Über die gemischte Kegelschnittschaar, welche durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmt ist.

I. Allgemeine Eigenschaften.

Die dualistische Auffassung, welche das trimetrische Coordinatensystem gestattet, giebt ein Mittel in die Hand, reciproke Eigenschaften eines geometrischen Gebildes auf einfache Weise zu erkennen. Da die gegebenen Elemente, zwei Punkte und zwei Tangenten, ein Hervortreten reciproker Eigenschaften der gemischten Kegelschnittschaar andeuten, so soll dieses Coordinatensystem der folgenden Betrachtung als das geeigneteste zu Grunde gelegt werden.

Es seien $X = o$ $Y = o$ $Z = o$ die Gleichungen dreier Graden; die beiden Schnittpunkte derselben $X = o$ $Z = o$ u. $Y = o$ $Z = o$ seien als die festen Punkte P u. P_1 und die Graden durch den dritten Schnittpunkt $X = o$ $Y = o$, $a^2 X \pm b^2 Y = o$ und $a_1^2 X \pm b_1^2 Y = o$, als die festen Tangenten T u. T_1 der gemischten Kegelschnittschaar bestimmt.

Die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher die Tangenten T u. T_1 berührt und durch die festen Punkte P u. P_1 hindurchgeht, ist:

$$(a^2 X \pm b^2 Y)\ (a_1^2 X \pm b_1^2 Y) - (aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z)^2 = o.$$

In dieser sind aa_1 bb_1 reelle Zahlen, λ eine variable Constante u. $\varepsilon = \pm 1$. Lässt man λ die Werte $-\infty \gtreqless \lambda \lesseqgtr +\infty$ durchlaufen, so ergeben sich die Gleichungen der einzelnen Kegelschnitte der gemischten Schaar.

Eine der wesentlichen Eigenschaften der Kegelschnittgleichung liegt in dem Verschwinden der Glieder in X^2 u. Y^2; diese tritt stets ein, wenn die Constanten $a^2 a_1^2$ und $b^2 b_1^2$ gleiche Vorzeichen besitzen. Die Kegelschnitte der gemischten Schaar sind daher nur reell, wenn die Gleichungen der festen Tangenten entweder $a^2 X + b^2 Y = o$ $a_1^2 X + b_1^2 Y = o$ oder $a^2 X - b^2 Y = o$ $a_1^2 X - b_1^2 Y = o$ sind. Für die Reellität der gemischten Schaar erhalten wir daher die Bestimmung:

> Die gemischte Kegelschnittschaar, welche durch 2 Punkte und 2 Tangenten bestimmt wird, ist nur dann reell, wenn die beiden Punkte entweder in demselben Winkelraume oder in Scheitelräumen zwischen den festen Tangenten liegen.

Geben wir den Gleichungen $X = o$ $Y = o$ $Z = o$ die Bedeutung von Punktcoordinaten, so stellen $X = o$ $Z = o$ und $Y = o$ $Z = o$ zwei Grade vor, welche die Tangenten T T_1 der gemischten Schaar, dagegen $a^2 X + b^2 Y = o$ und $a_1^2 X + b_1^2 Y = o$ zwei Punkte der Graden $X = o$ $Y = o$, welche die festen Punkte P P_1 der gemischten Schaar sein sollen. Die Gleichung

$$(a^2 X + b^2 Y)\ (a_1^2 X + b_1^2 Y) - (aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z)^2 = o$$

repräsentirt dann einen Kegelschnitt, welcher die Graden $X = o$ $Z = o$, $Y = o$ $Z = o$ berührt und durch die Punkte $a^2 X + b^2 Y = o$ $a_1^2 X + b_1^2 Y = o$ hindurchgeht. $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = o$ ist ferner der Treffungspunkt der Tangenten in den letzteren Punkten eines Kegelschnitts. Auch bei dieser Auffassung der Coordinaten müssen $a^2 a_1^2$ und $b^2 b_1^2$ gleiche Vorzeichen besitzen, wenn die Glieder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in X^2 und Y^2 der Kegelschnittsgleichung sich heben sollen, was die Reellität der gemischten Schaar verlangt; ferner gelten für ε und λ dieselben oben schon gegebenen Bestimmungen.

Da die Deutung der analytischen Ausdrücke in Punktcoordinaten keinen Schwierigkeiten unterliegt, so soll im Folgenden die Herleitung der Eigenschaften im Allgemeinen in Liniencoordinaten gegeben werden, während die aus der Deutung der analytischen Ausdrücke in Punktcoordinaten sich ergebenden reciproken Eigenschaften der übersichtlichen Zusammenfassung der gewonnenen Resultate gegenübergestellt werden.

Der Ausdruck $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = o$ der Kegelschnittsgleichung ist die Berührungssehne der festen Tangenten eines Kegelschnitts. Für die laufenden Werthe von λ stellt sie eine Grade dar, welche stets durch den Punkt $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o \; Z = o$ hindurchgeht. Berücksichtigt man, dass $\varepsilon = \pm 1$ ist, so ergeben sich zwei unveränderliche Punkte auf $Z = o$, durch welche die Berührungssehnen der Kegelschnitte der gemischten Schaar hindurchlaufen. Diese Punkte mögen fernerhin π für $\varepsilon = -1$ u. π_1 für $\varepsilon = +1$ heissen. Das Auftreten dieser Punkte π u. π_1 zeigt, dass die gesamte gemischte Schaar in zwei Gruppen von Kegelschnitten zerfällt, welche in der Gleichung durch die beiden Werte $\varepsilon = -1$ und $\varepsilon = +1$ bestimmt sind.

Aus den Gleichungen der Punkte $aa_1 X - bb_1 Y = o \; Z = o \; (\pi)$ und $aa_1 X + bb_1 Y = o \; Z = o \; (\pi_1)$ ergiebt sich ferner, dass sie zu den Punkten $X = o \; Z = o \; (P)$ und $Y = o \; Z = o \; (P_1)$ harmonisch conjugiert sind.

Da die Gleichung $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o$ sich in die Form

$$a_1 b_1 (a^2 X + b^2 Y) + \varepsilon ab (a_1^2 X + b_1^2 Y) = o$$

bringen lässt, so folgt daraus, dass die Punkte $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o \; Z = o$ ($\pi \, \pi_1$ für $\varepsilon = \mp 1$) auch zu den Punkten $a^2 X + b^2 Y = o \; Z = o$ und $a_1^2 X + b_1^2 Y = o \; Z = o$ harmonisch conjugiert sind. Diese letzteren sind die Treffungspunkte der festen Tangenten $T \, T_1$ mit der Graden durch die festen Punkte ($P \, P_1$); sie mögen für die Folge Q u. Q_1 heissen. Da also die Punkte $\pi \, \pi_1$ sowohl zu $P \, P_1$ als auch zu $Q \, Q_1$ conjugiert harmonisch liegen, so sind sie Asymptotenpunkte einer hyperbolischen Punktreihe.

Wir erhalten daher folgende Eigenschaften der gemischten Schaar.

Die gemischte Kegelschnittschaar, welche durch zwei Tangenten und zwei Punkte bestimmt ist, zerfällt in zwei Gruppen von Kegelschnitten. Die Berührungssehnen der festen Tangenten der Kegelschnitte jeder Gruppe laufen durch je einen unveränderlichen Punkt $\pi \, \pi_1$ derjenigen Graden, welche durch die festen Punkte $P \, P_1$ der gemischten Schaar bestimmt ist. Diese Punkte $\pi \, \pi_1$ sind Asymptotenpunkte eines hyperbolischen Punktsystems, in welchem die beiden festen Punkte $P \, P_1$ und die Schnittpunkte $Q \, Q_1$ der festen Tangenten mit der Graden durch die festen Punkte zusammengehörige Punktepaare sind.

Die gemischte Kegelschnittschaar, welche durch zwei Punkte und zwei Tangenten bestimmt ist, zerfällt in zwei Gruppen von Kegelschnitten. Die Tangenten eines jeden Kegelschnitts einer Gruppe in den festen Punkten $P \, P_1$ treffen sich auf einer Graden, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch denjenigen unveränderlichen Punkt π oder π_1 der Berührungssehnen hindurchgeht, welcher der andern Gruppe von Kegelschnitten angehört. Diese beiden Graden sind Asymptotenstrahlen eines hyperbolischen Strahlenbüschels, in welchem die beiden festen Tangenten und die beiden Graden durch den Treffungspunkt der festen Tangenten und durch die festen Punkte $P \, P_1$ zusammengehörige Strahlenpaare sind.

Die constructive Bestimmung der Asymptotenpunkte π u. π_1 giebt uns ein Mittel, die Tangenten in den festen Punkten an die Kegelschnitte oder die Berührungssehnen durch Zeichnung zu bestimmen, wenn noch eine dritte Tangente hinzutritt oder ein dritter Punkt gegeben ist.

Hier kann die Frage aufgeworfen werden, wie viele Kegelschnitte der gemischten Schaar gehen durch einen gegebenen Punkt, oder, wie viele Kegelschnitte der gemischten Schaar berühren eine Grade der Ebene?

Soll ein Kegelschnitt der gemischten Schaar durch einen Punkt, dessen Coordinaten $X^1 : Y^1 : Z^1$ sind, hindurchgehen, so müssen die Coordinaten des Punktes der Kegelschnittsgleichung genügen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man daher seine Coordinaten in die Gleichung, so ergiebt sich zur Bestimmung des durch ihn gehenden Kegelschnitts eine Gleichung, aus welcher man die variable Constante

$$\lambda = -\frac{aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1}{Z^1} \pm \frac{1}{Z^1} \sqrt{(a^2 X^1 + b^2 Y^1)(a_1^2 X^1 + b_1^2 Y^1)} \text{ erhält.}$$

Da hieraus sowohl für $\varepsilon = +1$ als auch für $\varepsilon = -1$ je zwei Werte λ resultieren, so gehen durch einen jeden Punkt eines der Scheitelräume, in welchen die festen Punkte liegen, 4 Kegelschnitte und zwar zwei aus jeder Gruppe hindurch. Ist $X^1 = 0$ oder $Y^1 = 0$ d. h. liegt der angenommene Punkt auf der Graden durch den Schnittpunkt der Tangenten und einen der festen Punkte $P P_1$, so ist der eine Wert λ für jede Gruppe $\lambda = 0$, wofür der entsprechende Kegelschnitt in ein Gradenpaar $XY = 0$ zerfällt.

Durch jeden Punkt eines der Scheitelräume, in welchem die festen Punkte liegen, gehen stets 4 Kegelschnitte und zwar je 2 aus jeder Gruppe. Liegt der Punkt auf einer der Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und einen der festen Punkte, so zerfällt einer der beiden Kegelschnitte jeder Gruppe in 2 Grade, nämlich die Graden durch den Treffungspunkt der festen Tangenten und je einen der festen Punkte.

Jede Grade in der Ebene der gemischten Schaar wird von 4 Kegelschnitten und zwar von zwei aus jeder Gruppe berührt. Geht diese Grade durch den Schnittpunkt Q oder Q_1 einer festen Tangente mit der Graden durch die festen Punkte, so zerfällt in jeder Gruppe einer der beiden Kegelschnitte in ein Punktepaar, nämlich die beiden Schnittpunkte $Q\ Q_1$ der festen Tangenten mit der Graden durch die festen Punkte.

Die Gleichung der Berührungssehne nimmt für $\varepsilon = \pm 1$ und für gleiche aber entgegengesetzte Werte von λ $\lambda = \pm \lambda_1$ vier Formen an, welche 4 Grade eines vollständigen Vierecks bestimmen, dessen 4 Ecken auf den festen Tangenten liegen und zugleich die Berührungspunkte von 4 Kegelschnitten auf den festen Tangenten sind. Aus der Form der 4 Gleichungen folgt, dass die Diagonalpunkte des vollständigen Vierecks stets die unveränderlichen Punkte $aa_1 X + bb_1 Y = 0\ Z = 0$ (π_1) $aa_1 X - bb_1 Y = 0\ Z = 0$ (π) und $X = 0\ Y = 0$, d. i. der Schnittpunkt der festen Tangenten, sind.

Da durch jeden Eckpunkt des vollständigen Vierecks zwei Berührungssehnen hindurchgehen, welche je einem Kegelschnitte einer Gruppe zugehörig sind, und dieser Eckpunkt zugleich Berührungspunkt jedes der beiden Kegelschnitte auf der festen Tangente ist, so stehen stets 4 Kegelschnitte der gemischten Schaar und zwar zwei aus jeder Gruppe in solcher Beziehung zu einander, dass je einer der einen Gruppe mit jedem der andern Gruppe auf einer festen Tangente eine Berührung der ersten Ordnung hat.

Jeder Punkt auf einer der festen Tangenten ist also gemeinsamer Berührungspunkt je eines Kegelschnitts jeder Gruppe. Halten wir die Berührungspunkte der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte auf jeder der festen Tangente zusammen, während sie sich auf den Tangenten verschieben, so ergiebt sich eine einfache Anordnung derselben. Die Grade, welche von einem Fundamentalpunkte, etwa $Y = 0\ Z = 0$, nach einem Berührungspunkte hinlauft, ergiebt sich aus den Gleichungen der Berührungssehne $aa_1 X + bb_1 Y + \lambda Z = 0$ und einer Tangente $a^2 X + b^2 Y = 0$ in der Form $b(ab_1 - a_1 b) Y + a \lambda Z = 0$. Für gleiche entgegengesetzte Werte von λ ergeben sich die beiden Graden nach den zusammengehörigen Berührungspunktenpaaren einer festen Tangente, welche, wie aus der Form der Gleichung folgt, stets conjugiert harmonische Punkte sind zu $X = 0\ Y = 0$ d. i. dem Schnittpunkte der festen Tangenten und zu dem Schnittpunkte Q oder Q_1 einer festen Tangente mit der Graden durch die festen Punkte. Die Berührungspunkte auf jeder der festen Tangenten sind demnach eine hyperbolische Punktreihe, deren Asymptotenpunkte die vorhin hervorgehobenen beiden Punkte sind.

Die 4 Berührungspunkte der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte bestimmen ein Kegelschnittbüschel. Die Gleichung eines Kegelschnitts unter denselben ist:

$$(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) - (aa_1 X + bb_1 Y + \lambda Z)(aa_1 X + bb_1 Y - \lambda Z) = 0,$$

welche sich in die Form

$$(ab_1 - a_1 b)^2 XY + \lambda^2 Z^2 = 0 \text{ bringen lässt.}$$

Dieser Kegelschnitt geht demnach ausser durch die 4 Berührungspunkte durch die festen Punkte $X = 0\ Z = 0$ (P) und $Y = 0\ Z = 0$ (P_1) und berührt in den letzteren die Graden $X = 0\ Y = 0$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine kleine Transformation der Gleichung ergiebt die Form

$$(ab_1 - a_1b)^2 \{(aa_1 X + bb_1 Y)^2 - (aa_1 X - bb_1 Y)^2\} + 4\, aa_1\, bb_1\, \lambda^2 Z^2 = o,$$

welche zeigt, dass die Punkte $aa_1 X + bb_1 Y = o$ $Z = o$ (π_1), $aa_1 X - bb_1 Y = o$ $Z = o$ (π), $aa_1 X + bb_1 Y = o$ $aa_1 X - bb_1 Y = o$, der Schnittpunkt der festen Tangenten, stets ein Tripel conjugierter Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind.

Denkt man sich eine der Seiten des vollständigen Vierecks um einen unveränderlichen Punkt der Berührungssehnen π oder π_1 gedreht, so nehmen auch die übrigen Seiten an dieser Drehung teil, ohne dass die entwickelten Eigenschaften des vollständigen Vierecks und des durch die 4 Berührungspunkte und die beiden festen Punkte bestimmten Kegelschnitts sich ändern. Es kann von Interesse sein, die Gattung dieses veränderlichen Kegelschnitts zu kennen. In dieser Untersuchung sind die beiden Hauptfälle für die Lage der festen Punkte zu unterscheiden.

Für den Fall, wenn die festen Punkte in demselben Winkelraume der festen Tangenten liegen, lautet die Gleichung des betrachteten Kegelschnitts: $(ab_1 - a_1b)^2 XY + \lambda^2 Z^2 = o$.

Ist die Gleichung der unendlich entfernten Graden $AX + BY + CZ = o$, in welcher ABC den sinus der Winkel des Fundamentaldreiecks proportioniert sind, so ergiebt sich als Diskriminante $\triangle$ der Gleichungen $\triangle = (ab_1 - a_1b)^2 C^2 + 4\lambda^2 AB$, welche offenbar stets positiv sein muss. Demnach trifft die unendlich entfernte Grade den Kegelschnitt stets in zwei getrennten Punkten, der Kegelschnitt ist in diesem Falle immer eine Hyperbel.

Für den zweiten Hauptfall, wenn die festen Punkte der gemischten Schaar in Scheitelräumen der festen Tangenten getrennt liegen, lautet die Gleichung des Kegelschnitts

$$(ab_1 + a_1b)^2 XY - \lambda^2 Z^2 = o$$

und als Diskriminante $\triangle$ ergiebt sich: $\triangle = (ab_1 + a_1b)^2 C^2 - 4\lambda^2 AB$. Dieser Ausdruck $\triangle$ ist für $o \leq \lambda^2 < \frac{(ab_1 + a_1b)^2 C^2}{4AB}$ positiv, für $\lambda^2 = \frac{(ab_1 + a_1b)^2 C^2}{4AB}$ Null und für $\frac{C^2 (ab_1 + a_1b)^2}{4AB} < \lambda^2 \leq +\infty$ negativ. Für diejenigen Werte der variablen Constante λ^2, welche der ersten Grenzbestimmung genügen, erhalten wir daher Hyperbeln, für die zweite Bestimmung eine Parabel, für die dritte dagegen Ellipsen. Für den Grenzwert $\lambda = o$ zerfällt die entsprechende Hyperbel in zwei Grade $XY = o$ und für $\lambda = \pm\infty$ die dadurch bestimmte Ellipse in ein zusammenfallendes Streckenpaar $Z^2 = o$, die Strecke zwischen den festen Punkten $P\ P_1$. Als allgemeines Kriterium für die Gattung lässt sich weiterhin folgendes feststellen. Liegen die 4 Berührungspunkte auf den festen Tangenten der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte paarweise auf verschiedenen Seiten der Graden durch die festen Punkte $P\ P_1$, so ist der Kegelschnitt Ellipse; ist einer der Berührungspunkte der unendlich entfernte Punkt der festen Tangente, so ist der Kegelschnitt Parabel; befinden sich die Berührungspunkte sämtlich auf einer Seite der Graden durch die festen Punkte $P\ P_1$, so ist der Kegelschnitt Hyperbel.

Es ergiebt sich nun folgende Gruppe von Eigenschaften der gemischten Schaar:

Die Berührungspunkte auf den festen Tangenten der Kegelschnitte der gemischten Schaar sind eine hyperbolische Punktreihe, deren Asymptotenpunkte der Schnittpunkt der festen Tangenten und der Treffungspunkt einer festen Tangente mit der Graden durch die festen Punkte ist.

Die Kegelschnitte der gemischten Schaar ordnen sich zu 4 und zwar je zwei aus jeder Gruppe in solcher Weise, dass jeder aus der einen Gruppe jeden aus der andern in demselben Punkte einer der festen Tangenten berührt.

Die 4 Berührungspunkte der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte sind stets die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Diagonalpunkte

Die Tangenten der Kegelschnitte der gemischten Schaar in jedem der festen Punkte P oder P_1 sind ein hyperbolisches Strahlenbüschel, dessen Asymptotenstrahlen die Grade durch die festen Punkte $P\ P_1$ und die Grade durch einen der festen Punkte nach dem Treffungspunkt der festen Tangenten sind.

Die Kegelschnitte der gemischten Schaar ordnen sich zu 4 und zwar paarweise aus jeder Gruppe in solcher Weise, dass jeder aus der einen Gruppe mit jedem aus der andern in einem der festen Punkte eine gemeinsame Tangente besitzt.

Die 4 Tangenten in den festen Punkten $P\ P_1$ der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte sind die Seiten eines vollständigen Vierseits,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Schnittpunkt der festen Tangenten und die beiden unveränderlichen Punkte π π_1 der Berührungssehnen der beiden Kegelschnittgruppen sind.

Die 4 Berührungspunkte der sich paarweise berührenden Kegelschnitte liegen mit den beiden festen Punkten stets auf einem Kegelschnitte, welcher die Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den festen Punkten P P_1 in den letzteren zu Tangenten hat.

Für jeden dieser Kegelschnitte sind die Diagonalpunkte des vollständigen Vierseits ein Tripel conjugierter Punkte.

Liegen die festen Punkte in demselben von den festen Tangenten gebildeten Winkelraume, so ist der Kegelschnitt immer Hyperbel. Die Hyperbel kann zwei Mal in zwei Grade zerfallen.

Befinden sich die festen Punkte in Scheitelräumen der festen Tangenten getrennt, so ist der Kegelschnitt Ellipse, wenn die 4 Berührungspunkte paarweise auf beiden Seiten der Graden durch die festen Punkte liegen; ist bei dieser Verteilung einer der Punkte der unendlich entfernte Punkt der Tangente, so ist der Kegelschnitt Parabel; liegen endlich die 4 Berührungspunkte auf derselben Seite der Graden durch die festen Punkte, so ist der Kegelschnitt Hyperbel. Unter den Ellipsen tritt einmal ein zusammenfallendes Streckenpaar, die Strecken Q Q_1 zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte, unter den Hyperbeln ein Gradenpaar auf, die Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den festen Punkten.

dessen Diagonalen die Grade durch die festen Punkte P P_1, dann die beiden Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den unveränderlichen Punkten der Berührungssehnen π u. π_1 der beiden Kegelschnittgruppen sind.

Die 4 Tangenten in den festen Punkten der 4 Kegelschnitte umhüllen zugleich mit den beiden festen Tangenten immer einen Kegelschnitt, welcher die Grade durch die festen Punkte P P_1 zur Berührungssehne hat.

Für jeden dieser Kegelschnitte sind die Diagonalen des oben genannten Vierseits ein Tripel conjugierter Strahlen.

Liegen die festen Punkte in demselben von den festen Tangenten gebildeten Winkelraume, so ist dieser Kegelschnitt stets Hyperbel, diese kann zwei Mal in Gradenpaare zerfallen.

Befinden sich die festen Punkte in Scheitelräumen der festen Tangenten von einander getrennt, so ist der Kegelschnitt Ellipse, wenn die beiden veränderlichen Ecken des Tangentenvierseits auf verschiedenen Seiten der Graden durch die festen Punkte liegen. Fällt einer der veränderlichen Eckpunkte ins Unendliche, so ist der Kegelschnitt Parabel. Wenn beide veränderliche Eckpunkte des Tangentenvierseits auf derselben Seite der Graden durch die festen Punkte zu liegen kommen, so ist der Kegelschnitt Hyperbel. Unter den Ellipsen tritt einmal ein Punktepaar, die Schnittpunkte Q Q_1 der festen Tangenten mit der Graden durch die festen Punkte P P_1 auf, unter den Hyperbeln ein Gradenpaar, die festen Tangenten, auf.

Eine neue Reihe von Eigenschaften, welche mit den bisher gefundenen verwandt sind, lässt sich auffinden, wenn man die Gleichung der gemischten Kegelschnittschaar in die Form

$$(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 XY - \lambda Z (2aa_1 X + 2\varepsilon bb_1 Y + \lambda Z) = 0 \text{ überführt.}$$

Diese zeigt, dass der Kegelschnitt ausser durch die Punkte $X = 0$ $Z = 0$ und $Y = 0$ $Z = 0$ d. i. die festen Punkte P P_1 noch durch die Treffungspunkte der Graden $2aa_1 X + 2\varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = 0$ mit den Fundamentallinien $X = 0$ $Y = 0$ hindurchgeht.

Jeder Kegelschnitt der gemischten Schaar schneidet also die Graden durch den Treffungspunkt der Tangenten und je einen der festen Punkte ausser in diesem noch in je einem Punkte, durch welche die Grade $2aa_1 X + 2\varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = 0$ hindurchgeht. Diese Grade lauft in der einen Gruppe der Kegelschnitte für $\varepsilon = +1$ stets durch die Punkte $aa_1 X + bb Y = 0$ u. $Z = 0$ (π_1) und in der andern Gruppe für $\varepsilon = -1$ durch $aa_1 X - bb_1 Y = 0$ $Z = 0$ (π), die unveränderlichen Punkte der Berührungssehnen jeder Kegelschnittgruppe.

Setzt man in die Gleichung der Sekante $2aa_1 X + 2\varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = 0$ $\varepsilon = \pm 1$ und für λ gleiche aber entgegengesetzte Werte, so ergeben sich 4 Grade, deren Schnittpunkte die Ecken eines vollständigen Vierecks darstellen, dessen Diagonalpunkte $aa_1 X + bb_1 Y = 0$, $aa_1 X - bb_1 Y$ o, der Schnittpunkt der festen Tangenten, ferner $aa_1 X + bb_1 Y = 0$ $Z = 0$ (π_1) und $aa_1 X - bb_1 Y = 0$ $Z = 0$ (π) sind. Da von den 4 Sekanten je zwei durch einen Eckpunkt des Vierecks hindurchgehen, so gehört jeder Eckpunkt zwei Kegelschnitten an und es gruppieren sich auch hier die Kegelschnitte der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gemischten Schaar zu 4 und zwar paarweise aus jeder Gruppe so, dass aus jeder Gruppe ein Kegelschnitt durch denselben Eckpunkt des Vierecks hindurchgeht.

Die beiden Eckpunkte des Vierecks auf einer der Graden $Y = o$ durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und einen der festen Punkte ergeben sich, wenn in $2aa_1 X + 2\varepsilon bb_1 Y + \lambda Z = o$ $Y = o$ gesetzt wird, $2aa_1 X + \lambda Z = o$ $Y = o$. Für gleiche aber entgegengesetzte Werte von λ stellen diese die conjugierten harmonischen Punkte zu den beiden Punkten $X = o$ $Y = o$ u. $X = o$ $Z = o$ vor.

Da also zwei dieser Eckpunkte auf der Graden durch den Schnittpunkt der Tangenten und einen festen Punkt, welche gemeinsame Punkte je eines Kegelschnitts jeder Gruppe sind, stets conjugiert harmonisch gelegen sind zu dem Schnittpunkte der festen Tangenten und einem festen Punkte, so sind die gemeinsamen Punkte je zweier Kegelschnitte auf dieser Graden ein hyperbolisches Punktsystem, dessen Asymptotenpunkte der Schnittpunkt der festen Tangenten und ein fester Punkt sind.

Durch die 4 Doppelpunkte in den Ecken des Vierecks ist ein Kegelschnittbüschel bestimmt, dem der Kegelschnitt

$$(2aa_1 X + 2bb_1 Y + \lambda Z)(2aa_1 X + 2bb_1 Y - \lambda) + 4(ab_1 - a_1 b)^2 XY = o \text{ angehört.}$$

Bringt man seine Gleichung in die Form

$$4(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) - \lambda^2 Z^2 = o,$$

so zeigt diese, dass der Kegelschnitt die festen Tangenten $a^2 X + b^2 Y = o$ und $a_1^2 X + b_1^2 Y = o$ in ihren Treffungspunkten mit $Z = o$, d. i. der Graden durch die festen Punkte $P P_1$, berührt. Es liegen demnach die 4 Ecken des Vierecks und die Schnittpunkte $Q Q_1$ der Graden durch die festen Punkte mit den festen Tangenten auf einem Kegelschnitt, den die festen Tangenten in den Punkten $Q Q_1$ berühren. Ferner lässt sich die Gleichung transformieren in

$$(ab_1 + a_1 b)^2 (aa_1 X + bb_1 Y)^2 - (ab_1 - a_1 b)^2 (aa_1 X - bb_1 Y)^2 - aa_1 bb_1 \lambda^2 Z^2 = o.$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Punkte $aa_1 X + bb_1 Y = o$ $Z = o$ (π_1), $aa_1 X - bb_1 Y = o$ $Z = o$ (π) und $aa_1 X + bb_1 Y = o$ $aa_1 X - bb_1 Y = o$ d. i. der Schnittpunkt der festen Tangenten immer ein Tripel conjugierter Punkte des Kegelschnitts sind. Um zu entscheiden, welcher Gattung der Kegelschnitt angehört, muss auf die Lage der festen Punkte zwischen den Tangenten Rücksicht genommen werden.

Sind die festen Punkte in Scheitelräumen der festen Tangenten verteilt, so lautet die Gleichung des Kegelschnitts

$$4(a^2 X - b^2 Y)(a_1^2 X - b_1^2 Y) - \lambda^2 Z^2 = o.$$

Die Bedingung, unter welcher die unendlich entfernte Grade $AX + BY + CZ = o$ den Kegelschnitt trifft, ergiebt sich aus der Diskriminante $\triangle$

$$\triangle = 16 C^4 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2)^2 + 16 \lambda^2 (a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A).$$

Da $\triangle$ offenbar für jeden reellen Wert λ positiv wird, so ist der Kegelschnitt immer eine Hyperbel. Wird $\lambda = o$, so zerfällt der Kegelschnitt in die Graden $a^2 X - b^2 Y = o$ $a_1^2 X - b_1^2 Y = o$ d. i. die festen Tangenten; ist $\lambda = \infty$, so ergiebt sich die Hyperbel $Z^2 = o$ d. h. die Teile der Graden durch die festen Punkte $P P_1$ welche von den Punkten $Q Q$ der festen Tangenten aus beiderseits nach den unendlich entfernten Punkten verlaufen.

Wenn dagegen die festen Punkte in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten liegen, so lautet die Gleichung des Kegelschnitts

$$4(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) - \lambda^2 Z^2 = o$$

und die Diskriminante $\triangle$ ist

$$\triangle = 16 C^4 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2)^2 + 16 C^2 \lambda^2 (a^2 B - b^2 A)(a_1^2 B - b_1^2 A).$$

Zunächst folgt aus der Bedeutung der Coëfficienten der trimetrischen Coordinaten, dass $a^2 B - b^2 A$ und $a_1^2 B - b_1^2 A$ Werte von entgegengesetzten Vorzeichen besitzen; daher ist das zweite Glied von $\triangle$ negativ und die Diskriminante positiv, wenn $o \leqq \lambda^2 < \frac{C^2 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2)^2}{(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)}$; diese Werte von λ^2 ergeben Hyperbeln; für $\lambda^2 = \frac{C^2 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2)^2}{(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)}$ wird $\triangle = o$, der Kegelschnitt ist dann eine Parabel; ist endlich $\frac{C^2 (a^2 b_1^2 + a_1^2 b^2)^2}{(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)} < \lambda^2 \leqq \infty$, so wird $\triangle < o$ und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Kegelschnitt ist Ellipse. Für den ersten Grenzfall $\lambda^2 = 0$ geht die Kegelschnittgleichung über in $(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) = 0$ d. h. die Hyperbel zerfällt in zwei Grade, die festen Tangenten; für den andern Grenzfall $\lambda^2 = +\infty$, ergiebt sich die Gleichung des Kegelschnitts $Z^2 = 0$, die entsprechende Ellipse besteht aus zwei zusammenfallenden Strecken, der Strecke $Q\,Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte, doppelt gedacht.

Stellen wir wiederum die gefundenen und die ihnen reciproken Eigenschaften, wie sie sich aus der Betrachtung der gegebenen Gleichungen unter Anwendung von drei Punktcoordinaten ergeben, zusammen, so ergiebt sich folgender Überblick:

Jeder Kegelschnitt einer Gruppe der gemischten Schaar trifft die beiden Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den festen Punkten $P\,P_1$ ausser in diesen noch in je einem Punkte, welche mit dem unveränderlichen Punkte der Berührungssehnen π oder π_1 seiner Gruppe in einer Graden liegen.

Je 4 Kegelschnitte der gemischten Schaar, und zwar je zwei aus jeder Gruppe, stehen in solcher Beziehung zu einander, dass je 1 Kegelschnitt einer Gruppe jeden der andern in demselben Punkte auf je einer derjenigen Graden trifft, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und einen der festen Punkte bestimmt ist.

Die 4 abwechselnd gemeinschaftlichen Punkte der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte sind Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Diagonalpunkte der Schnittpunkt der festen Tangenten und die unveränderlichen Punkte $\pi\,\pi_1$ der Berührungssehnen beider Gruppen der Kegelschnitte sind.

Die Gesamtheit aller Schnittpunkte der Kegelschnitte der gemischten Schaar mit jeder Graden durch den Treffungspunkt der festen Tangenten und je einen festen Punkt ist eine hyperbolische Punktreihe, deren Asymptotenpunkte der Treffungspunkt der festen Tangenten und der feste Punkt sind.

Die 4 Schnittpunkte der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte liegen stets auf einem Kegelschnitte, welcher die festen Tangenten in ihren Treffungspunkten mit der Graden durch die festen Punkte berührt und den Schnittpunkt der festen Tangenten sowie die unveränderlichen Punkte $\pi\,\pi_1$ der Berührungssehnen jeder Kegelschnittgruppe als ein Tripel conjugierter Punkte besitzt.

Von jedem Schnittpunkte Q oder Q_1 einer der festen Tangenten mit der Graden durch die festen Punkte ist ausser der festen Tangente noch eine zweite an jeden Kegelschnitt der gemischten Schaar construierbar. Dieses Tangentenpaar schneidet sich stets auf der Graden, welche bestimmt ist durch den Treffungspunkt der festen Tangenten und den unveränderlichen Punkt der Berührungssehnen der andern Kegelschnittgruppe, welcher der Kegelschnitt nicht angehört.

Je 4 Kegelschnitte der gemischten Schaar, und zwar je zwei aus jeder Gruppe, stehen in solcher Beziehung, dass ein Kegelschnitt der einen Gruppe mit jedem der andern ausser den festen noch eine gemeinsame Tangente besitzt, welche stets durch den Schnittpunkt Q oder Q_1 einer festen Tangente mit der Graden durch die festen Punkte hindurchgeht.

Die 4 Tangenten, deren jede zweien der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte gemeinsam ist, bestimmen ein vollständiges Vierseit, welches zu Diagonalen die Grade durch die festen Punkte und die beiden Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den unveränderlichen Punkten $\pi\,\pi_1$ der Berührungssehnen beider Gruppen der Kegelschnitte hat.

Die Gesamtheit aller Tangenten von jedem der Schnittpunkte einer festen Tangente mit der Graden durch die festen Punkte an die Kegelschnitte der gemischten Schaar ist ein hyperbolisches Strahlenbüschel, dessen Asymptotenstrahlen je eine feste Tangente und die Grade durch die festen Punkte sind.

Die 4 Tangenten der 4 zusammengehörigen Kegelschnitte umhüllen immer einen Kegelschnitt, welcher die Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den festen Punkten in den letzteren berührt und die Grade durch die festen Punkte sowie die Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch die unveränderlichen Punkte der Berührungssehnen jeder Kegelschnittgruppe zu einem Tripel conjugierter Strahlen hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Kegelschnitt ist immer eine Hyperbel, welche in einem Falle in 2 Grade, die festen Tangenten, zerfällt, wenn die festen Punkte in Scheitelräumen der festen Tangenten getrennt liegen.

Sind dagegen die festen Punkte in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten gegeben, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn die 4 Eckpunkte des Vierecks paarweise zu beiden Seiten der Graden durch die festen Punkte liegen. Liegt einer der 4 Eckpunkte im Unendlichen, so tritt der Kegelschnitt als Parabel auf. Befinden sich dagegen sämtliche 4 Punkte auf derselben Seite der Graden durch die festen Punkte, so ist der Kegelschnitt Hyperbel. Unter den Ellipsen tritt als besonderer Fall ein zusammenfallendes Streckenpaar auf, nämlich die Strecke $Q\,Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte. Die Hyperbel degeneriert einmal in zwei Grade, die festen Tangenten.

Dieser Kegelschnitt ist stets Hyperbel, wenn die beiden festen Punkte in Scheitelräumen zwischen den festen Tangenten getrennt liegen. Die Hyperbel zerfällt einmal in zwei Grade und zwar in die einerseits von den den festen Punkten begrenzten, andererseits unbegrenzten Teile der Graden durch die festen Punkte.

Befinden sich die festen Punkte dagegen in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten, so ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn die zwei veränderlichen Eckpunkte des Vierecks auf derselben Seite der Graden durch die festen Punkte liegen. Fällt einer der Eckpunkte ins Unendliche, so ist der Kegelschnitt Parabel. Der Kegelschnitt tritt als Ellipse auf, wenn die veränderlichen Eckpunkte zu beiden Seiten der Graden durch die festen Punkte liegen. Die Hyperbel zerfällt einmal in zwei Grade, die einerseits durch die festen Punkte begrenzten, andererseits unbegrenzten Abschnitte der Graden durch die festen Punkte. Die Ellipse degeneriert einmal in zwei zusammenfallende Strecken, welche zwischen den festen Punkten liegen.

II. Die Gattung der Kegelschnitte der gemischten Schaar.

Nach Ableitung der wesentlichsten allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnittschaar soll die Gattung, welcher die Kegelschnitte angehören, bestimmt werden, wobei die Lage der festen Punkte gegen die festen Tangenten berücksichtigt werden muss.

Wir beginnen mit dem Falle, wenn die beiden festen Punkte in Scheitelräumen zwischen den festen Tangenten liegen, für welchen die Gleichung der gemischten Schaar lautet:

$$(a^2 X - b^2 Y)(a_1^2 X - b_1^2 Y) - (aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z)^2 = 0;$$

daraus ergeben sich die beiden Kegelschnittgruppen für $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ und die einzelnen Kegelschnitte derselben für die laufenden reellen Werte für λ.

Die Bedingung, unter welcher die unendlich entfernte Grade $AX + BY + CZ = 0$, worin ABC den sinus der Winkel des Fundamentaldreiecks proportional sind, einen Kegelschnitt in zwei reellen getrennten oder zusammenfallenden oder in zwei imaginären Punkten trifft, wird durch die Diskriminante $\triangle$ beider Gleichungen gegeben. Diese ist

$$\triangle = 4\lambda^2 (a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A) - 4\lambda C (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 (aa_1 B + \varepsilon bb_1 A) + C^2 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^4$$

und es gilt die Bestimmung, dass $\triangle > 0$ Hyperbeln, $\triangle = 0$ Parabeln, $\triangle < 0$ Ellipsen anzeigt. Da der Wert von $\triangle$ von λ abhängig ist, so bestimmen wir λ, welches die Form

$$\lambda = m \pm n \text{ annimmt, worin}$$

$$m = \frac{C(ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 (aa_1 B + \varepsilon bb_1 A)}{2(a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A)} \qquad n = \frac{\sqrt{\triangle (a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A) - ABC^2 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2}}{2(a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A)}$$

ist. n bleibt somit nur reell, wenn $\triangle$ zwischen den Grenzen

$$+\infty \geqq \triangle \geqq \frac{ABC^2 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2}{2(a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A)} \text{ liegt.}$$

Demnach kann $\triangle$ in dem betrachteten Hauptfalle nur positive Werte annehmen, und die gemischte Kegelschnittschaar besteht aus Hyperbeln.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für den einen Grenzfall $\triangle = +\infty$ ergiebt sich $\lambda = \pm\infty$, wofür sich als Gleichung des entsprechenden Kegelschnitts nach Division derselben durch λ^2 $Z^2 = o$ ergiebt. Diese Hyperbel zerfällt daher in jeder Gruppe in zwei zusammenfallende Grade, nämlich in die einerseits durch die festen Tangenten begrenzten, andererseits unbegrenzten Abschnitte der Graden durch die beiden festen Punkte. Der andere Grenzwert für $\triangle$ ist

$$\triangle = \frac{ABC^2 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2}{(a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A)};$$

für diesen wird $n = o$ und $\lambda = m$, wofür die Berührungssehne die Form

$$aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \frac{C (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 (aa_1 B + \varepsilon bb_1 A)}{2 (a^2 B + b^2 A)(a_1^2 B + b_1^2 A)} Z = o \text{ annimmt.}$$

Diese Gleichung stellt eine Parallele zu derjenigen Graden dar, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch den Mittelpunkt des zwischen den festen Tangenten liegenden Abschnitts $Q\,Q_1$ der Graden durch die festen Punkte hindurch geht und zwar für $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ durch die unveränderlichen Punkte π_1 und π der Berührungssehnen der entsprechenden Gruppe.

Nachdem wir die Bedeutung dieser Berührungssehne gefunden, lässt sich ein Einblick in die Anordnung der Kegelschnitte der gemischten Schaar gewinnen. Die Berührungssehne irgend eines Kegelschnitts einer Gruppe stellt sich in der Form $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + (m + n) Z = o$ dar, worin nur n veränderlich ist. Geben wir der Gleichung die Form $(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + m Z) \pm n Z = o$, so ist ersichtlich, dass die Berührungssehnen der Kegelschnitte jeder Gruppe, welche paarweise gleiche Diskriminante besitzen, sich in der Weise ordnen, dass sie zu den zwei Berührungssehnen fester Kegelschnitte, $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + m Z = o$ und $Z = o$, harmonisch conjugierte Strahlen sind. Die Berührungssehnen jeder Gruppe sind demnach ein hyperbolisches Strahlenbüschel, dessen Asymptotenstrahlen die Berührungssehnen $aa_1 X + \varepsilon bb_1 + m Z = o$, deren Bedeutung oben gegeben ist, und $Z = o$, die Grade durch die festen Punkte, sind. Hält man die Treffungspunkte der Strahlen dieses hyperbolischen Strahlenbüschels mit der Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach dem Mittelpunkte der von denselben auf der Graden durch die festen Punkte begrenzten Strecke $Q\,Q_1$ fest, so ergeben diese eine hyperbolische Punktreihe. Da in dieser der eine Asymptotenpunkt der unendlich entfernte Punkt der Graden ist, so ist die hyperbolische Punktreihe auf dieser Graden gleichseitig. Weil aber die entsprechenden Punktepaare der hyperbolischen Punktreihe von dem im Endlichen gelegenen Asymptotenpunkte, d. i. dem Mittelpunkte der Strecke $Q\,Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte, gleich weit abstehen, so erhalten wir das bemerkenswerte Resultat, dass die Berührungssehnen der Kegelschnittpaare, welche in jeder Gruppe gleichen Wert der Diskriminante besitzen, die Grade durch den Treffungspunkt der festen Tangenten nach dem Mittelpunkte der Strecke $Q\,Q_1$ immer in Punkten treffen, welche von dem Mittelpunkte gleich weit abstehen.

Wir haben oben für den Grenzfall $\triangle = +\infty$ $\lambda = \pm\infty$ gefunden, in welchem die entsprechenden Hyperbeln jeder Gruppe in zwei zusammenfallende Grade zerfallen. Ist $\triangle = C^2 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^4$, so wird der Wert $n = m$, wofür die Berührungssehnen die Form $(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + m Z) \pm m Z = o$ oder $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + 2 m Z = o$ und $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o$ annehmen. Die Hyperbel jeder Gruppe, welche der zweiten Berührungssehne angehört, hat die Gleichung $XY = o$. Es zerfällt also diese Hyperbel in jeder Gruppe in die beiden Graden, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch je einen der festen Punkte hindurchlaufen. Die andere Berührungssehne des entsprechenden Kegelschnitts mit gleicher Diskriminante $aa X + \varepsilon bb_1 Y + 2 m Z = o$ muss nach dem Gesagten, was sich aber auch aus der Form der Gleichung ableiten lässt, durch den Schnittpunkt der Parallelen hindurchgehen, welche zu den festen Tangenten durch ihre Treffungspunkte Q u. Q_1 mit der Graden durch die festen Punkte gelegt werden.

Da unter den Berührungssehnen der Kegelschnitte jeder Gruppe Parallele zu jeder festen Tangente auftreten; so giebt es unter den Hyperbeln jeder Gruppe je zwei, von denen jede eine der festen Tangenten zur Asymptote hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir gehen nun zur Betrachtung des andern Hauptfalles über, wenn die festen Punkte in demselben Winkelraume der festen Tangenten sich befinden. Die Gleichung der gemischten Schaar ist

$$(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) - (aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + \lambda Z)^2 = o$$

und die Diskriminante $\triangle$

$$\triangle = 4\lambda^2 (a^2 B - b^2 A)(a_1^2 B - b_1^2 A) + 4\lambda C (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 (aa_1 B + \varepsilon bb_1 A) + C^2 (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^4$$

Die Bestimmung der variablen Constante λ giebt für diese die Form $\lambda = p \pm q$, worin

$$p = \frac{C(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 (aa_1 B + \varepsilon bb_1 A)}{2(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)} \text{ und } q = \frac{\sqrt{\{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 ABC^2 - \triangle (a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)\}}}{2(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)}$$

bedeuten. Aus der Bedeutung der Coëfficienten $a^2 b^2$ und $a_1^2 b_1^2$ folgt, dass die Grössen $a^2 B - b_1^2 A$ und $a_1^2 B - b_1^2 A$ entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, was in den Werten für p und q berücksichtigt ist. $\triangle$ nimmt, wenn λ reell sein soll, Werte zwischen den Grenzen

$$-\infty < \triangle \leq \frac{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 ABC^2}{(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 A)} \text{ an,}$$

und kann demnach negativ, Null oder positiv sein. Die gemischte Kegelschnittschaar besteht daher aus Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Für $\triangle = o$ ergeben sich in jeder Gruppe ($\varepsilon = +1$ u. $\varepsilon = -1$) zwei Werte λ, also zwei Parabeln, welche den Übergang von den Ellipsen zu den Hyperbeln vermitteln.

Für den einen Grenzwert $\triangle = -\infty$ erhält man $\lambda = \pm\infty$ und als Gleichung der Ellipse nach Division der Gleichung durch λ^2 $Z^2 = o$. Diese Ellipse tritt also in jeder Gruppe zwei Mal auf und besteht aus zwei zusammenfällenden Strecken, nämlich aus der doppelt aufgetragen gedachten Strecke zwischen den festen Tangenten, welche auf der Graden durch die festen Punkte liegt.

Für den andern Grenzwert für $\triangle$ $\triangle = \frac{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^4 (ab_1 + \varepsilon a_1 b)^2 ABC^2}{(a^2 B - b^2 A)(b_1^2 A - a_1^2 B)}$ wird $q = o$ und wir erhalten für λ zwei gleiche Werte $\lambda = p$, welche zwei zusammenfallende Kegelschnitte der gemischten Schaar bestimmen. Ihre Berührungssehne ist $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + pZ = o$, worin p die oben gegebene Bedeutung hat. Ebenso wie die entsprechende Gleichung im ersten Hauptfalle stellt auch diese die Parallele zu der Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch den Mittelpunkt der Strecke $Q Q_1$ zwischen denselben auf der Graden durch die festen Punkte vor, welche durch den unveränderlichen Punkt π oder π der Berührungssehnen der entsprechenden Gruppe laufen.

Diese beiden besonderen Berührungssehnen $Z = o$ und $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + pZ = o$ der Kegelschnitte jeder Gruppe der gemischten Schaar sind entsprechend der analogen Beziehung derselben im ersten Hauptfalle stets harmonisch conjugiert gelegen zu den zwei Berührungssehnen $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + (p \pm q) Z = o$ oder $(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + pZ) \pm qZ = o$, welche je zwei Kegelschnitten jeder Gruppe mit gleicher Diskriminante angehören. Demnach sind die Berührungssehnen der Kegelschnitte in jeder Gruppe der gemischten Schaar ein hyperbolisches Strahlenbüschel, als dessen Asymptotenstrahlen die beiden besonderen Berührungssehnen $Z = o$ und $aa_1 X + \varepsilon bb_1 + pZ = o$ auftreten. Wenn wir wieder die Treffungspunkte der Strahlen dieses hyperbolischen Strahlensystems mit derjenigen Graden auffassen, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch den Mittelpunkt der Strecke $Q Q_1$ zwischen denselben auf der Graden durch die festen Punkte hindurchlauft, welche also zu dem einen Asymptotenstrahle parallel ist, so ergiebt sich ein hyperbolisches Punktsystem, das gleichseitig ist, da der eine Asymptotenpunkt der unendlich entfernte Punkt des Trägers der Punktreihe, während der andere der Mittelpunkt der von den Tangenten begrenzten Strecke $Q Q_1$ ist. Da die entsprechenden Punkte der hyperbolisch gleichseitigen Punktreihe von dem endlichen Asymptotenpunkte auf beiden Seiten gleichweit abstehen, so treffen die Berührungssehnen der Kegelschnittschaare in jeder Gruppe, welche gleiche Diskriminanten besitzen, also derselben Gattung angehören, die Mittellinie zwischen den festen Tangenten in je 2 Punkten, welche von dem Mittelpunkte der Strecke $Q Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte gleichweit abstehen. Mit Hilfe dieser Bestimmung lässt sich die Anordnung der Kegelschnitte jeder Gruppe übersehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lassen wir $\triangle$ successiv die Werte von $-\infty$ anfangend bis o durchlaufen, so giebt der Anfangswert für $\lambda = \pm\infty$ zwei Ellipsen in jeder Gruppe, welche in zwei zusammenfallende Strecken degeneriert sind, die Strecke $Q\,Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte, doppelt auf einander gedacht. Für die folgenden Werte $\triangle > -\infty$ ergeben sich je zwei Werte λ, und damit zwei Berührungssehnen in jeder Gruppe, welche sich von der Anfangslage beiderseits nach entgegengesetzten Richtungen drehen und Ellipsen angehören. Erreicht $\triangle$ den Wert $\triangle = o$, so treten in jeder Gruppe als Grenzfälle zwei Parabeln auf. Durchlauft $\triangle$ weiter die Werte $\triangle > o$, so gehören die durch die zugehörigen Wertepaare λ bestimmten Berührungssehnen Hyperbeln an. Erreicht $\triangle$ den zweiten Grenzwert, so fallen die Berührungssehnen zusammen mit dem einen Asymptotenstrahle und die 2 entsprechenden Hyperbeln in jeder Gruppe decken sich. Unter der Reihenfolge der Hyperbeln sind noch zwei besondere hervorzuheben, welche für $\triangle = C^2 (a b_1 - \varepsilon a_1 b)^4$ sich ergeben. Für diesen Wert wird $q = p$ und die beiden Berührungssehnen sind $a a_1 X + \varepsilon b b_1 Y + 2 p Z = o$ und $a a_1 X + \varepsilon b b_1 Y = o$. Die zweite derselben gehört der Hyperbel $XY = o$ an, welche also in zwei Grade degeneriert, nämlich die Graden durch den Treffungspunkt der festen Tangenten und je einen der festen Punkte der gemischten Schaar. Die erstere Berührungssehne dagegen geht für jede Gruppe durch den Schnittpunkt der Parallelen, welche zu den festen Tangenten durch ihre Treffungspunkte $Q\,Q_1$ mit der Graden durch die festen Punkte gezogen sind. Da unter den Berührungssehnen jeder Gruppe je eine einer der festen Tangenten parallel lauft, so ist der Berührungspunkt auf dieser Tangente ihr unendlich entfernter Punkt und die Tangente wird Asymptote der Hyperbel. In jeder Gruppe treten also zwei Hyperbeln auf, von denen jede eine der festen Tangenten zur Asymptote besitzt.

Die Zusammenfassung der Resultate giebt nun folgende Übersicht:

„Liegen die festen Punkte der gemischten Schaar in Scheitelräumen der festen Tangenten von einander getrennt, so besteht die gemischte Schaar in jeder der beiden Gruppen nur aus Hyperbeln, welche zwei Mal in Gradenpaare degenerieren. Das eine Gradenpaar besteht aus den beiden einerseits durch die festen Tangenten begrenzten, andererseits unbegrenzt verlaufenden Abschnitten der Graden durch die festen Punkte; das andere Gradenpaar aus den Graden, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach den festen Punkten hingehen. In jeder Gruppe treten 2 Hyperbeln auf, deren jede eine der festen Tangenten zur Asymptote hat.

„Befinden sich die festen Punkte der gemischten Schaar in demselben von den festen Tangenten bestimmten Winkelraume, so enthält jede Gruppe der gemischten Schaar eine Reihenfolge von Ellipsen, welche beiderseits durch je eine Parabel in zwei Reihenfolgen von Hyperbeln übergehen. Unter den Ellipsen tritt als besondere Ellipse ein zusammenfallendes Streckenpaar auf, die Strecke zwischen den festen Tangenten, welche auf der Graden durch die festen Punkte liegt. Auch unter den Hyperbeln jeder Gruppe tritt ein Gradenpaar auf, nämlich die Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und je einen der festen Punkte; ferner giebt es ein Hyperbelpaar in jeder Gruppe, von welchen jede eine der festen Tangenten als Asymptote besitzt.

„Es ordnen sich die Kegelschnitte in jeder Gruppe paarweise der Art, dass die Treffungspunkte der Berührungssehnen zweier einander entsprechender Kegelschnitte von derselben Gattung mit derjenigen Graden, welche durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch den Mittelpunkt der Strecke zwischen denselben auf der Graden durch die festen Punkte hindurchgeht, stets von dem genannten Mittelpunkte gleichweit abstehen.

III. Polare Eigenschaften.

In Punktcoordinaten ist die Gleichung der gemischten Kegelschnittschaar, wenn die festen Punkte in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten liegen

$$(a^2 X + b^2 Y)(a_1^2 X + b_1^2 Y) - (a a_1 X + \varepsilon b b_1 Y + \lambda Z)^2 = o;$$

im andern Falle, wenn die festen Punkte in Scheitelräumen zwischen den festen Tangenten getrennt liegen

$$(a^2 X - b^2 Y)(a_1^2 X - b_1^2 Y) - (a a_1 X + \varepsilon b b_1 Y + \lambda Z)^2 = o.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind die Coordinaten einer Graden $X^1 : Y^1 : Z^1$, so ergiebt sich der Pol derselben in Bezug auf einen Kegelschnitt $S = o$ in der Form $\frac{dS}{dX} X^1 + \frac{dS}{dY} Y^1 + \frac{dS}{dZ} Z^1 = o$, worin $\frac{dS}{dX}\ \frac{dS}{dY}\ \frac{dS}{dZ}$ die ersten Differenzialquotienten der Gleichung S nach X Y Z sind. Danach erhalten wir die Gleichung des Pols der Graden $X^1 : Y^1 : Z^1$ in Bezug auf einen Kegelschnitt λ einer Gruppe $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$

$$X \{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 Y^1 - 2 aa_1 \lambda Z^1\} + Y \{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 X^1 - 2 \varepsilon bb_1 \lambda Z^1\}$$
$$- 2 \lambda Z \{aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1 + \lambda Z^1\} = o$$

und daraus den Ort der Pole, wenn wir die Diskriminante der Gleichung bestimmen:

$$\{(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y) Z^1 + (aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1) Z\}^2 + 2 (ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 (XY^1 + YX^1) Z^1 Z = o.$$

Berücksichtigen wir dieses Resultat für beide Gruppen der gemischten Schaar, so ist der Ort der Pole eine Curve vierter Ordnung, welche stets in zwei Kegelschnitte zerfällt. Die Form der Gleichung zeigt, dass beide Kegelschnite durch die Punkte $XY^1 + YX^1 = o$ und $Z = o$ hindurch gehen und in diesen gemeinschaftlichen Punkten die Graden nach den beiden Punkten

$$(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y) Z^1 + (aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1) Z = o,$$

welche sich für $\varepsilon = +1$ u. $\varepsilon = -1$ ergeben, als Tangenten besitzen. Nun ist $Z = o$ der Schnittpunkt der festen Tangenten, $XY^1 + YX^1 = o$ der zu $XY^1 - YX = o$ harmonisch conjugierte Punkt, zu welchen das andere Paar conjugierter Punkte $X = o$ $Y = o$ ist, d. h. die Treffungspunkte $Q\ Q_1$ der festen Tangenten mit der Graden durch die festen Punkte. $XY^1 - YX^1 = o$ aber ist der Schnittpunkt der Polare mit der Graden durch die festen Punkte. Damit sind die beiden Berührungspunkte bestimmt. Der Schnittpunkt der Tangenten in denselben für jede der Gruppen $(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y) Z^1 + (aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1) Z = o$ ergiebt sich als Treffungspunkt der Graden durch die Punkte $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o$ und $Z = o$ und der Graden $X^1 : Y^1 : -Z^1$, da diese Coordinaten der betrachteten Gleichung genügen. Die erstere Grade ist die durch den Schnittpunkt der festen Tangenten nach dem unveränderlichen Punkte π oder π_1 der Berührungssehnen der Kegelschnitte jeder Gruppe. Die Grade $X^1 : Y^1 : -Z^1$ stellt sich als einer von 4 harmonischen Strahlen dar, dessen conjugierter Strahl die Polare $X^1 : Y^1 : Z^1$ selbst, und dessen andere beiden zugehörigen Strahlen sind: die Grade durch die festen Punkte und die Grade durch den Schnittpunkt der letzteren mit der Polare nach dem Treffungspunkte der festen Tangenten.

Damit sind von den Polkegelschnitten die zwei gemeinsamen Schnittpunkte und die Treffungspunkte der Tangentenpaare in denselben bestimmt. Die Gleichung des Pols giebt uns ferner ein Mittel an die Hand, für besondere Kegelschnitte durch Annahme von entsprechenden Werten von λ die Pole dieser Kegelschnitte, also Punkte des Polkegelschnitts zu bestimmen. Ohne diesen Gedanken weiter zu verfolgen, wenden wir uns zur Bestimmung der Gattung des Polkegelschnitts. Wir benützen dazu die Eigenschaft, dass der Pol eines Durchmessers eines Kegelschnitts der unendlich entfernte Punkt ist, welcher in der Richtung des conjugierten Durchmessers liegt. Schneidet daher die Polare die Curve der Centra, welcher Art diese auch sein mag, so liegen auf der Polare eine der Anzahl der Schnittpunkte entsprechende Zahl von Durchmessern von Kegelschnitten, deren Pole im Unendlichen liegende Punkte sind. Fallen von den Schnittpunkten zwei zusammen, berührt also die Polare die Curve der Centra, so werden auch die beiden unendlich entfernten Pole zusammenfallen. Trifft die Polare die Curve Centra nicht, so kann der Polkegelschnitt keine unendlich entfernten Punkte enthalten. Da aus dem vorhergehenden sich schliessen lässt, dass die Curve der Centra aus zwei Kegelschnitten bestehen muss, so erhalten wir ein einfaches Kriterium für das Erkennen der Gattung des Polkegelschnitts. Die Pole einer Gruppe der gemischten Kegelschnittschaar in Bezug auf eine gegebene Polare liegen auf einer Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die Polare die Curve der Centra dieser Gruppe in zwei reellen getrennten oder zusammenfallenden oder zwei imaginären Punkten trifft.

Diese Unterscheidung führt uns zu einer kurzen Betrachtung der Curve der Centra, die sich als besonderer Fall der Polkurve darstellt. Die letztere geht in die Curve der Centra über, wenn die Polare die unendlich entfernte Grade ist, deren Coordinaten $X^1 = Y^1 = Z^1$ sind. Die Gleichung des Centrums eines Kegelschnitts lautet dann

$$X \{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 - 2 aa_1 \lambda\} + Y \{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 - 2 \varepsilon bb_1 \lambda\} - 2 \lambda Z \{aa_1 + \varepsilon bb_1 + \lambda\} = o,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus welcher sich für $\lambda = o$ das Centrum $X + Y = o$ d. i. der Mittelpunkt der Strecke $Q\,Q_1$ zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte, für $\lambda = +\infty$ nach Division der Gleichung durch $\lambda^2\ Z = o$, d. i. der Schnittpunkt der festen Tangenten, für $\lambda = -(aa_1 + \varepsilon bb_1)$ $\frac{a^2 X + b^2 Y}{a^2 + b^2} + \frac{a_1^2 X + b_1^2 Y}{a_1^2 + b_1^2} = o$ d. i. der Mittelpunkt der Strecke $P\,P_1$ zwischen den festen Punkten, ebenso für $\lambda = \frac{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2}{2\,aa_1}$ und für $\lambda = \frac{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2}{2\,\varepsilon bb_1}$ Centra ergeben, welche auf den festen Tangenten liegen.

Die Curve der Centra wird durch die Gleichung

$$\{aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + (aa_1 + \varepsilon bb_1) Z\}^2 + 2\,(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 (X + Y) Z = o \text{ dargestellt;}$$

sie ist demnach eine Curve vierter Ordnung und zerfällt stets in zwei Kegelschnitte, von denen je ein Kegelschnitt einer der beiden Gruppen der gemischten Schaar zugehört. Beide Kegelschnitte gehen durch $X + Y = o$, den Mittelpunkt der Strecke zwischen den festen Tangenten auf der Graden durch die festen Punkte und durch $Z = o$, den Schnittpunkt der festen Tangenten. Die Tangenten in diesen doppelten Punkten laufen durch die Mittelpunkte der Strecken zwischen dem Schnittpunkte der festen Tangenten und je einem der unveränderlichen Punkte $\pi\ \pi_1$ der Berührungssehnen der beiden Gruppen, da der Punkt $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y + (aa_1 + \varepsilon bb_1) Z = o$ sowohl auf der Graden $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o\ Z = o$ als auch auf der Graden $X^1 : Y^1 : -Z^1$ liegt. Da auch der Mittelpunkt der Strecke $P\,P_1$ zwischen den festen Punkten, wie oben gezeigt ist, Centrum eines Kegelschnitts jeder Gruppe ist, so laufen beide Kegelschnitte der Centra durch diesen hindurch.

Die Unterscheidung der Gattung der Centralkegelschnitte lässt sich aus der Gattung der Kegelschnitte der gemischten Schaar herleiten. Da das Centrum der Parabel ein unendlich entfernter Punkt ist, so stimmt die Zahl der unendlich entfernten Punkte des Centralkegelschnitts mit der Zahl der Parabeln überein, welche in jeder Gruppe der gemischten Kegelschnittschaar auftreten. Aus der früheren Untersuchung wissen wir, dass die Kegelschnittschaar in dem Falle, wenn die festen Punkte in Scheitelräumen zwischen den Tangenten getrennt liegen, nur aus Hyperbeln besteht, daher müssen die Centralkegelschnitte hier beide Ellipsen sein. Befinden sich die festen Punkte dagegen in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten, so sind unter den Kegelschnitten jeder Gruppe im Allgemeinen 2 Parabeln enthalten, wesshalb jeder Centralkegelschnitt zwei unendlich entfernte Punkte besitzt und daher Hyperbel sein muss. Da die Centra der Parabeln die unendlich entfernten Punkte ihrer Axen sind, so laufen die Axen der Parabelnpaare jeder Gruppe der gemischten Schaar nach den unendlich entfernten Punkten der Hyperbeln, sie sind also die Asymptoten der Hyperbeln.

Wenden wir uns zurück und betrachten die oben gegebenen analytischen Ausdrücke für Polare und Pol jetzt in Liniencoordinaten, so sind $X^1 : Y^1 : Z^1$ die Coordinaten eines Punktes, für welchen

$$X\,\{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 Y^1 - 2\,aa_1\,\lambda Z\} + Y\,\{(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 X^1 - 2\,\varepsilon bb_1\,\lambda Z^1\} - 2\,\lambda Z\,\{aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1 + \lambda Z^1\} = o$$

die Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt λ einer der Gruppen für $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ ist.

Als Enveloppe der Polaren ergiebt die Diskriminante die Gleichung

$$\{(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y) Z^1 + (aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1) Z\}^2 + 2\,(ab_1 - \varepsilon a_1 b)^2 (XY^1 + YX^1) Z^1 Z = o,$$

welche mit Rücksicht auf $\varepsilon = +1$ u. $\varepsilon = -1$ eine Curve 4. Klasse vorstellt, die stets in zwei Kegelschnitte zerfällt. Die Graden $XY^1 + YX^1 = o$ und $Z = o$ sind gemeinsame Tangenten derselben, während ihre Berührungssehnen sich aus der Gleichung

$$(aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y) Z + (aa_1 X^1 + \varepsilon bb_1 Y^1) Z = o \text{ für } \varepsilon = +1 \text{ u. } \varepsilon = -1$$

ergeben. Die letzte Grade ist durch die Schnittpunkte der Graden $aa_1 X + \varepsilon bb_1 Y = o\ Z = o$ d. h. die Punkte π u. π_1 und durch den Punkt $X^1 : Y^1 : -Z^1$ bestimmt. Dieser letztere ist der vierte zu dem gewählten Pole harmonisch zugeordnete Punkt auf der Graden durch den Schnittpunkt der festen Tangenten und durch den Pol, während die beiden anderen zugeordneten Punkte der Treffungspunkt der festen Tangenten und derjenige des Trägers der harmonischen Punkte mit der Graden durch die festen Punkte sind.

Für die besondere Lage des Pols als des unendlich entfernten Punktes einer gegebenen Richtung werden die Polaren des Punktes in Bezug auf die Kegelschnitte der gemischten Schaar

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch die Mittelpunkte der entsprechenden Kegelschnitte hindurchgehen und mit den zu der gegebenen Richtung conjugierten Durchmessern zusammenfallen. Daraus folgt also, dass die zu einer gegebenen Richtung conjugierten Durchmesser der Kegelschnitte der gemischten Schaar eine Curve vierter Klasse einhüllen, die in zwei Kegelschnitte zerfällt, von denen jeder Gruppe einer angehört. Zur Bestimmung der Gattung des Polarkegelschnitts sowie des zuletzt erwähnten besonderen Falles lässt sich wieder mit Vorteil die Curve der Centra benützen. Liegt nämlich der Pol auf dem Kegelschnitte der Centra einer Gruppe, so ist er selbst Centrum eines Kegelschnittes der gemischten Schaar, seine Polare in Bezug auf diesen Kegelschnitt ist daher die unendlich entfernte Grade. Der Polarkegelschnitt dieser Gruppe hat demnach unter seinen Tangenten einmal die unendlich entfernte Grade, er ist daher Parabel. Ist der Polarkegelschnitt eine Hyperbel, so müssen unter den ihn erzeugenden Polaren je zwei aufeinanderfolgende auftreten, welche sich im unendlich entfernten Punkte treffen. Umgekehrt wird dann die Polare jedes dieser unendlich entfernten Punkte des Polarkegelschnitts durch zwei aufeinanderfolgende Centra zweier Kegelschnitte der gemischten Schaar hindurchlaufen, d. h. sie wird Tangente des Kegelschnitts der Centra sein. Befindet sich demnach der Pol ausserhalb der Flächen der Kegelschnitte der Centra, welche von den Tangenten beider durchschnitten werden, so ist der Polarkegelschnitt jeder Gruppe Hyperbel. Für die Lage des Pols innerhalb eines der Centrenkegelschnitte tritt kein unendlich entfernter Punkt des Polarkegelschnitts auf, er ist daher für die entsprechende Gruppe Ellipse.

Die gefundenen Eigenschaften dieses Abschnittes lassen sich nun folgendermassen zusammenfassen:

Die Centra der Kegelschnitte der gemischten Schaar liegen auf einer Curve 4. Ordnung, welche stets in zwei Kegelschnitte zerfällt, von denen je einer der beiden Gruppen der gemischten Schaar zugehört. Sie sind Ellipsen, wenn die festen Punkte in Scheitelräumen zwischen den festen Tangenten verteilt sind, dagegen Hyperbeln, wenn die festen Punkte in demselben Winkelraume zwischen den festen Tangenten liegen. Die Axen der Parabelnpaare jeder Gruppe sind Asymptoten dieser Hyperbeln.

Die zu einer gegebenen Richtung conjugierten Durchmesser der Kegelschnitte der gemischten Schaar hüllen eine Curve 4. Klasse ein, welche in zwei Kegelschnitte zerfällt, von denen jeder Gruppe der gemischten Schaar einer angehört.

Die Pole einer Graden in Bezug auf die Kegelschnitte der gemischten Schaar liegen auf einer Curve 4. Ordnung, welche in zwei Kegelschnitte, einzeln je einer Gruppe der gemischten Schaar zugehörig, zerfällt. Der Polkegelschnitt einer Gruppe ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem die Polare den Kegelschnitt der Centra derselben Gruppe in zwei reellen getrennten oder zwei zusammenfallenden oder in zwei imaginären Punkten trifft.

Die Polaren eines Punktes in Beztig auf die Kegelschnitte der gemischten Schaar hüllen eine Curve 4. Klasse ein, welche in zwei Kegelschnitte, einzeln je einer Gruppe der gemischten Schaar zugehörig, zerfällt. Der Polarkegelschnitt einer Gruppe ist Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Pol ausserhalb oder auf oder innerhalb des Kegelschnitts der Centra seiner Gruppe liegt.

Dr. Krahl.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf