten:

$$Z = \frac{b}{\alpha} \sin\varphi \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \frac{b(\alpha-1)}{\alpha} \sin\varphi \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)$$

$$+ c \sin(\varphi + \omega) \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right) - c \sin(\varphi + \omega) \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right).$$

Ist nun die xY-Ebene die Ebene der aus der Interferenz der beiden elliptischen Wellen resultierenden ebenen Schwingung, so muss die Summe der Komponenten in der xZ-Ebene gleich 0 sein:

$$0 = \frac{b}{\alpha} \sin\varphi \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \frac{b(\alpha-1)}{\alpha} \sin\varphi \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)$$

$$+ c \sin\varphi \cos\omega \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right) + c \cos\varphi \sin\omega \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right)$$

$$- c \sin\varphi \cos\omega \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right) - c \cos\varphi \sin\omega \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right).$$

Daraus resultiert als Tangente des Winkels φ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sin\omega \left\{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right) - \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right)\right\} :$$

$$\left[\cos\omega \left\{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right) - \sin 2\pi\left(\xi - \frac{a}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right)\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{b}{\alpha c} \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \frac{b(\alpha-1)}{\alpha c} \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)\right]$$

Es muss sich nun die rechte Seite als Tangente darstellen lassen, deren Argument der Dicke der Quarzplatte proportional, dagegen unabhängig ist von dem Verhältnis der Amplituden und von der Entfernung des Schwingungszentrums von der Oberfläche der Quarzplatte. Es wird später nachgewiesen werden, dass nur ein Ausdruck von der Form

$$\frac{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) - \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)}$$

dieser Bedingung genügt. Diese Form nimmt nun die rechte Seite der obigen Gleichung an, wenn $\omega = \frac{\pi}{2}$, $a = {}^1/_4\,\lambda$ und sowohl $\frac{b}{\alpha c} = 1$ als auch $\frac{b(\alpha-1)}{\alpha c} = 1$, d. h. wenn $\alpha = 2$ und $2c = b$ ist. Dann aber gehen die beiden elliptischen Schwingungen in zwei cirkulare Schwingungen von gleicher Amplitude über, und wir sehen uns wieder auf Fresnels Hypothese zurückgeführt. Dass dies bei jedem Versuch einer Verallgemeinerung der Fresnelschen Annahme der Fall ist, möge noch an ein paar Beispielen gezeigt werden.

Wenn man von der Fresnelschen Hypothese ausgeht, so wird das Nächstliegende sein, zu untersuchen, ob nicht auch die Annahme zweier cirkular schwingender Strahlen von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ungleichen Amplituden zu dem durch Messungen festgestellten Resultat $\varphi = \pi d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right)$ führt. Man sieht aber sofort, dass es nicht möglich ist, einen linear polarisierten Strahl in zwei solche Strahlen zu zerlegen; denn sind $\frac{b}{\alpha}$ und $b \frac{(\alpha - 1)}{\alpha}$ die Amplituden der Komponenten jenes linearen Lichtstrahls, so müsste man in der zu der Ebene der Komponenten senkrechten Ebene zwei Schwingungen $\frac{b}{\alpha} \cos 2 \pi \xi$ und $- \frac{b(\alpha - 1)}{\alpha} \cos 2 \pi \xi$ hinzufügen, um zwei cirkulare Schwingungen zu erhalten. Da dies aber nur erlaubt ist, wenn diese beiden Schwingungen sich aufheben, so muss $\frac{b}{\alpha} = \frac{b(\alpha - 1)}{\alpha}$ sein, also $\alpha = 2$. Dann aber haben beide cirkulare Schwingungen dieselbe Amplitude.

Zerlegt man die lineare Schwingung

$$y = b \sin 2 \pi \xi$$

in die beiden elliptischen von gleicher Amplitude:

$$\begin{cases} y_1 = \frac{b}{2} \sin 2 \pi \xi \\ z_1 = \frac{c}{2} \cos 2 \pi \xi \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} y_2 = \frac{b}{2} \sin 2 \pi \xi \\ z_2 = - \frac{c}{2} \cos 2 \pi \xi \end{cases}$$

und nimmt man die xz-Ebene senkrecht zur xy-Ebene an, so führt eine der pag. 18 durchgeführten ganz analoge Rechnung zu dem Resultat:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c}{b} \operatorname{tg} \pi d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Nun ist durch die Messungen festgestellt, dass der Winkel φ der Dicke der Quarzplatte direkt proportional, also $\varphi = k d$ ist. Es muss die Gleichung

$$0 = - \operatorname{tg}(k d) + \frac{c}{b} \operatorname{tg} \pi d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = f(d)$$

durch jeden Wert von d erfüllt werden. Wir erhalten durch Entwickelung von f (d) nach der Mac Laurinschen Reihe:

$$f(d) = f(0) + d f'(0) + \frac{d^2}{1.2} f''(0) + \frac{d^3}{1.2.3} f'''(0) + ..$$

Setzen wir zur Abkürzung $\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = r$, so ist:

$$f(d) = - \operatorname{tg}(k d) + \frac{c}{b} \operatorname{tg}(r d)$$

$$f'(d) = \frac{-k}{\cos^2(k d)} + \frac{c}{b} \frac{r}{\cos^2(r d)}; \quad f'(0) = -k + \frac{c}{b} r$$

$$f''(d) = \frac{+k^2}{\cos^3(k d)} 2 \sin(k d) - \frac{c}{b} r^2 \frac{2 \sin(k d)}{\cos^3(r d)}; \quad f''(0) = 0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$f'''(d) = 2k^3 \frac{\cos^2(kd) + 3\sin^2(kd)}{\cos^4(kd)} - 2\frac{c}{b} r^3 \frac{\cos^2(rd) + 3\sin^2(rd)}{\cos^4(rd)}$$

$$f'''(0) = 2k^3 - 2\frac{c}{b} r^3 \; ; \; f''''(0) = 0$$

$$f(d) = 0 + d\left(-k + \frac{c}{b} r\right) + 0 + \frac{d^3}{3}\left(k^3 - \frac{c}{b} r^3\right) + 0 + \ldots = 0.$$

Aus dieser identischen Gleichung, welcher jeder Wert von d genügen muss, ergeben sich die Bedingungsgleichungen: $k = \frac{c}{b} r$; $k = r\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$. Beide Gleichungen können nur dann zugleich bestehen, wenn $\frac{c}{b} = \sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, also wenn $c = b$ ist. Damit sind wir wieder auf die Annahme zweier cirkularer Schwingungen zurückgeführt.

Nehmen wir an, dass $b = c$, dass aber die xy-Ebene nicht senkrecht steht auf der xz-Ebene, sondern mit ihr den Winkel ω bildet, so geht aus dem pag. 18 abgeleiteten Resultat unmittelbar hervor:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\omega\left\{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) - \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)\right\}}{\cos\omega\left\{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)\right\} + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2}\right)}.$$

Nur wenn $\omega = \frac{\pi}{2}$ ist, lässt sich die rechte Seite als Tangente darstellen, deren Argument d als Faktor enthält.

So ist auf indirektem Wege gezeigt, dass nur durch Annahme von zwei cirkularen Schwingungen von gleicher Amplitude die Resultate der Theorie und der Beobachtung in Übereinstimmung gebracht werden können.

Zum Schluss soll nun noch gezeigt werden, wie man bei Kenntnis der Resultate der Messungen direkt dazu geführt wird, den linear polarisierten Lichtstrahl in zwei cirkular polarisierte Lichtstrahlen von gleicher Amplitude und entgegengesetzter Drehung zu zerlegen.

Es mögen vier lineare Schwingungen von gleicher Schwingungsdauer und Wellenlänge in den Quarz eintreten und sich in demselben parallel seiner optischen Axe mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Unter welchen Bedingungen vier solche Wellen aus einem linear polarisierten Lichtstrahl durch Zerlegung hervorgegangen sein können, ist früher bereits untersucht. Die Gleichungen dieser Lichtstrahlen mögen sein:

$$s = a_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right); \; u = a_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

$$v = a_3 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_3}{\lambda}\right); \; w = a_4 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_4}{\lambda}\right).$$

Die Ebenen dieser Strahlen mögen mit der xy-Ebene die Winkel ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 bilden. Wenn die vier Wellen sich nach ihrem Austritt aus dem Quarz zu einer linearen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schwingung zusammensetzen in einer Ebene, welche den Winkel φ mit der x y-Ebene bildet, so wird die Summe der Komponenten in der auf jener Ebene senkrechten Ebene gleich 0 sein.

$$0 = a_1 \sin(\omega_1 - \varphi) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right)$$
$$+ a_2 \sin(\omega_2 - \varphi) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right)$$
$$+ a_3 \sin(\omega_3 - \varphi) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_3}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_3}\right)$$
$$+ a_4 \sin(\omega_4 - \varphi) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_4}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_4}\right)$$

$$0 = a_1 [\sin\omega_1 \cos\varphi - \cos\omega_1 \sin\varphi] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_1}\right)$$
$$+ a_2 [\sin\omega_2 \cos\varphi - \cos\omega_2 \sin\varphi] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_2}\right)$$
$$+ a_3 [\sin\omega_3 \cos\varphi - \cos\omega_3 \sin\varphi] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_3}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_3}\right)$$
$$+ a_4 [\sin\omega_4 \cos\varphi - \cos\omega_4 \sin\varphi] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_4}{\lambda} - \frac{d}{\lambda_4}\right).$$

Daraus ergiebt sich, wenn wir $\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} = \xi$ setzen:

$$\sin\varphi \left[a_1 \cos\omega_1 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + a_2 \cos\omega_2 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_2} + \frac{x_1 - x_2}{\lambda}\right) \right.$$
$$\left. + a_3 \cos\omega_3 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_3} + \frac{x_1 - x_3}{\lambda}\right) + a_4 \cos\omega_4 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_4} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right) \right]$$
$$= \cos\varphi \left[a_1 \sin\omega_1 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + a_2 \sin\omega_2 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_2} + \frac{x_1 - x_2}{\lambda}\right) \right.$$
$$\left. + a_3 \sin\omega_3 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_3} + \frac{x_1 - x_3}{\lambda}\right) + a_4 \sin\omega_4 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_4} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right) \right]$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1 \sin\omega_1 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \ldots + \ldots + a_4 \sin\omega_4 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_4} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right)}{a_1 \cos\omega_1 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \ldots + \ldots + a_4 \cos\omega_4 \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{\lambda_4} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right)}.$$

Der Wert von tg φ muss sich nun als eine Tangente darstellen lassen, deren Argument die Grösse d als Faktor hat, weil durch die Messungen festgestellt ist, dass der Winkel φ der Dicke des Quarzes direkt proportional ist. Es lassen sich nun Ausdrücke von der Form

$$\frac{\sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) \pm \sin 2\pi \left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}{\cos 2\pi \left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) \pm \cos 2\pi \left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und

$$\frac{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) \pm \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) \pm \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}$$

als Tangenten darstellen, kompliciertere dagegen nicht mehr. Wählt man an diesen Ausdrücken im Zähler und Nenner dieselben Vorzeichen, so resultieren Tangenten oder Cotangenten der halben Summe: $\pi\left(2\xi - \frac{d}{l_1} - \frac{d}{l_2}\right)$. In diesem Aggregat tritt d nicht als gemeinsamer Faktor auf; es müssen daher im Zähler und Nenner der obigen Ausdrücke entgegengesetzte Vorzeichen stehen. Sind ferner die zweiten Glieder der Zähler mit dem positiven, die der Nenner mit dem negativen Vorzeichen behaftet, so resultiert resp.:

$$\begin{cases} -\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{d}{l_1} - \frac{d}{l_2}\right) = \operatorname{tg}\pi\left(\frac{d}{l_1} - \frac{d}{l_2} - \frac{1}{2}\right) \\ +\operatorname{cotg}\pi\left(\frac{d}{l_1} - \frac{d}{l_2}\right) = \operatorname{tg}\pi\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{l_1} + \frac{d}{l_2}\right). \end{cases}$$

Auch in dem Argument dieser Tangenten tritt d nicht als gemeinschaftlicher Faktor auf. Es genügen der obigen Bedingung also nur die beiden Ausdrücke:

$$\begin{cases} \dfrac{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) - \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) + \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)} \\ \dfrac{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) - \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_1}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{l_2}\right)} \end{cases};$$

mithin muss der Wert von tg φ auf eine dieser beiden Formen gebracht werden, was durch Spezialisieren der Werte der Amplituden, der Winkel ω und der Gangunterschiede zu bewerkstelligen ist. Dass im Zähler und im Nenner des Wertes von tg φ statt der vier Summanden nur je zwei auftreten, wird nur dadurch zu erreichen sein, dass wir für die Werte der Winkel ω die Bestimmung treffen:

$$\omega_1 = \omega_3 = 0; \quad \omega_2 = \omega_4 = 90^0.$$

Dann lautet die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2 \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_2} + \frac{x_1 - x_2}{\lambda}\right) + a_4 \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_4} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right)}{a_1 \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + a_3 \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_3} + \frac{x_1 - x_3}{\lambda}\right)}$$

Durch weitere Vergleichung mit den beiden obigen Formen ergiebt sich die Bedingung:

$$\begin{cases} a_2 = a_4 \\ a_1 = a_3 \end{cases} \text{ und } \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_4. \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1} + \frac{x_1 - x_2}{\lambda}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_3} + \frac{x_1 - x_4}{\lambda}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_3} + \frac{x_1 - x_3}{\lambda}\right)}.$$

Ferner muss im Nenner die Summe zweier Sinus, im Zähler die Differenz zweier Cosinus auftreten, das heisst es muss sein:

$$\frac{x_1 - x_3}{\lambda} = \frac{4m}{4}; \quad \frac{x_1 - x_2}{\lambda} = \frac{4m_1 + 1}{4}; \quad \frac{x_1 - x_4}{\lambda} = \frac{4m_2 - 1}{4},$$

wenn m, m_1, m_2 ganze Zahlen sind. Dann ist:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{\cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) - \cos 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_3}\right)}{\sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_1}\right) + \sin 2\pi\left(\xi - \frac{d}{\lambda_3}\right)}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1} \operatorname{tg}\pi d\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\right).$$

Es muss endlich auch $a_1 = a_2$ sein, damit der Rotationswinkel φ der Dicke der Quarzplatte direkt proportional ist; dann aber ist der linear polarisierte Lichtstrahl zerlegt in zwei cirkulare Schwingungen von gleicher Amplitude aber entgegengesetzter Drehung und wir sind damit wieder auf Fresnels Hypothese als auf die allein mögliche zurückgeführt.

Litteratur.

F. Rudberg: Untersuchungen über die Brechung des farbigen Lichts im Bergkrystall und Kalkspat. Pogg. Ann. XIV. 45 (1828).

A. Fresnel: Extrait d'un mémoire sur la double réfraction particulière que présente le cristal de roche dans la direction de son axe. Ann. de chim. et de phys. (1) XXVIII. 147 (1825).

M. Biot: Sur les rotations que certaines substances impriment aux axes de polarisation des rayons lumineux. C. R. II. 41 (1819).

Airy: Abhandlung in den Transaction of the Cambridge Philos. Soc. Vol. IV (1829).

J. Mac Cullagh: Ueber die Gesetze der Doppelbrechung des Quarzes. Pogg. Ann. E. II. 425 (1848).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

M. Biot: Über eine neue physische Relation zwischen den Elementen der Naturkörper und den Einwirkungen der verschiedenen einfachen Strahlen auf sie. Pogg. Ann. XXXVIII. 192 (1836).

Babinet: Ueber die cirkulare Doppelbrechung. Pogg. Ann. XLII. 31 (1837).

A. Cauchy: Mémoire sur les lois de la dispersion plane et de la dispersion circulaire dans les milieux isophanes. C. R. XV. 1076 (1842).

J. Broch: Besondere Gesetze der Wellenbewegung. Rep. d. Phys. VII. 1 (1846).

J. Jamin: Mémoire sur la double réfraction elliptique du quartz. Ann. de chim. et de phys. (3) XXX. 55 (1850).

Clebsch: Über die cirkular polarisierenden Medien. Borch. Journ. LVII. 322 (1859).

Fr. Eisenlohr: Ueber die Erklärung der Farbenzerstreuung und des Verhaltens des Lichts in Krystallen. Pogg. Ann. CIX. 215 (1860).

W. Dove: Über die Absorbtion des Lichts in doppelt brechenden Körpern. Pogg. Ann. CX. 279 (1860).

C. Neumann: Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichts. Halle (1883).

V. v. Lang: Zur Theorie der Cirkularpolarisation. Pogg. Ann. CXIX. 74 (1863).

J. Stefan: Ein Versuch über die Natur des unpolarisierten Lichts und die Doppelbrechung des Quarzes in der Richtung seiner optischen Axe. Wiener Ber. L. 380 (1865).

P. Dessain: Untersuchung über die Drehwirkung, welche der Quarz auf die Polarisationsebene der drehbaren Strahlen des Spektrums ausübt. Pogg. Ann. CXXVIII. 487 (1866).

J. Stefan: Über Interferenzversuche mit dem Soleilschen Doppelquarz. Wiener Ber. LIII. 548 (1866).

V. v. Lang: Über die Lichtgeschwindigkeit im Quarz. Pogg. Ann. CXL. 460 (1870).

M. Croullebois: Mémoire sur la double réfraction elliptique du quartz. Ann. de chim. et de phys. (4) XXVIII. 433 (1873).

L. Boltzmann: Über den Zusammenhang zwischen der Drehung der Polarisationsebene und der Wellenlänge der verschiedenen Farben. Pogg. Ann. Jubelband 128 (1874).

E. Mach: Bemerkungen über die Änderung der Lichtgeschwindigkeiten im Quarz durch Druck. Pogg. Ann. CLVI. 639 (1875).

V. v. Lang: Über die Abhängigkeit der Cirkularpolarisation des Quarzes von der Temparatur. Wiener Ber. LXXI. 707 (1875).

J. L. Soret et Ed. Sarasin: Sur la polarisation rotatoire du quartz. C. R. LXXXI. 610 (1875).

M. Croullebois: Sur le pouvoir rotatoire du quartz dans le spectre ultra-violet. C. R. LXXXI. 656 (1875).

J. L. Soret et Ed. Sarasin: Über die Polarisationsdrehung des Quarzes. Pogg. Ann. CLVII. 447 (1876).

V. v. Lang. Über die Drehung der Polarisationsebene durch den Quarz. Wiener Ber. LXXIV. 209 (1877).

L. Sohncke: Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. Mathem. Ann. IX. 504 (1876).

H. Landolt: Untersuchungen über optisches Drehvermögen. Ann. der Chem. CLXXXIX. 241 (1877).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

J. Soret et Ed. Sarasin: Sur la polarisation rotatoire du quartz. C. R. LXXXIV. 1362 (1877).

J. Sohncke: Die Glimmerkombination von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen. Pogg. Ann. E. VIII. 16 (1878).

— — Über den Einfluss der Temperatur auf das optische Drehvermögen des Quarzes und des chlorsauren Natrons. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. III. 516 (1879).

V. v. Lang: Theorie der Cirkularpolarisation. Pogg. Ann. E. VIII. 608 (1878).

J. Joubert: Sur le pouvoir rotatoir du quartz et sa variation avec la temperature. Journal de Phys. VIII. 1 (1879).

Gouy: Sur la théorie de la double réfraction circulaire. C. R. XC. 992 (1880).

— — Sur la théorie des phénomènes d'interference ou intervient la polarisation rotatoire. C. R. CX. 1121 (1880).

M. Croullebois: Drei Abhandlungen in den Comptes rendus XCII. (1881).

E. Ketteler: Theorie der cirkular und elliptisch polarisierenden Mittel. Ann. d. Phys. u. Chem. N. F. XVI. 86 (1882).

J. L. Soret et Ed. Sarasin: Sur la polarisation rotatoire du quartz. C. R. XCIII. 635 (1882).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

J. Soret et Ed. S du quartz. C. R. LXXXIV. 1362 (1877).
J. Sohncke: Die l das optische Drehvermögen von Krystallen.
— — Über den he Drehvermögen des Quarzes und des chlorsa . N. F. III. 516 (1879).
V. v. Lang: The nn. E. VIII. 608 (1878).
J. Joubert: Sur a variation avec la temperature. Journal de
Gouy: Sur la thé C. R. XC. 992 (1880).
— — Sur la thé intervient la polarisation rotatoire. C. R. CX.
M. Croullebois: endus XCII. (1881).
E. Ketteler: The ierenden Mittel. Ann. d. Phys. u. Chem. N.
J. L. Soret et Ed. lu quartz. C. R. XCIII. 635 (1882).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf