Zur Geschichte

des

Problems der Anziehung

der

Ellipsoide.

II. Teil. Forts. v. 1883.

(Laplace und Legendre).

Von

Dr. F. Grube,
Oberlehrer.

REALGYMNASIUM ... BIBLIOTHEK

Beilage zum Programm der Königlichen Domschule zu Schleswig Ostern 1888
und Fortsetzung der Programm-Abhandlung von Ostern 1883.

Schleswig.
Druck der Buchdruckerei der Taubstummen-Anstalt (Julius Bergas).
1888.

1888. Progr. Nr. 273.

9SC
5 (1888)

1083, 22b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

HTC00259446 2

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Legendre und Laplace.

Durch d'Alembert und Lagrange war also das Attraktionsproblem für irgend einen inneren Punkt gelöst: es war ihnen nur nicht geglückt, die Anziehung auf den einfachsten Ausdruck zu bringen. Dies war Legendre vorbehalten. Derselbe hat sich in zwei grösseren Abhandlungen mit unserem Problem beschäftigt. Seine erste Abhandlung (Recherches sur l'attraction des Sphéroïdes homogènes) ist in den Mémoires de Mathématique et de physique, présentés à l'Acad. par divers savans, T. x, Paris 1785 veröffentlicht, die zweite (Mémoire sur les intégrales doubles) in der Histoire de l'Acad. roy. des sciences 1788. In der ersten Arbeit finden wir zunächst die Anziehung für innere Punkte zum ersten Mal durch das heute als Endergebnis bekannte elliptische Integral dargestellt. Somit hat das Problem für innere Punkte durch Legendre seine vollständige Lösung erhalten.

In Bezug auf äussere Punkte war das Problem vor Legendre, selbst für das Rotationsellipsoid, nur für die auf einer der drei Axen gelegenen Punkte gelöst. In seiner ersten Arbeit hat Legendre für das Rotationsellipsoid die Lösung des Problems auch für einen beliebigen äusseren Punkt zum Abschluss gebracht. Er gelangt nämlich zu einer Formel für die Anziehung, aus der sich die allgemeine Gültigkeit des Maclaurinschen Satzes für zwei konfokale Rotationsellipsoide ergiebt. Er spricht hier schon die Vermutung aus, dass der Satz auch für das dreiaxige Ellipsoid allgemein gültig sei:

„La méthode que j'ai suivie n'étant point applicable aux Sphéroïdes qui ne sont pas de révolution, je n'en ai tiré aucune conclusion pour ceux dont toutes les coupes sont elliptiques. J'ai cependant lieu de croire que relativement à ces derniers, on peut généraliser ainsi le théorême de M. Maclaurin. L'attraction d'un tel Sphéroïde sur un point situé au dehors, est égale à celle d'un autre Sphéroïde de même masse, dont les ellipses principales auraient les mêmes foyers, et dont la surface passerait par le point attiré. J'aurais pu insérer ici quelques tentations que j'ai faites pour la démonstration de ce théorême; mais comme elles n'ont pas eu un succes complet, j'ai mieux aimé m'entenir au simple énoncé.

Diese Verallgemeinerung bildet den Gegenstand der zweiten Abhandlung, in welcher Legendre durch direkte Integration zu der allgemeinen Formel für die Anziehung gelangt, die ein dreiaxiges Ellipsoid auf irgend einen äusseren Punkt ausübt; aus dieser Formel ergiebt sich der in Rede stehende Satz ohne weiteres.

Zwischen diese beiden Arbeiten von Legendre fallen die berühmten Laplaceschen Werke: Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes. Paris, 1784, und Théorie des Attractions des Sphéroïdes et de la figure des Planètes (Historie de l'Acad. roy. des sciences 1782, publ. 1785), in welchen die Untersuchungen über unser Problem ihren Höhepunkt erreicht haben. Hier finden wir nämlich den ersten Beweis der allgemeinen Gültigkeit des Maclaurinschen Satzes, der deshalb auch von manchen Autoren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Satz des Laplace genannt wird, so namentlich von Todhunter, in seinem vortrefflichen Werke History of the theories of attraction and the figure of the earth, from the time of Newton to that of Laplace. 2 Vol. London 1873. Aus dem genannten Satz entwickelt Laplace dann mit Hülfe der bekannten Formeln für die Anziehung in Bezug auf innere Punkte die allgemeinen Formeln für äussere Punkte. Für das dreiaxige Ellipsoid hat demnach Laplace zuerst die Anziehung, die ein beliebiger äusserer Punkt erleidet, bestimmt, nachdem Legendre für das Rotationsellipsoid dieselbe Aufgabe bereits gelöst hatte.[1]) Übrigens hat Laplace auch eine allen Anforderungen genügende Lösung für innere Punkte gegeben.

Legendre und Laplace haben beide das Problem nach allen Seiten hin vollständig gelöst: was aber zu wünschen übrig blieb, das ist eine einfachere Lösung. In diesem Sinne hat sich schon Lagrange über die Lösungen von Legendre und Laplace ausgesprochen:

On ne peut regarder leurs solutions que comme des chefs-d'oeuvres d'analyse, mais on peut désirer encore une solution plus directe et plus simple; et les progrès continuels d'analyse donnent lieu de l'espérer (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1793, p. 263).

Legendre.

Recherches sur l'attraction des Sphéroïdes homogènes. 1785.

Diese Abhandlung, Legendres Erstlingswerk, wurde schon 1782 der Pariser Akademie eingereicht[2]), in der Geschichte der Akademie vom Jahre 1783 S. 28 (gedruckt 1786) unter den Mémoires approuvés par l'Académie, en 1783, et destinés par elle à être imprimés dans le Recueil des Savans-Etrangers genannt und 1785 in T. x der Savans-Etrangers veröffentlicht.

Ce beau travail ne tarda pas à lui ouvrir les portes de cette illustre société; il y entra en 1783, à la mort de d'Alembert, et comme pour la consoler de cette immense perte . . . . Ce que l'on remarque surtout dans ce Mémoire fut la science analytique de l'auteur; elle se révélait par l'introduction d'une nouvelle espèce de fonctions et par l'usage qu'il en savait faire.[2])

Um die Anziehung zu bestimmen, die das dreiaxige Ellipsoid auf einen in der Verlängerung einer seiner Axen liegenden Punkt ausübt, zerlegt Legendre dasselbe in ähnlicher Weise, wie d'Alembert in seiner ersten Methode, um die Anziehung im Endpunkt einer Axe zu erhalten.

C sei der Mittelpunkt des Ellipsoides, a die Halbaxe, auf deren Verlängerung der angezogene Punkt S liegt, b und c die beiden anderen Halbaxen; die Strecke CS werde r genannt. Das Ellipsoid wird zunächst durch Ebenen zerlegt, die durch S gehen und senkrecht auf der Ebene der Halbaxen a, c stehen. Das zwischen je zwei auf einander folgenden Ebenen liegende Stück wird wieder in abgestumpfte Pyramiden zerlegt, die ihre Spitze in S haben. Nennt man den Winkel, den eine jener Ebenen mit SC bildet, ψ, und den Winkel, den die Kante einer der abgestumpften Pyramiden mit ihrer Projektion auf die Ebene der

[1]) Dass die Arbeit von Legendre in den Mémoires présentés par divers savans, obgleich erst 1785 veröffentlicht, in der That als die frühere, und die genannten Abhandlungen von Laplace als die späteren anzusehen sind, darüber s. Heine in der Vorrede zu seinem „Handbuch über Kugelfunktionen." (Erste Auflage).

[2]) „Sur lestravaux et les écrits de M. Legendre" par M. le baron Maurice. (Bibliothèque universelle de Genève, janvier) 1833.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Halbaxen a, c bildet, φ, so ergiebt sich für die Anziehung, die jene abgestumpfte Pyramide in der Richtung SC auf S ausübt, der Ausdruck:

$$\frac{2\,abcd\,\varphi\,d\,\psi\cos^2\varphi\cos\psi}{\sqrt{(a^2-r^2)\,c^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi\,(a^2\sin^2\psi+c^2\cos^2\psi-r^2\sin^2\psi)}\,(a^2c^2\sin^2\varphi+a^2b^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+a^2c^2\cos^2\varphi\cos^2\psi)}.$$

Durch Integration nach ψ und nachherige Substitution von $\frac{b\sin\theta}{\sqrt{r^2+b^2-a^2}}$ statt $\sin\varphi$ erhält man für die Anziehung in S

$$\frac{3\,Mr}{(a^2-c^2)\sqrt{r^2+b^2-a^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\theta\cos\theta\left[\sqrt{\frac{r^2+b^2-a^2+(c^2-b^2)\sin^2\theta}{r^2+b^2-a^2+(a^2-b^2)\sin^2\theta}}-\sqrt{\frac{r^2+c^2-a^2}{r^2}}\right],$$

wo M die Masse des Ellipsoides bedeutet.

Setzt man $r=a$, so erhält man für die Anziehung am Endpunkt der Axe, wenn man zugleich

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}=\beta,\ \frac{a^2-c^2}{a^2}=\gamma,\ \frac{\sin^2\theta}{1-\beta+\beta\sin^2\theta}=z^2$$

setzt, den Ausdruck

$$\frac{3\,M}{a^2}\int_0^1\frac{z^2\,d\,z}{\sqrt{(1-\beta z^2)\,(1-\gamma z^2)}}.$$

Dies ist das von d'Alembert gesuchte elliptische Integral für die Anziehung am Endpunkt der Axe $2\,a$ eines dreiaxigen Ellipsoides.

Für die Anziehung, die ein äusserer Punkt erleidet, der auf der Axe $2\,a$ in der Entfernung r vom Mittelpunkt liegt, ergiebt sich heraus vermittelst des Maclaurinschen Satzes

$$\frac{3\,M}{r^2}\int_0^1\frac{z^2\,d\,z}{\sqrt{(1-\beta z^2)\,(1-\gamma z^2)}},\ \beta=\frac{a^2-b^2}{r^2},\ \gamma=\frac{a^2-c^2}{r^2}.$$

Legendre bemerkt, dass dieser Ausdruck für das Rotationsellipsoid integrierbar wird: in der Ebene des Äquators, in der Entfernung r vom Mittelpunkt, ist die Anziehung gleich

$$\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\theta-\frac{1}{2}\sin 2\,\theta}{\frac{2}{3}\sin^3\theta},\ \sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{r},$$

und auf der verlängerten Axe

$$\frac{M}{r^2}\cdot\frac{\operatorname{tang}\lambda-\lambda}{\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\lambda},\ \operatorname{tang}\lambda=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{r},$$

wo a den Radius des Äquators, b die halbe Rotationsaxe bedeutet. Diese Resultate stimmen mit den von Maclaurin gegebenen vollständig überein.

Hierauf wendet Legendre sich dem Hauptgegenstand seiner Untersuchung zu, der Ermittelung der Anziehung, die ein Rotationsellipsoid auf einen beliebigen äusseren Punkt ausübt. Er zeigt, dass wenn man für einen beliebigen Umdrehungskörper, dessen Meridian durch den Äquator in zwei kongruente Teile geteilt wird, die Attraktion für die auf der verlängerten Rotationsaxe liegenden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Punkte kennt, daraus die Anziehung für jeden beliebigen anderen äusseren Punkt gefunden werden kann.

Historisch ist die vorliegende Abhandlung Legendres in doppelter Hinsicht interessant: einmal begegnen wir hier zum ersten Mal einer Entwicklung nach Kugelfunktionen[1]); sodann finden wir hier die erste Anwendung (nicht Erwähnung[2]) der jetzt unter dem Namen Potential allgemein bekannten Funktion, mit der Bemerkung, dass Laplace ihn darauf aufmerksam gemacht habe.

Der Mittelpunkt des Rotationskörpers sei C, der angezogene Punkt S; $CS = r$; der Winkel, den die Rotationsaxe mit r bildet, ω; die Entfernung irgend eines Massenelementes M vom Mittelpunkt z; der Winkel, den z mit der Rotationsaxe bildet, ψ; der Winkel, den der Meridian, in welchem M liegt, mit dem Meridian bildet, in dessen Ebene S liegt, θ; der Winkel, den z mit r bildet, μ. Dann ist

$$MS^2 = r^2 - 2\,rz\cos\mu + z^2$$

$$\cos\mu = \cos\omega\cos\psi + \sin\omega\sin\psi\cos\theta,$$

und die Komponente der Anziehung in der Richtung der Anziehung SD

$$P = \int \frac{(r - z\cos\mu)\,dM}{(r^2 - 2\,rz\cos\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

wo $dM = z^2\,dz\,d\theta\,d\psi\sin\psi$. Die Integration nach z erstreckt sich von $z = 0$ bis $z = \pm Z$, wo Z den Wert des z an der Oberfläche bedeutet, und die Integrationen nach θ und ψ zwischen den Grenzen 0 und π. Auf dem Umstand, dass die Integrationen nach z und θ, wie sich zeigen wird, ausführbar sind, ohne die Gestalt des Meridians zu kennen, beruht das oben erwähnte Theorem.

Legendre bemerkt, dass die Integration nach z sich allerdings ohne weiteres ausführen lasse, dass er aber, um die weiteren Integrationen dadurch zu vereinfachen, das Differential

$$\frac{(r - z\cos\mu)\,z^2\,dz}{(r^2 - 2\,rz\cos\mu + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in eine Reihe entwickeln werde. Das Resultat dieser Entwicklung ist folgende Reihe

$$\frac{z^2\,dz}{r^2}\left[1 + 3\,A\,\frac{z^2}{r^2} + 5\,B\,\frac{z^4}{r^4} + 7\,C\,\frac{z^6}{r^6} + \ldots\right] \ldots\ldots (\alpha)$$

wo die Grössen A, B, . . . Kugelfunktionen resp. 2ter, 4ter . . . Ordnung sind, nämlich:

$$A = \frac{3}{2}\cos^2\mu - \frac{1}{2}$$

---

[1]) S. die Vorrede zu Heines Handbuch der Kugelfunktionen; ferner Todhunter History etc. Art. 794: The introduction of the coefficients now called Laplace's (Kugelfunktionen) and their application to the remarkable theorem (s. o.) commence a new era in the mathematical physics. Moreever the existence (hierüber s. jedoch die folgende Note) and the value of the potentialfunction were now first manifested. It is not too much to say that this memoir is the foundation for all that Laplace added in the theories of Attraction and the Figure of the Earth to the works of Maclaurin and Clairaut.

[2]) Lagrange hat zuerst die Bemerkung gemacht, dass die Attraktionskomponenten sich als die partiellen Differentialquotienten jener Funktion nach den Koordinaten des angezogenen Punktes darstellen lassen. (Remarques générales sur le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances. Nouv. Mém. de Berlin. Année 1777; publ. 1779). Legendre und Laplace scheinen keine Kenntnis von dieser Abhandlung Lagrange's gehabt zu haben. Näheres s. Bacharach, Abriss der Geschichte der Potentialtheorie. Göttingen 1883.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$B = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \mu - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} 2 \cos^2 \mu + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

u. s. w. Die Integration dieser Reihe ergiebt

$$\frac{2 Z^3}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3 A}{5} \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5 B}{7} \frac{Z^4}{r^4} + \ldots \right].$$

Legendre integriert nun zunächst den Ausdruck

$$\frac{2 Z^3}{r^2} d\theta \, d\psi \sin \psi \left[\frac{1}{3} + \frac{3 A}{5} \frac{Z^2}{r^2} + \ldots \right]$$

nach θ, indem er bemerkt, dass Z eine Funktion von ψ alleine sei, die von der Gestalt des Meridians abhänge, dass es mithin genüge, die Ausdrücke $d\theta$, $A d\theta$, $B d\theta \ldots$, und zwar zwischen den Grenzen 0 und π zu integrieren. Er substituiert in A, B, ... für $\cos \mu$ seinen Wert $\cos \omega \cos \psi + \sin \omega \sin \psi \cos \theta$, setzt

$$P' = \cos^2 \omega \cos^2 \psi + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 2} \sin^2 \omega \sin^2 \psi$$

$$P'' = \cos^4 \omega \cos^4 \psi + \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cos^2 \omega \cos^2 \psi \sin^2 \omega \sin^2 \psi + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4} \sin^4 \omega \sin^4 \psi$$

u. s. w., ferner

$$A' = \frac{3}{2} P' - \frac{1}{2}$$

$$B' = \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} P'' - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2 P' + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$$

und erhält so

$$\int d\theta = \pi, \int A \, d\theta = A' \pi, \int B \, d\theta = B' \pi, \ldots$$

mithin für das gesuchte Integral

$$\frac{2 \pi Z^3 d\psi \sin \psi}{r^2} \left[\frac{1}{3} + \frac{3 A'}{5} \frac{Z^2}{r^2} + \frac{5 B'}{7} \frac{Z^4}{r^4} + \ldots \right].$$

Die weitere Entwicklung beruht auf dem merkwürdigen Umstand, dass die Grössen A', B', ... sich in zwei Funktionen von ω und ψ resp. allein zerlegen lassen, nämlich

$$A' = \left(\frac{3}{2} \cos^2 \omega - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right)$$

$$B' = \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \omega - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cos^2 \omega + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right) \cdot \left(\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} \cos^4 \psi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot 2 \cos^2 \psi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)$$

u. s. w. Den Beweis dieses algebraischen Satzes, auf den wir hier nicht weiter eingehen, giebt Legendre am Schluss seiner Abhandlung.

Nennt man die Masse des Körpers M, so ist $4 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z^3 \, d\psi \sin \psi = 3 M$; setzt man ferner

$$4 \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z^5 \, d\psi \sin \psi \left(\tfrac{3}{2} \cos^2 \psi - \tfrac{1}{2} \right) = 3 M \alpha$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$4\,\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} Z^7\, d\,\psi \sin\psi \left(\frac{5\,.\,7}{2\,.\,4}\cos^4\psi - \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\,.\,2\cos^2\psi + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right) = 3\,M\,\beta$$

u. s. w., so hat man

$$(1.)\qquad P = \frac{3\,M}{r^2}\left[\tfrac{1}{3} + \frac{3\,\alpha}{5\,r^2}\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\omega - \tfrac{1}{2}\right) + \frac{5\,\beta}{7\,r^4}\left(\frac{5\,.\,7}{2\,.\,4}\cos^4\omega - \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\,.\,2\cos^2\omega + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right) + \cdots\right],$$

wo die Grössen α, β, . . . nur von der Gestalt der Meridiancurve abhängen. Nachdem Legendre bemerkt hat, dass die Komponente

$$Q = \int \frac{(\cos\psi\sin\omega - \cos\omega\sin\psi\cos\theta)\,z\,d\,M}{(r^2 - 2\,r\,z\cos\omega + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

welche in der Ebene des Meridians liegt und senkrecht gegen SC gerichtet ist, sich auf ähnliche Weise bestimmen lasse, fährt er fort:

mais on y parvient bien plus facilement à l'aide d'un Théorême, que M. de la Place a bien voulu me communiquer: voici en quoi il consiste. Soit V la somme des particules du corps, divisées par leurs distances au point attiré, c'est-à-dire $V = \int \frac{d\,M}{(r^2 - 2\,r\,z\cos\mu + z^2)^{\frac{1}{2}}}$. Cette seule intégrale suffira pour déterminer, par ses differences partielles, les deux forces P et Q, et on en conclura

$$P = -\frac{d\,V}{d\,r},\quad Q = -\frac{1}{r}\,\frac{d\,V}{d\,\omega}.$$

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen entwickelt Legendre den Wert für V, und erhält dann mit Hülfe der zweiten

$$Q = \frac{3\,M}{r^2}\sin\omega\cos\omega\left[\frac{3\,\alpha}{5\,r^2} + \frac{\beta}{7\,r^4}\left(\frac{5\,.\,7}{2}\cos^2\omega - \frac{3\,.\,5}{2}\right) + \cdots\right].$$

Aus diesen Formeln für P und Q erkennt man nun, dass wenn man nur die Anziehung für die auf der Axe gelegenen Punkte kennt, man daraus sofort die Komponenten für jeden anderen Punkt erhalten kann. In der That, wenn für einen auf der Axe in der Entfernung r vom Mittelpunkt gelegenen Punkt die Anziehung den Wert

$$(2.)\qquad \frac{M}{r^2}\left(1 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^4} + \cdots\right)$$

hat, so ergiebt sich, wenn man in (1.) $\omega = 0$ setzt — wodurch die in P vorkommenden Funktionen von ω der Einheit gleich werden — und den daraus für P resultierenden Wert mit (2.) vergleicht:

$$P = \frac{M}{r^2}\left[1 + \frac{A}{r^2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\omega - \frac{1}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{5\,.\,7}{2\,.\,4}\cos^4\omega - \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\,.\,2\cos^2\omega + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right) + \cdots\right]$$

$$Q = \frac{M\sin\omega\cos\omega}{r^2}\left[\frac{A}{r^2} + \frac{B}{5\,r^4}\left(\frac{5\,.\,7}{2}\cos^2\omega - \frac{3\,.\,5}{2}\right) + \cdots\right].$$

Hieraus erhält man für die Komponenten X und Y, die der Axe und dem Äquator resp. parallel gerichtet sind, wenn man bedenkt, dass

$$X = P\cos\omega - Q\sin\omega,\quad Y = P\sin\omega + Q\cos\omega,$$

$$X = \frac{M\cos\omega}{r^2}\left[1 + \frac{A}{r^2}\left(\frac{5}{2}\cos^2\omega - \frac{3}{2}\right) + \frac{B}{r^4}\left(\frac{7\,.\,9}{2\,.\,4}\cos^4\omega - \frac{5\,.\,7}{2\,.\,4}\,.\,2\cos^2\omega + \frac{3\,.\,5}{2\,.\,4}\right) + \cdots\right]$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$Y = \frac{M \sin\omega}{r^2}\Big[1 + \frac{A}{3\,r^2}\Big(\frac{3\,.\,5}{2}\cos^2\omega - \frac{1\,.\,3}{2}\Big)$$
$$+ \frac{B}{5\,r^4}\Big(\frac{5\,.\,7\,.\,9}{2\,.\,4}\cos^4\omega - \frac{3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4}\,.\,2\cos^2\omega + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4}\Big) + \ldots\Big].$$

Diese Formeln wendet Legendre nun auf den Fall des Rotationsellipsoides an Für die in der verlängerten Axe gelegenen Punkte war die Anziehung

$$\frac{M}{r^2}\,\frac{\operatorname{tang}\lambda - \lambda}{\frac{1}{3}\operatorname{tang}^3\lambda},\ \operatorname{tang}\lambda = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{r}.$$

Wenn man diese Grösse in eine Reihe verwandelt, und $a^2 - b^2 = c^2$ setzt, so kommt

$$\frac{M}{r^2}\Big[1 - \frac{3}{5}\frac{c^2}{r^2} + \frac{3}{7}\frac{c^4}{r^4} - \frac{3}{9}\frac{c^6}{r^6} + \ldots\Big];$$

mithin sind die Komponenten X, Y für irgend einen äusseren Punkt

$$X = \frac{M\cos\omega}{r^2}\Big[1 - \frac{3}{5}\frac{c^2}{r^2}\Big(\frac{5}{2}\cos^2\omega - \frac{3}{2}\Big) + \ldots\Big]$$
$$Y = \frac{M\sin\omega}{r^2}\Big[1 - \frac{3}{5}\frac{c^2}{3\,r^2}\Big(\frac{3\,.\,5}{2}\cos^2\omega - \frac{1\,.\,3}{2}\Big) + \ldots\Big].$$

Da die Grössen keine andern Funktionen von a und b enthalten als c^2, d. i. $a^2 - b^2$, so ist hiermit der Maclaurinsche Satz für das Rotationsellipsoid allgemein bewiesen.

Mit Hülfe dieses Satzes führt Legendre nunmehr den Fall eines äusseren Punktes auf den bereits durch Maclaurin erledigten Fall zurück, wo der angezogene Punkt auf der Oberfläche des Rotationsellipsoides liegt, um die einfachsten Formeln für X und Y zu erhalten. Er substituiert nämlich für das gegebene Ellipsoid ein demselben konfokales von derselben Masse, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt S geht: letzteres übt dieselbe Anziehung auf S aus, wie ersteres. Die Axen des letzteren seien A, B, so hat man zur Bestimmung von A und B die beiden Gleichungen

$$A^2 - B^2 = a^2 - b^2 = c^2$$
$$r^2 \sin^2\omega = \frac{A^2}{B^2}(B^2 - r^2\cos^2\omega).$$

Substituiert man die hieraus resultierenden Werte in den Maclaurinschen Formeln für die Anziehung, die das letztere Ellipsoid auf S ausübt, so erhält man für die Komponenten X und Y der Anziehung, die das gegebene Ellipsoid mit den Halbaxen a und b auf S ausübt, folgende Ausdrücke

$$X = \frac{3\,M\,r\cos\omega}{c^3}(\operatorname{tang}\lambda - \lambda)$$
$$Y = \frac{3\,M\,r\sin\omega}{2\,c^3}(\lambda - \tfrac{1}{2}\sin 2\lambda),$$

wo $\operatorname{tang}\lambda = \frac{c}{B}$.

Zum Schluss müssen wir noch ein Bedenken gegen die Legendresche Methode aussprechen. Die Reihe (α) ist nämlich nur dann für jedes z konvergent, wenn jedes $z < r$ ist, d. h. wenn der angezogene Punkt ausserhalb der Kugelfläche liegt, die dem Ellipsoid koncentrisch ist und die grössere Axe des letzteren zum Durchmesser hat. Es fragt sich also, ob die aus der Reihe (α) gezogenen Resultate auch für diejenigen äusseren Punkte gelten,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die innerhalb jener Kugelfläche liegen. Legendre übergeht dies Bedenken mit Stillschweigen: er setzt offenbar — wie aus einer Stelle seiner zweiten Abhandlung hervorgeht — als selbstverständlich voraus, dass die Anziehung für alle äusseren Punkte durch einunddieselbe Formel ausgedrückt werden müsse. Besagte Stelle lautet: . . . car il ne doit exister qu'une formule analytique qui représente la valeur d'attraction et cette formule ne suppose d'autre condition, si non que le point attiré est hors du sphéroïde ou sur sa surface.

Diese Behauptung müsste aber doch erst bewiesen werden, ehe man die folgende Behauptung:

„Donc la formule trouvée pour le cas fictif ne doit différer en rien de la formule générale"

als richtig anerkennen kann. Es giebt in der That Formen der anziehenden Masse, für welche nicht derselbe Ausdruck der Attractionskomponente für alle ausserhalb der Masse liegenden Punkte gültig ist. Ein Beispiel dieser Art bietet der elliptische Cylinder dar. Der von mir (Schlömilchs Zeitschrift XIV. p. 269 u. f.) entwickelte Ausdruck irgend einer der den beiden Axen der Grundfläche des Cylinders parallelen Komponenten ist nicht für alle äusseren Punkte von derselben Form, sondern nimmt vielmehr zwei verschiedene Formen an, je nachdem der angezogene (äussere) Punkt innerhalb oder ausserhalb der Ebenen der beiden Grundflächen liegt. Dieselbe Erscheinung bieten die Riemannschen Formeln für die genannten Komponenten dar. (S. Schwere, Elektricität und Magnetismus, nach den Riemannschen Vorlesungen bearbeitet von Hattendorf, p. 100 u. f.) Für die übrigen Körperstumpfe zweiten Grades gilt dasselbe. (S. Schlöm. Zeitschr. a. a. O.) Auch für den von mir (nach einer anderen Methode) gefundenen Ausdruck der der Cylinderaxe parallelen Komponente eines Cylinders findet dasselbe statt. (S. Schlöm. Zeitschr. 9. Jahrgang, p. 278.) Dagegen haben die von Röthig für die Komponenten des Cylinders aufgestellten Ausdrücke alle drei dieselbe Form für jede Lage des angezogenen Punktes: es ist sogar gleichgültig, ob derselbe ein innerer oder ein äusserer ist. (S. Crelles Journal, B. 61, p. 183.)

Laplace.

Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes. 1784.

Théorie des attractions des sphéroïdes etc. (Histoire de l'Ac. roy. des sciences. Année 1782. Gedruckt 1785).

Mécanique céleste. T. II. Livre III. Chap. I. (An VII = 1799).

Die Laplacesche Lösung für innere Punkte fällt genau mit der von Lagrange gegebenen überein: Laplace bedient sich sogar derselben Buchstaben. Um so mehr fällt es auf, dass er die Arbeit von Lagrange gar nicht erwähnt.

Laplace bezeichnet die Komponenten der Anziehung, die den Axen X, Y, Z eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallel gerichtet sind, mit A, B, C resp.; die Koordinaten irgend eines Punktes der anziehenden Masse mit x, y, z, die des angezogenen Punktes mit a, b, c; die Verbindungslinie der Punkte (x, y, z) und (a, b, c) mit r; das Komplement des Winkels, den r mit der Ebene der y und z bildet, mit p; den Winkel, den die Projektion

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von r auf diese Ebene mit der Axe der y bildet, mit q. Den Komponenten legt er die Lagrangeschen Ausdrücke zu Grunde:

$$A = \int dr\, dp\, dq \sin p \cos p$$

$$B = \int dr\, dp\, dq \sin^2 p \cos q$$

$$C = \int dr\, dp\, dq \sin^2 p \sin q,$$

die Integrationen auf alle Elemente der anziehenden Masse ausgedehnt.

Die Integration nach r ergiebt für innere Punkte:

$$(1.) \qquad A = \int_0^\pi \int_0^\pi (r' + r)\, dp\, dq \sin p \cos q, \text{ u. s. w.},$$

wo r und r' die beiden Segmente der durch den angezogenen Punkt gezogenen, von der Masse begrenzten Geraden bedeuten; für äussere Punkte:

$$A = \iint (r' - r)\, dp\, dq \sin p \sin q, \text{ u. s. w.},$$

wo r und r' die Werte bezeichnen, die r bei seinem Eintritt und Austritt resp. annimmt, während die Grenzen der Integrationen nach p und q durch die Gleichung $r' - r = 0$ bestimmt sind.

Die Gleichung des Ellipsoides sei

$$x^2 + my^2 + nz^2 = k^2.$$

Setzt man hierin für x, y, z resp. die Werte

$$a - r \cos p,\ b - r \sin p \cos q,\ c - r \sin p \sin q,$$

und bestimmt aus der resultierenden Gleichung die beiden Grössen r und r', indem man der Kürze wegen setzt

$$L = \cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q$$
$$J = a \cos p + mb \sin p \cos q + nc \sin p \sin q$$
$$R = J^2 + (k^2 - a^2 - mb^2 - nc^2)\, L,$$

so erhält man für innere Punkte

$$A = 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dp\, dq\, J \sin p \cos p}{L}, \text{ u. s. w.},$$

und für äussere Punkte

$$\left.\begin{aligned} A &= 2 \iint \frac{dp\, dq \sin p \cos p \sqrt{R}}{L}, \\ B &= 2 \iint \frac{dp\, dq \sin^2 p \cos q \sqrt{R}}{L}, \\ C &= 2 \iint \frac{dp\, dq \sin^2 p \sin q \sqrt{R}}{L}. \end{aligned}\right\} (2.)$$

Die drei letzten Integrale erstrecken sich auf alle Werte p, q, für welche $R \geqq 0$, und zugleich $J > 0$ ist. Letztere Bedingung, $J > 0$, fehlt bei Laplace.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man die Integrationsgrenzen in (1.) beachtet, so ergiebt sich leicht für innere Punkte:

$$A = 2\,a \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{dp\,dq \sin p \cos^2 p}{\cos^2 p + m \sin^2 p \cos^2 q + n \sin^2 p \sin^2 q}.$$

Dieser Ausdruck lässt sowohl eine Integration nach p als auch nach q zu. Lagrange, dem die Möglichkeit einer Integration nach q offenbar entgangen war, integrierte nach p und erhielt dadurch, wie bemerkt, denselben komplicierten Ausdruck, zu dem auch d'Alembert, aus demselben Grunde gelangt war[1]): Laplace dagegen integriert, aber ohne jede weitere Bemerkung, nach q, und erhält dadurch allerdings den einfachsten Ausdruck für A, in Form eines elliptischen Integrals. Die Integration nach p ergiebt zunächst

$$A = \frac{2\,a\,\pi}{\sqrt{mn}} \int_0^\pi \frac{dp \sin p \cos^2 p}{\sqrt{\left(1 + \frac{1-m}{m}\cos^2 p\right)\left(1 + \frac{1-n}{n}\cos^2 p\right)}},$$

und daraus folgt weiter

$$A = \frac{3\,a\,M}{k^3}\,F,$$

wo $M = \frac{4}{3}\,\pi\,\frac{k^3}{\sqrt{mn}}$ die Masse des Ellipsoides bedeutet, und

$$F = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+\mu^2 x^2)\,(1+\mu'^2 x^2)}},$$

$$\mu^2 = \frac{1-m}{m},\ \mu'^2 = \frac{1-n}{n}.$$

Die Komponenten B und C drückt Laplace durch dasselbe Integral F, von welchem A abhängt, aus:

$$B = \frac{3\,b\,M}{k^3}\,\frac{d\,(\mu\,F)}{d\,\mu},\ C = \frac{3\,c\,M}{k^3}\,\frac{d\,(\mu'\,F)}{d\,\mu'}.$$

Setzt man, um die Anziehung am Endpunkt der Axe $2\,k$ zu erhalten, in die obige Formel für A statt a den Wert k, so erhält man genau denselben Ausdruck, den Legendre für diesen Fall erhalten hat. Der Unterschied in den Methoden Legendres und Laplaces besteht darin, dass ersterer das Ellipsoid in derselben Weise in Elemente zerlegte, wie d'Alembert in seiner ersten Methode, aus welcher er die Formel (A) erhielt, während letzterer die Zerlegung in derselben Weise vornimmt, wie d'Alembert in seiner zweiten Methode, die ihn auf den Ausdruck (B) führte. (S. Teil I, p. 10 und 11). Übrigens hatte d'Alembert mit seiner ersten Methode aus demselben Grunde nicht den erwünschten Erfolg, aus welchem seine zweite Methode ihn — und zugleich Lagrange — nicht auf den einfachsten Ausdruck für die Anziehung führte: er hätte auch hier die Integrationen nach den beiden veränderlichen Winkeln in anderer Reihenfolge ausführen müssen, er hätte, wie Legendre gethan, die Integration nach ψ, anstatt die nach φ, ausführen müssen.

Von grossem Interesse sind die Bemerkungen, die Laplace über das elliptische Integral F macht.

[1]) S. Teil I, p. 16.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

. . . quoique cette valeur $[F]$ soit une intégrale définie, elle a cependant toute la difficulté de l'intégrale indéfinie, lorsque μ et μ' sont indéterminés; car, si l'on répresente l'intégrale définie prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, par $\varphi\,(\mu^2, \mu'^2)$; il est facile de s'assurer que l'intégrale indéfinie sera $x^3 \,.\, \varphi\,(\mu^2 x^2, \mu'^2 x^2)$, en sorte que la première étant donnée, la seconde l'est pareillement. L'intégrale indéfinie n'est possible que lorsque l'une des quantités μ et μ' est nulle, où lorsqu' elles sont égales.

So in der Histoire, und fast ebenso in der Méc. cél. und in der Théorie du mouv. etc. In den beiden letzteren Werken heisst es dann noch weiter:

. . . je me suis assuré que dans tous les autres cas, l'intégrale ne peut pas être exprimée par une fonction finie de quantités algébriques, d'arcs de cercle et de logarithmes; ainsi l'expression intégrale que nous venons de trouver . . . ., est la plus simple que l'on puisse donner à cette valeur, et il serait inutile de chercher à la réduire en termes finis.

Es ist zu bedauern, dass Laplace seine hierauf bezüglichen Argumentationen nicht mitgeteilt hat.

Die Behandlung des Problems für äussere Punkte in der Histoire de l'Acad. 1782 und in der Mécanique céleste (Livre III, Chap. I) stimmen, abgesehen von unwesentlichen Abweichungen, miteinander überein; etwas weniger einfach ist die ursprüngliche, in der Théorie du mouvement etc. 1784 zuerst veröffentlichte Lösung. Laplace sagt selbst in der Histoire:

. . . , cette théorie a déjà paru dans l'Ouvrage que j'ai publié sur le mouvement et sur la figure elliptique des Planètes; mais elle est ici présentée d'une manière plus directe et plus simple.

Der folgenden Mitteilung der Laplaceschen Lösung lege ich die in der Mec. cél. enthaltene Darstellung zu Grunde: die Abweichungen der beiden andern Arbeiten werde ich am Schluss kurz andeuten.

Das Eigentümliche der Methode besteht darin, dass sie sich ausschliesslich auf Differenziation gründet: integriert wird gar nicht. Laplace legt seiner Untersuchung den Potentialausdruck

$$V = \int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

zu Grunde, den er in folgender Weise in eine Reihe entwickelt:

$$V = \int \frac{dM}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2\,ax + 2\,by + 2\,cz - x^2 - y^2 - z^2}{a^2+b^2+c^2} \\ + \frac{3}{8}\,\frac{(2\,ax + 2\,by + 2\,cz - x^2 - y^2 - z^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + \cdots \end{array} \right\}. \quad (A)$$

Diese Reihe ist in Bezug auf die Dimensionen des Ellipsoides aufsteigend, in Bezug auf die Koordinaten des angezogenen Punktes absteigend. Wenn die Entfernung des angezogenen Punktes wächst, hat V das erste Glied dieser Reihe, $\frac{M}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, zur Grenze, wo M die Masse des Ellipsoides bedeutet.

Drückt man V in derselben Weise, wie in (2.) die Komponenten, durch Polarkoordinaten aus, so hat man

$$V = 2 \iint \frac{dp\,dq \sin p\, J \sqrt{R}}{L^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nimmt man diesen Ausdruck für V, so wie die in (2.) gegebenen Ausdrücke für A, B, C, so überzeugt man sich leicht, durch Differenziation von der Richtigkeit der folgenden partiellen Differentialgleichung zwischen den Grössen B, C, F, V, in welcher der Kürze halber

$$a A + b B + c C = F$$

gesetzt ist:

$$(3.)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - k^2}{2}\, k \left(\dfrac{dV}{dk} - \dfrac{dF}{dk}\right) + k^2 (V - F) \\ + k^2 \dfrac{m-1}{m}\, b \left(\dfrac{dF}{db} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dV}{db} - B\right) \\ + k^2 \dfrac{n-1}{n}\, c \left(\dfrac{dF}{dc} - \tfrac{1}{2}\dfrac{dV}{dc} - C\right) \\ - k^2 (m-1) \dfrac{dF}{dm} - k^2 (n-1) \dfrac{dF}{dn}. \end{cases}$$

In der Aufstellung dieser Gleichung und in der Verwendung derselben für den Beweis des Maclaurinschen Satzes manifestiert sich ein eminentes mathematisches Genie.

In (3.) führt Laplace statt V die Grösse $v = \frac{V}{M}$ ein, wo $M = \frac{4\pi k^3}{\sqrt{mn}}$ die Masse des Ellipsoides bedeutet, und statt m, n die Quadrate der Excentricitäten

$$\theta = \frac{1-m}{m}\, k^2,\ \omega = \frac{1-n}{n}\, k^2.$$

Berücksichtigt man, dass V eine homogene Funktion von $a, b, c, k, \sqrt{\theta}, \sqrt{\omega}$ von der zweiten Dimension, mithin v eine solche von der Dimension -1 ist, dass folglich

$$a \frac{dv}{da} + b \frac{dv}{db} + c \frac{dv}{dc} + 2\,\theta \frac{dv}{d\theta} + 2\,\omega \frac{dv}{d\omega} + k \frac{dv}{dk} = -v$$

ist, und setzt man noch der Kürze wegen

$$a \frac{dv}{da} + b \frac{dv}{db} + c \frac{dv}{dc} = Q,$$

so geht die Gleichung (3.) durch die obigen Subsitutionen über in folgende:

$$(4.)\quad \begin{cases} 0 = (a^2 + b^2 + c^2) \left[v + \tfrac{1}{2} Q - \tfrac{1}{2}\left(a \dfrac{dQ}{da} + b \dfrac{dQ}{db} + c \dfrac{dQ}{dc}\right)\right] \\ + \theta^2 \dfrac{dQ}{d\theta} + \omega^2 \dfrac{dQ}{d\omega} - \dfrac{k^3}{2} \dfrac{dQ}{dk} + \tfrac{1}{2}(\theta + \omega) Q \\ + b\,\theta \dfrac{dQ}{db} + c\,\omega \dfrac{dQ}{dc} - \tfrac{1}{2} b\,\theta \dfrac{dv}{db} - \tfrac{1}{2} c\,\omega \dfrac{dv}{dc}. \end{cases}$$

Die Funktion v denkt Laplace sich nun in eine in Bezug auf die Dimensionen des Ellipsoides $k, \sqrt{\theta}, \sqrt{\omega}$ steigende, in Bezug auf a, b, c fallende Reihe entwickelt:

$$(5.)\quad v = U^{(0)} + U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots,$$

wo die Funktionen U sämtlich homogen in Bezug auf $a, b, c, k, \sqrt{\theta}, \sqrt{\omega}$, so wie auch homogen in Bezug auf die drei ersten Grössen a, b, c, und in Bezug auf die drei letzten $k, \sqrt{\theta}, \sqrt{\omega}$ sind; und zwar sind alle U, in Bezug auf sämtliche sechs Grössen, von der Dimension -1, weil sie von derselben Dimension wie v sind. $U^{(i)}$ sei in Bezug auf $k, \sqrt{\theta}, \sqrt{\omega}$ von der Dimension s, $U^{(i+1)}$ von der Dimension s': dann werden $U^{(i)}$, $U^{(i+1)}$ also in Bezug auf a, b, c von der Dimension $-s-1$, $-s'-1$ resp. sein, so dass man hat:

$$a \frac{dU^{(i)}}{da} + b \frac{dU^{(i)}}{db} + c \frac{dU^{(i)}}{dc} = -(s+1)\, U^{(i)},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit Berücksichtigung dieser Gleichung ergiebt die Substitution der Reihe (5.) in (4.), wenn man alle Glieder zusammenfasst, die in Bezug auf k, $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\omega}$ von derselben Dimension sind wie $U^{(i+1)}$:

$$(6.)\qquad U^{(i+1)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(s+1)\,k^3 \frac{dU^{(i)}}{dk} - (s+1)\,\theta^2 \frac{dU^{(i)}}{d\theta} \\ -(s+1)\,\omega^3 \frac{dU^{(i)}}{d\omega} - \frac{s+1}{2}(\theta+\omega)\,U^{(i)} \\ -(s+\frac{3}{2})\,b\,\theta \frac{dU^{(i)}}{db} - (s+\frac{3}{2})\,c\,\omega \frac{dU^{(i)}}{dc} \end{array}\right\}}{s' \frac{s'+3}{2}(a^2+b^2+c^2)}.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass, da

$$U^{(0)} = (a^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$$

von k unabhängig ist, dasselbe für sämtliche U gilt, dass mithin auch v von k unabhängig ist. Somit ist der Maclaurinsche Satz allgemein bewiesen.

Es sei noch bemerkt, dass Laplace auf Grund der Formel (6.) eine einfachere Recursionsformel für die U aufstellt. Der blosse Anblick der Formel (6.) zeigt nämlich, dass die Dimensionen von $U^{(0)}$, $U^{(1)}$, $U^{(2)}$ . . . in Bezug auf $\sqrt{\theta}$, $\sqrt{\omega}$ jedes Mal um zwei Einheiten wachsen, so dass $s = 2\,i$, $s' = 2\,i + 2$; da ferner, wegen der Natur der homogenen Funktionen

$$\omega \frac{dU^{(i)}}{d\omega} = i\,U^{(i)} - \theta \frac{dU^{(i)}}{d\theta},$$

so lässt sich Gleichung (6.) in folgende Gleichung verwandeln:

$$(7.)\qquad U^{(i+1)} = \frac{\left\{\begin{array}{l} (2\,i+1)\,\theta\,(\omega-\theta) \frac{dU^{(i)}}{d\theta} - (2\,i+\frac{3}{2})\,b\,\theta \frac{dU^{(i)}}{db} \\ -(2\,i+\frac{3}{2})\,c\,\omega \frac{dU^{(i)}}{dc} - \frac{1}{2}(2\,i+1)\,[\theta+(2\,i+1)\,\omega]\,U^{(i)} \end{array}\right\}}{(i+1)\,(2\,i+5)\,(a^2+b^2+c^2)}.$$

Gegen diese Methode von Laplace ist übrigens dasselbe Bedenken geltend zu machen, welches schon die Legendresche Methode traf: die Reihenentwicklung (5.) wird nicht für alle Lagen des angezogenen Punktes konvergent sein. Dieser Mangel des Laplaceschen Beweises scheint Gauss entgangen zu sein; derselbe wünscht nur eine einfachere Methode, hat aber gegen die Strenge des Beweises nichts einzuwenden:

Laplace primo successit, omnia rigorose demonstrare atque sic solutionem ab omni parte perfectam reddere. Elegentiam ingeniique substilitatem in hac ill. Laplace solutione eminentem nemo quidem non mirabitur; nihilominus tamen ipsa subtilitas arsque admiranda, per quam ardnas difficultates superavit, geometris desiderium liquit solutionis simplicioris, minus intricatae magisque directae. (Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum etc. 1813).

Ähnlich äusserte sich Lagrange. (s. o.) Anders dagegen Chasles:

. . . . mais cette démonstration qui procède par la voie des séries ne parut pas cornplètement rigoureuse et parfaitement satisfaisante à cet égard. (Mém. sur l'attraction des ellipsoïdes. Comptes rendus V. 1837; erschien später such im Recueil des Sav.-Etr. t. IX. 1846).

Laplace selbst hat das Bedenkliche seiner Methode sehr wohl erkannt:

On aura au moyen de cette équation [(7.)] la valeur de v, dans une série qui sera convergente, toutes les fois que les excentricités $\sqrt{\theta}$ et $\sqrt{\omega}$ seront fort petites, ou que la distance $\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}$ du point attiré au centre du sphéroïde, sera fort grande relativement aux dimensions du sphéroïde.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auf Grund der Eigenschaft der Grösse v, unabhängig zu sein von k, ist es nun leicht, den einfachsten Ausdruck für die Anziehung aufzustellen. Man kann einmal k so wählen, dass das Ellipsoid unendlich abgeplattet wird, oder so — wie Legendre beim Rotationsellipsoid verfuhr — dass die Oberfläche des Ellipsoides den angezogenen Punkt enthält. Laplace entscheidet sich für das zweite, weil die Anziehung für Punkte, die auf der Oberfläche liegen, bereits bestimmt sei. Es wird genügen, das Resultat mitzuteilen:

Versteht man unter k'^2 die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{a^2}{k'^2} + \frac{b^2}{k'^2 + \theta} + \frac{c^2}{k'^2 + \omega} = 1,$$

und setzt

$$\mu^2 = \frac{\theta}{k'^2}, \mu'^2 = \frac{\omega}{k'^2}, F = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+\mu^2 x^2)(1+\mu'^2 x^2)}},$$

dann ist

$$A = \frac{3\,a\,M}{k'^3} F;\ B = \frac{3\,b\,M}{k'^3}\ \frac{d\,(F\,\mu)}{d\,\mu};\ C = \frac{3\,c\,M}{k'^3}\ \frac{d\,(F\,\mu')}{d\,\mu'}.$$

Für die Kugel ($\theta = 0$, $\omega = 0$) ergiebt sich noch aus (7.): $U^{(1)} = 0$, $U^{(2)} = 0$ u. s. w.; folglich $v = U^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, $V = \frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

In der Histoire de l'Acad. ist statt der Gleichung (3.) eine andere Gleichung als Ausgangspunkt benutzt. Man erhält dieselbe leicht aus (3.) vermittelst der Gleichungen

$$a\,\frac{dV}{da} + b\,\frac{dV}{db} + c\,\frac{dV}{dc} + k\,\frac{dV}{dk} = 2\ V \ldots . (\alpha)$$

$$a\,\frac{dF}{da} + b\,\frac{dF}{db} + c\,\frac{dF}{dc} + k\,\frac{dF}{dk} = 2\ F,$$

die sich aus dem Umstande ergeben, dass V und F homogene Funktionen zweiten Grades von a, b, c, k sind. Ausserdem ist hier die Darstellung knapper gehalten und mutet dem Leser etwas mehr zu.

Wesentlich anders ist, wie bereits erwähnt, die Deduktion des Maclaurinschen Satzes in der ersten Arbeit von Laplace (in der Théorie du mouvement etc. 1784). Der hierin gegebene ursprüngliche und erste Beweis des allgemeinen Maclaurinschen Satzes wurde bereits im Mai 1783 von Laplace der Pariser Akademie mitgeteilt. Am Schluss giebt er nämlich eine kurze Geschichte des Problems der Anziehung der Ellipsoide: darin heisst es, bei Erwähnung der Legendreschen Arbeit in den Sav.-Etr. von 1785:

. . . . mais la méthode de M. le Gendre, fondée sur la considération des suites, n'est pas applicable aux ellipsoïdes qui ne sont point de révolution; il était cependant très-vraisemblable que relativement à ces ellipsoïdes, le théorême de M. Maclaurin s'étendait encore à un point situé d'une manière quelconque au-dehors; mais l'impossibilité d'intégrer les attractions différentielles, du moins sous la forme que leur dounent les méthodes connues, rendait assez difficile la démonstration de ce théorême: après quelques tentatives inutiles j'y suis enfin parvenu par la méthode précédente dont j'ai fait part à l'Académie au mois de Mai 1783. En cherchant à transformer les attractions différentielles, on parviendrait, selon toute apparence, à les rendre intégrables, par un choix convenable des coordonnées; mais la méthode, que j'ai suivie, m'ayant conduit assez simplement au résultat que je cherchais, je n'ai point tenté d'autres moyens . . . .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Stelle ist deshalb noch von besonderem Interesse, weil wir daraus ersehen, dass Laplace schon versucht hat, was Legendre in seiner zweiten Abhandlung erreicht hat: durch passende Wahl der Koordinaten die Differentialausdrücke für die Anziehung integrierbar zu machen.

Laplace geht von der Gleichung (A) für V aus, und zeigt, indem er statt der rechtwinkligen Koordinaten x, y, z Polarkoordinaten einführt, dass V sich in eine Reihe von folgender Form — es kommt hier nur auf die Form der Reihe an — entwickeln lässt:

$$V = \frac{M}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(a^2+b^2+c^2-k^2 S-k^4 S'-\ldots\right), \quad (B)$$

wo S, S', S'' . . . Reihen sind, die nach Potenzen von $\frac{\theta}{k^2}$ und $\frac{\omega}{k^2}$ geordnet sind, und die homogene Funktionen von a, b, c von den Dimensionen $0, -2, -4, \ldots$ sind. Es ist dies dieselbe Reihenentwicklung, die in den beiden späteren Deduktionen durch

$$M\,(U^{(0)}+U^{(1)}+\ldots)$$

angedeutet wird.

Das Aggregat aller Glieder der Reihe (B), welche unabhängig von k sind, nennt Laplace U. Von den übrigen Gliedern der Reihe (B), die also von k abhängen, wählt er zunächst diejenigen aus, die mit der kleinsten Potenz von $\frac{\theta}{k^2}$ multipliciert sind: den Exponenten dieser Potenz nennt er r; und unter diesen wählt er wieder diejenigen aus, die mit der niedrigsten Potenz von $\frac{\omega}{k^2}$ multipliciert sind, deren Exponent r' sei; und von diesen Gliedern behält er endlich nur dasjenige bei, in welchem k^2 den kleinsten Exponenten hat, den er mit i bezeichnet. So erhält er für V den Ausdruck

$$V = M\left(U + k^{2i}\,\frac{\theta^r}{k^{2r}}\,\frac{\omega^{r'}}{k^{2r'}}\,P+\ldots\right),$$

wo also i wenigstens gleich 1 ist. Da V von der Dimension 2 ist, so ist P eine homogene Funktion von a, b, c, die, falls i gleich 1 sein sollte, von der Dimension -3 ist, sonst von einer niedrigeren Dimension, wie -5, -7 u. s. w. Dies ist wohl zu beachten.

Der weiteren Deduktion legt Laplace nun drei partielle Differentialgleichungen, zwischen V und A, V und B, V und C resp., zu Grunde, von deren Richtigkeit man sich wieder durch Differenziation zu überzeugen hat. Die erste, die zwischen V und A, lautet:

$$\begin{aligned} 0 = &-(m-1)\frac{dA}{dm}-(n-1)\frac{dA}{dn}-A+\frac{m-1}{m}\,b\,\frac{dA}{db} \\ &+\frac{n-1}{n}\,c\,\frac{dA}{dc}+\frac{k^2-a^2-b^2-c^2}{2k}\,\frac{dA}{dk} \\ &+\tfrac{1}{2}\,\frac{dV}{da}+\frac{a}{2k}\,\frac{dV}{dk}. \end{aligned}$$

Ähnlich sind die beiden anderen, zwischen V und B, V und C, gebaut.[1])

[1]) Die in der Méc. cél. benutzte Differentialgleichung (3.) ergiebt sich aus den hier zu Grunde gelegten drei Gleichungen, indem man die erste, zweite, dritte mit a, b, c resp. multipliciert, dann addiert, und die Gleichung (a) benutzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Laplace setzt jetzt $V = Mv$, und führt statt V, m, n die Grössen v, θ, ω in diese drei Differentialgleichungen ein; dadurch erhält er drei neue Differentialgleichungen, von denen die erste so lautet[1]):

$$0 = (a^2 + b^2 + c^2 + \theta)\,\theta \frac{d^2 v}{da\,d\theta} + (a^2 + b^2 + c^2 + \omega)\,\omega \frac{d^2 v}{da\,d\omega}$$
$$+ b\,\theta \frac{d^2 v}{dadb} + c\,\omega \frac{d^2 v}{dadc} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - k^2}{2}\, k \frac{d^2 v}{dadk}$$
$$+ a\,\theta \frac{dv}{d\theta} + a\,\omega \frac{dv}{d\omega} + \frac{ak}{2} \frac{dv}{dk}$$
$$+ \left\{ \tfrac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\omega \right\} \frac{dv}{da} + \tfrac{3}{2} av; \quad \ldots \quad (C)$$

die beiden andern mögen mit (D) und (E) bezeichnet werden. Jetzt denke man sich zunächst in (C) statt v die Reihe

$$v = U + k^{2i} \frac{\theta^r}{k^{2r}} \frac{\omega^{r'}}{k^{2r'}} P + \ldots$$

substituiert, und nach der Substitution alle diejenigen Glieder ausgewählt, die den Koefficienten $k^{2i-2r-2r'} \theta^r \omega^{r'}$ haben; dann ist klar, dass das Aggregat aller dieser Glieder für sich verschwinden muss. Auf diese Weise erhält man:

$$k^{2i-2r-2r'} \theta^r \omega^{r'} (i + \tfrac{3}{2}) \left[(a^2 + b^2 + c^2) \frac{dP}{da} + a P \right] = 0, \text{ oder}$$
$$(a^2 + b^2 + c^2) \frac{dP}{da} + a P = 0.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$P = \frac{H}{(a^2 + b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

wo H jedenfalls von a unabhängig ist, mithin nur noch b und c enthalten kann.

Verfährt man mit den Gleichungen (D) und (E) ebenso, so ergiebt sich weiter, dass H auch von b und c unabhängig, mithin eine Konstante ist. Dann ist P aber von der Dimension -1, was dem obigen Resultat widerstreitet, dem zufolge P nur von der Dimension -3, oder -5, oder 7, u. s. w. sein kann. Dieser Widerspruch wird nur gehoben, wenn $P = 0$ ist. Hieraus ergiebt sich aber ohne weiteres, dass auch alle folgenden Glieder der Reihe v verschwinden müssen. Mithin hat man $v = U$, d. h. v ist unabhängig von k.

Die Entwicklung der einzelnen Glieder $U^{(0)}, U^{(1)} \ldots$ des Potentials findet sich in dieser ersten Abhandlung von Laplace noch nicht.

Legendre.

Mémoire sur les intégrales doubles.

(Histoire de l'Acad. roy. des sciences. 1788).

Legendre bemerkt zunächst, ehe er die allgemeine Lösung für das dreiaxige Ellipsoid und für äussere Punkte in Angriff nimmt, dass sich die Anziehung für einen speciellen Fall

[1]) Man beachte, dass $A = -\frac{dV}{d\alpha}$ u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unmittelbar, durch die gewöhnlichen Integrationsmethoden ermitteln lässt. Es ist dies der Fall, dass der angezogene Punkt in der Ebene einer der drei Hauptschnitte des Ellipsoides liegt. Da dieser Fall einerseits bisher allen, die sich mit dem Attraktionsproblem beschäftigt haben, entgangen war, und andrerseits offenbar die allgemeine Lösung für das Rotationsellipsoid in sich schliesst, so hält Legendre mit Recht dafür, dass es angemessen sei, diesen Fall mit aller Ausführlichkeit, die er verdiene, zu entwickeln.

Er legt der Behandlung dieses Falles, wie auch später der allgemeinen Lösung, dieselbe Formel zu Grunde, die Laplace als Ausgangspunkt genommen. Die rechtwinkligen Koordinaten des angezogenen Punktes, bezogen auf die Halbaxen a, b, c des Ellipsoides, nennt er f, g, h; q den Winkel, welchen die Verbindungslinie des angezogenen Punktes mit irgend einem Punkt des Ellipsoides mit der Koordinate h bildet; p den Winkel, welchen die Projektion dieser Strecke auf die Ebene der Koordinaten f und g mit g bildet. (Laplace nannte den ersten Winkel p, den zweiten q). Dann ist der Wert der Komponente, die parallel der Koordinate f gerichtet ist, gegeben durch die Formel

$$\int \frac{2\, dp\, dq \sin p \sin^2 q}{\delta} \sqrt{\varepsilon^2 - \delta\zeta}, \qquad \text{(I)}$$

wo

$$\delta = \sin^2 q \sin^2 p + \frac{a^2}{b^2} \sin^2 q \cos^2 p + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 q$$

$$\varepsilon = f \sin q \sin p + \frac{a^2}{b^2} g \sin q \cos p + \frac{a^2}{c^2} h \cos q$$

$$\zeta = f^2 + \frac{a^2}{b^2} g^2 + \frac{a^2}{c^2} h^2 - a^2.$$

Die Integration erstreckt sich auf alle Werte p, q, für welche $\varepsilon^2 - \delta\zeta \geqq 0$, und zugleich $\varepsilon > 0$ ist. Die zweite Bedingung fehlt bei Legendre: er sagt:

Cette intégrale aura pour limites les points où le rayon devient un tangente du sphéroide, de sorte qu'on a pour déterminer ces limites l'équation $\varepsilon^2 - \delta\zeta = 0$.

Ebenso Laplace (s. o.). Dirichlet hat die Grenzbedingungen genau formuliert (in seinen Vorlesungen „über bestimmte Integrale").

Sind nun für den speciellen Fall, dass der angezogene Punkt in der Ebene einer der drei Hauptschnitte liegt, a und b die beiden Halbaxen, in deren Ebene jener Punkt liegt, so hat man $h = 0$, ε reduciert sich mithin auf

$$\sin q \left(f \sin p + \frac{a^2}{b^2} g \cos p\right),$$

und die Integration nach p, wenn sie auch immerhin noch recht verwickelt ist, lässt sich nach den gewöhnlichen Methoden ausführen. Ich beschränke mich darauf, das Legendresche Resultat anzugeben, dem zufolge die der Axe $2a$ parallele Komponente gleich ist

$$\frac{3\, Mf}{h} \int_0^1 \frac{y^2\, dy}{\sqrt{[H^2 + (c^2 - a^2)\, y^2]\, [H^2 + (b^2 - a^2)\, y^2]}},$$

wo M die Masse des Ellipsoides und $2H$ den Ausdruck

$$f^2 + g^2 + a^2 - b^2 + \sqrt{[(f^2 + g^2)^2 - 2\,(f^2 - g^2)\,(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2]}$$

bedeutet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Legendre bemerkt noch, dass für $a = c$, also für den Fall eines Umdrehungsellipsoides, diese Formel integrierbar wird, und dass das Resultat vollkommen mit dem von ihm auf einem ganz anderen Wege in den Sav.-Etr. gefundenen übereinstimmt.

Für den allgemeinen Fall lässt sich der Ausdruck (I) weder noch p noch nach q integrieren. Um wenigstens eine Integration ausführen zu können, bedient sich Legendre eines allgemeinen Princips, welches jetzt freilich allgemein bekannt und geläufig, damals aber neu war.

Es sei allgemein $\int P dx\, dy$ das gegebene Integral. Legendre statuiert irgend eine Gleichung zwischen x, y und einem variablen Parameter ω: die Differentiation dieser Gleichung ergebe $dy = \alpha\, d\,\omega + \beta\, dx$. Summiert man nun in dem gegebenen Integral für ein festgehaltenes x zunächst nach y, so hat man offenbar $dy = \alpha\, d\,\omega$ zu setzen; mithin ist

$$\int P dx dy = \int \alpha P dx d\omega. \qquad (a)$$

Dies ist das Legendresche Princip. Er erläutert dasselbe an folgendem Beispiel, welches als Specialfall den Ausdruck (I) enthält. Die zu integrierende Funktion sei nämlich

$$\frac{P}{Q} dx dy \sqrt{\left(\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h}{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + f'x + g'y + h'}\right)},$$

in welcher P und Q ganze rationale Funktionen von x und y sind. Um eine Integration ausführbar zu machen, führe man statt y die neue Variable

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{ax^2 + bxy + cy^2 + fx + gy + h}{a'x^2 + b'xy + c'y^2 + f'x + g'y + h'}\right)}$$

ein. Die transformierte Funktion enthält nur eine Wurzelgrösse von der Form $\sqrt{(A + B + Cx^2)}$, lässt sich also nach x mit Hülfe von Kreisfunktionen und Logarithmen integrieren.

Wie wenig geläufig übrigens damals eine solche allgemeine Transformation war, bei welcher es sich nicht um den Übergang von einem der landläufigen Koordinatensysteme zu einem anderen handelt, zeigt uns d'Alemberts 7. Methode. (Teil I, S. 21). Letzterer wendet in der That eine ähnliche Transformation an, wie sie hier von Legendre empfohlen wird, richtig an, erklärt sich aber das falsche Resultat, welches, wie wir gesehen, in dem Weglassen einer Klammer den Grund hatte, dadurch, dass er ja x (nach seiner Bezeichnung y) als konstant betrachtet habe, was er also offenbar für unzulässig hält.

Legendre giebt ferner die Transformationsformel für den Fall, dass man x und y beide durch zwei neue Variable p und q ersetzt. Hat man nämlich zwei Gleichungen zwischen x, y und p, q festgesetzt, aus welchen sich ergiebt

$$dx = A dp + B dq$$
$$dy = A' dp + B' dq,$$

so ist

$$\int P dx dy = \int P (AB' - A'B)\, dp\, dq. \qquad (b)$$

Er bemerkt, dass man dies Princip auf eine beliebige Anzahl von Variablen ausdehnen könne, und giebt auch noch für drei Variable die Transformationsformel an; erkennt aber ausdrücklich dies Princip und die allgemeinen Resultate desselben Lagrange zu. Er sagt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ce principe auquel j' étais parvenu par des considérations géométriques, et que j'ai examiné ensuite avec plus de soin, ne s'est point trouvé différent d'un moyen de transformation indiqué par M. de la Grange dans les Mémoires de Berlin, an. 1773, p. 125. La propriété en appartient donc à cet illustre géomètre; il ne me reste que la nouvelle forme sous laquelle j'ai présenté ce principe et l'usage que j'en ai indiqué, usage auquel il paraît que M. de la Grange n'a pas pensé, ou donc au moins il n'a fourni aucun exemple.

Lagrange hat nämlich von diesem Princip nur Gebrauch gemacht, um den in rechtwinkligen Koordinaten vorliegenden Ausdruck für die Anziehung in Polarkoordinaten zu transformieren, wodurch es ihm gelang, das Attraktionsproblem für innere Punkte zu lösen. Diese Transformation erweist sich aber als unzureichend für äussere Punkte. (S. Teil I, S. 16).

Indem ich nunmehr übergehe zur Auseinandersetzung des Legrendeschen Verfahrens, den einfachsten Ausdruck für die auf äussere Punkte bezügliche Attraktionskomponente zu erhalten, bemerke ich, dass ich mich auf die Hauptmomente seiner Entwicklung beschränken werde, mit Übergehung der Ausführung im einzelnen. Legendres Darstellung ist selbst sehr knapp gehalten, und einer Abkürzung, wenn man auf die Details eingeht, kaum fähig.

Zunächst wendet Legendre auf den Ausdruck (I) die Transformation (b) an, ohne dies übrigens ausdrücklich hervorzuheben. Er sagt kurz:

Pour abréger un peu les expressions, nous ferons

$$\frac{a^2}{b^2} = m, \frac{a^2}{c^2} = n, mg = k, nh = l, \cot p = x, \cot q = y \sin p;$$

la formule de l'attraction dans le sens de l'axe a deviendra

$$X = \int \frac{2\, dxdy \sqrt{[(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)}}{(1 + mx^2 + ny^2)(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Um die Integration nach x ausführen zu können, setzt Legendre

$$\sqrt{\left[\frac{(f + kx + ly)^2 - \zeta(1 + mx^2 + ny^2)}{1 + x^2 + y^2}\right]} = \omega \qquad (a')$$

und erhält so, durch Anwendung des durch die Gleichung (a) ansgedrückten Transformationsprincips

$$X = \int \frac{2\, \omega^2\, d\, \omega\, dx}{(1 + mx^2 + ny^2)\sqrt{-Ax^2 + 2Bx - C}},$$

wo

$$A = \mu\nu - \mu l^2 - \nu k^2, B = fk\nu, C = \lambda\nu - \lambda l^2 - \nu f^2,$$

wenn

$$\omega^2 + \zeta = \lambda, \omega^2 + m\zeta = \mu, \omega^2 + n\zeta = \nu$$

gesetzt wird. Es bleibt noch y in dem Ausdruck ny^2 zu eliminieren. Um gleichzeitig die zu integrierende Funktion rational zu machen, setzt Legendre

$$Ax - B = D \cos\varphi, \text{ wo } D^2 = B^2 - AC, \text{ d. h.}$$
$$D^2 = (\nu - l^2)(f^2\mu\nu + k^2\lambda\nu + l^2\lambda\mu - \lambda\mu\nu).$$

Die Werte x und y drücken sich mit Hülfe des Winkels φ folgendermassen aus

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{B}{A} + \frac{D}{A}\cos\varphi \\ y &= \frac{flu}{A} + \frac{klD}{AF}\cos\varphi + \frac{D}{F\sqrt{A}}\sin\varphi \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

wo $F = \nu - l^2$. Man erhält

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$X = \int \frac{2\,\omega^2\, d\,\omega\, A^{\frac{3}{2}}\, d\,\varphi}{A^2 + m\,(B + D\cos\varphi)^2 + n\,(f\,l\,\mu + \frac{k\,l\,D}{F}\cos\varphi + \frac{D\sqrt{A}}{F}\sin\varphi)^2} \quad \ldots \text{(II)}$$

Legendre hebt hervor, dass die letzte Transformation ein positives A voraussetzt, was auf die Bedingung $f > a$ zurückkommt. Ich habe schon bei Besprechung der ersten Legendreschen Abhandlung bemerkt, dass die Argumentation, durch welche Legendre über das Bedenken, ob die aus der vorstehenden Gleichung gezogenen Konsequenzen auch für $f < a$ gültig sein werden, hinwegzukommen sucht, durchaus unzulässig ist. Das Schlussresultat, zu dem Legendre in der vorliegenden Abhandlung gelangt, ist daher nur für diejenigen äusseren Punkte als von ihm bewiesen anzusehen, welche ausserhalb des zwischen den beiden an die Endpunkte der Axe $2\,a$ gelegten Tangentialebenen enthaltenen Raumes liegen. Gegen die allgemeine Gültigkeit des Legendreschen Resultats ist vor dem Erscheinen des bereits erwähnten Werkes von Todhunter (Art. 886) von keiner Seite Einsprache erhoben.

Mit der Einführung der Variablen ω hat Legendre das Ellipsoid in unendlich dünne Schalen zerlegt, deren jede zwischen den Manteln zweier Kegel zweiten Grades liegt, deren Spitze mit dem angezogenen Punkt zusammenfällt. Denn offenbar ist die Gleichung (a') für ein konstantes ω (wenn man x und y mit derselben Konstanten multipliciert) nichts anderes als die Gleichung einer Kurve zweiten Grades, die in der Ebene der Halbaxen b und c, oder in einer mit dieser parallelen Ebene, gebildet wird durch die Fusspunkte aller derjenigen (vom angezogenen Punkt ausgehenden) Radien, deren Lage durch jenen Wert des ω bestimmt ist. Für $\omega = 0$ ist dieser Radius überall Tangente, also der Kegel, der $\omega = 0$ entspricht, Umhüllungskegel des Ellipsoids; für den grössten Wert, den ω überhaupt annimmt, und der für $D = 0$, d. h.

$$f^2\,\mu\nu + k^2\,\lambda\nu + l^2\,\lambda\mu - \lambda\mu\nu = 0 \qquad (\beta)$$

statt findet, hat der Radius nur Eine Lage, denn für $D = 0$ reduciert sich die durch die Gleichungen (α) dargestellte Kurve auf einen Punkt, und der Kegel auf eine gerade Linie.

Man erhält die Komponente irgend einer jener Schalen, wenn man in dem Ausdruck (II) die Integration nach φ, für ein konstantes ω, zwischen den Grenzen 0 und $2\,\pi$ ausführt, und die Komponente des Ellipsoids, wenn man das Resultat dieser Integration nach ω zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega =$ max. integriert.

Diese erste Integration (nach φ) ist nun allerdings ausführbar, aber dennoch scheint es aussichtslos, auf diesem Wege zu einem brauchbaren Resultat zu gelangen. Nur der Gewandtheit eines Legendre in analytischen Untersuchungen konnte es gelingen, die Sache so zu leiten, dass schliesslich ein Ausdruck erzielt wurde, auf Grund dessen sich weiter bauen liess.

Es ist zunächst unumgänglich notwendig, den Divisor der zu integrierenden Funktion in seine beiden reellen Faktoren zu zerlegen. Legendre gelangt zu einer höchst einfachen Gleichung dritten Grades, die eine Grösse Z, von welcher diese Zerlegung abhängt, bestimmt, nämlich

$$LMN + f^2\,MN + k^2\,LN + l^2\,LM = 0, \qquad (\gamma)$$

wo

$$L = Z - \lambda,\; M = mZ - \mu,\; N = nZ - \nu.$$

Das Resultat der Zerlegung ist ein Ausdruck von der Form

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{S d\varphi\, \omega^2 d\omega}{(T + U\cos\varphi + V\sin\varphi)\,(T' + U'\cos\varphi - V\sin\varphi)},$$

wo S, T, U, T', U', V immerhin noch recht komplicierte abgebraische Funktionen von A, P, Q, Z, L, M, N, λ, μ, ν sind. Jetzt wird $z = \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi$ gesetzt, die Zerlegung in Partialbrüche vorgenommen, und die Integration nach z ausgeführt. Nach Ausführung der Integration beginnt der schwierigste und mühsamste Teil der Arbeit.

„La difficulté est maintenant de faire les substitutions en évitant la prolixité autant qu'il est possible. Comme l'opération est embarrassante, et que c'est surtout à la forme du résultat que sera dû le succès de ces recherches, j'en vais detailler les principales parties.

. . . . . Si l'on élimine A, Q, P au moyen de leurs valeurs en λ, μ, ν, qu'ensuite on élimine λ, μ, ν eux-mêmes, au moyen des valeurs

$$\lambda = Z - L,\ \mu = mZ - M,\ \nu = nZ - N,$$

et qu'enfin on fasse usage de l'équation auxiliaire (γ) autant de fois qu'il paraîtra nécessaire pour simplifier les expressions, on aura pour résultat:“ (Es folgt das Resultat).

Dies liest sich ja sehr leicht und scheint sehr einfach auszuführen: aber von der Arbeit, die in diesen wenigen Zeilen steckt, kann sich nur derjenige eine richtige Vorstellung machen, der sich nach den darin gegebenen Vorschriften selbst bis zu dem von Legendre gegebenen Resultat hindurchgearbeitet hat. Letzteres besteht darin, dass die Komponente einer konischen Schale gleich ist

$$\frac{2\pi\omega^2 d\omega}{F}\left(\frac{G}{\sqrt{H}} + \frac{G'}{\sqrt{H'}}\right), \qquad (\delta)$$

wo

$$F = (L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + ml^2) + MN + Ml^2 + Nk^2$$

$$G = (L + f^2)(Mn + mN) + L(nk^2 + ml^2) + fkl(Mn - mN)\sqrt{\frac{L}{MN}}$$

$$H = mn(f^2 + L)^2 - (f^2 + L)(Mn + mN) + (f^2 - L)(nk^2 + ml^2) - 2fkl(Mn - mN)\sqrt{\frac{L}{MN}},$$

während G' und H' das bedeuten, was aus G und H wird, wenn man das Zeichen von $\sqrt{\frac{L}{MN}}$ ändert.

Nachdem Legendre bis zu diesem Ausdruck vorgedrungen war, beherrschte er das Terrain vollständig. Es tritt nämlich der glückliche Umstand ein, dass jener Ausdruck von Z unabhängig ist. Da nun

$$L = Z - \lambda = Z - \zeta - \omega^2$$
$$M = mZ - \mu = mZ - m\zeta - \omega^2$$
$$N = nZ - \nu = nZ - n\zeta - \omega^2,$$

so hat man, wenn man $Z - \zeta = Z'$ setzt,

$$L = Z' - \omega^2,\ M = mZ' - \omega^2,\ N = nZ' - \omega^2.$$

Folglich ist der Wert von Z', den man aus der Hülfsgleichung (γ) findet, unabhängig von ζ, dasselbe gilt mithin auch von L, M, N, d. h. diese Grossen sind Funktionen von den Konstanten m, n, f, k, l und von der Veränderlichen ω, aber unabhängig von ζ. Dann ist aber auch der Ausdruck (δ) für die Komponente einer konischen Schale, unabhängig von ζ, oder, wenn man bedenkt, dass $\zeta = f^2 + mg^2 + nh^2 - a^2$, von a.

Man kann also für die irgend einem gegebenen Wert von ω entsprechende Schale S_ω des gegebenen Ellipsoides E die Schale S'_ω irgend eines anderen E' aus der Reihe der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem gegebenen ähnlichen und mit demselben ähnlich liegenden Ellipsoide, die demselben ω entspricht, substituieren: die Anziehung der letzteren wird der der ersteren gleich sein. Nun wähle man für das Ellipsoid E' dasjenige, für welches der innere Begrenzungskegel sich auf eine gerade Linie reduciert, d. h. für welches jener gegebene Wert ω das maximum aller ω, die für E' statt finden, ist, für welches also $D = 0$, oder (vgl. Gleichung (β)

$$(\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + m\zeta)(\omega^2 + n\zeta) - f^2(\omega^2 + m\zeta)(\omega^2 + n\zeta)$$
$$- m^2g^2(\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + n\zeta) - n^2h^2(\omega^2 + \zeta)(\omega^2 + m\zeta) = 0 \quad \ldots\ldots (\varepsilon)$$

ist. Für die Komponente X derjenigen Schale $S'\omega$, für welche $D = 0$, oder $\omega = \max.$, bekommt man nämlich einen höchst einfachen Ausdruck, wenn man auf die Formel (II) zurückgeht: letztere reduciert sich für $D = 0$ auf

$$\int_0^{2\pi} \frac{2\,\omega^2\, d\,\omega\, A_2^3\, d\,\varphi}{A^2 + mB^2 + nf^2l^2\mu^2},$$

d. h. auf

$$\frac{2\,\omega^2\, d\,\omega\, A_2^3\, 2\,\pi}{A^2 + mB^2 + nf^2l^2\mu^2} \quad \ldots\ldots (\zeta).$$

Diesen einfachen Wert, für welchen nun aber ζ, d. i. in letzter Instanz a, durch die Gleichung (ε) an ω gebunden ist, können wir also statt (δ) substituieren.

Durch die Substitution

$$\omega^2 = \psi\left(f^2 + \frac{m^2g^2}{m - (m-1)\psi} + \frac{n^2h^2}{n - (n-1)\psi}\right)$$

verwandelt Legendre den letzten Ausdruck in den noch einfacheren (à cette forme infiniment simple)

$$\frac{2\,\pi\, f\, d\,\psi \sqrt{\psi}}{\sqrt{[m - (m-1)\psi]}\sqrt{[n - (n-1)\psi]}}.$$

„C'est l'expression générale de l'attraction d'une enveloppe conique quelconque, ce n'est autre chose que l'expression (δ) présentée sous la forme la plus simple. Il ne reste plus qu' à intégrer cette quantité depuis $\psi = 0$, jusqu' à la valeur de ψ qui répond au maximum de ω dans le sphéroïde donné."

Um auf den Maclaurinschen Lehrsatz zu kommen, macht Legendre noch eine letzte Substitution: er setzt nämlich, unter der Voraussetzung, dass der dem Wert $\omega = \max.$ entsprechende Wert des ψ gleich $\frac{a^2}{K^2}$ sei, $\psi = \frac{a^2z^2}{K^2}$, wodurch er das schliessliche Resultat erhält, dass die Gesamtanziehung des Ellipsoides in der Richtung der Axe $2\,a$ gleich ist

$$\frac{3\,Mf}{K}\int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{[K^2 + (b^2 - a^2)z^2]}\sqrt{[K^2 + (c^2 - a^2)z^2]}},$$

wo M die Masse des Ellipsoids bedeutet, während K^2, wie leicht ersichtlich, die grösste Wurzel der Gleichung

$$\frac{f^2}{K^2} + \frac{g^2}{K^2 + b^2 - a^2} + \frac{h^2}{K^2 + c^2 - a^2} = 1$$

ist. Das Legendresche Resultat stimmt mit dem Laplaceschen vollständig überein.

„On voit par cette équation que la valeur de K ne contient d'autre fonction de a, b, c que $b^2 - a^2$ et $c^2 - a^2$; il en est de même de la valeur de l'attraction, d'où résulte enfin le théorème qu'il s'agissait de démontrer:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Si deux sphéroïdes ont leurs ellipses principales décrites des mêmes foyers, les attractions qu'ils exercent sur un même point auront la même direction, et seront entr'elles comme leurs masses."

Dies ist die Legendresche Lösung des Attractionsproblems, die Lagrange mit Recht ein Meisterwerk des analytischen Kalküls genannt hat. Wir bewundern den Scharfblick Legendres, der ihn den Punkt erkennen liess, von wo aus dem Problem (durch direkte Integration des Ausdrucks (I)) allein beizukommen war. Wir bewundern den Mut Legendres, mit dem er, bei völliger Aussichtslosigkeit des Gelingens, unbeirrt von den Schwierigkeiten, die ihn überall umringten, direkt auf das Ziel losging („les difficultés y étaient emportées l'épée à la main"[1]). Wir bewundern überall die analytische Gewandtheit, mit der er auf diesem schwierigen Terrain operierte. Wir bewundern endlich die Ausdauer und den Feuereifer Legendres, die trotz alledem nötig waren, um die harte Arbeit („le travail le plus épineux peut-être dont on puisse avoir à suivre les transformations et les calculs"[2]) zu einem glücklichen Ende zu führen.

Wenn Legendre am Schluss sich dahin äussert, dass seine Art der Zerlegung des Ellipsoids wahrscheinlich die einzige sei, die zum Ziele führe, und dass deshalb die synthetische Methode auf das Attraktionsproblem schwerlich anwendbar sein dürfe, so hat diese Ansicht sich als irrtümlich erwiesen, und jene Äusserung ist, wie Todhunter (a. a. O. Art. 889) sich ausdrückt, eine „etwas unvorsichtige." Denn in der That hat einerseits Poisson seiner analytischen Lösung (1835) die Zerlegung des Ellipsoids in Schalen, die mit der Begrenzung koncentrisch, ähnlich und ähnlich liegend sind, zu Grunde gelegt, und andrerseits hat Chasles, zwei Jahre später, auf Grund der Poissonschen Zerlegung eine schöne synthetische Lösung, wie wir solche für das Rotationsellipsoid (für innere Punkte) von Maclaurin besitzen, auch für das dreiaxige Ellipsoid (für äussere Punkte) gegeben. (Poisson: „Mémoire sur l'attraction d'un ellipsoïde homogène" in den Mémoires de l'Ac. des sciences de l'Institut, T. XIII; die betreffende Abhandlung von Chasles ist bereits oben citiert.)

Laplace, Mécanique Céleste, Livre III, Chap. II.

Im zweiten Kapitel des dritten Buches der Méc. Cél. giebt Laplace einen zweiten Beweis, oder richtiger gesagt, die Andeutung eines zweiten Beweises des Maclaurinschen Lehrsatzes. In diesem Kapitel entwickelt Laplace nämlich das Potential eines beliebig gestalteten Körpers in eine Reihe, die — für äussere Punkte — nach Potenzen der reciproken Entfernung r des angezogenen Punktes vom Anfangspunkt der Koordinaten fortschreitet. Der Winkel, den r mit der Axe der x bildet, sei θ, und φ der Winkel, welchen die durch r und diese Axe gelegte Ebene mit der Ebene der Axen der x und y bildet. Dann ist jene Reihe von der Form (vgl. auch die von mir herausgegebenen Vorlesungen Dirichlet's: Über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernungen wirkenden Kräfte, § 19 und § 22):

[1]) Diese Äusserung rührt nach der oben citierten Abhandlung von Maurice „Sur les travaux et les écrits de M. Legendre," der ich sie entnommen habe, von Lagrange her.

[2]) Maurice a. a. O.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$V = \frac{X^{(0)}}{r} + \frac{X^{(1)}}{r^2} + \ldots\ldots, \qquad (\alpha)$$

wo $X^{(0)}$, $X^{(1)}$ . . . Kugelfunktionen nullten, ersten . . . Grades sind, also $X^{(n)}$ von der Form

$$\Sigma\left(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi\right)\left(\sin\theta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1.2}\sin\theta^{n-2}\cos\theta^2 + \ldots\right)$$

$$+\Sigma\left(A_s \cos s\varphi + B_s \sin s\varphi\right)\left(\sin\theta^{n-1}\cos\theta - \frac{(n-1+s)(n-1-s)}{2.3}\sin\theta^{n-3}\cos\theta^3 + \ldots\right).$$

Für s hat man sämtliche Werte von 0 bis n zu setzen, und zwar in der oberen Summe die mit n gleichartigen, in der unteren die mit n ungleichartigen.

Nachdem Laplace die Reihe (α) die für jeden beliebigen Körper gültig ist, entwickelt hat, nimmt er den anziehenden Körper so an, dass er sowohl durch den Äquator, als auch durch den Meridian, von welchem der Winkel φ gezählt wird, in zwei kongruente Teile geteilt wird. Dann wird V nämlich, wie man sofort bemerken wird, wenn man die Entwicklung der Reihe (α) verfolgt, eine Funktion von $\sin^2\theta$ und $\sin^2\varphi$, oder von $\sin^2\theta$ und von den Cosinus des Winkels 2φ und seiner Vielfachen sein: $X^{(n)}$ wird also Null sein, wenn n ungerade ist, und es wird in dem Fall, wo n gerade ist,

$$X^{(n)} = \Sigma A_s \cos s\varphi\left(\sin\theta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1.2}\sin\theta^{n-2}\cos\theta^2 + \ldots\right), \qquad (\beta)$$

wo $s = 0, 2, \ldots n$.

Wenn Laplace nun weiter sagt: „Man wird also den Wert für V haben, wenn dieser Wert durch eine Reihe für die beiden Fälle bestimmt sein wird, erstens dass der angezogene Punkt sich auf der Verlängerung der Axe, zweitens dass er sich in der Ebene des Äquators befindet," so verlangt er mehr, wie nötig ist, wie schon Bowditsh in seiner englischen Übersetzung der Méc. Cél. bemerkt hat (Todhunter, Art. 1076): es genügt offenbar, V für den Fall zu haben, dass der angezogene Punkt in der Ebene des Äquators liegt. Denn da die A in (β) Konstante sind, so ist für die Punkte des Äquators, wo $\theta = 90^0$, mithin der Koefficient von $A_s \cos s\varphi = 1$:

$$X^{(n)} = \Sigma A_s \cos s\varphi, \qquad (\gamma)$$

und umgekehrt ergiebt sich aus letzterer Gleichung der allgemeine Wert des $X^{(n)}$, wenn man $A_s \cos s\varphi$ mit

$$\sin\theta^n - \frac{(n+s)(n-s)}{1.2}\sin\theta^{n-2}\cos\theta^2 + \ldots$$

multipliciert.

Der Körper, den wir so eben betrachtet haben, begreift das Ellipsoid als speciellen Fall in sich. Für einen Punkt in der Ebene des Äquators hat man $a = 0$, und für $a = 0$ — so behauptet Laplace — lässt sich der im ersten Kapitel für V aufgestellte Wert

$$V = \iint \frac{dp\,dq \sin p\, J\sqrt{R}}{L^2}$$

nach q nach den bekannten Methoden integrieren, wenn man $\tan g\, q = t$ setzt. Und weiter behauptet er: „Nimmt man das Integral innerhalb der Grenzen von q, so wird es dann auch möglich sein in Beziehung auf die zweite veränderliche Grösse zu integrieren[1]), und man

[1]) Dies ist natürlich nur möglich durch Reihenentwicklung, denn wir wissen, dass sich V, auch für $a = 0$, nicht in geschlossener Form ohne Integralzeichen darstellen lässt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

findet, wenn M die Masse des Ellipsoides bedeutet, dass der Wert von $\frac{V}{M}$ von der Halbaxe k des Ellipsoides, welche senkrecht auf dem Äpuator steht, unabhängig ist, und nur von den Excentricitäten abhängt." Wenn sich dies alles so verhält, wie Laplace behauptet, dann werden die durch M dividierten Konstanten A in (γ), mithin der allgemeine Wert von $\frac{V}{M}$ allerdings auch nur von den Excentricitäten abhängig sein können.

Die Verification der Laplaceschen Behauptungen würde sehr mühsam sein. Einfacher kommt man zum Ziel, wenn man das von Legendre für den Fall $a = 0$ mit Hülfe der gewöhnlichen Integrationsmethoden bereits entwickelte Resultat benutzt, dem zufolge die Quotienten aus den Komponenten und der Masse nur von den Excentricitäten abhängen. Aus dem Umstande nämlich, dass die Komponenten die partiellen Derivierten von V nach b und c resp. sind, kann man ohne weiteres schliessen, dass auch $\frac{V}{M}$ für $a = 0$, ohne den Wert von $\frac{V}{M}$ für diesen Fall zu entwickeln, nur eine Funktion von den Excentricitäten sein kann, wenn man bedenkt, dass V, wenn $a^2 + b^2 + c^2$ wächst, den Grenzwert $\frac{M}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ hat. Es ist auffallend, dass Laplace hier nicht auf Legendre verwiesen hat. Übrigens hat es auch keine Schwierigkeit, aus dem Legendreschen Ausdruck für die Komponente, für $a = 0$, den Wert des V, für $a = 0$, in Form elliptischer Integrale zu entwickeln.

Auch dieser Beweis des Maclaurinschen Satzes ist nicht für jede Lage des angezogenen Punktes gültig, sondern nur, so lange r grösser ist als die grösste der drei Halbaxen des Ellipsoides; denn nur für diesen Fall ist die Reihe (α), auf welcher der Beweis beruht, konvergent. (S. Dirichlet a. a. O. § 19).

Ich mache noch aufmerksam auf die Analogie dieser Methode mit Legendres Methode, die Anziehung eines Rotationsellipsoides zu bestimmen. Legendres Methode lag der Satz zu Grunde: Man kennt die Anziehung eines beliebigen Rotationskörpers für alle äusseren Punkte, wenn man die Anziehung für die auf der Axe gelegenen Punkte kennt. Diesen Satz hat Laplace dahin verallgemeinert: Man kennt die Anziehung eines jeden Körpers, der sowohl durch den Meridian als auch durch den Äquator in zwei kongruente Teile geteilt wird, wenn man die Anziehung kennt, die derselbe auf die in der Ebene des Äquators liegenden Punkte ausübt. Auf diesen Satz gründet Laplace seine zweite Methode, die Anziehung eines dreiaxigen Ellipsoides für einen beliebigen äusseren Punkt zu bestimmen.

Laplace, Mécanique Céleste, Livre II art. 11.

Es verdient noch eine Laplace eigentümliche Methode bemerkt zu werden, das Potential einer Kugelschale für äussere Punkte zu erhalten.

Laplace legt die nach ihm benannte für äussere Punkte gültige Gleichung

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0 \qquad (a)$$

zu Grunde, die er durch die gewöhnliche, aber langwierige Substitutionsmethode in Polarkoordinaten transformiert. Da das Potential einer Kugelschale offenbar nur von der Ent-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fernung des angezogenen Punktes vom Mittelpunkt der Schale abhängt, so geht die transformierte Gleichung (a) über in folgende:

$$0 = \frac{d^2 r V}{dr^2}. \qquad (b)$$

Die Integration ergiebt auf der Stelle

$$V = A + \frac{B}{r}.$$

Die Konstante A bestimmt Laplace nicht, indem er sofort zu Resultante $-\frac{dV}{dr} = \frac{B}{r^2}$ übergeht. Für innere Punkte, d. h. für Punkte, die innerhalb des von der Kugelschale umschlossenen Hohlraumes liegen, ist $B = 0$, mithin $-\frac{dV}{dr} = 0$, wie sich ergiebt, wenn der angezogene Punkt im Mittelpunkt der Kugelschale angenommen wird; und für äussere Punkte muss $B = M$ sein, weil offenbar, wenn der angezogene Punkt in unendlicher Entfernung von der Schale liegt, die Wirkung dieselbe ist, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre.

Laplace beweist noch, dass das Naturgesetz das einzige ist, bei welchem eine Kugelschale auf einen beliebigen äusseren Punkt so wirkt, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre, und gleichfalls das einzige, bei welchem die Wirkung auf einen inneren Punkt gleich Null ist. Beim Beweis der ersten Behauptung ergiebt sich durch Integration, bei Anwendung von Polarkoordinaten, ein neuer Beweis des Satzes, dass die Anziehung einer Kugelschale auf irgend einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt gleich $\frac{M}{r^2}$ ist.

Übrigens findet sich der Wert des Potentials einer Kugel auch für innere Punkte bei Laplace, und zwar in der genannten Abhandlung in der Histoire von 1782, Art. XI, angegeben und benutzt, wo es von demselben heisst: valeur qu'on trouve facilement être égale à $2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2$.

Poisson hat (1826) nach derselben Methode das Potential einer Kugel und Kugelschale für jede Lage des angezogenen Punktes bestimmt, indem er aber ausser der für äussere Punkte gültigen Laplaceschen Gleichung (b) auch noch die für die der anziehenden Masse angehörigen Punkte gültige Poissonsche Gleichung

$$\frac{d^2 r V}{dr^2} = -4\pi r$$

zu Hülfe nimmt. (Mémoire sur l'attraction des Sphéroïdes in der Connaissance des temps pour 1829; pag 362, Art. 24).[1])

Dieselben Resultate für Kugel und Kugelschale hat Dirichlet (a. a. O. § 5) entwickelt, indem er ausschliesslich die ursprüngliche Laplacesche Gleichung (a) benutzt.

[1]) Vgl. auch Poissons Abhandlung: Rémarques sur une équation qui se présente dans la théorie des attractions des sphéroïdes. Nouveau Bulletin de la société philomatique de Paris. Vol. III. 1813. p. 391.

Buchdruckerei d. Taubstummen-Anstalt (Jul. Bergas) Schleswig

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

fernung des angezogenen Punktes vom Mit ... ht die transformierte Gleichung (a) über in folgende:

$$0 = \frac{d^2 r}{dr^2}$$

Die Integration ergiebt auf der Stelle

$$V =$$

Die Konstante A bestimmt Laplace nicht, ... $= \frac{B}{r^2}$ über-geht. Für innere Punkte, d. h. für Punk ... elschale umschlossenen Hohlraumes liegen, ist $B = 0$, n ... wenn der angezogene Punkt im Mittelpunkt der Kugels ... ssere Punkte muss $B = M$ sein, weil offenbar, wenn der a ... fernung von der Schale liegt, die Wirkung dieselbe ist, ... elpunkt vereinigt wäre.

Laplace beweist noch, dass das Nat ... eine Kugelschale auf einen beliebigen äusseren Punkt so ... Mittelpunkt vereinigt wäre, und gleichfalls das einzig ... inen inneren Punkt gleich Null ist. Beim Beweis der er ... Integration, bei Anwendung von Polarkoordinaten, ein n ... ehung einer Kugelschale auf irgend einen ausserhalb de ... t.

Übrigens findet sich der Wert des ... nere Punkte bei Laplace, und zwar in der genannten Ab ... Art. XI, angegeben und benutzt, wo es von demselben ... t être égale à $2\pi a^2 - \frac{2}{3}\pi r^2$.

Poisson hat (1826) nach derselben ... und Kugelschale für jede Lage des angezogenen Punkt ... für äussere Punkte gültigen Laplaceschen Gleichung (b) ... nden Masse angehörigen Punkte gültige Poissonsche Gle ...

$$\frac{d^2 r V}{dr^2} =$$

zu Hülfe nimmt. (Mémoire sur l'attract ... issance des temps pour 1829; pag 362, Art. 24).[1])

Dieselben Resultate für Kugel und K ... entwickelt, indem er ausschliesslich die ursprüngliche I ...

[1]) Vgl. auch Poissons Abhandlung: Rémarqu ... a théorie des attractions des sphéroïdes. Nouveau Bulletin de la so ... 391.

Buchdruckerei d. Taubstumm

TIFFEN Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf