I.

Rektifikation von Kreisbogen.

Für die Aufgabe, einen beliebigen Kreisbogen in eine grade Linie zu verwandeln, ist in der Beilage zu dem Programm der Grossen Stadtschule zu Rostock vom Jahre 1898 eine einfache Lösung gegeben, deren Fehler für alle Winkel unter 45 Grad noch keine Bogensekunde, für Winkel von 45 bis 60 Grad kaum 6 Bogensekunden beträgt. Doch leidet diese Lösung an dem Mangel, dass von 60 bis 90 Grad der Fehler ziemlich schnell wächst, und dass der Ausgangspunkt der Konstruktion um drei Radien vom Anfangspunkte des Bogens entfernt liegt, was bei beschränktem Raum die Zeichnung sehr erschweren kann. Es soll daher in dem Folgenden ein Verfahren mitgeteilt werden, welches von diesen beiden Mängeln frei und ausserdem weit genauer ist.

Wenn man (s. Figur I) als ersten Näherungswert der Länge des Bogens AB die zugehörige Sehne AB ansieht, so ergibt sich ein zweiter, schon erheblich genauerer, indem man den Bogen AB in O halbiert und die Sehne AO bis auf ihr Doppeltes AC verlängert, welches zugleich die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist. So kann man nach und nach durch Verlängerung der Sehne AO_1 des Viertelbogens bis auf ihr Vierfaches AD, der Sehne AO_2 des Achtelbogens bis auf ihr Achtfaches AE u. s. w. immer genauere Werte AD, AE, AF u. s. w. erhalten, die zugleich die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke ACD, ADE, AEF u. s. w. sind, während von den spitzen Winkeln BAC, CAD, DAE, EAF u. s. w. jeder folgende die Hälfte des voraufgehenden ist. Der jedesmalige Zuwachs an Genauigkeit, also der Unterschied je zweier so aufeinander folgenden Näherungswerte lässt sich leicht trigonometrisch darstellen, denn es ist

$$AB = 2 \sin \frac{1}{2} \varphi = 4 \sin \frac{1}{4} \varphi \cos \frac{1}{4} \varphi,$$

$$AC = 4 \sin \frac{1}{4} \varphi = AB \sec \frac{1}{4} \varphi,$$

$$AD = 8 \sin \frac{1}{8} \varphi = AC \sec \frac{1}{8} \varphi,$$

$$AE = 16 \sin \frac{1}{16} \varphi = AD \sec \frac{1}{16} \varphi, \text{ u. s. w.,}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{also } AC-AB = 4\sin\frac{1}{4}\varphi\left(1-\cos\frac{1}{4}\varphi\right) = 8\sin\frac{1}{4}\varphi\left(\sin\frac{1}{8}\varphi\right)^2,$$

$$AD-AC = 8\sin\frac{1}{8}\varphi\left(1-\cos\frac{1}{8}\varphi\right) = 16\sin\frac{1}{8}\varphi\left(\sin\frac{1}{16}\varphi\right)^2,$$

$$AE-AD = 16\sin\frac{1}{16}\varphi\left(1-\cos\frac{1}{16}\varphi\right) = 32\sin\frac{1}{16}\varphi\left(\sin\frac{1}{32}\varphi\right)^2, \text{ u. s. w.}$$

Es lässt sich folglich der genaue Wert des Bogens $AB = \varphi$ für den Radius 1 so ausdrücken:

$$\begin{aligned}\varphi &= AB + (AC-AB) + (AD-AC) + (AE-AD) + \cdots\\ &= 2\sin\frac{1}{2}\varphi + 8\sin\frac{1}{4}\varphi\left(\sin\frac{1}{8}\varphi\right)^2 + 16\sin\frac{1}{8}\varphi\left(\sin\frac{1}{16}\varphi\right)^2\\ &\quad + 32\sin\frac{1}{16}\varphi\left(\sin\frac{1}{32}\varphi\right)^2 + \cdots\end{aligned}$$

Da nun bei sehr kleinen Winkeln der Sinus beinahe dem Bogen gleich ist, so wird, je weiter man diese Reihe fortsetzt, desto genauer jeder neue Zuwachs dem vierten Teile des vorigen gleich. Nun ist

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots = \frac{1}{3};$$

wenn man daher eine gewisse Anzahl von Gliedern der obigen Reihe nimmt, $\frac{1}{3}$ vom Werte des letzten Gliedes hinzufügt und alle folgenden weglässt, so wird dadurch auch bei wenigen Gliedern schon eine erhebliche Genauigkeit erzielt, z. B. für einen Bogen von 60^0, wo $\varphi = 1{,}0471975512$ ist, folgt, wenn man 4 Glieder nimmt, also bis AE geht:

$$\begin{aligned}AB &= 1{,}000000000\\ AC-AB &= 0{,}035276187\\ AD-AC &= 0{,}008933357\\ AE-AD &= 0{,}002240530\\ \hline AE &= 1{,}046450074\\ \tfrac{1}{3}(AE-AD) &= 0{,}000746843\\ \hline &\ 1{,}047196917\\ \varphi &= 1{,}047197551\\ \hline \text{Differenz:} &- 0{,}000000634,\end{aligned}$$

mithin auf 6 Dezimalstellen genau.

Für 3 Glieder folgt:

$$\begin{aligned}AD &= 1{,}044209544\\ \tfrac{1}{3}(AD-AC) &= 0{,}002977786\\ \hline &\ 1{,}047187330\\ \varphi &= 1{,}047197551\\ \hline &\ 0{,}000010221\end{aligned}$$

Für 2 Glieder folgt:

$$\begin{aligned}AC &= 1{,}035276187\\ \tfrac{1}{3}(AC-AB) &= 0{,}011758729\\ \hline &\ 1{,}047034916\\ \varphi &= 1{,}047197551\\ \hline &\ 0{,}000162635\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Will man hierauf Näherungsmethoden gründen, so ist zu bedenken, dass, je weiter man in der Reihe von AB zu AC, AD, AE u. s. w. fortschreitet, desto genauer die wiederholte Bogenhalbierung oder Ansetzung von rechten Winkeln erfolgen muss, wenn nicht wesentliche Konstruktionsfehler entstehen sollen. Wir wollen daher, um die Sicherheit der Konstruktion zu wahren, nur bis AC gehen und daran solche Verbesserungen anknüpfen, dass bei voller Sicherheit der Zeichnung die Genauigkeit bedeutend vermehrt wird.

Um den Näherungswert $AC + \frac{1}{3}(AC - AB)$ zu konstruieren, würde man auf AB von A aus eine Strecke $AK = AC$ abtragen, ebenso auf BC von B aus eine Strecke $BL = \frac{3}{2} BC$, ferner KL ziehen und durch C eine Parallele mit BK bis zum Schnitt mit LK legen; dies Stück wäre dann $\frac{1}{3} BJ = \frac{1}{3}(AC - AB)$ und müsste zu AC hinzugesetzt werden. Man tut aber besser, statt dieses Stücks die Verlängerung CN der Linie AC bis zum Schnitt mit LK in N zu nehmen, weil man so in der Linie AN einen bedeutend genaueren Näherungswert erhält.

Wenn man nämlich KJ parallel NC zieht, wodurch CB in J geschnitten wird, so sind die Dreiecke KJL und NCL ähnlich, ebenso KBJ und ABC,

$$\text{also:}\quad \frac{JK}{CN} = \frac{JL}{CL} = \frac{BJ + \frac{3}{2} BC}{\frac{1}{2} BC} = 2 \cdot \frac{BJ}{BC} + 3 = 2 \frac{BK}{BA} + 3$$

$$= 2 \frac{AC - AB}{AB} + 3 = 2 (sec\, \tfrac{1}{4} \varphi - 1) + 3 = 2\, sec\, \tfrac{1}{4} \varphi + 1,$$

$$\text{folglich:}\quad CN = \frac{JK}{2\, sec\, \frac{1}{4} \varphi + 1} = \frac{BK\, sec\, \frac{1}{4} \varphi}{2\, sec\, \frac{1}{4} \varphi + 1} = \frac{BK}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi}.$$

Hieraus ergibt sich für $\varphi = 60^0$:

$$\begin{aligned} & CN = 0{,}01189382; \\ \text{nun ist}\quad & AC = 1{,}03527619, \\ \text{also}\quad & AN = 1{,}04717001, \\ \text{während}\quad & \varphi = 1{,}04719755 \\ \text{Differenz:}\quad & -0{,}00002754, \end{aligned}$$

also ungefähr $\frac{1}{6}$ der obigen Differenz.

$$\text{Da}\quad CN = \frac{BK}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi} = \frac{AC - AB}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi} = \frac{1 - cos\, \frac{1}{4} \varphi}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi} \cdot AC \text{ ist,}$$

$$\text{so folgt:}\quad AN = AC + CN = \frac{3}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi} \cdot AC = \frac{3 \times 4\, sin\, \frac{1}{4} \varphi}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi},$$

$$\text{oder:}\quad AN = \frac{12\, sin\, \frac{1}{4} \varphi}{2 + cos\, \frac{1}{4} \varphi}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um diesen Näherungswert AN bequem mit dem wahren Werte φ zu vergleichen, kann man ihn so umformen:

$$AN = \frac{12 \times 2 \sin \frac{1}{8}\varphi \cos \frac{1}{8}\varphi}{2 + (2 \cos \frac{1}{8}\varphi^2 - 1)} = \frac{24 \sin \frac{1}{8}\varphi \cos \frac{1}{8}\varphi}{1 + 2 \cos \frac{1}{8}\varphi^2}$$

$$= \frac{24 \tang \frac{1}{8}\varphi}{\sec \frac{1}{8}\varphi^2 + 2} = \frac{24\, tg \frac{1}{8}\varphi}{3 + tg \frac{1}{8}\varphi^2} = \frac{8\, tg \frac{1}{8}\varphi}{1 + \frac{1}{3}\, tg \frac{1}{8}\varphi^2}$$

$$= \frac{8t}{1 + \frac{1}{3}t^2}, \text{ wenn } tg \frac{1}{8}\varphi = t \text{ gesetzt wird.}$$

Nun ist: $\dfrac{8t}{1+\frac{1}{3}t^2} = 8t\left(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{9}t^4 - \frac{1}{27}t^6 + \frac{1}{81}t^8 - \frac{2}{243}t^{10} + \cdots\right),$

also $AN = 8t - \frac{8}{3}t^3 + \frac{8}{9}t^5 - \frac{8}{27}t^7 + \frac{8}{81}t^9 - \frac{8}{243}t^{11} + \cdots,$

während $\varphi = 8 \cdot \frac{1}{8} = 8t - \frac{8}{3}t^3 + \frac{8}{5}t^5 - \frac{8}{7}t^7 + \frac{8}{9}t^9 - \frac{8}{11}t^{11} + \cdots.$

also $\varphi - AN = \frac{32}{45}t^5 - \frac{160}{189}t^7 + \frac{64}{81}t^9 - \frac{1856}{2673}t^{11} + \cdots.$

Weil der Näherungswert AN etwas zu klein ist, so kann man setzen $\varphi = \dfrac{8t}{1+\alpha t^2}$;

da nun $\varphi = 8t\left(1 - \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{5}t^4 - \frac{1}{7}t^6 + \frac{1}{9}t^8 - \frac{1}{11}t^{10} + \cdots\right)$

oder $\varphi = \dfrac{8t}{1 + \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{45}t^4 + \frac{44}{945}t^6 - \frac{428}{14175}t^8 + \frac{10196}{467775}t^{10} - \cdots},$

so folgt: $\alpha = \frac{1}{3} - \frac{4}{45}t^2 + \frac{44}{945}t^4 - \frac{428}{14175}t^6 + \frac{10196}{467775}t^8 - \cdots.$

Hieraus ist ersichtlich, dass selbst für Winkel von 90^0 der Wert von α nur wenig kleiner als $\frac{1}{3}$ ist, denn

für $t = 0$, also $\varphi = 0$ ist $\alpha = \frac{1}{3}$,

für $t = 0{,}1$, also $\varphi = 45^0\, 41'\, 5''$ ist $\alpha = \frac{1}{3} - 0{,}00088426$,

für $t = 0{,}2$, also $\varphi = 90^0\, 28'\, 46''$ ist $\alpha = \frac{1}{3} - 0{,}00348293$.

Der Näherungswert $AN = \dfrac{8t}{1+\frac{1}{3}t^2}$ kann daher, wie auch später die Fehlertabelle zeigen wird, in den meisten Fällen schon genügen; doch lohnt es sich zu untersuchen, bis zu welchem Punkte L_0 man BL über L hinaus verlängern muss, damit die Linie L_0K von der verlängerten AC den ganz genauen Wert $AN_0 = \varphi$ abschneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man zu diesem Zwecke $BL_0 = \varepsilon \cdot BC$, so folgt ähnlich wie früher:

$$\frac{JK}{CN_0} = \frac{JL_0}{CL_0} = \frac{BJ + \varepsilon \cdot BC}{(\varepsilon - 1) \cdot BC} = \frac{1}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{BJ}{BC} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{KB}{AB} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} \cdot \frac{AC - AB}{AB} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon - 1} (sec \frac{1}{4} \varphi - 1) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} = \frac{sec \frac{1}{4} \varphi}{\varepsilon - 1} + 1 = \frac{sec \frac{1}{4} \varphi + (\varepsilon - 1)}{\varepsilon - 1};$$

also $$CN_0 = \frac{(\varepsilon - 1) JK}{sec \frac{1}{4} \varphi + (\varepsilon - 1)} = \frac{(\varepsilon - 1) BK \, sec \frac{1}{4} \varphi}{sec \frac{1}{4} \varphi + (\varepsilon - 1)};$$

$$CN_0 = \frac{(\varepsilon - 1) BK}{1 + (\varepsilon - 1) cos \frac{1}{4} \varphi} = \frac{(\varepsilon - 1)(1 - cos \frac{1}{4} \varphi)}{1 + (\varepsilon - 1) cos \frac{1}{4} \varphi} \cdot AC.$$

Für AN_0 ergibt sich hieraus:

$$AN_0 = AC + CN_0 = \frac{\varepsilon}{1 + (\varepsilon - 1) cos \frac{1}{4} \varphi} \cdot AC = \frac{4 \varepsilon \, sin \frac{1}{4} \varphi}{1 + (\varepsilon - 1) cos \frac{1}{4} \varphi}$$

$$= \frac{4 \varepsilon \cdot 2 \, sin \frac{1}{8} \varphi \, cos \frac{1}{8} \varphi}{1 + (\varepsilon - 1)(2 \, cos \frac{1}{8} \varphi^2 - 1)} = \frac{8 \varepsilon \, sin \frac{1}{8} \varphi \, cos \frac{1}{8} \varphi}{(2 - \varepsilon) + (2 \varepsilon - 2) \, cos \frac{1}{8} \varphi^2}$$

$$= \frac{8 \varepsilon \, tang \frac{1}{8} \varphi}{(2 - \varepsilon) \, sec \frac{1}{8} \varphi^2 + (2 \varepsilon - 2)} = \frac{8 \varepsilon \, tang \frac{1}{8} \varphi}{(2 - \varepsilon)(1 + tg \frac{1}{8} \varphi^2) + (2 \varepsilon - 2)}$$

$$= \frac{8 \varepsilon \, tang \frac{1}{8} \varphi}{\varepsilon + (2 - \varepsilon) \, tang \frac{1}{8} \varphi^2} = \frac{8 \, tang \frac{1}{8} \varphi}{1 + \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} tg \frac{1}{8} \varphi^2},$$

oder $$AN_0 = \frac{8 t}{1 + \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} t^2} = \varphi.$$

Nun fanden wir oben, dass $\varphi = \frac{8 t}{1 + \alpha t^2}$,

wenn $$\alpha = \frac{1}{3} - \frac{4}{45} t^2 + \frac{44}{945} t^4 - \frac{428}{14175} t^6 + \frac{10196}{467775} t^8 - \cdots;$$

es ist daher $\frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} = \alpha$, folglich $\varepsilon = \frac{2}{1 + \alpha}$, oder:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\varepsilon = \frac{2}{\frac{4}{3} - \frac{4}{45}t^2 + \frac{44}{945}t^4 - \frac{428}{14175}t^6 + \frac{10196}{467775}t^8 - \cdots}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{1}{15}t^2 + \frac{11}{315}t^4 - \frac{107}{4725}t^6 + \frac{2549}{155925}t^8 - \cdots}, \text{ oder:}$$

$$\varepsilon = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{15}t^2 - \frac{16}{525}t^4 + \frac{16}{875}t^6 - \frac{12688}{1010625}t^8 + \cdots\right).$$

Nun ist $BL_0 = \varepsilon \cdot BC = \varepsilon \cdot \frac{2}{3} BL$, also:

$$BL_0 = BL \cdot \left(1 + \frac{1}{15}t^2 - \frac{16}{525}t^4 + \frac{16}{875}t^6 + \frac{12688}{1010625}t^8 + \cdots\right).$$

Hieraus folgt $LL_0 = BL\left(\frac{1}{15}t^2 - \cdots\right)$; es liegt daher selbst für $\varphi = 90^0$, wo nahezu $t = 0{,}2$ ist, L_0 noch so nahe an L, dass LL_0 kaum $\frac{1}{375}BL$ beträgt.

Wenn man CK zieht, so ist $\angle ACK = 90^0 - \frac{1}{8}\varphi$;

da nun $\angle ACB = 90^0 - \frac{1}{4}\varphi$, so ist $\angle BCK = \frac{1}{8}\varphi$,

mithin $tang\, BCK = tang \frac{1}{8}\varphi = t$, und da $BL = \frac{3}{2}BC$,

so ist $tang\, BLK = \frac{2}{3}\, tang\, BCK = \frac{2}{3}t$.

Setzt man nun $BLK = \sigma$ und $tang\, BLK = s$, also $t = \frac{3}{2}s$, so folgt:

$$BL_0 = BL \cdot \left(1 + \frac{3}{20}s^2 - \frac{27}{175}s^4 + \frac{729}{3500}s^6 - \frac{2578473}{16170000}s^8 + \cdots\right)$$

$$= BL \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{10}s^2 - \frac{801}{2800}s^4 + \frac{324}{875}s^6 - \frac{31347}{134750}s^8 - \cdots}$$

$$= BL \sqrt{1 + \frac{3}{10}s^2\left(1 - \frac{267}{280}s^2 + \frac{216}{175}s^4 - \frac{10449}{13475}s^6 + \cdots\right)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Koeffizienten in der Klammer nicht sehr von Eins verschieden sind, so nehmen wir statt des genauen Wertes von BL_0 den Näherungswert

$$BL_2 = BL \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{10} s^2 (1 - s^2 + s^4 - s^6 + \cdots)}$$

$$= BL \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 + s^2} \cdot s^2}$$

$$= BL \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 + tg\,\sigma^2} \cdot s^2} = BL \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{sec\,\sigma^2} \cdot s^2}$$

$$= BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{sec\,\sigma \cdot \sqrt{10}} \cdot s\right)^2} = BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{30}}{10 \cdot sec\,\sigma} \cdot s\right)^2}.$$

Um diesen Näherungswert BL_2 zu konstruieren, zeichnet man (s. Figur II, wo der Deutlichkeit wegen ein grösserer Massstab angewandt ist) aus den Katheten $LD = \frac{1}{2} LB$ und $DE = \frac{1}{4} LB$ das rechtwinklige Dreieck LDE, trägt auf DE das der Höhe FD gleiche Stück DG und auf LK das der Linie LG gleiche Stück LH ab und legt durch H eine mit LB Parallele, die BK in P trifft, dann ist

$$BP = \frac{\sqrt{3}}{sec\,\sigma \cdot \sqrt{10}} \cdot BK.$$

Beweis: Für $LB = c$ ist $LD = \frac{1}{2} c$, $DE = \frac{1}{4} c$;

nun ist $FD^2 : DE^2 = LD^2 : LE^2$,

oder $FD^2 : \frac{1}{16} c^2 = \frac{1}{4} c^2 : \frac{5}{16} c^2$,

also: $FD^2 = \frac{1}{20} c^2 = GD^2$;

$$GL^2 = GD^2 + LD^2 = \frac{3}{10} c^2 = HL^2,$$

also: $HL = c \cdot \sqrt{\frac{3}{10}}$; nun ist $KL = c \cdot sec\,\sigma$,

folglich: $\frac{HL}{KL} = \frac{\sqrt{3}}{sec\,\sigma \cdot \sqrt{10}} = \frac{BP}{BK}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Nun ist } LP = \sqrt{BL^2 + BP^2} = BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{BP}{BL}\right)^2}$$

$$= BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{BP}{BK} \cdot \frac{BK}{BL}\right)^2},$$

$$\text{also } LP = BL \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{sec\,\sigma \cdot \sqrt{10}} \cdot s\right)^2} = BL_2.$$

Der gesuchte Punkt L_2, bis zu welchem BL verlängert werden muss, liegt daher um die Strecke LP von B entfernt.

Durch diese Konstruktion erreicht man, wie sich später zeigen wird, eine so grosse Genauigkeit, dass der von 0^0 an allmählich wachsende Fehler selbst bei 90^0 noch nicht zwei Zehnmillionstel des Kreisradius beträgt. Man kann jedoch auch einfachere Konstruktionen wählen, die fast ebenso genau sind; denn wenn für einen bestimmten Wert von φ der genau entsprechende auf BK liegende Punkt P_0 heisst, so dass $LP_0 = BL_0$ und $BP_0 = n_0 \cdot BK$ ist, so folgt

$$LP_0 = \sqrt{BL^2 + BP_0^{\,2}} = BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{BP_0}{BL}\right)^2}, \text{ oder}$$

$$BL_0 = BL \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{BP_0}{BK} \cdot \frac{BK}{BL}\right)^2} = BL \cdot \sqrt{1 + n_0^{\,2} s^2}.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$BL_0 = BL \cdot \sqrt{1 + s^2\left(\frac{3}{10} - \frac{801}{2800} s^2 + \frac{324}{875} s^4 - \frac{31347}{134750} s^6 + \cdots\right.},$$

$$\text{also } n_0^{\,2} = \frac{3}{10} - \frac{801}{2800} s^2 + \frac{324}{875} s^4 - \frac{31347}{134750} s^6 + \cdots$$

$$\text{oder: } n_0^{\,2} = \frac{3}{10} - \frac{89}{700} t^2 + \frac{64}{875} t^4 - \frac{1376}{67375} t^6 + \cdots.$$

Für $\varphi = 0$ ist also $(n_0)^2 = 0{,}3000000$, $n_0 = 0{,}5477225$;

für $\varphi = 15^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2998637$, $n_0 = 0{,}547598$;

für $\varphi = 30^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2994552$, $n_0 = 0{,}547225$;

für $\varphi = 45^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2987735$, $n_0 = 0{,}546602$;

für $\varphi = 60^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2978182$, $n_0 = 0{,}545727$;

für $\varphi = 75^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2965882$, $n_0 = 0{,}544600$;

für $\varphi = 90^0$ ist $(n_0)^2 = 0{,}2950827$, $n_0 = 0{,}543215$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus erhellt, dass n_0 nahezu konstant ist. Wenn man daher einen Mittelwert auswählt, z. B. den Wert $n_0 = 0{,}545454\cdots = \frac{6}{11}$, welcher dem zu 60^0 gehörenden fast gleich ist und sich leicht konstruieren lässt, so kann dieser für alle Winkel von 0^0 bis 60^0 gelten und gibt auch darüber hinaus nur ganz geringe Abweichungen.

Die Konstruktion von $\frac{6}{11} BK$ lässt sich sehr bequem so ausführen (s. Figur I), dass man LB um das Stück $\frac{5}{6} BL = BC + \frac{1}{2} CL$ über B hinaus verlängert, im Endpunkte R ein Lot $RQ = BK$ errichtet und LQ zieht, welche die Linie BK in dem gesuchten Punkte P schneidet.

Um für jede auf BK gewählte Lage P_1 des Punktes P genau zu bestimmen, wie gross dann der Fehler für irgend einen Wert von φ ist, setzen wir $BP_1 = n \cdot BK$ und dem entsprechend $P_1 L = BL_1$, so dass $L_1 K$ auf AC den Näherungswert AN_1 abschneidet. Für diesen findet man, wenn man in der obigen Entwicklung des Näherungswertes AN statt $BL = \frac{3}{2} BC$ den Wert $BL_1 = \varepsilon_1 \cdot BC$ einsetzt und damit die Rechnung ganz ebenso wie dort durchführt, die Grösse

$$AN_1 = \frac{8t}{1 + \left(\frac{2}{\varepsilon_1} - 1\right) \cdot t^2}.$$

Da nun $BL_1 = LP_1 = BL \cdot \sqrt{1 + n^2 s^2}$

und $BL_1 = \varepsilon_1 \cdot BC = \varepsilon_1 \cdot \frac{2}{3} BL$ ist,

so folgt: $\varepsilon_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{BL_1}{BL} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{1 + n^2 s^2}$,

also $\frac{2}{\varepsilon_1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 s^2}}$,

$$\frac{2}{\varepsilon_1} = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} n^2 s^2 + \frac{3}{8} n^4 s^4 - \frac{5}{16} n^6 s^6 + \frac{35}{128} n^8 s^8 - \cdots\right)$$

$$= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} n^2 s^2 + \frac{1}{2} n^4 s^4 - \frac{5}{12} n^6 s^6 + \frac{35}{96} n^8 s^8 - \cdots.$$

$$\frac{2}{\varepsilon_1} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} n^2 s^2 + \frac{1}{2} n^4 s^4 - \frac{5}{12} n^6 s^6 + \frac{35}{96} n^8 s^8 - \cdots.$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{8}{27} n^2 t^2 + \frac{8}{81} n^4 t^4 - \frac{80}{2187} n^6 t^6 + \frac{280}{19683} n^8 t^8 - \cdots;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1+\left(\frac{2}{\varepsilon_1}-1\right)t^2=1+\frac{1}{3}t^2-\frac{8}{27}n^2t^4+\frac{8}{81}n^4t^6-\frac{80}{2187}n^6t^8+\frac{280}{19683}n^8t^{10}-\cdots;$$

$$AN_1=\frac{8t}{1+\frac{1}{3}t^2-\frac{8}{27}n^2t^4+\frac{8}{81}n^4t^6-\frac{80}{2187}n^6t^8+\frac{280}{19683}n^8t^{10}-\cdots}.$$

Nun ist: $$\varphi=\frac{8t}{1+\frac{1}{3}t^2-\frac{4}{45}t^4+\frac{44}{945}t^6-\frac{428}{14175}t^8+\frac{10196}{467775}t^{10}-\cdots};$$

$$\frac{8t}{\varphi}-\frac{8t}{AN_1}=\left(-\frac{4}{45}+\frac{8}{27}n^2\right)t^4+\left(\frac{44}{945}-\frac{8}{81}n^4\right)t^6$$
$$+\left(-\frac{428}{14175}+\frac{80}{2187}n^6\right)t^8+\left(\frac{10196}{467775}-\frac{280}{19683}n^8\right)t^{10}+\cdots$$

$$\frac{AN_1-\varphi}{AN_1\cdot\varphi}=\left(-\frac{1}{90}+\frac{1}{27}n^2\right)t^3+\left(\frac{11}{1890}-\frac{1}{81}n^4\right)t^5$$
$$+\left(-\frac{107}{28350}+\frac{10}{2187}n^6\right)t^7+\left(\frac{2549}{935550}-\frac{35}{19683}n^8\right)t^9+\cdots$$

oder abgekürzt: $\frac{AN_1-\varphi}{AN_1\cdot\varphi}=T$, also $AN_1-\varphi=AN_1\cdot\varphi\cdot T$,

$$AN_1=\frac{\varphi}{1-\varphi T}=\varphi(1+\varphi T+\varphi^2T^2+\varphi^3T^3+\cdots)$$

$$AN_1-\varphi=\varphi^2T+\varphi^3T^2+\varphi^4T^3+\cdots,$$

oder $$AN_1-\varphi=\varphi^2T+\frac{1}{\varphi}\cdot(\varphi^2T)^2+\frac{1}{\varphi^2}(\varphi^2T)^3+\cdots,$$

oder $$AN_1-\varphi=\varphi^2T,$$

da wegen der Kleinheit von T die übrigen Glieder so gut wie gar nicht in Betracht kommen.

Hiernach ist folgende Tabelle entworfen, in welcher der Fehler $AN_1-\varphi$ zur Vermeidung der vielen Nullen in Millionsteln des Radius ausgedrückt ist:

φ	$n=o$	$n=\frac{1}{2}$	$n=\sqrt{\frac{3}{10}}$	$n=\frac{6}{11}$	$n=\cos\sigma\cdot\sqrt{\frac{3}{10}}$
90°	— 211,377	— 32,191	+ 3,510	+ 1,741	— 0,1892
75°	— 84,473	— 13,240	+ 0,969	+ 0,265	— 0,0507
60°	— 27,553	— 4,418	+ 0,202	— 0,0275	— 0,0103
45°	— 6,515	— 1,063	+ 0,0267	— 0,0273	— 0,0013
30°	— 0,856	— 0,141	+ 0,0016	— 0,0055	— 0,00008
15°	— 0,027	— 0,004	+ 0,00001	— 0,0002	— 0,0000006

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von diesen fünf Konstruktionsarten kann die erste, die den Näherungswert AN liefert, besonders für Bogen von 0° bis 45° schon völlig ausreichen; die fünfte ist die genaueste, doch ist für die praktische Anwendung, wenn sehr strenge Anforderungen gestellt werden, wohl am meisten die vierte zu empfehlen, da sie zu der ersten Art nur eine sehr leichte Ergänzung verlangt und so genau ist, dass der Fehler für alle Bogen von 0° bis 60° kleiner als drei Hundertmillionstel des Radius ist und selbst bei 90° noch weniger als zwei Millionstel desselben oder drei Achtel einer Bogensekunde beträgt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II.

Teilung von Kreisbogen.

In der Abhandlung zum Programm der Rostocker Stadtschule vom Jahre 1894 wurde folgendes Näherungsverfahren zur Teilung von Kreisbogen angegeben: „Soll der n^{te} Teil eines Kreisbogens, dessen Mittelpunkt M ist, gefunden werden, so schneidet man von der Sehne AB den n^{ten} Teil AF ab und von dem Radius AM den Teil $AG = \frac{3}{n+1} \cdot AM$, zieht sodann GF, welche den Kreisbogen in E schneidet, so ist angenähert AE der n^{te} Teil des Bogens AB.“ Dies sehr einfache Verfahren ist für alle Kreisbogen von 0° bis 30° genau genug, da der Fehler bis dahin kaum 5 Bogensekunden beträgt, gibt aber für Bogen von 30° bis 60° schon so bedeutende Abweichungen, dass es geratener erscheint, solche Winkel erst zu halbieren, ihre Hälfte zu teilen und den Teil dann zu verdoppeln. Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie man durch eine kurze und leichte Hülfskonstruktion diesem Mangel abhelfen kann, so dass für alle Bogen von 0° bis 60° der Fehler stets kleiner als 6 Bogensekunden bleibt. Bei dem oben angegebenen einfachsten Verfahren bestimmt sich der Fehler als der Unterschied des Bogens AE von dem n^{ten} Teil des Bogens $AB = 2\varphi$, beträgt also $\angle AME - \frac{2}{n}\varphi$, wenn der Kreisradius gleich Eins gesetzt wird. Nun ist (s. Figur III) $\angle AME = AGE - GEM = \gamma - \varepsilon$, und wenn man GH parallel MC zieht und $\angle EGH = \delta$ setzt, so ist $\angle AGH = AMC$, also $\gamma + \delta = \varphi$.

$$\text{Ferner ist} \quad AH = \frac{3}{n+1} \cdot AC$$

$$\text{und} \quad AF = \frac{2}{n} AC,$$

$$\text{also:} \quad AH - AF = FH = \frac{n-2}{n(n+1)} AC,$$

$$\text{und da} \quad GH = \frac{3}{n+1} \cdot MC,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{so folgt:}\quad \frac{FH}{GH}=\frac{n-2}{3n}\cdot\frac{AC}{MC},$$

$$\text{oder:}\quad tang\,\delta=\frac{n-2}{3n}\cdot tang\,\varphi,$$

$$\text{oder, wenn}\quad \frac{n-2}{3n}=r \text{ und } tang\,\varphi=\tau \text{ gesetzt wird,}$$

$$tang\,\delta=r\cdot\tau,$$

$$\text{also 1)}\quad tg\,\gamma=tg\,(\varphi-\delta)=\frac{tang\,\varphi-tang\,\delta}{1+tang\,\varphi\,tang\,\delta}=\frac{\tau-r\tau}{1+r\tau}.$$

$$\text{Nun ist}\quad \frac{sin\,\varepsilon}{sin\,\gamma}=\frac{MG}{ME}=\frac{MG}{MA}=\frac{n-2}{n+1},$$

$$\text{also}\quad sin\,\varepsilon=\frac{n-2}{n+1}\cdot sin\,\gamma,\ \text{oder, da } n=\frac{2}{1-3r}\text{ ist,}$$

$$2)\quad sin\,\varepsilon=\frac{2r}{1-r}\cdot sin\,\gamma.$$

Man müsste also in jedem besonderen Falle aus der ersten Gleichung γ und aus der zweiten ε berechnen, um den Unterschied $\gamma-\varepsilon$ zu finden; dies lässt sich jedoch vermeiden durch folgende Reihenentwicklungen:

$$\text{Da}\quad \delta=r\tau-\frac{1}{3}r^3\tau^3+\frac{1}{5}r^5\tau^5-\frac{1}{7}r^7\tau^7+\frac{1}{9}r^9\tau^9-\frac{1}{11}r^{11}\tau^{11}+\cdots$$

$$\text{und}\quad \varphi=\tau-\frac{1}{3}\tau^3+\frac{1}{5}\tau^5-\frac{1}{7}\tau^7+\frac{1}{9}\tau^9-\frac{1}{11}\tau^{11}+\cdots$$

$$\text{so ist}\quad \gamma=\varphi-\delta=(1-r)\tau-\frac{1}{3}(1-r^3)\tau^3+\frac{1}{5}(1-r^5)\tau^5-\frac{1}{7}(1-r^7)\tau^7$$

$$+\frac{1}{9}(1-r^9)\tau^9-\frac{1}{11}(1-r^{11})\tau^{11}+\cdots.$$

$$\text{Aus der Gleichung}\quad tang\,\gamma=\frac{\tau-r\tau}{1+r\tau^2}\text{ folgt:}$$

$$sin\,\gamma=\frac{(1-r)\tau}{\sqrt{1+(1+r^2)\tau^2+r^2\tau^4}}=(1-r)\cdot F,$$

$$\text{wenn}\quad F=\frac{\tau}{\sqrt{1+(1+r^2)\tau^2+r^2\tau^4}}\text{ gesetzt wird.}$$

$$\text{Da nun}\quad sin\,\varepsilon=\frac{2r}{1-r}\cdot sin\,\gamma\text{ ist,}$$

$$\text{so folgt:}\quad sin\,\varepsilon=2r\cdot F.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Nun ist} \quad \varepsilon = \sin\varepsilon + \frac{1}{6}\sin\varepsilon^3 + \frac{3}{40}\sin\varepsilon^5 + \frac{5}{112}\sin\varepsilon^7$$

$$+ \frac{35}{1152}\sin\varepsilon^9 + \frac{63}{2816}\sin\varepsilon^{11} + \cdots,$$

$$\text{also:} \quad \varepsilon = 2\,r\,F + \frac{4}{3}r^3F^3 + \frac{12}{5}r^5F^5 + \frac{40}{7}r^7F^7$$

$$+ \frac{140}{9}r^9F^9 + \frac{504}{11}r^{11}F^{11} + \cdots$$

Durch Reihenentwicklung folgt für die Potenzen von F:

$$F = \tau - \frac{1}{2}(1+r^2)\tau^3 + \frac{1}{8}(3+2r^2+3r^4)\tau^5 - \frac{1}{16}(5+3r^2+3r^4+5r^6)\tau^7$$

$$+ \frac{1}{128}(35+20r^2+18r^4+20r^6+35r^8)\tau^9 - \frac{1}{256}(63+35r^2+30r^4+30r^6+35r^8+63r^{10})\tau^{11} + \cdots,$$

$$F^3 = \tau^3 - \frac{3}{2}(1+r^2)\tau^5 + \frac{1}{8}(15+18r^2+15r^4)\tau^7 - \frac{1}{16}(35+45r^2+45r^4+35r^6)\tau^9$$

$$+ \frac{1}{128}(315+420r^2+450r^4+420r^6+315r^8)\tau^{11} + \cdots,$$

$$F^5 = \tau^5 - \frac{5}{2}(1+r^2)\tau^7 + \frac{1}{8}(35+50r^2+35r^4)\tau^9 - \frac{1}{16}(105+175r^2+175r^4+105r^6)\cdot\tau^{11} + \cdots$$

$$F^7 = \tau^7 - \frac{7}{2}(1+r^2)\tau^9 + \frac{1}{8}(63+98r^2+63r^4)\tau^{11} - \cdots,$$

$$F^9 = \tau^9 - \frac{9}{2}(1+r^2)\tau^{11} - \cdots\cdots$$

$$F^{11} = \tau^{11}\cdots$$

Diese Werte in die letzte Gleichung für ε eingesetzt geben:

$$\varepsilon = 2\,r\,\tau - \left(r - \frac{1}{3}r^3\right)\tau^3 + \left(\frac{3}{4}r - \frac{3}{2}r^3 + \frac{23}{20}r^5\right)\tau^5 - \left(\frac{5}{8}r - \frac{17}{8}r^3 + \frac{27}{8}r^5 - \frac{89}{56}r^7\right)\tau^7$$

$$+ \left(\frac{35}{64}r - \frac{125}{48}r^3 + \frac{225}{32}r^5 - \frac{135}{16}r^7 + \frac{2123}{576}r^9\right)\tau^9$$

$$- \left(\frac{63}{128} - \frac{385}{128}r^3 + \frac{743}{64}r^5 - \frac{1485}{64}r^7 + \frac{2835}{128}r^9 - \frac{11063}{1408}r^{11}\right)\tau^{11} + \cdots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist $\gamma = (1-r)\tau - \frac{1}{3}(1-r^3)\tau^3 + \frac{1}{5}(1-r^5)\tau^5 - \frac{1}{7}(1-r^7)\tau^7$

$$+\frac{1}{9}(1-r^9)\tau^9 - \frac{1}{11}(1-r^{11})\tau^{11} + \cdots,$$

also $\gamma - \varepsilon = (1-3r)\tau + (-\frac{1}{3}+r)\tau^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{3}{4}r + \frac{3}{2}r^3 - \frac{27}{20}r^5\right)\tau^5$

$$+(-\frac{1}{7}+\frac{5}{8}r-\frac{17}{8}r^3+\frac{27}{8}r^5-\frac{81}{56}r^7)\tau^7$$

$$+\left(\frac{1}{9}-\frac{35}{64}r+\frac{125}{48}r^3-\frac{225}{32}r^5+\frac{135}{16}r^7-\frac{243}{64}r^9\right)\tau^9$$

$$+(-\frac{1}{11}+\frac{63}{128}r-\frac{385}{128}r^3-\frac{743}{64}r^5-\frac{1485}{64}r^7+\frac{2835}{128}r^9-\frac{10935}{1408}r^{11})\tau^{11}+\cdots$$

Nun ist $\frac{2}{n}\varphi = (1-3r)\varphi = (1-3r)(\tau - \frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{5}\tau^5 - \frac{1}{7}\tau^7 + \frac{1}{9}\tau^9 - \frac{1}{11}\tau^{11} + \cdots)$

$$= (1-3r)\tau + (-\frac{1}{3}+r)\tau^3 + \left(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}r\right)\tau^5 + \left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{7}r\right)\tau^7$$

$$+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}r\right)\tau^9 + (-\frac{1}{11}+\frac{3}{11}r)\tau^{11} + \cdots,$$

also $(\gamma-\varepsilon) - \frac{2}{n}\varphi = (-\frac{3}{20}r + \frac{3}{2}r^3 - \frac{27}{20}r^5)\tau^5$

$$+\left(\frac{11}{56}r-\frac{17}{8}r^3+\frac{27}{8}r^5-\frac{81}{56}r^7\right)\tau^7$$

$$+(-\frac{41}{192}r+\frac{125}{48}r^3-\frac{225}{32}r^5+\frac{135}{16}r^7-\frac{243}{64}r^9)\tau^9$$

$$+\left(\frac{309}{1408}r-\frac{385}{128}r^3+\frac{743}{64}r^5-\frac{1485}{64}r^7+\frac{2835}{128}r^9-\frac{10935}{1408}r^{11}\right)\tau^{11}+\cdots$$

$$= r\cdot(1-r^2)(1-9r^2)\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{20}\tau^5 + \frac{11-9r^2}{56}\tau^7 \\ -\frac{41-90r^2+81r^4}{192}\tau^9 \\ +\frac{309-1145r^2+2115r^4-1215r^6}{1408}\tau^{11} \\ -\cdots \end{array}\right\}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$= r \cdot (1 - r^2)(1 - 9r^2) \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3}{20}\varphi^5 - \frac{3 + 9r^2}{56} \cdot \varphi^7 \\ -\frac{7 - 30r^2 + 135r^4}{320}\varphi^9 \\ -\frac{3931 - 30177r^2 - 104895r^4 + 382725r^6}{443520}\varphi^{11} \\ - \ldots \end{array} \right\}$$

$$= -\frac{4(n^2-1)(n-2)(2n-1)}{45n^5} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{10(n^2 - n + 1)}{21n^2}\varphi^2 \\ + \frac{n^4 + 5n^2 - 10n + 5}{9n^4} \cdot \varphi^4 \\ + \frac{\left\{ \begin{array}{l} -6n^6 + 546n^5 - 406n^4 - 1330n^3 \\ + 3290n^2 - 3150n + 1050 \end{array} \right\}}{2079n^6}\varphi^6 \\ + \ldots \end{array} \right\}$$

Hiernach ist folgende, die Fehler in Bogensekunden angebende Tabelle berechnet:

2φ	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
15°	−0″,117	−0″,146	−0″,147	−0″,140	−0″,132	−0″,123
20°	−0″,494	−0″,616	−0″,62	−0″,60	−0″,558	−0″,520
25°	−1″,52	−1″,89	−1″,92	−1″,84	−1″,72	−1″,60
30°	−3″,81	−4″,75	−4″,81	−4″,60	−4″,31	−4″,01
35°	−8″,31	−10″,37	−10″,49	−10″,03	−9″,42	−8″,77
40°	−16″,38	−20″,42	−20″,70	−19″,80	−18″,56	−17″,32
45°	−29″,89	−37″,32	−37″,81	−36″,17	−33″,93	−31″,65
50°	−51″,36	−64″,15	−65″,00	−62″,18	−58″,36	−54″,45
55°	−84″,05	−105″,03	−106″,45	−101″,85	−95″,61	−89″,23
60°	−132″,18	−165″,26	−167″,55	−160″,37	−150″,57	−140″,53

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2φ	$n=9$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
15°	— 0″,115	— 0″,107	— 0″,062	— 0″,027	— 0″,014
20°	— 0″,51	— 0″,453	— 0″,263	— 0″,114	— 0″,059
25°	— 1″,49	— 1″,39	— 0″,81	— 0″,352	— 0″,202
30°	— 3″,75	— 3″,50	— 2″,04	— 0″,88	— 0″,45
35°	— 8″,18	— 7″,64	— 4″,45	— 1″,93	— 0″,99
40°	— 16″,14	— 15″,08	— 8″,79	— 4″,82	— 1″,96
45°	— 29″,51	— 27″,56	— 16″,08	— 6″,99	— 3″,59
50°	— 50″,78	— 47″,42	— 27″,68	— 12″,04	— 6″,87
55°	— 83″,22	— 77″,74	— 45″,37	— 19″,76	— 10″,14
60°	— 131″,09	— 122″,42	— 71″,55	— 31″,16	— 16″,01

Die bedeutenden Fehler zwischen 30° und 60° lassen sich durch folgende Hülfskonstruktion bis auf höchstens 6 Bogensekunden verringern:

Man beschreibt mit MC um M einen Kreisbogen, der MB in K, und mit AK um A einen Kreisbogen, der den Bogen AB in L schneidet. Auf AL macht man $AF_1 = AF$ und zieht, statt früher GF, jetzt GF_1, welche den Kreis in E_1 schneidet, so ist der Bogen AE_1 ein weit genauerer Näherungswert als AE.

Macht man nämlich $AH = \frac{1}{2} AL$ und zieht MH,

$$\text{so ist} \quad AL^2 = AK^2 = AM^2 + MK^2 - 2\, AM \cdot MK \cdot \cos AMK$$

$$= 1 + \cos\varphi^2 - 2 \cdot 1 \cdot \cos\varphi \cdot \cos 2\varphi,$$

$$AH = \frac{1}{2} AL = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \cos\varphi^2 - 2 \cos\varphi \cos 2\varphi},$$

$$MH = \sqrt{1 - AH^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - AL^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3 - \cos\varphi^2 + 2 \cos\varphi \cos 2\varphi}.$$

$$\text{Nun ist} \quad \sin GAF_1 = \sin MAH = MH,$$

$$\cos GAF_1 = \cos MAH = AH,$$

$$AF = AF_1 = \frac{2}{n} \sin\varphi \quad \text{und} \quad AG = \frac{3}{n+1},$$

$$\tan AGF_1 = \frac{AF_1 \cdot \sin GAF_1}{AG - AF_1 \cdot \cos GAF_1} = \frac{AF \cdot MH}{AG - AF \cdot AH}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{oder } tang\, AGE_1 = \frac{\frac{1}{n} sin\, \varphi \cdot \sqrt{3 - cos\, \varphi^2 + 2\, cos\, \varphi\, cos\, 2\, \varphi}}{\frac{3}{n+1} - \frac{1}{n} sin\, \varphi \sqrt{1 + cos\, \varphi^2 - 2\, cos\, \varphi\, cos\, 2\, \varphi}}$$

Ferner ist $MG = \frac{n-2}{n+1}$, also $sin\, ME_1 G = \frac{n-2}{n+1} \cdot sin\, MGE_1$,

$$\text{oder } sin\, ME_1 G = \frac{n-2}{n+1} \cdot sin\, AGE_1.$$

Hat man hieraus die Winkel $AGE_1 = \gamma_1$ und $ME_1 G = \varepsilon_1$ gefunden, so ist der Näherungswert

$$AME_1 = \gamma_1 - \varepsilon_1.$$

Wenn man diesen, ähnlich wie oben $\gamma - \varepsilon$, in eine nach Potenzen von φ fortschreitende Reihe entwickelt, so erhält man:

$$\gamma_1 - \varepsilon_1 = \frac{2}{n} \varphi + \frac{(n-2)(n-4)(-23\, n^2 - 28\, n + 16)}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot n^5} \varphi^5$$

$$+ \frac{5857\, n^6 - 18095\, n^5 - 9856\, n^4 + 28672\, n^3 - 28672\, n + 8192}{2^9 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot n^7} \varphi^7$$

$$+ \frac{\left\{ \begin{array}{l} 114703\, n^8 - 1351585\, n^7 + 904640\, n^6 + 686080\, n^5 - 1220608\, n^4 \\ - 860160\, n^3 + 3932160\, n^2 - 2947120\, n + 655360 \end{array} \right\}}{2^{14} \cdot 3^4 \cdot 5\, n^9} \varphi^9$$

$$+ \cdots$$

Diese Reihe enthält aber sehr grosse Zahlen, konvergiert auch für grössere Werte als $\varphi = 22\frac{1}{2}^0$ nicht ausreichend; es ist daher besonders für solche Werte die Einzelberechnung jedes Falles vorzuziehen. Von der wesentlichen Verbesserung der Genauigkeit durch die leichte Hülfskonstruktion kann man sich jedoch schon dadurch überzeugen, dass man $tang\, \gamma_1$ mit $tang\, \gamma$ und diese beiden mit $tang\, \gamma_0$ vergleicht, wo γ_0 denjenigen Winkel AGE_0 bezeichnet, für welchen genau Bogen $AE_0 = \frac{2}{n} \varphi$ ist.

Da für diesen $tang\, AME_0 = \frac{ME_0 \cdot sin\, AME_0}{ME_0 \cdot cos\, AME_0 - MG}$,

$$\text{so ist } tang\, \gamma_0 = \frac{sin \frac{2}{n} \varphi}{cos \frac{2}{n} \varphi - \frac{n-2}{n+1}}, \text{ während}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$tang\,\gamma = \frac{FJ}{GJ} = \frac{AF\cos\varphi}{AG - AF\sin\varphi} = \frac{\frac{2}{n}\sin\varphi\cdot\cos\varphi}{\frac{3}{n+1} - \frac{2}{n}\sin\varphi\cdot\sin\varphi}$$

$$= \frac{\sin 2\varphi}{\frac{3n}{n+1} - (1 - \cos 2\varphi)} = \frac{\sin 2\varphi}{\frac{2n-1}{n+1} + \cos 2\varphi}.$$

Da die drei Winkel γ_0, γ_1 und γ sehr wenig von einander verschieden sind, so folgt aus den Gleichungen

$$tg\,\gamma_1 - tg\,\gamma_0 = tg\,(\gamma_1 - \gamma_0)\,(1 + tg\,\gamma_1\,tg\,\gamma_0)$$

und $\quad tg\,\gamma - tg\,\gamma_0 = tg\,(\gamma - \gamma_0)\,(1 + tg\,\gamma\,tg\,\gamma_0),$

dass nahezu $\quad \dfrac{tg\,\gamma_1 - tg\,\gamma_0}{tg\,\gamma - tg\,\gamma_0} = \dfrac{tg\,(\gamma_1 - \gamma_0)}{tg\,(\gamma - \gamma_0)},$

oder, da $\gamma_1 - \gamma_0$ und $\gamma - \gamma_0$ sehr klein sind,

$\dfrac{tg\,\gamma_1 - tg\,\gamma_0}{tg\,\gamma - tg\,\gamma_0} = \dfrac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma - \gamma_0} = \dfrac{\sin\gamma_1 - \sin\gamma_0}{\sin\gamma - \sin\gamma_0}$ gesetzt werden kann.

Für $\dfrac{n-2}{n+1} = c$ ist nun nach dem Obigen $\sin\varepsilon = c\sin\gamma$; ebenso folgt für $ME_1G = \varepsilon_1$ und $ME_0G = \varepsilon_0$, dass $\sin\varepsilon_1 = c\cdot\sin\gamma_1$ und $\sin\varepsilon_0 = c\cdot\sin\gamma_0$ ist.

Da nun $\quad \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\sin(\varepsilon - \varepsilon_0)} = \dfrac{\sin\varepsilon_1\cdot\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon_1\cdot\sin\varepsilon_0}{\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon\cdot\sin\varepsilon_0}$

$$= \frac{c\sin\gamma_1\cdot\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon_1\cdot c\sin\gamma_0}{c\sin\gamma\cdot\cos\varepsilon_0 - \cos\varepsilon\cdot c\sin\gamma_0},$$

oder: $\quad \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\sin(\varepsilon - \varepsilon_0)} = \dfrac{\sin\gamma_1 - \frac{\cos\varepsilon_1}{\cos\varepsilon_0}\cdot\sin\gamma_0}{\sin\gamma - \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon_0}\cdot\sin\gamma_0},$

so ist nahezu: $\quad \dfrac{\sin(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\sin(\varepsilon - \varepsilon_0)} = \dfrac{\sin\gamma_1 - \sin\gamma_0}{\sin\gamma - \sin\gamma_0},$

oder: $\quad \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon - \varepsilon_0} = \dfrac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma - \gamma_0} = \dfrac{(\gamma_1 - \gamma_0) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{(\gamma - \gamma_0) - (\varepsilon - \varepsilon_0)},$

oder: $\quad \dfrac{\gamma_1 - \gamma_0}{\gamma - \gamma_0} = \dfrac{(\gamma_1 - \varepsilon_1) - (\gamma_0 - \varepsilon_0)}{(\gamma - \varepsilon) - (\gamma_0 - \varepsilon_0)},$

oder: $\quad \dfrac{tg\,\gamma_1 - tg\,\gamma_0}{tg\,\gamma - tg\,\gamma_0} = \dfrac{(\gamma_1 - \varepsilon_1) - \frac{2}{n}\varphi}{(\gamma - \varepsilon) - \frac{2}{n}\varphi}.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist $(\gamma - \varepsilon) - \frac{2}{n}\varphi = F$ der Fehler der ursprünglichen, $(\gamma_1 - \varepsilon_1) - \frac{2}{n}\varphi = F_1$ der Fehler der verbesserten Methode; es verhalten sich daher diese Fehler zu einander wie die Unterschiede der Tangenten $tg\,\gamma$ und $tg\,\gamma_1$ von dem wahren Werte $tg\,\gamma_0$, oder wegen der Kleinheit der Unterschiede wie diejenigen der zugehörigen Logarithmen.

Beispielsweise ist für $n = 3$ und $2\varphi = 60^0$

$$\begin{array}{r|r} lg\,tg\,\gamma = 9{,}6944925 & lg\,tg\,\gamma_1 = 9{,}6953748 \\ lg\,tg\,\gamma_0 = \underline{9{,}6953961} & lg\,tg\,\gamma_0 = \underline{9{,}6953961} \\ lg\,tg\,\gamma - lg\,tg\,\gamma_0 = -0{,}0009036 & lg\,tg\,\gamma_1 - lg\,tg\,\gamma_0 = -0{,}0000213 \end{array}$$

Da nun $F = -132'',18$ ist, so folgt

$$F_1 = -132'',18 \cdot \frac{213}{9036} = -3'',12,$$ genau übereinstimmend mit der direkten Berechnung aus $tg\,\gamma_1$ und $sin\,\varepsilon_1$.

Folgende Tabelle gibt eine Übersicht der für den Fehler der verbesserten Methode

$$F_1 = (\gamma_1 - \varepsilon_1) - \frac{2}{n}\varphi$$

sich ergebenden Werte in Bogensekunden.

2φ	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
15^0	$+0'',012$	$+0'',0003$	$-0'',007$	$-0'',010$	$-0'',012$	$-0'',013$
20^0	$+0'',048$	$+0'',002$	$-0'',027$	$-0'',042$	$-0'',049$	$-0'',054$
25^0	$+0'',16$	$+0'',009$	$-0'',077$	$-0'',122$	$-0'',143$	$-0'',153$
30^0	$+0'',32$	$+0'',029$	$-0'',175$	$-0'',28$	$-0'',33$	$-0'',357$
35^0	$+0'',63$	$+0'',076$	$-0'',34$	$-0'',55$	$-0'',66$	$-0'',71$
40^0	$+1'',04$	$+0'',160$	$-0'',55$	$-0'',95$	$-1'',16$	$-1'',26$
45^0	$+1'',42$	$+0'',293$	$-0'',83$	$-1'',50$	$-1'',86$	$-2'',007$
50^0	$+1'',46$	$+0'',427$	$-1'',15$	$-2'',16$	$-2'',69$	$-2'',97$
55^0	$+0'',39$	$+0'',421$	$-1'',50$	$-2'',85$	$-3'',43$	$-4'',02$
60^0	$-3'',12$	$-0'',125$	$-1'',95$	$-3'',50$	$-4'',49$	$-5'',04$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

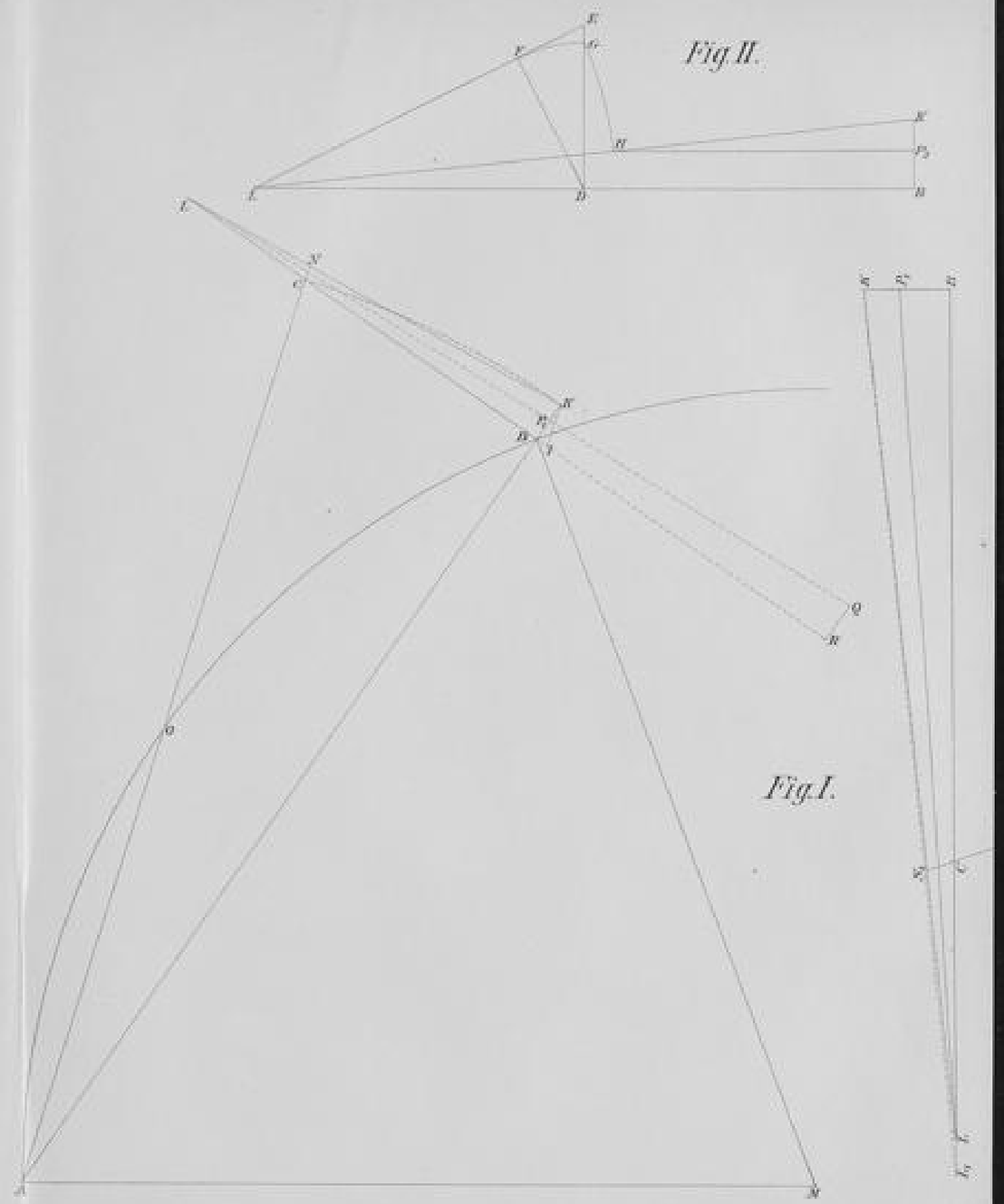
2φ	$n=9$	$n=10$	$n=20$	$n=50$	$n=100$
15°	— 0″,013	— 0″,013	— 0″,0093	— 0″,0044	— 0″,0023
20°	— 0″,053	— 0″,053	— 0″,038	— 0″,018	— 0″,009
25°	— 0″,156	— 0″,154	— 0″,112	— 0″,053	— 0″,028
30°	— 0″,364	— 0″,363	— 0″,264	— 0″,126	— 0″,067
35°	— 0″,730	— 0″,729	— 0″,536	— 0″,257	— 0″,136
40°	— 1″,29	— 1″,30	— 0″,97	— 0″,48	— 0″,25
45°	— 2″,09	— 2″,10	— 1″,59	— 0″,77	— 0″,44
50°	— 3″,08	— 3″,13	— 2″,39	— 1″,15	— 0″,61
55°	— 4″,21	— 4″,27	— 3″,32	— 1″,64	— 0″,94
60°	— 5″,29	— 5″,39	— 4″,27	— 2″,11	— 1″,13

Eine ähnliche Verbesserung, wie die durch Drehung der Linie AF um A bis in die Lage AF_1 bewirkte, lässt sich auch durch andere Konstruktionen erreichen; doch sind dieselben weniger einfach als die beschriebene, welche nur das Zeichnen der zwei Kreisbogen CK und KL und der geraden Linie AL verlangt, auch ergeben sie für die besonders wichtigen Fälle $n=3$ und $n=5$ etwas grössere Abweichungen. Es wurde daher die Darstellung auf die eine Verbesserungsmethode beschränkt, welche leicht anzuwenden und bis 60° sehr genau ist, während es für grössere Bogen vorzuziehen wäre, deren Hälfte zu teilen und den gefundenen Teil zu verdoppeln.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



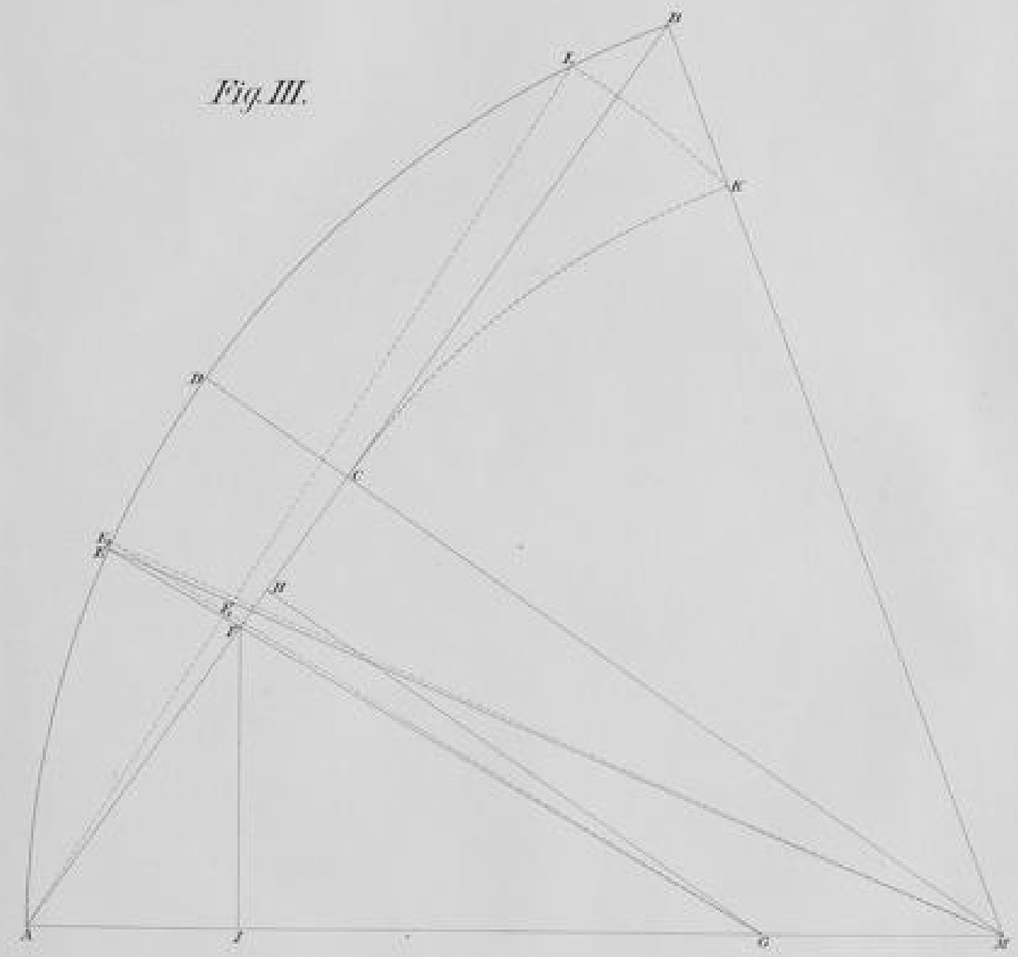
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. III.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. II

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf