Die entstehenden Grössen lassen sich nun folgendermaassen anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 3 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 4^{\mathrm{I}} & & 4^{\mathrm{II}} & & & & & & & & \\
 & & & & 5_1^{\mathrm{I}} & 5_2^{\mathrm{I}} & 5_3^{\mathrm{I}} & & 5_1^{\mathrm{II}} & 5_2^{\mathrm{II}} & 5_3^{\mathrm{II}} & & & & & & \\
 & 6_1^{\mathrm{I}_1} & 6_2^{\mathrm{I}_1} & 6_3^{\mathrm{I}_1} & 6_{4^{\mathrm{I}}}^{\mathrm{I}_1} & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_1} & & 6_1^{\mathrm{I}_2} \cdots & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_2} & \cdots & 6_1^{\mathrm{I}_3} \cdots ; & 6_1^{\mathrm{II}_1} \cdots & 6_1^{\mathrm{II}_2} \cdots & 6_1^{\mathrm{II}_3} \cdots & & \\
7_1^{\mathrm{I}_{1,1}} \cdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & 7_1^{\mathrm{II}_{1,1}} \cdots & & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Diese Anordnung lässt aber sofort erkennen, dass wir schliesslich in den Horizontalreihen eine unendliche Menge unendlicher Mengen erhalten. Die Menge der Mengen ist aber offenbar abzählbar und ebenso ist jede Teilmenge abzählbar. Also ist auch nach einem bekannten Satze der Mengenlehre die Menge der Grössen in der Horizontalreihe selbst abzählbar oder von der ersten Mächtigkeit.

Das Continuum zwischen $a_1$ und $a_2$ hat nun aber bekanntlich eine höhere Mächtigkeit: Also ist es unmöglich, jeder Zahl zwischen $a_1$ und $a_2$ eine der Ketten zuzuordnen.[18]

Sollten nun unter den Ketten solche sein, für die $\lim a_x$ nicht existiert, so können wir diese ausscheiden. Die übrig bleibende Menge ist endweder endlich oder unendlich von der ersten Mächtigkeit, keinesfalls von höherer.

Der Satz bleibt also bestehen und wir können noch einmal zusammenfassend die zweite Frage, wie folgt, beantworten:

> ***Es kann durch den Prozess des geometrischen Mittels nicht jede zwischen*** $a_1$ ***und*** $a_2$ ***liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden.***

Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall des geometrischen Mittels aus n Grössen bietet keine Schwierigkeit.

## Schluss.

Die vorliegende Arbeit scheint dem Verfasser nach zwei Richtungen hin Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen zu bieten. Einmal führt die im Paragraphen 5 vorkommende Bestimmung durch eine Differenzengleichung ***erster*** Ordnung, während im vorhergehenden Paragraphen eine solche ***zweiter*** Ordnung auftritt, auf den Begriff der Reducibilität der Differenzengleichungen.

Dann aber wird es von Interesse sein den Zusammenhang zu finden zwischen der hier gefundenen Annäherung einer kubischen Irrationalität durch quadratische mit den neueren Untersuchungen von Meyer[19] und Minkowski[20] besonders über die Annäherung kubischer und allgemein algebraischer Irrationalitäten durch kettenbruchartige Algorithmen.

[18]) Es ist nicht nötig ein-eindeutig hinzuzusetzen bei unserer Definition des Zuordnens.

[19]) Königsberg, phys.-ökon. Gesellschaft, Jahrg. 38, S. 57.

[20]) Göttinger Nachr. 1899, S. 64. Vergl. auch Encyclopädie I C 3, S. 688.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf