Entwicklung der Grundbegriffe des geometrischen Calculs

von G. Peano.

Autorisierte deutsche Übersetzung von Dr. Alois Lanner.*)

Einleitung.

Der Unterschied zwischen dem „geometrischen Rechnen“ und der cartesianischen Geometrie besteht darin, dass bei letzterer verschiedene analytische Operationen nur mit den Coordinaten, im ersteren Falle aber dieselben mit den geometrischen Größen selbst vorgenommen werden.

Einen ersten Versuch in dieser Richtung hat bereits Leibnitz gemacht, dessen bahnbrechender Geist überhaupt der Mathematik neue Arbeitsgebiete eröffnete.

Die Infinitesimalrechnung entwickelte sich ja zuerst unter der Pflege seiner Zeitgenossen und Schüler. Das geometrische Rechnen begann dagegen erst in unserem Jahrhunderte tiefere Wurzeln zu schlagen und ist auch jetzt allzuwenig bekannt und verbreitet. Die mathematische Logik endlich, deren Anfangsgründe auch schon Leibnitz vorgezeichnet

*) Im Jahre 1891 veröffentlichte G. Peano, Professor an der Universität und militär. Akademie in Turin seine „Elementi di calcolo geometrico“, von welchen noch im selben Jahre bei Teubner eine deutsche Ausgabe von Adolf Schepp betitelt: „Die Grundzüge des geometrischen Calculs“ erschien.

Wie in der Einleitung des weiteren ausgeführt wird, suchte nun der durch seine formvollendeten Werke rühmlichst bekannte Verfasser auch fernerhin die Fundamentalbegriffe in dem Sinne noch besser zu entwickeln, dass die hiezu nöthigen Definitionen und Operationen den allgemein geläufigen, geometrischen Elementarbegriffen mehr angepasst werden, um so das Studium des geometrischen Calculs noch zu erleichtenr.

Ein mustergiltiges Resultat derartiger Bestrebungen ist nun die vorliegende Abhandlung aus den Sitzungsberichten der kgl. Akademie der Wissenschaften in Turin (Jahrgang 1895—96), welche auch bereits in andere Sprachen übertragen wurde und von der wir hier eine deutsche Übersetzung bringen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat, beginnt erst in neuester Zeit sich weiter zu entwickeln und die ihr entgegenstehenden Schwierigkeiten zu überwinden. Über die letztere hinterließ Leibnitz allerdings nur spärliche Andeutungen. Dagegen sprach er sich über das geometrische Rechnen besonders in einem Brief an Huygens vom 8. September 1679 sehr begeistert aus und erklärt ihm die großen Vortheile, die diese Rechnungsart bieten würde.

Nach Leibnitz hat gelegentlich der geometrischen Deutung der imaginären Zahlen Argand, wenn auch nur flüchtig, dann aber Möbius sich mit großem Geschicke dieser Frage bemächtiget und in seinem Werke „Der barycentrische Calcul" (1827) von derselben bei der Lösung mehrerer Aufgaben, besonders in seiner „Mechanik des Himmels" (1842) ausgiebigen Gebrauch gemacht.

Gleichzeitig gelangte, wenn auch auf ganz anderen Wegen, Bellavitis zu seinem „Metodo delle equipollenze" (1854), dessen Anfänge ebenfalls bis in das Jahr 1832 hinaufreichen und der in zahlreichen Abhandlungen Anwendung fand.

Im Jahre 1844 veröffentlichte dann Hermann Grassmann seine berühmte „Ausdehnungslehre", die zwar von den Zeitgenossen zuerst wenig gelesen und beachtet, später aber desto mehr von vielen hervorragenden Fachmännern bewundert wurde, und gerade mit dieser werden wir uns im Folgenden am meisten befassen.

Zur Vollendung dieses kurzen historischen Überblickes sei noch erwähnt, dass später Hamilton ebenfalls ganz unabhängig seine Theorie der Quaternionen begründete, die man auch als eine Art geometrischen Rechnens auffassen kann. Ein kurzer Abriss derselben erschien zuerst im Jahre 1843, das ausführliche Werk dagegen erst im Jahre 1853. Das Werk Hamilton's schlug bei den Zeitgenossen ein, was hauptsächlich in der klaren Darstellungsform und Zweckmäßigkeit der eingeführten Bezeichnungen seinen Grund hat. Die Quaternionen kamen bald bei vielen wissenschaftlichen Arbeiten und mathematischen Abhandlungen in Anwendung, z. B. in Maxwell's Werk über Elektricität und Magnetismus. Derzeit sucht man vielfach die Theorie der Quaternionen mehr zu vereinfachen (Macfarlane) oder kehrt zu den Ideen Grassmann's zurück, oder man sucht beide Rechnungsarten in passender Weise zu combinieren.

In der That widersprechen sich auch diese verschiedenen Formen des geometrischen Rechnens in keiner Weise; sie erweisen sich vielmehr als verschiedene Seiten ein und derselben Wissenschaft, nur verschieden nach der Art und Weise, wie die verschiedenen Bearbeiter — jeder ganz unabhängig vom anderen — denselben Gegenstand auffassten.

Ist ja doch auch das geometrische Rechnen, wie jedes andere Rechnungsverfahren nicht aus willkürlichen Annahmen entstanden, sondern auf Erfahrung aufgebaut und auch das Rechnen mit den „Indivisibilien" Cavalieri's, mit den „unendlich kleinen Größen" nach Leibnitz

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und den „Fluxionen“ Newton's führten ja zum selben, mehr oder weniger vollkommen ausgebildeten Calcul, wenn auch unter verschiedenen Formen.

Der Theorie Grassmann's wird heutzutage von verschiedenen Fachmännern, welche dieselbe neuerdings behandelt und ausgebildet haben, das grösste Lob gespendet. Wir verweisen auf das diesbezügliche Bücherverzeichnis der „Rivista di Matematica“ vom Jahre 1895 pag. 179 und das in jüngster Zeit erschienene vorzügliche Werk von Victor Schlegel: „Die Grassmann'sche Ausdehnungslehre“.

Es muß aber doch ein ganz bestimmter Grund vorhanden sein, dass das Grassmann'sche Werk so lange unbeachtet blieb und seine Verbreitung auch jetzt noch auf so viele Schwierigkeiten stößt; und der ist nach unserer Anicht darin zu suchen, dass seine Darstellung zu metaphysisch gehalten ist, die Begriffe zu unklar ausgedrückt sind und sein Sprachgebrauch von dem der mathematischen Literatur zu sehr abweicht, so dass es von vornherein, statt den Leser zu fesseln, ihn beim Studium ermüdet und schließlich abstößt. Auch wir haben die Kraft dieser neuen Methode erst bei praktischen Anwendungen derselben kennen und schätzen gelernt, speciell anlässlich der Publicationen im Jahre 1845 in Grunert's Archiv (H. Grassmann's Werke I, pag. 297).

Von den dabei gemachten Erfahrungen ausgehend, gelang es mir dann erst die ganze Theorie allmählig auszubauen und mit ausschließlicher Zuhilfenahme der Elementargeometrie die Definitionen der hier zur Verwendung kommenden Größenarten aufzustellen. Diese Theorie habe ich mit zahlreichen Anwendungen versehen in meinem Werke: „Calcolo geometrico, secondo l'Ausdehnungslehre di Grassmann, Turin 1888“ niedergelegt. Dieser Definitionen bediente sich dann Carvallo (Nouvelles Annales de Mathematiques 1892, pag. 8—37) bei seiner Arbeit „La méthode de Grassmann“, die sich durch ihre Klarheit und Einfachheit vortheilhaft auszeichnet. Später habe ich dann (in meinem Werke „Lezioni di analisi infinitesimale 1893) dieselbe in der Zeichensprache der mathematischen Logik zur Darstellung gebracht. Damit war nun durch die Bemühungen der verschiedenen Bearbeiter einerseits die Methode Grassmann's wesentlich vereinfacht worden, während sich anderreseits ihre Anwendungen immer mehr über die verschiedenen Gebiete der Mathematik verbreiteten.

Die vollständige Behandlung des geometrischen Rechnens mit bloßer Zugrundelegung der Elementarmathematik würde sich allerdings noch immer ziemlich weitläufig gestalten. Andererseits sind viele Operationen dieser Rechnungsart sehr verwandt mit verschiedenen Problemen, die anderswoher schon bekannt sind, sei es aus der projectivischen oder analytischen Geometrie, oder aus der Mechanik, wenn sie auch dort anders behandelt werden. Ich glaube daher nicht einmal so sehr dem Bedürfnisses der Studierenden, sondern sogar in erster Linie dem Wunsche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vieler Collegen zu entsprechen, wenn ich ganz kurz die Definitionen und Haupteigenschaften jener geometrischen Größen entwickle, mit denen man beim geometrischen Rechnen operiert, und sie mit anderen in verschiedenen Zweigen der Mathematik vorkommenden ähnlichen Begriffen in Verbindung bringe.

Es sollen nunmehr hier definiert werden von den eingeführten Größen die geometrischen Formen 1ten, 2ten, 3ten und 4ten Grades, zu denen dann noch die einfachen Vectoren, Doppelvectoren und dreifachen Vectoren als specielle Fälle hinzukommen, dann von Wechselbeziehungen nur die Gleichheit, von Operationen die Addition, Multiplication und die mit den Zeichen ω und | bezeichneten Operationen. Dieses geschlossene System von Operationen reicht für die Hauptprobleme der Geometrie vollständig aus. In einer einzelnen Abhandlung lassen sich natürlich nicht alle Größen und Operationen erschöpfend erörtern.

§ 1. Tetraëder.

Sind A, B, C und D vier Punkte, so möge ABCD das Tetraëder bedeuten, das diese Punkte zu Eckpunkten hat.

ABCD = 0 heisst dann so viel als, diese vier Punkte liegen in derselben Ebene.

Für jedes nicht in der eben bezeichneten Weise verschwindende Tetraëder wollen wir nun auch nach Möbius einen positiven und negativen Sinn festsetzen und das Tetraëder ABCD als ein rechtswendiges bezeichnen, wenn eine Person, deren Kopf sich in A, und deren Füße sich in B befinden, und deren Gesicht der Kante CD zugewendet ist, den Punkt C zu ihrer linken und D zur rechten Hand hat. Im entgegengesetzten Fall nennen wir das Tetraëder ein linkswendiges.

Der Begriff eines Tetraëders, das also je nach dem Sinne nur ein rechts- oder linkswendiges sein kann, findet sich bei Euclid nicht vor; und doch lässt er sich also einfach dadurch einführen, dass man sich, wie wir es gethan haben, eine Person in die Figur hinein denkt. Ist aber einmal dieser Begriff eingeführt, so ist damit auch das Vorzeichen aller übrigen noch einzuführenden Größenarten festgestellt.

Zwei Tetraëder bezeichnen wir nun als gleich, wenn sie die gleiche Größe und den gleichen Sinn haben. Wenn dann ein solches Tetraëder zu einem anderen addiert oder mit reellen, positiven oder negativen Zahlen multipliciert wird, so erhält man immer wieder Tetraëder. Allgemein: wenn $t_1, \ldots t_n$ eine Reihe von Tetraëdern und $x_1 \ldots x_n$ ebensoviele reelle Zahlen bedeuten, so behält der Ausdruck $x_1 t_1 + \ldots + x_n t_n$ alle Eigenschaften eines algebraischen Polynomes bei und stellt wieder ein Tetraëder dar, d. h. man kann in diesem Ausdruck einzelne Glieder commutieren und für die Multiplication des Tetraëders mit einer Zahl gilt auch das distributive Princip bezüglich beider Factoren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn man in ABCD zwei Eckpunkte miteinander vertauscht, so wechselt das Tetraëder sein Vorzeichen, wir haben also (nach Möbius Werke, pag. 41):

$$ABCD = -BACD = -ACBD = -ABDC.$$

Unter dem Verhältnis $\frac{t}{u}$ zweier Tetraëder t und u, deren zweites nicht gleich Null ist, versteht man die reelle Zahl, mit welcher man u multiplicieren muß, um t zu erhalten. Fasst man u als Einheit auf, so nennt man diese Zahl auch Maßzahl. Bei vielen Aufgaben kann man bekanntlich statt der Tetraëder selbst einfach deren Maßzahlen einführen.

Wir werden aber das Tetraëder ABCD auch als Product der vier Punkte A, B, C und D, oder des Punktes A mit dem Dreieck BCD, oder als Product der beiden Strecken AB und CD, oder endlich des Dreieckes ABC mit dem Punkt D auffassen. Ein derartiges Product ist dann aber nicht mehr commutativ, denn, wenn man zwei Eckpunkte miteinander vertauscht, so ändert sich stets das Vorzeichen, wesshalb das Product als alternierend bezeichnet wird. Im folgenden wird sich zeigen, dass der Name Product trotzdem noch gerechtfertigt ist.

§ 2. Geometrische Formen.

Wenn $x_1, x_2, \ldots x_r$ reelle Zahlen und große Buchstaben Puncte bedeuten, so können wir folgende Definitionen aufstellen:

$$(x_1 A_1 + \ldots + x_r A_r) BCD = x_1 A_1 BCD + \ldots + x_r A_r BCD$$

$$(x_1 A_1 B_1 + \ldots + x_r A_r B_r) CD = x_1 A_1 B_1 CD + \ldots + x_r A_r B_r CD$$

$$(x_1 A_1 B_1 C_1 + \ldots + x_r A_r B_r C_r) D = x_1 A_1 B_1 C_1 D + \ldots + x_r A_r B_r C_r D.$$

Da für die auf der linken Seite stehenden Ausdrücke die Bedeutung noch nicht festgestellt ist, so geben wir ihnen die des Ausdruckes auf der rechten Seite, welcher einfach eine Summe von Tetraëdern darstellt.

Als Form ersten Grades bezeichnen wir dann einen Ausdruck von der Form:

$$x_1 A_1 + \ldots x_r A_r,$$

also die Zusammenfassung der mit den Coëfficienten oder Massen $x_1, \ldots x_r$ verbundenen Punkte $A_1 \ldots A_r$.

Als Form zweiten Grades bezeichnen wir jeden Ausdruck von der Form:

$$x_1 A_1 B_1 + \ldots + x_r A_r Br_r;$$

als Form dritten Grades:

$$x_1 A_1 B_1 C_1 + \ldots + x_r A_r B_r C_r.$$

Jede Summe von Tetraëdern können wir dann als Form vierten Grades betrachten und auf ein einziges Tetraëder reducieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Multipliciert man also eine Form ersten Grades mit drei Punkten, oder eine solche zweiten Grades mit zwei, oder eine dritten Grades mit einem Punkte, so erhält man jedesmal Tetraëder.

Von einer Form $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Grades sagen wir, sie seien gleich Null und setzen $s = 0$, wenn dieselbe mit irgend $\left\{\begin{matrix}\text{drei}\\ \text{zwei}\\ \text{einem Punkte}\end{matrix}\right\}$ Punkten multipliciert, stets ein Product gibt, das gleich Null ist.

Zwei Formen s und s' $\left\{\begin{matrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\\ \text{dritten}\end{matrix}\right\}$ Grades bezeichnen wir als gleich und setzen $s = s'$, wenn sie mit irgend $\left\{\begin{matrix}\text{drei}\\ \text{zwei}\\ \text{einem Punkte}\end{matrix}\right\}$ Punkten multipliciert gleiche Producte liefern.

Die Definition dafür, dass eine Form gleich Null sei, oder dass zwei solche Formen einander gleich seien, ist für unsere Theorie von fundamentaler Bedeutung; wo irgendwie die Deutung einer Formel zweifelhaft ist, muß die Frage immer auf diese beiden Fälle zurückgeführt werden.

Das Product einer Form ersten Grades mit einem Dreieck BCD ist für veränderliche Werte der Form dem Momente derselben in Bezug auf die Ebene des Dreieckes, d. h. der Summe der Entfernungen der Punkte jener Form, jede multipliciert mit der ihr entsprechenden Masse, proportional. Man kann daher auch sagen: Zwei Formen ersten Grades sind einander gleich, wenn sie bezüglich jeder beliebigen Ebene gleiche Momente haben.

Stellt nun die Strecke AB eine Kraft dar, so ist das Product ABCD dem sogenannten Moment jener Kraft in Bezug auf die Axe CD proportional. Wir können also zwei Formen zweiten Grades als gleich bezeichnen, wenn sie bezüglich jeder beliebigen Axe dasselbe Moment haben.

Hieraus ergibt sich sofort die Analogie zwischen den Formen ersten Grades mit der Theorie des Schwerpunktes und der Formen zweiten Grades mit der Anwendung der Kräfte auf feste Körper.

§ 3. Die mit den Formen vorzunehmenden Operationen.

Das Product zweier Punkte AB wollen wir als Strecke, das Product dreier Punkte als Dreieck bezeichnen. Diese Bezeichnungen sollen aber hier den Sinn haben, dass sie specielle Fälle von Formen zweiten und dritten Grades bedeuten. Die Gleichung $ABC = A'B'C'$ bedeutet also nach der gegebenen Definition, dass für einen beliebigen Punkt D immer $ABCD = A'B'C'D'$ sei, was gleichbedeutend ist mit der Forderung, dass die beiden Dreiecke in derselben Ebene liegen, die gleiche Grösse und denselben Sinn haben. Analog soll $AB = A'B'$ auch besagen, dass diese beiden Strecken auf derselben Geraden liegen, dieselbe Länge und gleichen Sinn haben, das sind dann aber nicht neue Definitionen, sondern Folgerungen der zuerst aufgestellten Definition der Gleichheit dieser Formen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir werden nun Summe und Product folgendermaßen definieren:

Unter der Summe zweier Formen gleichen Grades verstehen wir eine Form, die man erhält, wenn man an die Glieder der ersteren Form die der zweiten anreiht.

Unter dem Product einer vom Grade i mit einer Form vom Grade j verstehen wir, solange $i + j \leq 4$, die Summe der Producte jedes Gliedes der einen mit jedem Gliede der anderen Form.

Hieraus ergibt sich sofort, dass das geometrische Rechnen sich von der Algebra in folgenden Punkten unterscheidet:

1. Es lassen sich nur zwei, drei oder vier Punkte mit einander multiplicieren. Formen höheren Grades gibt es nicht.

2. Es ist stets $AB = -BA$ und daher $AA = 0$.

In jeder anderen Hinsicht gelten die Gesetze der Algebra.

Die Addition ist commutativ und associativ, die Multiplication associativ und distributiv bezüglich beider Factoren; für jede solche Form lässt sich eine gleiche Form von gleicher Stufe substituieren.

In dieser Übereinstimmung beider Rechnungsarten liegt die Kraft der Grassmann'schen Methode und führt zu einem bedeutenden Ersparnis von Operationen und erfordert auch viel weniger Gedächtnisarbeit. Sie entspricht daher auch in einem ähnlichen Sinne, wie in der Mechanik, dem Princip des geringsten Kraftaufwandes in der Didaktik.

Umgekehrt ergibt sich aus der gegebenen Deutung von ABCD und der Forderung, dass die genannten algebraischen Regeln fortbestehen sollen, mit Nothwendigkeit der Grassmann'sche Calcul mit all seinen grundlegenden Definitionen. Den ganzen Calcul durch die genannte Forderung zu definieren, würde allerdings zu einer abundanten Definition führen, denn wir erhielten dann eine Gruppe von Sätzen, von denen immerhin einige wirkliche Definitionen, andere dagegen nur Folgerungen aus denselben darstellen würden.

§ 4. Vectoren.

Unter den Formen ersten Grades muß die Differenz zweier Punkte $B - A$ besonders hervorgehoben werden, also die Zusammenfassung zweier Punkte A und B mit den Coëfficienten -1 und $+1$. Eine solche Differenz bezeichnen wir als Vector.

Zwei Vectoren $B - A$ und $B' - A'$ sind der früher aufgestellten Definition zufolge gleich, wenn für drei irgendwie gewählte Punkte P, Q und R die Beziehung besteht:

$$BPQR - APQR = B'PQR - A'PQR.$$

Die Bedingung lässt sich offenbar auch in der Form wiedergeben, dass man sagt: Zwei Vectoren sind einander gleich, wenn sie gleiche Länge, gleiche Richtung und den gleichen Sinn haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A und B heißen beziehungsweise der Anfangs- und Endpunkt des Vectors B — A.

Die Lage des Anfangspunktes kann aber beliebig gewählt werden.

Ein Punkt A wird zu einem Vector I addiert, indem man einen Punkt B aufsucht, so dass $B - A = I$, denn dann ist $B = A + I$.

Um zwei Vectoren I und J zu summieren, wählt man einen beliebigen Punkt A, construiert dann $A + I$ und hierauf $A + I + J$; $(A + I + J) - A$ ist dann der gleich der Summe $I + J$ und also wieder ein Vector.

Wird ein Vector mit einer reellen Zahl multipliciert, so erhält man einen zum früheren parallelen Vector.

Mit Hilfe einer Form ersten Grades

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$$

und eines Punktes O, lässt sich stets die identische Gleichung aufstellen:

$$x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n = (x_1 + \ldots + x_n) O + \\ + x_1 (A_1 - O) + \ldots + x_n (A_n - O),$$

d. h. jede Form ersten Grades lässt sich reducieren auf einen beliebigen Punkt mit einem Coëfficienten, der gleich ist der Summe aller Coëefficienten, mehr einem Vector.

Jede Form ersten Grades, deren Coëfficientensumme gleich Null ist, lässt sich auf einen Vector allein reducieren.

Jede Form ersten Grades, deren Coëfficientensumme nicht gleich Null ist, gibt durch dieselbe dividiert einen Punkt.

Dieser Punkt ist, falls die Coëfficienten Massen darstellen, der Schwerpunkt derselben. Wir gelangen also auf diesem Weg zum barycentrischen Calcul und zwar führt gerade die Theorie der Formen ersten Grades nicht nur seinem Wesen, sondern auch der Bezeichnungsweise nach zur Darstellungsform des Möbius.

Übrigens hat sich Möbius nur auf wenige Andeutungen über diesen Specialfall eingelassen, wo sich die Form auf einen Vector reduciert und die große Bedeutung desselben noch keineswegs überschaut.

Der Ausdruck Vector stammt nämlich von Hamilton und fällt seiner Bedeutung nach zusammen mit dem Begriffe Segment bei Bellavitis. Ersterer Ausdruck schließt aber eher jedes Missverständnis aus und findet daher immer mehr Verbreitung.

Die genannten Auctoren haben übrigens den Vector als solchen in Betracht gezogen, ohne diesen Begriff aus den Formen ersten Grades abzuleiten, indem sie die eben angeführten Eigenschaften der Vectoren zur Definition der Gleichheit und Summe von Vectoren verwendeten. Dem Inhalte nach ist aber der Begriff der Vectoren und ihrer Addition oder Composition noch viel älter, er kommt ja schon in der Lehre von den Geschwindigkeiten und Kräften vor. Immerhin aber bleibt es das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verdienst dieser Auctoren gezeigt zu haben, wie sich an deren Zusammensetzung eine eigene geometrische Rechnungsart knüpfen lasse.

Sowohl Bellavitis als auch Hamilton bezeichnen einen Vector mit dem Anfangspunkt in A und dem Endpunkt in B mit AB, wir dagegen bezeichnen ihn nach Grassmann mit B — A. Auch hat Hamilton den Vorzug der letzteren Bezeichnungsweise constatiert, aber keinen Gebrauch davon gemacht.

Nach unserer Schreibweise haben B — A und AB einen ganz verschiedenen Sinn. Die Formeln von Hamilton werden (wenn A, B und C Punkte bedeuten)

$$BA = -AB, \qquad AB + BC + CA = 0$$

nach Grassmann in folgender Weise geschrieben:

$$A - B = -(B - A) \text{ und } (B - A) + (C - B) + (A - C) = 0.$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass letztere die Form von identischen Gleichungen haben, während bei ersteren dies nicht der Fall ist und daher ein neuer Gedächtnisact nöthig ist, um dieselben zu merken, wesshalb die Grassmann'sche Rechnungsart im Vergleich zu der Hamilton's einfacher erscheint.

Bellavitis hat zur Bezeichnung der Äquipollenz seiner Segmente ein eigenes Zeichen eingeführt, so dass man bei denselben immer zwischen Äquipollenz und Gleichheit unterscheiden muß. Man muß also dort immer darauf achten, in welchen Formeln für ein Segment ein äquipollentes Segment substituiert werden darf. Wir verwenden dagegen nur ein Zeichen für die Gleichheit und können daher in jeder Formel für ein Gebilde ein ihm gleiches einsetzen, so dass also die diesbezüglichen Regeln sich gar nicht mehr einfacher gestalten können.

§ 5. Formen zweiten und dritten Grades.

Die Theorie der Formen zweiten Grades fällt mit der Theorie von an festen Körper angreifenden Kräften zusammen; der Unterschied ist nur der, dass bei ersterer nur der Geometrie entnommene Begriffe auftreten und die Operationen nach den Regeln der Algebra ausgeführt werden.

Ein Beispiel: Es ist $A(B - A) = AB$, d. h. jede Strecke ist das Product aus einem Punkt und einem Vector und umgekehrt. Unter dem Vector der Strecke AB verstehen wir den Vector B — A. Unter dem Vector einer Form zweiten Grades verstehen wir dann die Summe aus den Vectoren aller ihrer Glieder; es ist also identisch

$$AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n = A\,[A + (B_1 - A) + \ldots + (B_n - A)],$$

d. h. die Summe einer Reihe von Strecken, die alle denselben Anfangspunkt haben, ist wieder eine Strecke mit demselben Anfangspunkt, deren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endpunkt aber der Punkt ist, welchen der Ausdruck innerhalb der eckigen Klammern darstellt.

Das Product zweier Vectoren nennen wir Doppelvector. Dies ist dann eine Form zweiten Grades, die dem Drehzwilling in der Mechanik entspricht. Die Summe zweier Doppelvectoren gibt wieder einen Doppelvector. Jede Form zweiten Grades lässt sich auf unendlich vielfache Art als Summe einer Strecke und eines Doppelvectors darstellen.

Für die Formen dritten Grades gibt es keine der Mechanik entnommene Deutung. Für dieselben lässt sich aber der Satz aufstellen: „Jede Summe von Dreiecken lässt sich entweder auf ein einzi es Dreieck oder auf das Product dreier Vectoren zurückführen."

Das Product aus drei Vectoren bezeichnen wir als dreifachen Vector.

Um einen dreifachen Vector zu einem Dreieck zu addieren, brauchen wir nur das letztere parallel zu sich selbst zu verschieben.

Mit einiger Übung gelingt es leicht sich in diese Rechnungsart hineinzufinden, da sich dieselbe von der gewöhnlichen Arithmetik nur darin unterscheidet, dass die Multiplication eine alternierende ist.

Ferner sind noch folgende Bemerkungen beachtenswert:

Der Vector $B - A$ ist noch eine Form ersten Grades, dagegen die Strecke AB bereits eine Form zweiten Grades.

Zwei Vectoren $B - A$ und $B' - A'$ sind gleich, wenn sie mit irgend drei Punkten multipliciert gleiche Volumina geben. Zwei Strecken AB und $A'B'$ sind dagegen gleich, wenn sie mit irgend zwei Punkten multipliciert gleiche Volumina geben.

Aus $AB = A'B'$ folgt $B - A = B' - A'$, aber nicht umgekehrt.

Der Doppelvector $(B - A)(C - A) = BC + CA + AB$ ist eine Form zweiten Grades, dagegen das Dreieck ABC eine Form dritten Grades. Multipliciert man aber den obigen Doppelvector mit dem Punkt A, so erhält man das Dreieck ABC.

Zwei Doppelvectoren $AB + BC + CA$ und $A'B' + B'C' + C'A'$ sind gleich, wenn sie mit zwei beliebigen Punkten multipliciert gleiche Producte geben. Die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind dagegen gleich, wenn sie mit einem einzigen irgendwie gewählten Punkte multipliciert gleiche Producte geben. Die Gleichung $ABC = A'B'C'$ besagt, dass diese beiden Dreiecke in derselben Ebene liegen, gleichen Flächeninhalt haben und im gleichen Sinn beschrieben sind. Die Gleichung $AB + BC + CA = A'B' + B'C' + C'A'$ besagt dagegen, dass diese Dreiecke in pararellen Ebenen liegen, gleichen Flächeninhalt haben und im selben Sinn beschrieben sind.

Aus $ABC = A'B'C'$ folgt $AB + BC + CA = A'B' + B'C' + C'A'$, aber nicht umgekehrt.

Jeder dreifache Vector lässt sich auf die Form bringen: $(B - A)(C - A)(D - A)$ und, wenn man diese Multiplication ausführt, so erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$BCD - ACD + ABD - ABC,$$

also die Oberfläche des Tetraëders ABCD. Wenn man aber jenen dreifachen Vector mit einem beliebigen Punkte multipliciert, so erhält man das Tetraëder selbst. Sind zwei Tetraëder einander gleich, so sind auch ihre dreifachen Vectoren gleich, aber auch umgekehrt. Wir hätten in einer bestimmten Ebene eine Form zweiten Grades, also ein System von Strecken:

$$A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots + A_n B_n.$$

Angenommen, der Vector dieser Form sei nicht gleich Null, so lässt sich dieses System auf eine Strecke CD reducieren, so dass für einen beliebigen Punkt P in dieser Ebene die Gleichung besteht:

$$P A_1 B_1 + P A_2 B_2 + \ldots + P A_n B_n = PCD.$$

Wie sich nun aus unserer Theorie ergibt, ist die Construction dieser Strecke CD vollkommen identisch mit der Construction der Resultierenden der Kräftesumme $A_1 B_1 + A_2 B_2 + \ldots$ oder mit der Verwandlung einer Summe von Dreiecken in ein einziges Dreieck, wie dies in der Graphostatik durchgeführt wird. Wir haben hiebei den Begriff von Flächengleichheit hereingezogen, ohne ihn entwickelt zu haben. Aber es ergibt sich jetzt unmittelbar, dass die eben erwähnte Verwandlung auf der folgenden zwischen drei Vectoren bestehenden Identität beruhrt:

$$(I + J)\, K = I\, K + J\, K,$$

welche bisher als Lehrsatz des Varignon eingeführt wurde.

Die Doppelvectoren oder Flächen beider Seiten der Gleichung lassen sich offenbar in Theile zerlegen, die sich paarweise zur Deckung bringen lassen. Daher lässt sich auch ein vorgegebenes Polygon immer in solche Theile zerlegen, die bei entsprechender Anordnung ein Dreieck geben, von dem wir dann sagen, es sei gleich groß wie jenes Polygon. Damit ist gezeigt, wie sich die in den letzten Jahren vielfach discutierte Frage beantworten lässt, dass zwei im euclidischen Sinne als gleich zu bezeichnende Polygone in Theile zerlegt werden können, die sich zur Deckung bringen lassen. Dieser Beweis fällt im Wesentlichen mit dem zusammen, welchen Herr L. Gérard in seinem Aufsatz „Sur la mesure des polygones“ (Bull. de Math. élém., 1896, p. 102) erbracht hat.

§ 6. **Coordinaten.**

A_1, A_2, A_3 und A_4 seien vier Formen ersten Grades, deren Product nicht gleich Null ist. Beziehen wir alle anderen auf dieselben als Grundformen, so können wir jede Form ersten Grades folgendermaßen darstellen:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 + x_4 A_4,$$

wobei $x_1 \ldots x_4$ Zahlen bedeuten, die wir dann als die Coordinaten dieser Form bezeichnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jede Form zweiten Grades ist dann wieder eine lineare Function der 6 möglichen Producte je zweier solcher Grundformen und kann daher folgendermaßen geschrieben werden:

$$y_{12}\, A_1\, A_2 + y_{13}\, A_1\, A_3 + \ldots + y_{34}\, A_3\, A_4.$$

Die 6 Zahlen $y_{12}, y_{13} \ldots y_{34}$ heissen dann wieder die Coordinaten dieser Form zweiten Grades.

Ebenso ist jede Form dritten Grades eine lineare Function aller aus drei Grundformen zusammengesetzten Producte und kann daher gleich

$$z_1\, A_2\, A_3\, A_4 - z_2\, A_1\, A_3\, A_4 + z_3\, A_1\, A_2\, A_4 - z_4\, A_1\, A_2\, A_3$$

gesetzt werden. Die vier Zahlen z_1, z_2, z_3 und z_4 sind dann wieder die Coordinaten dieser Form dritten Grades.

Wir können die Coordinaten irgend einer Form auch als Verhältniswerte je zweier Tetraëder darstellen. Denn wenn wir

$$S = x_1\, A_1 + x_2\, A_2 + x_3\, A_3 + x_4\, A_4$$

mit $A_2\, A_3\, A_4$ multiplicieren, so fallen rechts alle Glieder bis auf das erste fort, und daraus folgt dann, dass

$$x_1 = \frac{S\, A_2\, A_3\, A_4}{A_1\, A_2\, A_3\, A_4}.$$

Auf ähnlichem Wege ergeben sich auch die übrigen Coordinatenwerte.

Multiplicieren wir eine Form zweiten Grades:

$$s = y_{12}\, A_1\, A_2 + y_{13}\, A_1\, A_3 + \ldots$$

mit $A_3\, A_4$, so ergibt sich

$$y_{12} = \frac{s\, A_3\, A_4}{A_1\, A_2\, A_3\, A_4}.$$

Analoges gilt für die Formen dritten Grades.

In sehr einfacher Weise lassen sich viele Aufgaben, wie die Berechnung der Coordinaten von Summen und Producten aller durch ihre Coordinaten gegebenen Formen dadurch auflösen, dass man dieselben einfach an den Coordinaten durchführt.

Es soll z. B. das Volumen eines Tetraëders berechnet werden, welches das Product von vier durch ihre Coordinaten $(x_1 \ldots x_4)$, $(y_1 \ldots y_4)$, $(z_1 \ldots z_4)$, $(t_1 \ldots t_4)$ gegebenen Formen ersten Grades darstellt.

Die gegebenen Formen entsprechen also folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} &x_1\, A_1 + x_2\, A_2 + x_3\, A_3 + x_4\, A_4 \\ &y_1\, A_1 + y_2\, A_2 + y_3\, A_3 + y_4\, A_4 \\ &z_1\, A_1 + z_2\, A_2 + z_3\, A_3 + z_4\, A_4 \\ &t_1\, A_1 + t_2\, A_2 + t^3\, A_3 + t_4\, A_4. \end{aligned}$$

Multiplicieren wir diese vier Polynome miteinander, so erhalten wir ein Product, das aus einer Summe von Factoren besteht; so oft wir zwei Glieder miteinander multiplicieren, die derselben (verticalen Reihe) Colonne angehören, erhalten wir als Product Null. Es können also nur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Producte auftreten, die aus Gliedern von verschiedenen Zeilen und Colonnen stammen. Ein solches Glied wird jedenfalls $x_1\, y_2\, z_3\, t_4\, A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ sein und alle anderen ergeben sich daraus, wenn man die Indices 1, 2, 3 und 4 permutiert. Wollen wir schließlich noch den gemeinsamen Factor $A_1\, A_2\, A_3\, A_4$ herausheben, so müssen wir den einzelnen Gliedern das Vorzeichen + oder — geben, je nachdem, ob die Zahl der Inversionen der Indices in demselben gerade oder ungerade ist. Wir erhalten daher als Product

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \end{vmatrix} A_1\, A_2\, A_3\, A_4,$$

weil dadurch ja auch diese Determinante definiert ist.

Wie sich hieraus ergibt, lässt sich nach dieser ganz allgemeinen Methode Grassmann's sogar der Begriff der Determinante und deren Theorie entwickeln, worauf wir nur vorübergehend hinweisen, da wir ja nur geometrische Anwendungen besprechen wollen.

Die vier Grundformen können im allgemeinen ganz beliebig gewählt werden. Besonders erwähnenswert ist jedoch der Fall, wenn ein Punkt O und drei nicht in dieselbe Ebene fallende Vectoren I, J und K als Grundformen gewählt werden. Ein solches Coordinatensystem heißt dann ein cartesianisches. Jede Form ersten Grades erscheint dann als Ausdruck von der Form:

$$m\,O + x\,I + y\,J + z\,K,$$

jeder Punkt unter der Form

$$O + x\,I + y\,J + z\,K$$

und jeder Vector kann gleich

$$x\,I + y\,J + z\,K$$

gesetzt werden.

Jede Form zweiten Grades lässt sich zurückführen auf

$$l\,O\,I + m\,O\,J + n\,O\,K + p\,J\,K + q\,K\,I + r\,I\,J.$$

Stellt eine solche Form ein System von Kräften dar, so bezeichnet man in der Mechanik die 6 Coordinaten dieser Form als Charakteristiken des Systemes.

Das Product dieser Form mit ihr selbst gibt

$$(l\,p + m\,q + n\,r)\,O\,I\,J\,K.$$

Wird dieser Ausdruck gleich Null, so ist dies die Bedingung dafür, dass sich jene Form auf eine Strecke oder einen Doppelvector reduciert.

Jeder Doppelvector lässt sich dann auf die Form

$$p\,J\,K + q\,K\,I + r\,I\,J$$

bringen u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7. Anwendungen auf die analytisch-projectivische Geometrie.

Die hier behandelten geometrischen Formen stehen nun zu einigen längst bekannten Begriffen in enger Beziehung. Eine nicht verschwindende Form ersten Grades lässt sich auf einen mit einer Masse verbundenen Punkt oder auf einen Vector reducieren. Mit einer Zahl, die nicht Null ist, multipliciert, ändert sich die Lage des Punktes oder die Richtung des Vectors nicht. Es wird also durch eine solche Form nur ein Punkt oder eine Richtung, also ein Punkt im Sinne der projectivischen Geometrie bestimmt. Die vier Coordinaten der Form ersten Grades werden auch als homogene Coordinaten bezeichnet. Werden nämlich alle Coordinaten mit derselben Zahl multipliciert, so erscheint wohl die Form damit multipliciert, aber der Punkt ändert sich im projectivischen Sinne nicht.

Wenn die Elemente A_1, A_2, A_3 und A_4, die dem Ganzen zu Grunde gelegt werden, irgend vier Formen sind, so nennen wir also die bezüglichen Coordinaten projectivische, wenn es dagegen vier Punkte sind, so bezeichnen wir sie als barycentrische Coordinaten; wählen wir hiezu einen Punkt und drei Vectoren, so haben wir das cartesianische Coordinatensystem.

Eine Form zweiten Grades, die selbst nicht, von der aber wohl ihr Product mit sich selbst gleich Null ist, lässt sich auf eine Strecke oder auf einen Doppelvector zurückführen, und bestimmt damit eine Gerade oder eine Richtung, oder also ganz allgemein gesprochen, eine im Endlichen oder Unendlichen liegende Gerade.

Die bezüglichen 6 Coordinaten der Form heißen dann wieder homogene Coordinaten der Geraden.

Eine Form zweiten Grades, deren Product mit sich selbst nicht gleich Null ist, bestimmt einen linearen Complex.

Eine Form dritten Grades, die nicht gleich Null ist, lässt sich auf ein Dreieck oder auf einen dreifachen Vector reducieren; im ersteren Falle ist dadurch eine im Endlichen, im letzteren eine im Unendlichen liegende Ebene bestimmt. Die vier Coordinaten einer solchen Form heißen wieder homogene Coordinaten der Ebene.*)

§ 8. Regressive Producte.

Es seien A und B zwei Formen ersten Grades (oder Punkte) und π ein Dreieck (oder eine Ebene). Es soll der Durchsetzungspunkt der Geraden AB und der Ebene π bestimmt werden. Jeder Punkt dieser

*) Eine ausführliche Entwicklung der projectivischen Coordinaten abgeleitet mit Hilfe dieses geometrischen Calculs, findet sich in der Abhandlung von C. Burali-Forti, Il metodo des Grassmann nella Geometria projettiva. (Rend. circ. Palermo, a. 1896, p. 177.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geraden lässt sich auf die Form $x\,A + y\,B$ bringen und da derselbe gleichzeitig in der Ebene π liegen muß, wird

$$(x\,A + y\,B)\,\pi = 0,$$

also auch

$$x\,A\,\pi + y\,B\,\pi = 0.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn x und y dem Volumen von $B\,\pi$ und $-A\,\pi$ proportional gewählt werden. Bezeichnen wir nun das Verhältnis eines Tetraëders t zu einem ganz bestimmten Tetraëder mit $[t]$, so muß die Form

$$[B\,\pi]\,A - [A\,\pi]\,B,$$

sowohl auf der Geraden AB als auch auf der Ebene π liegen; es ist dies also der Punkt, in welchem jene Gerade die Ebene durchsetzt.

Es lässt sich nun zeigen, dass diese Form, die hier als Function von A und B erscheint, wirklich nur eine Function des Productes AB ist, d. h., dass sie sich nicht ändert, wenn man A und B durch A′ und B′ ersetzt, so lange $AB = A'\,B'$. Wir bezeichnen daher den gefundenen Ausdruck als das Product der Factoren AB und π und schreiben

$$A\,B\,.\,\pi = [B\,\pi]\,A - [A\,\pi]\,B.$$

Das Product einer Form zweiten Grades mit einer solchen dritten Grades ist also eine genau bestimmte Form ersten Grades. Der hiedurch bestimmte Punkt ist der Durchschnittspunkt der durch jene Formen bestimmten Geraden und Ebene.

In ähnlicher Weise kann man das Product zweier Formen dritten Grades (Ebenen) definieren, und erhält eine Form vom Grade $3 + 3 - 4 = 2$ (also eine Gerade) und das Product dreier Formen dritten Grades gibt eine Form vom Grade $3 + 3 + 3 - 8$ ($= 1$, also einen Punkt).

Derartige sogenannte regressive (also Durchsetzungs-) Producte haben bezüglich beider Factoren die distributive Eigenschaft. Zwischen diesen beiden Arten von Producten, den regressiven und früher betrachteten progressiven, bestehen wichtige Beziehungen. Derartige Studien sind besonders für die höhere Geometrie von Interesse, da man also nach der Grassmann'schen Methode jede durch Projection und Durchschneidung erhaltene Construction in Zeichen zum Ausdruck bringen und mit den so erhaltenen Formeln rechnen oder die eine Construction in eine andere verwandeln und den Grad eines geometrischen Ortes voraus bestimmen kann. Auf diesem Wege sind schon viele Auctoren zu wertvollen Resultaten gelangt, die ich in meiner Schrift „Calcolo geometrico" angeführt habe. Da aber die regressiven Producte eine viel eingehendere Behandlung erfordern würden, so müssen wir uns hier mit diesen kurzen Andeutungen über dieselben begnügen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9. ω als Operation mit Formen.

Von besonderer Wichtigkeit ist bei regressiven Producten der Fall, wenn ein bestimmter dreifacher Vector ω als Einheit gewählt wird. Da wir uns aber nicht auf die Behandlung der regressiven Producte einlassen wollen, so wollen wir nun folgende Definitionen aufstellen:

Ist s eine Form ersten Grades, so bezeichnen wir mit $\omega\, s$ die Masse, also die Summe aller Coëfficienten der Form.

Is s eine Form zweiten Grades, so bezeichnen wir mit ω s den Vector von s, d. h. die Summe der Vectoren aller Glieder dieser Form, so dass also, wenn A und B Punkte sind $\omega\,(AB) = B - A$.

Ist s eine Form dritten Grades, so bedeute ω s den Doppelvector von s; sind also A, B und C drei Punkte, so ist

$$\omega\,(A\,B\,C) = (B - A)\,(C - A) = B\,C + C\,A + A\,B.$$

Analog nimmt die Bezeichnung $\omega\,(ABCD)$ die Bedeutung des dreifachen Vectors des Tetraëders A B C D an, nämlich von

$$B\,C\,D - A\,C\,D + A\,B\,D - A\,B\,C.$$

Die Operation ω ist distributiv, denn es ist $\omega\,(s + s') = \omega\, s + \omega\, s'$, d. h. in allen Rechnungen übernimmt das Zeichen ω die Rolle eines constanten Factors. Wird die Operation ω auf einen Vector, Doppelvector oder dreifachen Vector angewendet, so erhält man immer als Resultat Null.

§ 10. Die Indexoperation mit einfachen und Doppelvectoren.

Die Maßeinheit der Länge wollen wir als Meter bezeichnen.

Der Modul eines Vectors I sei dessen in Metern gemessene Länge, und unter dem Modul des Doppelvectors IJ wollen wir den in Quadratmetern gemessenen Flächeninhalt jenes Parallelogrammes verstehen, dessen Seiten I und J sind. Daher ist der Modul eines Vectors oder Doppelvectors eine Zahl, die nur positiv oder Null sein kann.

Handelt es sich um einen dreifachen Vector IJK, so muß nebst der Größe, nämlich dem Volumen eines mit jenen Vectoren construierten und nach Cubikmetern gemessenen Parallelepipedes auch noch der Sinn in Erwägung gezogen werde. Wir können z. B. den dreifachen Vector als positiv bezeichnen, wenn das Tetraëder OIJK ein rechtswendiges ist.

Der Einfachheit wegen wollen wir einen dreifachen Vector einfach durch seine mit dem entsprechenden Vorzeichen verbundene Maßzahl bezeichnen.

Mit anderen Worten, bedeutet ω einen dreifachen Vector, der durch Multiplication dreier paarweise aufeinander senkrecht stehender Vectoren von ein Meter Länge entsteht und von der Beschaffenheit, dass $O\omega$ rechtswendig ist, so unterdrücken wir einfach im Ausdruck für das Verhältnis

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\frac{IJK}{\omega}$ (wenn dadurch keine Zweideutigkeit entsteht) den Nenner und bezeichnen dasselbe einfach mit IJK.

Unter dem Index eines Doppelvectors IJ, verstehen wir dann den auf IJ senkrecht stehenden Vector K, für den IJK = KIJ positiv wird und dessen Modul gleich ist dem Modul von IJ und dafür wählen wir die Bezeichnung | (IJ).

Zugleich stellen wir auch fest, dass IJ der Index von K sei und schreiben IJ = | K, wenn K = | (IJ).

Der Index eines Doppelvectors ist also ein Vector und umgekehrt.

Stellt ein Doppelvector einen Drehzwilling dar, so entspricht dem Index in der Mechanik der Begriff der Axe, auf welche das Moment des Drehzwillings bezogen wird.

Auch die Operation | ist distributiv und kann bei den Rechnungen wie ein constanter Factor behandelt werden.

Die Operation | entspricht dem, was andere Auctoren als die Bestimmung des absoluten Wertes bezeichnen; mit Hilfe desselben werden die Maßverhältnisse geometrischer Figuren erörtert. Hieraus ergeben sich einige Folgerungen. Es ist

$$I \mid I = (\text{mod } I)^2 \tag{1}$$

Das Product aus einem Vector und seinem Index gibt das Quadrat seines absoluten Wertes. Grassmann führte für I | I die abgekürzte Schreibweise I^2 ein; wir können diese Bezeichnung, ohne Gefahr misverstanden zu werden, beibehalten, und dafür „I Quadrat" lesen, wenn wir darunter eben I | I und nicht II verstehen, das ja immer gleich Null wäre. Aus jener Formel lässt sich dann mod I berechnen. Dieselben Beziehungen bestehen auch in dem Falle, wenn wir I durch einen Doppelvector ersetzen.

$\frac{I}{\text{mod } I}$ bedeutet einen Vector von der Länge „Eins", der aber gleiche Richtung und gleichen Sinn hat wie I.

Bedeuten I und J Vectoren von der Länge „Eins", so stellt IJ einen Doppelvector vor, dessen Modul (mod IJ) eine Zahl ist, die wir als den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels bezeichnen. Wenn also I und J nicht der Längeneinheit entsprechen, so muss man sie zuerst auf diese reducieren und dann ist

$$\sin (I\,J) = \frac{\text{mod } (I\,J)}{\text{mod } I \text{ mod } J}.$$

Der Sinus des von den beiden Vectoren eingeschlossenen Winkels ist also eine immer zwischen 0 und 1 liegende Zahl.

Ist I ein Vector und j ein Doppelvector, und sind deren Moduln gleich 1, so können wir abermals die Zahl I j als den Sinus des von ihnen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gebildeten Winkels bezeichnen; wenn aber die Moduln von I und j andere Werte haben, so sei

$$\sin(\mathrm{I}\,j) = \frac{\mathrm{I}\,j}{\operatorname{mod}\mathrm{I}\operatorname{mod} j}.$$

Der Sinus eines von einem Vector und einem Doppelvector gebildeten Winkels ist also eine zwischen -1 und $+1$ liegende Zahl.

Unter dem Cosinus des von den beiden Vectoren I und J gebildeten Winkels verstehen wir den Sinus des Winkels, den die Vectoren I und | J miteinander bilden, also

$$\cos(\mathrm{I}, \mathrm{J}) = \frac{\mathrm{I} \mid \mathrm{J}}{\operatorname{mod}\mathrm{I}\operatorname{mod}\mathrm{J}}.$$

Also liegt der Cosinus des zwischen zwei Vectoren liegenden Winkels zwischen den Werten -1 und $+1$.

Wenn man aus dieser Formel den Nenner fortschafft, so ergibt sich, dass das Product aus einem Vector mit dem Index eines anderen Vectors gleich ist dem Product ihrer Moduln multipliciert mit dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Das Product I | J hat Grassmann als inneres, den Doppelvector IJ als äusseres Product bezeichnet. Das innere Product erscheint in der Mechanik als Arbeit, welche die Kraft I leistet, wenn ihr Angriffspunkt um die Strecke J verschoben wurde. In einzelnen Abhandlungen über Mechanik wurde hiefür auch schon ein eigenes Zeichen in Vorschlag gebracht.

Auf diese Weise können nun die Operationen der Elementar-Mathematik, die nicht distributiv sind, sondern die Eigenschaften der Complexen Zahlen besitzen, nämlich: Entfernung zweier Punkte, Flächeninhalt eines Dreieckes, Sinus und Cosinus, mit Hilfe der Grassmann'schen äußeren und inneren Producte dargestellt werden und mit diesen kann man dann nach den bekannten Regeln der Arithmetik operieren.

§ 11. Anwendungen auf die cartesische Geometrie.

Es seien I, J und K drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Vectoren von der Länge Eins, für welche IJK $= +1$; dann ist

$$\mathrm{I} \mid \mathrm{I} = \mathrm{J} \mid \mathrm{J} = \mathrm{K} \mid \mathrm{K} = 1, \quad \mathrm{I} \mid \mathrm{J} = \mathrm{I} \mid \mathrm{K} = \mathrm{J} \mid \mathrm{K} = 0 \text{ und}$$
$$\mid (\mathrm{J}\,\mathrm{K}) = \mathrm{I}, \quad \mid (\mathrm{K}\,\mathrm{I}) = \mathrm{J}, \quad \mid (\mathrm{I}\,\mathrm{J}) = \mathrm{K} \tag{1}$$

Der einem Vector U mit dem Coordinaten x, y, z entsprechende Ausdruck ist

$$\mathrm{U} = x\,\mathrm{I} + y\,\mathrm{J} + z\,\mathrm{K}. \tag{2}$$

Multiplicieren wir U mit | U, d. h. bilden wir das Quadrat, so erhalten wir einerseits den Wert $(\operatorname{mod}\mathrm{U})^2$ und führen wir andererseits die Multiplication nach den Regeln der Arithmetik aus, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (1) $(\operatorname{mod}\mathrm{U})^2 = x^2 + y^2 + z^2$. (3)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stehen die Vectoren I, J und K nicht aufeinander senkrecht, so treten auch noch die Glieder $2xy\,\mathrm{I} \mid \mathrm{J} + \ldots$ auf, wobei dann $\mathrm{I} \mid \mathrm{J} = \cos(\mathrm{I}\,\mathrm{J})$ etc.

Soll der Punkt

$$\mathrm{P} = \mathrm{O} + x\,\mathrm{I} + y\,\mathrm{J} + z\,\mathrm{K} \tag{4}$$

in der Ebene eines Dreieckes liegen, welches durch die Coordinaten a, b, c und d bestimmt ist, so dass

$$\pi = a\,\mathrm{O}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K} - b\,\mathrm{O}\,\mathrm{I}\,\mathrm{K} + c\,\mathrm{O}\,\mathrm{I}\,\mathrm{J} - d\,\mathrm{I}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K}, \tag{5}$$

so muß das Product $\mathrm{P}\,\pi = 0$; wenn wir diesen Ausdruck ausrechnen und durch den gemeinsamen Factor OIJK dividieren, so erhalten wir

$$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0, \tag{6}$$

also die Gleichung der jenen Coordinaten entsprechenden Ebene.

Der Flächeninhalt des Dreieckes ist gleich der Hälfte des ihm entsprechenden Doppelvectors $\omega\,\pi$, wobei also

$$\omega\,\pi = a\,\mathrm{J}\,\mathrm{K} + b\,\mathrm{K}\,\mathrm{I} + c\,\mathrm{I}\,\mathrm{J},$$

wesshalb der Flächeninhalt von

$$\pi = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \tag{7}$$

Es soll nun die Entfernung δ des Punktes P von der Ebene π berechnet werden. Es ist aber

$$\mathrm{P}\,\pi = \frac{1}{3}\,\delta\,\frac{1}{2}\,\mathrm{mod}\,(\omega\,\pi)\,m^3,$$

wobei wir noch die Bezeichnung m^3 (Kubikmeter) beigefügt haben, damit beiderseits Größen gleicher Art stehen. Da nun

$$\mathrm{O}\,\mathrm{I}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K} = \frac{1}{6}\,m^3,$$

so ergibt sich

$$\delta = \frac{\mathrm{P}\,\pi}{\mathrm{mod}\,(\pi\,\omega)\,\mathrm{O}\,\mathrm{I}\,\mathrm{J}\,\mathrm{K}}$$

und daraus ergibt sich dann die gesuchte Formel, wenn wir für $\mathrm{P}\,\pi$ und $\omega\,\pi$ die betreffenden Werte einsetzen.

Als letztes Beispiel wollen wir eine Form zweiten Grades s betrachten, deren Coordinaten l, m, n, p, q, r seien, also

$$s = l\,\mathrm{O}\,\mathrm{I} + m\,\mathrm{O}\,\mathrm{J} + n\,\mathrm{O}\,\mathrm{K} + p\,\mathrm{J}\,\mathrm{K} + q\,\mathrm{K}\,\mathrm{I} + r\,\mathrm{I}\,\mathrm{J}.$$

Die Formel sagt uns bereits, dass s als die Summe der Strecke $\mathrm{O}\,(l\,\mathrm{I} + m\,\mathrm{J} + n\,\mathrm{K})$ mit dem Anfangspunkt O und dem durch die Coordinaten l, m, n gegebenen Vector und einem Doppelvector mit den Coordinaten p, q, r aufgefasst werden kann. Diese Form soll als Summe einer Strecke i und eines darauf senkrecht stehenden Doppelvectors u dargestellt werden, so dass also

$$s = i + u.$$

Dann wird $\omega\,s = \omega\,i$, weil ja $\omega\,u = 0$. Da nun u auf $\omega\,i = \omega\,s$ senkrecht stehen soll, so wird $u = x \mid \omega\,s$, wobei x eine reelle Zahl darstellt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus folgt dann, dass $s - x \mid \omega s = i$; multiplicieren wir jede Seite dieser Gleichung mit sich selbst und beachten, dass $(\mid \omega s)\ (\mid \omega s) = 0$ und $i i = 0$, so ergibt sich

$$s s - 2 x s \mid \omega s = 0$$

und daraus

$$x = \frac{s s}{2 s \mid \omega s}$$

und schließlich

$$u = \frac{s s}{2 s \mid \omega s} \mid \omega s$$

Auf diese Weise können wir also den Doppelvector u, welchen man in der Mechanik als „Hauptmoment des Kräftesystemes" bezeichnen würde, ausschließlich mit Hilfe der Form s zur Darstellung bringen. Führen wir nun in die Formel die Coordinaten ein, so ergibt sich

$$u = \frac{l p + m q + n r}{l^2 + m^2 + n^2} (l \mathrm{J K} + m \mathrm{K I} + n \mathrm{I J}).$$

Die Strecke i ergibt sich dann aus der Differenz $i = s - u$.

Diese einfachen Beispiele dürften hinreichen, um zu überzeugen, dass die Grassmann'sche Behandlungsweise die gewöhnliche analytische Geometrie keineswegs ausschließt, sondern vielmehr sehr einfache Wege angibt, derartige Formeln für die einzelnen Coordinatensysteme abzuleiten. Zugleich ist hieraus auch leicht ersichtlich, welche geometrische Bedeutung jeder Zähler oder Nenner, jeder Factor oder Summand, der in einer Formel auftritt, für sich allein hat.

§ 12. Infinitesimal-Geometrie.

Wir bezeichnen die Form ersten Grades S_0 als Grenzwert der veränderlichen Form S, wenn für jedes beliebige Dreieck PQR

$$\lim \mathrm{S\,P\,Q\,R} = \mathrm{S}_0\,\mathrm{P\,Q\,R}.$$

Ähnlich werden die Grenzwerte der Formen höheren Grades definiert. Ist die Form $\mathrm{S}(t)$ eine Function der numerischen Veränderlichen t, so setzen wir

$$\frac{d\,\mathrm{S}(t)}{dt} = \lim_{h=0} \frac{\mathrm{S}(t+h) - \mathrm{S}(t)}{h},$$

wobei auf der rechten Seite nur Ausdrücke vorkommen, die schon definiert wurden.

Für die Summen und Producte von Formen bestehen die bekannten Regeln des Differenzierens; die Operationssymbole ω und $\mid$ verhalten sich hiebei wie constante Factoren, nur muß man darauf sehen, dass nie Inversionen von Factoren hinzukommen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dessgleichen bleiben auch die Definitionen für die aufeinander folgenden Ableitungen und Integrale fortbestehen. So kann man z. B. auch die Taylor'sche Reihe wie folgt aufstellen.

„Ist $S(t)$ eine von t abhängige geometrische Form, welche für $t = t_0$ eine erste und zweite Ableitung besitzt, dann ist:

$$S(t_0 + h) = S(t_0) + h\,S'(t_0) + \frac{h^2}{2!}\,S''(t_0) + R,$$

wobei R im Vergleich zu h unendlich klein ist von höherer als der zweiten Ordnung."

Wie ich in meinen anderweitigen Arbeiten gezeigt habe, ist es nicht nöthig außerdem noch z. B. die Stetigkeit der Function an dieser Stelle anzunehmen.

In die Form eines Integrales lässt sich dieser Rest-Ausdruck ohne wesentliche Veränderungen übertragen.

Die Lagrange'sche Formulierung erleidet dagegen eine kleine Abänderung. Da ich für den darauf bezüglichen Satz in meinem „Calcolo geometrico (Cap. VIII)" den Beweis nicht beigefügt habe, so will ich denselben hier nachtragen.

Definition: Wir sagen, eine geometrische Form S sei ein Mittelwert zwischen den Formen A, B, ... desselben z. B. des ersten Grades, wenn für drei beliebige Punkte PQR die Form SPQR einen Mittelwert zwischen APQR, BPQR, ... darstellt.

Satz: Ist $S(t)$ eine Function der Veränderlichen t, welche für alle Werte zwischen t und $t + h$ alle Ableitungen bis zur n^{ten} Ordnung besitzt, dann ist

$$S(t + h) = S(t) + h\,S'(t) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{n-1}\,S^{(n-1)}(t) + \frac{h^n}{n!}\,K,$$

wobei K einen Mittelwert der geometrischen Form $S^{(n)}(t + \Theta h)$ bedeutet und Θ irgend ein Wert zwischen 0 und 1 ist.

Das heißt also, während bei den numerischen Functionen K irgend einen Wert der n^{ten} Ableitung darstellt, bedeutet es hier bei den geometrischen Formen einen Mittelwert jener Werte, welche n^{te} Ableitung annehmen kann.

Die Formel trifft nämlich zu, wenn $S(t)$ eine numerische Function von t ist; da dann K einen der Werte der n^{ten} Ableitung wirklich annimmt, also auch einen Mittelwert aller möglichen Werte darstellt. Sie trifft aber auch zu, wenn $S(t)$ ein Tetraëder oder irgend eine Form vierten Grades darstellt, da ja deren Maßzahlen wieder reelle Zahlen sind.

Ist aber $S(t)$ eine Form ersten Grades, so braucht man nur die obige Formel mit einem beliebigen Dreieck PQR zu multiplicieren, dann besteht die Beziehung für die so entstehenden Tetraëder und daraus folgt, dass dann KPQR ein Mittelwert der von $S^{(n)}(t)$ PQR angenommenen Werte, also auch K ein Mittelwert von $S^{(n)}(t)$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedeutet P einen Punkt, dessen Lage eine Function der Veränderlichen t ist, dann sind dessen Ableitungen Vectoren. PP′ ist dann die Tangente der von P beschriebenen Curve und PP′ P″ die Schmiegungs-Ebene, wenn diese Größen, Strecke und Dreieck nicht gleich Null sind. In letzterem Falle treten gewisse Singularitäten auf, die ich bereits in meinem Werke „Applicazioni Geometriche" näher behandelt habe.

Ist endlich der Punkt P Function zweier Veränderlichen t und u, so stellt $P \frac{dP}{dn} \frac{dP}{du}$ eine Tangente der von P beschriebenen Oberfläche dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf