§ 1.

Das arithmetisch-geometrische und das geometrisch-harmonische Mittel.

Die unendlichen Prozesse der Mittelbildung sind für andere Mittel aus der Litteratur schon bekannt. Hier muss vor allen Dingen das »arithmetisch-geometrische Mittel« genannt werden, das Gauss eingeführt hat. Es ist folgendermaassen definiert: Sind m und n zwei positive Grössen, so werde gesetzt

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n) \quad n' = \sqrt{m \cdot n}$$

dann bilde man weiter

$$m'' = \tfrac{1}{2}(m'+n') \quad n'' = \sqrt{m' \cdot n'}$$

und so fort. Gauss zeigt, dass die m und die n schnell derselben Grenze μ sich nähern. Nur wenig hat Gauss darüber veröffentlicht. Es erscheint dieses arithmetisch-geometrische Mittel μ in einer Arbeit[3] aus der Störungstheorie vom Jahre 1818. Der Nachlass[4] bestätigt aber, was Gauss in der Selbstanzeige jener Arbeit in den Göttingenschen Gelehrten Anzeigen schreibt: »Da diese Integrale (auf die das Störungsproblem führt. Anm. d. Verf.) transcendenter Natur sind und bekannter Maassen mit anderen in der Perturbationsrechnung vorkommenden vielbehandelten Transcendenten zusammenhängen, so konnte die Auflösung, nachdem sie bis auf diesen Punkt geführt war, als vollendet angesehen werden. Der Verfasser hat dagegen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines neuen Algorithmus zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transcendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird«. Diese Untersuchung ist nicht erschienen, weil bald darauf Abel im Crelleschen Journal seine Arbeiten über elliptische Funktionen veröffentlichte — um diese Funktionen handelt es sich nämlich — Arbeiten, von denen Gauss in einem Briefe schreibt, dass sie von seinen eigenen Untersuchungen wohl $\frac{1}{3}$ vorweggenommen haben. Eine Veröffentlichung dieser hielt er daher für überflüssig, wie er Crelle mitteilte, zumal »Abel grossen Scharfsinn und auch Eleganz in seiner Arbeit zeigte«.

Das arithmetisch-geometrische Mittel wurde von Borchard[5] auf mehr als zwei Grössen ausgedehnt.

Die Untersuchungen von Gauss über das arithmetisch-geometrische Mittel sind auch der Ausgangspunkt der Arbeiten von Schapira[6] über »algebraische Iteration«.

Viel früher tritt das geometrisch-harmonische Mittel auf. Es erscheint bei einem englischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts, James Gregory, in einer Schrift: vera

[3]) Werke III S. 352. [4]) III 361 f. f.

[5]) Monatsberichte der Berl. Akad. 1876. Bulletin des Sciences Math., II. ser., vol I 1877. Abhandlungen der Berl. Akad. 1878.

[6]) Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, B. 8 S. 64 (Nekrolog für Schapira).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

circuli et hyperbolae quadratura. Dort findet sich der Satz: Werden einem Kreise, einer Ellipse oder einer Hyperbel Vielecke ein- und umbeschrieben, deren Seitenzahl fortwährend wächst, und ist A_1 der Inhalt des ersten Sehnenvielecks, B_1 des ersten Tangentenvielecks, A_n des n ten Sehnenvielecks und B_n der Inhalt des n ten Tangentenvielecks, dann ist:

$$A_n = \frac{2A_{n-1} \cdot B_{n-1}}{A_{n-1} + B_{n-1}} \qquad B_n = \sqrt{A_{n-1} \cdot B_{n-1}}$$ [7) und 8)]

Es bildet sich, wie es in der Vorrede heisst: eine »Series polygonorum convergens, cuius terminatio est circulus«.

Cantor bemerkt an dieser Stelle, dass wir heute die Grenze derartiger unendlicher Processe eine »Transcendente« nennen. Das arithmetisch-geometrische Mittel und das geometrisch-harmonische Mittel liefert allerdings allgemein eine transcendente Grösse. Dagegen definiert, wie die vorliegende Arbeit zeigen wird, das geometrische Mittel allein eine algebraische Irrationalität.

Dem arithmetisch-geometrischen Mittel und dem geometrisch-harmonischen ist gemeinsam die Combination verschiedenartiger Mittel, während in dem in dieser Arbeit behandelten Prozesse nur ein Mittel, das geometrische, zu Grunde gelegt wird. Sehr nahe liegend ist die Frage nach dem entsprechend gebildeten arithmetischen Mittel, dessen Algorithmus also durch die Formel

$$a_x = \frac{a_{x-1} + a_{x-2}}{2}$$

gegeben ist, zumal dieser Prozess des arithmetischen Mittels parallel läuft der Bildung des geometrischen Mittels bei der in der Einleitung erwähnten Logarithmenberechnung.

Das arithmetische Mittel ist nun allgemein schon behandelt in der Differenzenrechnung von Markoff. Man betrachtet heute Rekursionsformeln wie die obige oder wie die allgemeine

$$a_x = \frac{1}{n}(a_{x-1} + a_{x-2} + \cdot \cdot \cdot a_{x-n})$$

durch die also die Glieder einer wiederkehrenden Reihe im älteren Sprachgebrauch definiert werden, von dem allgemeinen Standpunkt der Differenzengleichungen. Auch in dieser Arbeit soll die Theorie der Differenzengleichungen benutzt werden. Der nächste Abschnitt bringt daher das nötige aus jener Theorie.

§ 2.

Lineare Differenzengleichungen. [9)]

Unter einer Differenzengleichung versteht man allgemein eine Gleichung, die besteht zwischen der unabhängigen Veränderlichen x, einer unbekannten Funktion f(x) und den endlichen Differenzen dieser Funktion. Die endlichen Differenzen sind aber bekanntlich definiert durch:

---

[7]) Cantor, Geschichte der Math., II., 655.

[8]) Der Verfasser wurde durch Herrn Prof. Wangerin darauf aufmerksam gemacht, dass früher auf dem Gymnasium dieser Satz zur Kreisberechnung benutzt wurde. In der That findet er sich auch in älteren guten Büchern wie Baltzer, Heiss, Gallenkamp. Dagegen scheint er in die neueren Bücher nicht übergegangen zu sein.

[9]) Vergl. Markoff, Differenzenrechnung (deutsch von Friesendorff u. Prümm), Cap. XI u. XIII.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{array}{l} \Delta\, f(x) = f(x+h) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Hierbei bedeutet h eine endliche Grösse, die wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gleich 1 setzen können. Wenn wir dann noch zur Abkürzung für $f(x+\nu)$ schreiben $y_{x+\nu}$, so können wir allgemein eine Differenzengleichung darstellen in der Form:

$$\psi(x_1\, y_x\, y_{x+1} \cdot \cdot \cdot y_{x+n}) = 0.$$

Eine solche Gleichung heisst von ***der n ten Ordnung,*** wenn y_x und y_{x+n} darin wirklich vorkommen.

In der vorliegenden Untersuchung erscheinen hauptsächlich nur homogene, lineare Differenzengleichungen mit constanten Coefficienten, d. h. Gleichungen folgender Gestalt:

$$a_0\, y_x + a_1\, y_{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n\, y_{x+n} = 0.$$

Die Coefficienten $a_0, a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ sind Constanten, die wir als reell voraussetzen; a_0 und a_n auch natürlich verschieden von Null.

Die Lösung einer derartigen Gleichung verlangt nun die Bestimmung der Funktion $y_x = f(x)$. Bilden wir schrittweise

$$y_{n+1} = \cdot \frac{1}{a_n}(a_{n-1}\, y_n + \cdot \cdot \cdot a_0\, y_1) = \varphi(y_1 \cdot \cdot \cdot y_n)$$

$$y_{n+2} = \varphi(y_2 \cdot \cdot \cdot y_{n+1}) = \varphi_1(y_1 \cdot \cdot \cdot y_n)$$

u. s. w.

so erkennen wir sofort:

Die Differenzengleichung hat unendlich viel Lösungen, die von den n *willkürlichen Anfangswerten* $y_1 \cdot \cdot \cdot y_n$ *abhängen.*

Sind nun $y_x^{(1)}\, y_x^{(2)} \ldots y_x^{(n)}$ n besondere von einander unabhängige Lösungen, so genügt offenbar jede lineare Combination dieser Lösungen mit constanten Coefficienten ebenfalls der Differenzengleichung. Denn setzen wir in diese ein

$$y_x = \sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda\, y_x^{(\lambda)},$$

unter $c_\lambda \cdot \cdot \cdot n$ willkürliche Constanten verstanden, und fassen die Glieder mit gleichem c_λ zusammen, so erhalten wir auf der linken Seite:

$$c_1 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(1)} + c_2 \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(2)} \cdot \cdot \cdot + c_n \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(n)}$$

Nun ist aber

$$\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(\lambda)} = 0 \qquad (\lambda = 1,\ 2 \cdot \cdot \cdot n)$$

Also ist in der That

$$\sum_{\lambda=1}^{n} c_\lambda \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\, y_{x+\nu}^{(\lambda)} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das heisst aber:

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung lässt sich durch n *partikuläre Lösungen* $y_x^{(\lambda)}$ *und* n *willkürliche Constanten* c_λ *darstellen in der Form:*

$$y_x = c_1 y_x^{(1)} + c_2 y_x^{(2)} + \cdot \cdot \cdot c_n y_x^{(n)}$$

Um nun partikuläre Lösungen zu erhalten, bilden wir die algebraische Gleichung, die dieselben Coefficienten hat, wie die Differenzengleichung; d. i. die Gleichung

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdot \cdot \cdot a_n z^n = 0.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit z^x, so folgt

$$a_0 z^x + a_1 z^{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n z^{x+n} = 0.$$

Ein Vergleich mit der Differenzengleichung

$$a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + \cdot \cdot \cdot a_n y_{x+n} = 0$$

zeigt, dass man $y_x = z^x$ setzen kann, wenn z eine Wurzel der »Beziehungsgleichung« ist. Den Ausdruck »Beziehungsgleichung« möchte ich gebrauchen im Anschluss an die Eulersche Bezeichnung »Beziehungsskala einer wiederkehrenden Reihe«. Erscheint doch in der früheren Behandlung der rekurrenten Reihen die ganze rationale Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdot \cdot \cdot a_n z^n$$

als Nenner der rationalen Funktion $F_{(z)} = \frac{1}{f(z)}$, deren Entwickelung nach Potenzen von z die y_x als Coefficienten auftreten lässt. Die Reihenfolge der Coefficienten $a_0\, a_1 \cdot \cdot \cdot a_n$ heisst aber bei Euler Beziehungsskala.

Die Wurzeln, die zunächst alle als von einander verschieden vorausgesetzt werden, seien nun $\zeta_1\ \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$.

Dann ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$\underline{y_x = c_1 \zeta_1^x + c_2 \zeta_2^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n^x.}$$

Der Fall, dass die Beziehungsgleichung mehrfache Wurzeln hat, kommt in den folgenden Anwendungen nicht vor, da von den betreffenden Gleichungen gezeigt wird, dass ihre Wurzeln alle verschieden sind. Es sollen daher hier nur an einem leicht verallgemeinerungsfähigen besonderen Falle aus den Wurzeln der Beziehungsgleichung n von einander unabhängige partikuläre Lösungen abgeleitet werden.

Es sei ζ_1 eine dreifache Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$. Dann müssen auch die beiden ersten Ableitungen von $f(z)$ für $z = \zeta_1$ verschwinden; das heisst: es müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned} f(\zeta_1) &= \quad a_0 + a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot a_n \zeta_1^n = 0 \\ f'(\zeta_1) &= a_1 + 2 a_2 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot n a_n \zeta_1^{n-1} = 0 \\ f''(\zeta_1) &= 2 a_2 + \cdot \cdot \cdot (n-1) n a_n \zeta_1^{n-2} = 0. \end{aligned}$$

Um die zweite und dritte dieser Gleichungen in formale Übereinstimmung zu bringen mit der ersten, fügen wir auf der rechten Seite die Glieder

$$\frac{0 \cdot a_0}{\zeta_1} \text{ bez. } \frac{0 \cdot a_0}{\zeta_1^2} + \frac{0 \cdot a_1}{\zeta_1}$$

zu, was erlaubt ist, da wegen der Voraussetzung $a_0 \lesseqgtr 0$ auch $|\zeta_1| \lesseqgtr 0$ ist. Aus dem gleichen Grunde ist es auch gestattet, die zweite Gleichung mit ζ_1, die dritte mit ζ_1^2 zu

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

multiplizieren. Man erhält dann also:

$$\zeta_1 f'(\zeta_1) = \quad 0 \cdot a_0 + a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot n a_n \zeta_1^n = 0$$
$$\zeta_1^2 f''(\zeta_1) = 0 \cdot a_0 + 0 \cdot a_1 \zeta_1 + \cdot \cdot \cdot n \cdot (n-1) \zeta_1^n = 0$$

Diese Form lässt erkennen, dass ausser ζ_1^x auch $x \zeta_1^x$ und $x \cdot (x-1) \zeta_1^x$ particuläre Lösungen sind. Will man kleinere Coefficienten haben, so empfiehlt es sich, die dritte Gleichung mit $\frac{1}{2!}$ zu multiplizieren. Die dritte partikuläre Lösung wird dann $\binom{x}{2} \zeta_1^x$.

Man erkennt sofort, wie im Falle einer ν fachen Wurzel ζ_1 aus dieser sich die ν particulären Lösungen ergeben:

$$\zeta_1^x, \ \binom{x}{1} \zeta_1^x, \cdot \cdot \cdot \binom{x}{\nu-1} \zeta_1^x$$

Es wäre jetzt noch zu beweisen, dass die Lösungen mit den $n - \nu$ übrigen ein System unabhängiger Lösungen bilden. Aus dem oben angegebenen Grunde übergehen wir hier diesen Beweis. Es sei nur bemerkt, dass die zum Beweise nötige Determinante weiter unten in anderem Zusammenhang behandelt werden wird.

§ 3.

Das arithmetische Mittel.

Ehe wir zum geometrischen Mittel übergehen, soll als erstes Beispiel einer Anwendung der Theorie der Differenzengleichungen das arithmetische Mittel benutzt werden. Dieses ist, wie oben erwähnt, schon von Markoff behandelt.[10] Indem wir die Markoffsche Lösung hier wiedergeben, wird sich Gelegenheit bieten, sie in einigen Punkten zu ergänzen. In dem einfachsten Fall des Mittels aus zwei Grössen lautet die Differenzengleichung in der Normalform:

$$y_x + y_{x+1} - 2 y_{x+2} = 0.$$

Die Wurzeln der Beziehungsgleichung sind

$$\zeta_1 = 1, \ \zeta_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Die allgemeine Lösung wird daher

$$y_x = c_1 + c_2 \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

Bestimmt man die Constanten c_1 und c_2 durch die Anfangswerte y_1 und y_2 mittels der Gleichungen

$$y_1 = c_1 - \tfrac{1}{2} c_2$$
$$y_2 = c_1 + \tfrac{1}{4} c_2$$

so erhält man als allgemeine Lösung der Differenzengleichung:

$$y_x = \frac{y_1 + 2 y_2}{3} + \frac{4(y_2 - y_1)}{3} \left(-\tfrac{1}{2}\right)^x$$

$$\text{Also } \lim_{x=\infty} y_x = \frac{y_1 + 2 y_2}{3}$$

Im Besonderen *liefert also der Process des arithmetischen Mittels aus den Zahlen* 0 *und* 1 *den Grenzwert* $\frac{2}{3}$.

Ohne zunächst näher auf dieses Resultat einzugehen — das wird erst weiter unten geschehen bei dem Vergleich mit dem geometrischen Mittel — wenden wir uns gleich zu dem allgemeinen Fall, dessen Algorithmus also definiert ist durch die Gleichung:

$$y_{x+n} = \tfrac{1}{n} (y_{x+n-1} + y_{x+n-2} + \cdot \cdot \cdot y_x).$$

[10]) M. Differenzenrechnung, S. 175.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder in der Normalform

$$y_x + y_{x+1} + \cdot \cdot \cdot y_{x+n-1} - n\, y_{x+n} = 0.$$

Hier lautet die Beziehungsgleichung

$$1 + z + z^2 + \cdot \cdot \cdot + z^{n-1} - n\, z^n = 0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist $\zeta_1 = 1$. Sind $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ die übrigen Wurzeln, so ist also die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = c_1 + c_2\, \zeta_2{}^x + \cdot \cdot \cdot c_n\, \zeta_n{}^x.$$

Zu diesem Ansatz ist man aber erst berechtigt, nachdem man sich überzeugt hat, dass die Beziehungsgleichung keine mehrfachen Wurzeln hat. Es ist diese Thatsache bei Markoff gar nicht erwähnt, vielmehr dort ohne weiteres die allgemeine Lösung in der obigen Form angegeben. Wir wollen daher zunächst beweisen, dass die Beziehungsgleichung

$$f(z) = z^n - \tfrac{1}{n} z^{n-1} - \tfrac{1}{n} z^{n-2} \cdot \cdot \cdot - \tfrac{1}{n} = 0$$

keine mehrfachen Wurzeln hat.

Es sei ζ eine mehrfache Wurzel, dann müssen folgende Gleichungen erfüllt sein:

(1) $$f(\zeta) = \zeta^n - \frac{1}{n}\zeta^{n-1} - \frac{1}{n}\zeta^{n-2} \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{n} = 0$$

(2) $$f'(\zeta) = \quad n\,\zeta^{n-1} - \frac{n-1}{n}\zeta^{n-2} \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{n} = 0$$

Die Subtraktion von (1) und (2) liefert:

(3) $$\zeta^n - \left(n + \frac{1}{n}\right)\zeta^{n-1} + \frac{n-2}{n}\zeta^{n-2} + \frac{n-3}{n}\zeta^{n-3} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n}\zeta = 0$$

Da ζ von Null verschieden ist, so ergiebt sich:

(4) $$\zeta^{n-1} - \left(n + \frac{1}{n}\right)\zeta^{n-2} + \frac{n-2}{n}\zeta^{n-3} + \frac{n-3}{n}\zeta^{n-4} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n} = 0.$$

Schliesslich erhält man durch Addition von (2) und (4)

(5) $$(n+1) \cdot [\zeta^{n-1} - \zeta^{n-2}] = 0$$

(6) $$\text{oder } (n+1) \cdot \zeta^{n-2} \cdot (\zeta - 1) = 0$$

Aus dieser letzten Gleichung ergiebt sich also, dass nur $\zeta = 1$ eine mehrfache Wurzel von (1) sein könnte. Da aber dieser Wert der Gleichung (2) nicht genügt, so ist damit die Einfachheit der Wurzeln bewiesen.

Man kann nun aber weiter zeigen, dass die Wurzeln $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ alle innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt liegen. Da bei Markoff es nur heisst, dass »man sich leicht davon überzeugt«, so soll ein Beweis hier gegeben werden.

Es sei $|z| > 1$, dann ist[11])

(1) $$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n\,z} + \frac{1}{n\,z^2} + \cdot \cdot \cdot \frac{1}{n\,z^{n-1}}\right| < \left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdot \cdot \cdot \frac{1}{n} = 1\right|$$

Nach dem bekannten Satze, dass der Modul der Summe absoluter Grössen nicht grösser ist als die Summe der Moduln, muss nämlich die Ungleichung bestehen:

$$\left|\frac{1}{n} + \frac{1}{n\,z} + \frac{1}{n\,z^2} + \cdot \cdot \cdot \frac{1}{n\,z^{n-1}}\right| \leq \left|\frac{1}{nz}\right| + \left|\frac{1}{nz}\right| \cdot \cdot \cdot + \left|\frac{1}{n\,z^{n-1}}\right|$$

[11]) Vergl. Weber Algebra I, erste Aufl., S. 318.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nun aber offenbar wegen $|z| > 1$

$$\left|\frac{1}{n z^{\lambda}}\right| < \frac{1}{n},$$

so folgt sofort die Richtigkeit der obigen Ungleichung (1).

Wir bilden uns jetzt die Funktion

$$\varphi(z) = z^{1-n} f(z) = z - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n z} \cdot \cdot \cdot + \frac{1}{n z^{n-1}}\right)$$

Für $|z| > 1$ kann, wie man sofort sieht, $\varphi(z)$ nicht verschwinden, denn nach der Ungleichung (1) ist dann der absolute Wert der Klammer auf der linken Seite kleiner als der absolute Wert von z. Folglich kann auch $f(z)$ für $|z| > 1$ nicht verschwinden; das heisst: ***die n Wurzeln $\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ sind dem absoluten Werte nach nicht grösser als 1.***

ζ_1 hat nun den Wert 1. Dieser Wert kann unter den übrigen Wurzeln nicht mehr vorkommen, da die Gleichung ja keine mehrfachen Wurzeln hat. Dagegen ist es denkbar, dass eine der Wurzeln den absoluten Wert 1 hat. Es sei z. B.

$$|\zeta_{\lambda}| = 1$$

Wir geben ζ_{λ} die Form $\zeta_{\lambda} = \cos\delta + i \sin\delta.$

Setzt man diesen Wert in die Beziehungsgleichung

$$f(z) = n z^{n} - z^{n-1} \cdot \cdot \cdot - 1 = 0$$

ein, so erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären folgende zwei Gleichungen, die gleichzeitig erfüllt sein müssen:

$$n \cos n\delta - \cos(n-1)\delta - \cdot \cdot \cdot - \cos\delta = 1$$

$$n \sin n\delta - \sin(n-1)\delta - \cdot \cdot \cdot - \sin\delta = 0$$

Quadriert man diese Gleichungen und addiert sie, so ergiebt sich mit Rücksicht auf das Additionstheorem und auf die Beziehung

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$n^2 + n - 2 = 2n \sum_{\nu=n-1}^{1} \cos\nu\delta - 2 \sum_{\nu=n-2}^{1} \cos\nu\delta \cdot \cdot \cdot - 2\cos\delta$$

oder:

$$n^2 + n - 2 = 2\,[n \cos(n-1)\delta + (n-1)\cos(n-2)\delta + \cdot \cdot \cdot 2\cos\delta].$$

Der auf der rechten Seite stehende Klammerausdruck erscheint nun genau so in dem reellen Bestandteil der Gleichung, der die Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ genügen, das heisst der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z-1} = n z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \cdot \cdot \cdot 1 = 0.$$

Setzt man hier $\zeta_{\lambda} = \cos\delta + i \sin\delta$ ein, so folgt

$$n \cos(n-1)\delta + (n-1)\cos(n-2)\delta \cdot \cdot \cdot + 2\cos\delta = -1.$$

Daraus ergiebt sich aber $n^2 + n = 0$

was unmöglich ist.

Also kann keine andere Wurzel den absoluten Wert 1 haben.

Oder die beiden Resultate vereinigt:

Die übrigen Wurzeln der Beziehungsgleichung liegen innerhalb des Einheitskreises um den Nullpunkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung

$$y_x = c_1 + c_2 \zeta_2{}^x + c_3 \zeta_3{}^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^x$$

verschwinden nun wegen $|\zeta| < 1$ mit wachsendem x alle Glieder bis auf das erste, und es bleibt also

$$\lim_{x=\infty} y_x = c_1$$

Es ist daher noch die Constante c_1 als Funktion der Anfangswerte zu bestimmen. Dazu dient das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= c_1 + c_2 \zeta_2 \quad + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n \\ y_2 &= c_1 + c_2 \zeta_2{}^2 + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^2 \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ &\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ y_n &= c_1 + c_2 \zeta_2{}^n + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n{}^n \end{aligned}$$

Zur Auflösung dieses Systems nach c_1 scheint zunächst die Kenntnis der übrigen Wurzeln nötig zu sein. Wir können aber hier, wie weiter unten bei dem geometrischen Mittel diese Constante auch ohne Kenntnis der anderen Wurzeln bestimmen. Hier ergiebt sich die Bestimmung wesentlich einfacher, als bei Markoff, wenn man die Gleichungen der Reihe nach mit 1, 2, · · · n multipliziert und addiert.[12] Man erhält dann sofort

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \lambda y_\lambda = \frac{n(n+1)}{2} c_1$$

Die übrigen Glieder rechts fallen alle fort; es ist nämlich

$$c_n \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \zeta_n{}^\lambda = c_n \zeta_n \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \zeta_n{}^{\lambda-1} = 0$$

wegen der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z-\zeta_1} = n z^{n-1} + (n-1) z^{n-2} + \cdot \cdot \cdot 1 = 0,$$

der die Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ genügen.

Es sei noch bemerkt, dass weiter unten beim geometrischen Mittel die entsprechende Constantenbestimmung auf einem anderen, auch von dem Markoffschen verschiedenen Wege geschieht.

So erhält man endlich:

$$\lim_{x=\infty} y_x = \frac{2 \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda y_\lambda}{n(n+1)}.$$

Man erkennt sofort in dieser allgemeinen Lösung die oben besonders berechnete für zwei Grössen, für die sich ergiebt:

$$\lim_{x=\infty} y_x = \frac{y_1 + 2 y_2}{3}.$$

[12]) Auf diese Vereinfachung wurde der Verfasser nachträglich durch Herrn Professor Wangerin hingewiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 4.

Das geometrische Mittel.

Wir wenden uns nun zu unserer eigentlichen Aufgabe: der Untersuchung des geometrischen Mittels und zwar zunächst für den Fall zweier Grössen.

Es seien also a_1 und a_2 zwei positive reelle Zahlen. Wir bilden dann das geometrische Mittel

$$a_3 = \sqrt{a_1 \cdot a_2};$$

$$\text{und weiter } a_4 = \sqrt{a_2 \cdot a_3};$$

$$\text{allgemein } a_x = \sqrt{a_{x-2} \cdot a_{x-1}}$$

Die Wurzel ist natürlich eindeutig als der positive Wert zu verstehen.

Zur Bestimmung des Grenzwertes $\lim\limits_{x=\infty} a_x$ werde a_x als Funktion der gegebenen Grösse a_1 und a_2 dargestellt. Benutzt man gebrochene Exponenten, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
a_3 &= a_1^{\frac{1}{2}} a_2^{\frac{1}{2}} \\
a_4 &= a_2^{\frac{1}{2}} a_3^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{1}{4}} a_2^{\frac{3}{4}} \\
a_5 &= a_3^{\frac{1}{2}} a_4^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{3}{8}} a_2^{\frac{5}{8}} \\
a_6 &= a_4^{\frac{1}{2}} a_5^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{5}{16}} a_2^{\frac{11}{16}} \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Allgemein setzen wir

$$a_x = a_1^{\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}} a_2^{\frac{y_x^{(2)}}{2^{x-2}}}$$

Die $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ genügen dann der Differenzengleichung

$$2y_x + y_{x+1} - y_{x+2} = 0.$$

Man überzeugt sich davon sofort durch den Schluss von x auf x + 1. Denn bildet man

$$a_{x+1} = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_x}$$

so erscheint das Produkt

$$\left(a_1^{\frac{y_{x-1}^{(1)}}{2^{x-3}}} \cdot a_1^{\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}} \right)^{\frac{1}{2}} = a_1^{\frac{2y_{x-1}^{(1)} + y_x^{(1)}}{2^{x-1}}}$$

und natürlich ganz entsprechend für a_2.

Die Beziehungsgleichung lautet

$$2 + z - z^2 = 0.$$

Die Wurzeln sind $\zeta_1 = 2$, $\zeta_2 = -1$.

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung wird daher

$$y_x = c_1 2^x + c_2 (-1)^x.$$

Um die für die particulären Lösungen $y_x^{(1)}$ und $y_x^{(2)}$ charakteristischen Constanten zu unterscheiden, bezeichnen wir sie noch mit dem entsprechenden oberen Index (1) oder (2).

Zur Bestimmung dieser Constanten gebrauchen wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
y_1^{(\lambda)} &= c_1^{(\lambda)} 2 - c_2^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1,\ 2) \\
y_2^{(\lambda)} &= c_1^{(\lambda)} 4 + c_2^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die »Anfangswerte« $y_1^{(\lambda)}$ und $y_2^{(\lambda)}$ aber lassen sich aus den bekannten Werten $y_3^{(\lambda)}$ und $y_4^{(\lambda)}$ mittels der Differenzengleichung berechnen.

$$\text{Es ist } y_3^{(1)}=1 \quad y_4^{(1)}=1 \quad y_3^{(2)}=1 \quad y_4^{(2)}=3.$$

Daher hat man die zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} &= 1 = y_2^{(1)} + 2\,y_1^{(1)} \\ y_4^{(1)} &= 1 = y_3^{(1)} + 2\,y_2^{(1)} \\ \text{und } y_3^{(2)} &= 1 = y_2^{(2)} + 2\,y_1^{(2)} \\ y_4^{(2)} &= 3 = y_3^{(2)} + 2\,y_2^{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{Das erste liefert } y_2^{(1)}=0 \qquad y_1^{(1)}=\frac{1}{2},$$

$$\text{das zweite } y_2^{(2)}=1 \qquad y_1^{(2)}=0.$$

Aus diesen Werten erhält man schliesslich

$$c_1^{(1)}=\frac{1}{12} \qquad c_2^{(1)}=-\frac{1}{3}$$

$$c_1^{(2)}=\frac{1}{6} \qquad c_2^{(2)}=+\frac{1}{3}$$

Der Exponent von a_1 wird daher

$$\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^x}{2^{x-2}};$$

und der Exponent von a_2:

$$\frac{y_x^{(2)}}{2^{x-2}}=\frac{2}{3}+\frac{1\cdot(-1)^x}{3\cdot 2^{x-2}}$$

Mit wachsendem x nähern sich also diese Exponenten von beiden Seiten dem Werte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Es wird demnach

$$\lim_{x=\infty} a_x=\sqrt[3]{a_1\,a_2^2}.$$

Durch diesen Prozess des geometrischen Mittels wird eine kubische Irrationalität angenähert durch eine Kette quadratischer Irrationalitäten.

§ 5.

Das Delische Problem.

Diese Annäherung kubischer Irrationalitäten durch quadratische können wir wiederfinden bei einem berühmten Problem des Altertums, dem sogenannten Delischen Problem der Verdoppelung des Würfels. Allgemein lässt sich der Inhalt dieses Problems durch die Gleichung darstellen

$$z^3=n\,a^3.$$

Die entsprechende planimetrische Aufgabe

$$z^2=n\,a^2$$

kann bekanntlich gelöst werden durch die Construction der mittleren Proportionalen

$$a:z=z:n\,a.$$

Diese Methode wurde im Altertum schon verallgemeinert, indem man folgendermaassen *zwei* mittlere Proportionalen z und w einführte:

$$a:z=z:w=w:n\,a.$$

In der That wird dann $z^3=n\,a^3$ und $w^3=n^2a^3$, wie sich aus den Produktengleichungen $z^2=a\,w$ und $w^2=n\,a\,z$ leicht ergiebt. Diese Gleichungen stellen in der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf