Die »Anfangswerte« $y_1^{(\lambda)}$ und $y_2^{(\lambda)}$ aber lassen sich aus den bekannten Werten $y_3^{(\lambda)}$ und $y_4^{(\lambda)}$ mittels der Differenzengleichung berechnen.

$$\text{Es ist } y_3^{(1)}=1 \quad y_4^{(1)}=1 \quad y_3^{(2)}=1 \quad y_4^{(2)}=3.$$

Daher hat man die zwei Gleichungssysteme:

$$\begin{aligned} y_3^{(1)} &= 1 = y_2^{(1)} + 2\,y_1^{(1)} \\ y_4^{(1)} &= 1 = y_3^{(1)} + 2\,y_2^{(1)} \\ \text{und } y_3^{(2)} &= 1 = y_2^{(2)} + 2\,y_1^{(2)} \\ y_4^{(2)} &= 3 = y_3^{(2)} + 2\,y_2^{(2)} \end{aligned}$$

$$\text{Das erste liefert } y_2^{(1)}=0 \qquad y_1^{(1)}=\frac{1}{2},$$

$$\text{das zweite } y_2^{(2)}=1 \qquad y_1^{(2)}=0.$$

Aus diesen Werten erhält man schliesslich

$$c_1^{(1)}=\frac{1}{12} \qquad c_2^{(1)}=-\frac{1}{3}$$

$$c_1^{(2)}=\frac{1}{6} \qquad c_2^{(2)}=+\frac{1}{3}$$

Der Exponent von a_1 wird daher

$$\frac{y_x^{(1)}}{2^{x-2}}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(-1)^x}{2^{x-2}};$$

und der Exponent von a_2:

$$\frac{y_x^{(2)}}{2^{x-2}}=\frac{2}{3}+\frac{1\cdot(-1)^x}{3\cdot 2^{x-2}}$$

Mit wachsendem x nähern sich also diese Exponenten von beiden Seiten dem Werte $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$. Es wird demnach

$$\lim_{x=\infty} a_x=\sqrt[3]{a_1\,a_2^2}.$$

Durch diesen Prozess des geometrischen Mittels wird eine kubische Irrationalität angenähert durch eine Kette quadratischer Irrationalitäten.

§ 5.

Das Delische Problem.

Diese Annäherung kubischer Irrationalitäten durch quadratische können wir wiederfinden bei einem berühmten Problem des Altertums, dem sogenannten Delischen Problem der Verdoppelung des Würfels. Allgemein lässt sich der Inhalt dieses Problems durch die Gleichung darstellen

$$z^3=n\,a^3.$$

Die entsprechende planimetrische Aufgabe

$$z^2=n\,a^2$$

kann bekanntlich gelöst werden durch die Construction der mittleren Proportionalen

$$a:z=z:n\,a.$$

Diese Methode wurde im Altertum schon verallgemeinert, indem man folgendermaassen *zwei* mittlere Proportionalen z und w einführte:

$$a:z=z:w=w:n\,a.$$

In der That wird dann $z^3=n\,a^3$ und $w^3=n^2a^3$, wie sich aus den Produktengleichungen $z^2=a\,w$ und $w^2=n\,a\,z$ leicht ergiebt. Diese Gleichungen stellen in der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

modernen Schreibweise in einem rechtwinkligen Coordinatensystem Parabeln dar, deren Schnitt die »Lösung« des Delischen Problems giebt. Man darf nun aber, wie Zeuthen[13] sehr einleuchtend auseinandergesetzt hat, nicht meinen, die Griechen hätten wirklich punktweise die Parabeln construiert. Diese Construktion der Kubikwurzel mittels Kegelschnitten ist vielmehr aufzufassen als ein Beweis für die Existenz der gesuchten Irrationalität. Indem Menächmus zeigte, dass gewissen Schnitten des Kreiskegels die Eigenschaften zukommen, die durch die Proportion

$$a : z = z : w = w : n\,a$$

verlangt werden, führte er damit die Lösung des Delischen Problems auf Curven zurück, deren Stetigkeit eine Folge war der postulierten Stetigkeit des Kreises. Er konnte dann ohne neue Stetigkeitspostulate die Existenz des Schnittes folgern und damit den Beweis für die Existenz der Kubikwurzel.

Wir benutzen nun hier in keiner Weise Kegelschnitte, sondern konstruieren nur die mittlere Proportionale.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir offenbar $a = 1$ setzen und haben daher die beiden Proportionen

$$1 : z = z : w \tag{1}$$

$$z : w = w : n \tag{2}$$

Aus diesen bilden wir uns zwei Ketten von Näherungswerten für z und nebenbei auch für w, indem wir von zwei ersten Annäherungen für z und w ausgehen.

Werden die beiden Ketten durch die oberen Indices (1) und (2) unterschieden, so können wir in erster Annäherung setzen

$$z_1^{(1)} = 1 \qquad w_1^{(2)} = n.$$

Mit diesem Werte $z_1^{(1)}$ ergiebt sich aus Gleichung

$$n_2^{(1)} = n^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

»Verbessert« man dann z durch Einsetzen des Wertes $w_2^{(1)}$ in die Gleichung (1), so ergiebt sich

$$z_2^{(1)} = n^{\frac{1}{2}}.$$

So fortfahrend erhält man also die Kette

$$z_1^{(1)} = 1 \qquad w_1^{(1)} = n^{\frac{1}{2}}$$

$$z_2^{(1)} = n^{\frac{1}{4}} \qquad w_2^{(1)} = n^{\frac{5}{8}}$$

$$z_4^{(1)} = n^{\frac{5}{16}} \qquad w_3^{(1)} = n^{\frac{21}{32}}$$

$$z_4^{(1)} = n^{\frac{21}{64}} \qquad w_4^{(1)} = n^{\frac{85}{128}}$$

und allgemein

$$z_x^{(1)} = n^{\frac{\alpha_x}{2^{2x-2}}} \qquad w_x^{(1)} = n^{\frac{\beta_x}{2^{2x-1}}}$$

Hierbei genügen die Zähler der Exponenten den linearen Differenzengleichungen erster Ordnung

$$\alpha_{x+1} = \alpha_x + 2^{2x-2} \tag{α}$$

$$\beta_{x+1} = \beta_x + 2^{2x} \tag{β}$$

[13]) Die Construction als »Existenzbeweis« bei den Alten. Math. Annalen, B. 47, S. 222.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bildet man aus dem Annäherungswert

$$w_1^{(2)} = n$$

mittels Gleichung (1)

$$z_1^{(2)} = n^{\frac{1}{2}},$$

dann weiter damit aus Gleichung (2)

$$w_1^{(2)} = n^{\frac{3}{4}}$$

und fährt wie oben fort, so erhält man die Kette:

$$w_1^{(2)} = n \qquad z_1^{(2)} = n^{\frac{1}{2}}$$

$$w_2^{(2)} = n^{\frac{3}{4}} \qquad z_2^{(2)} = n^{\frac{3}{8}}$$

$$w_3^{(2)} = n^{\frac{11}{16}} \qquad z_3^{(2)} = n^{\frac{11}{32}}$$

$$w_4^{(2)} = n^{\frac{43}{64}} \qquad z_4^{(2)} = n^{\frac{43}{128}}$$

allgemein

$$w_x^{(2)} = n^{\frac{\gamma_x}{2^{2x-2}}} \qquad z_x^{(2)} = n^{\frac{\delta_x}{2^{2x-1}}}$$

Die Zähler genügen in diesem Falle der Gleichung

$$(\gamma) \qquad \gamma_{x+1} = \gamma_x + 2^{2x-1}$$

und genau so für δ_x.

Die Bestimmung des Grenzwertes von $z_x^{(1)}$ und $z_x^{(2)}$ erfordert nun die Auflösung dieser Differenzengleichung. Allgemein lässt sich die Lösung jeder linearen Differenzengleichung erster Ordnung[14] (also auch mit nicht constanten Coefficienten) auf eine Summation zurückführen, die hier besonders einfach sich gestaltet.

Wir fassen die 3 Differenzengleichungen (α) (β) und (γ) in der Form zusammen:

$$y_{x+1} = y_x + k_\nu \cdot 2^{2x-2} \qquad (\nu = \alpha,\ \beta,\ \gamma)$$

Es ist $k_\alpha = 1 \quad k_\beta = 4 \quad k_\gamma = 2$.

Bildet man nun:

$$\sum_{x=1}^{x} y_{x+1} = \sum_{x=1}^{x} y_x + k_\nu \sum_{x=1}^{x} 2^{2x-2}$$

so fallen die entsprechenden Glieder auf der linken und rechten Seite weg, und man erhält nach Ausführung der Summation:

$$y_{x+1} = y_1 + k_\nu \frac{2^{2x-1}}{3}.$$

Setzt man jetzt noch für y_1 die Anfangswerte $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \gamma_1 = \delta_1 = 1$, so ergiebt sich

$$\frac{\alpha_x}{2^{2x-1}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2x-2}}$$

$$\frac{\beta_x}{2^{2x-1}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2x-1}}$$

$$\frac{\gamma_x}{2^{2x-2}} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2x-2}}$$

$$\frac{\delta_x}{2^{2x-1}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2x-1}}$$

[14]) Vergl. Markoff, Differenzenrechnung, S. 157.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus sieht man aber, dass

$$\lim_{x=\infty} z_x^{(1)} = \lim_{x=\infty} z_x^{(2)} = \sqrt[3]{n}$$

$$\text{und } \lim_{x=\infty} w_{(x)}^{(1)} = \lim_{x=\infty} w_x^{(2)} = \sqrt[3]{n^2}$$

Dieselben Grenzwerte erhält man aber auch aus dem im vorigen Paragraphen behandelten Algorithmus

$$a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}.$$

Setzt man nämlich $a_1 = n \quad a_2 = 1$, so wird

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim_{x=\infty} z_x = \sqrt[3]{n};$$

dagegen folgt aus $a_1 = 1 \quad a_2 = n$

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim_{x=\infty} w_x = \sqrt[3]{n^2};$$

Des weiteren aber zeigt eine Vergleichung der Exponenten, dass die $z_x^{(1)}$ und $w_x^{(1)}$ identisch werden mit den a_x, die von links sich dem Grenzwert nähern, während die $z_x^{(2)}$ und $w_x^{(2)}$ den von oben sich nähernden a_x entsprechen. Das heisst: Es ist

$$\left.\begin{aligned} a_{2x} &= z_x^{(1)} \\ a_{2x+1} &= z_x^{(2)} \end{aligned}\right\} a_1 = n \quad a_2 = 1$$

$$\text{und} \quad \left.\begin{aligned} a_{2x} &= w_x^{(1)} \\ a_{2x+1} &= w_x^{(2)} \end{aligned}\right\} a_1 = 1 \quad a_2 = n$$

Die Darstellung der Exponenten als Summe und Differenz lässt sofort den Grad der Annäherung an den Wert $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ erkennen. Für die praktische Anwendung ist aber von grösserem Interesse, die Annäherung der a_x selbst an den Wert $\sqrt[3]{n}$ nach ihrem Grade kennen zu lernen.

Wir wollen hier für das besondere Beispiel $n = 2$ die Abweichungen von dem wahren Werte $\sqrt[3]{2}$ betrachten. Nun muss man bei einem rekurrenten Verfahren — sei es Zeichnung oder Rechnung — Fehler verschiedener Art unterscheiden. Das ist der »natürliche« Fehler, der bedingt ist durch die Zeichnungs- oder Rechenvorschrift; dann aber kommt ein »persönlicher« Fehler hinzu, der von der Person des Ausführenden abhängt. Diesen letzten Fehler könnte man noch in zwei Unterarten zerlegen:

1. Ein Fehler, der eine Folge ist der von Anfang innerhalb gewisser Grenzen willkürlich festzusetzenden Genauigkeit, mit der gearbeitet werden soll.
2. Vermeidbare Fehler, d. h. Fehler im gewöhnlichen Sinne beim Zeichnen oder Rechnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir untersuchen hier nur die natürlichen Fehler, die mit F_x bezeichnet werden sollen. Es ist dann

$$F_3 = \sqrt[3]{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{8}$$

$$F_4 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[4]{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{3}{32}$$

$$F_5 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[8]{2^3} = \frac{1}{3} - \frac{3}{8} - \frac{1}{9} + \frac{15}{128}$$

$$F_6 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[16]{2^5} = \frac{1}{3} - \frac{5}{16} - \frac{1}{9} + \frac{55}{512}$$

$$F_7 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[32]{2^{11}} = \frac{1}{3} - \frac{11}{32} - \frac{1}{9} + \frac{231}{2048}$$

$$F_8 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[64]{2^{21}} = \frac{1}{3} - \frac{21}{64} - \frac{1}{9} + \frac{903}{8192}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Diese Entwickelung nach dem binomischen Lehrsatze lässt deutlicher das Abnehmen der Fehler F_x hervortreten. Natürlich sind diese abwechselnd positiv und negativ, und zwar ist

$$F_{2x} > 0$$
$$F_{2x+1} < 0$$

Bis auf 3 Stellen wird

$$F_9 = -0{,}002$$
$$F_{10} = +0{,}001$$

Das heisst aber: Durch achtmalige Construction der mittleren Proportionalen lässt sich $\sqrt[3]{2}$ bis auf $\frac{1}{1000}$ der Längeneinheit darstellen.

§ 6.

Der allgemeine Fall.

Wir wenden uns nun zu der Untersuchung des geometrischen Mittels aus n positiven reellen Grössen $a_1, a_2 \cdot \cdot \cdot a_n$. Mit diesen bilden wir

$$a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n \cdot a_{n-1} \cdot \cdot \cdot a_1}$$

und allgemein

$$a_x = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n}}$$

Indem wieder wie bei zwei Grössen gebrochene Exponenten eingeführt werden, schreiben wir

$$a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{y_x^{(\lambda)}}{n^{n-x}}}$$

Die Zähler $y_x^{(\lambda)}$ der Exponenten genügen der linearen Differenzengleichung:

$$y_{x+n} = y_{x+n-1} + n\, y_{x+n-2} + \cdot \cdot \cdot n^{n-1} y_x$$

Der Beweis ist einfach; denn bildet man a_{x+1}, so wird a_λ geliefert durch die n vorhergehenden Grössen a_x, $a_{x-1} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1}$ mit Exponenten, deren Nenner eine geometrische Reihe bilden. Die Zusammenfassung unter einen Bruchstrich verlangt also eine Erweiterung mit den aufeinander folgenden Potenzen von n.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Beziehungsgleichung lautet

$$f(z) = z^n - z^{n-1} - n z^{n-2} \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung hat immer eine ganze rationale Wurzel $\zeta_1 = n$.

Von den übrigen Wurzeln ζ_2, ζ_3, ζ_n lässt sich ähnlich wie beim arithmetischen Mittel zeigen, dass sie alle verschieden von einander und von ζ_1 sind.

Sei ζ eine mehrfache Wurzel, dann müssen die Gleichungen bestehen:

$$f(\zeta) = \zeta^n - \sum_{\nu=0}^{n-1} n^\nu \zeta^{n-\nu-1} = 0 \tag{1}$$

$$f'(\zeta) = n \zeta^{n-1} - \sum_{\nu=0}^{n-2} n^\nu (n-\nu-1) \zeta^{n-\nu-2} \tag{2}$$

Multipliziert man Gleichung (2) mit n und subtrahiert sie dann von der ersten, so folgt

$$\zeta^n - (n^2+1) \zeta^{n-1} + \sum_{\nu=2}^{n-1} (n^\nu - \nu n) \zeta^{n-\nu} = 0 \tag{3}$$

Da $\zeta \lesseqgtr 0$, so ergiebt sich

$$\zeta^{n-1} - (n^2+1) \zeta^{n-2} + \sum_{\nu=2}^{n-1} (n^\nu - \nu n) \zeta^{n-\nu-1} = 0 \tag{4}$$

Addiert man Gleichung (4) zu der mit n multiplizierten Gleichung (2), so erhält man

$$(n+1) \zeta^{n-1} - n(n+1) \zeta^{n-2} = 0.$$

Daraus würde folgen

$$\zeta = n$$

Nun genügt aber $\zeta_1 = n$ nicht der Gleichung (2); also hat die Bestimmungsgleichung keine mehrfachen Wurzeln. Wir können daher die allgemeine Lösung der Differenzengleichung darstellen in der Form

$$y_x = c_1 n^x + c_2 \zeta_2^x + \cdot \cdot \cdot c_n \zeta_n^x.$$

Die zu a_x gehörigen Exponenten erhält man durch Division von y_x mit n^{x-n}. Damit nun bei wachsendem x die Glieder mit ζ_λ verschwinden, ist notwendig und hinreichend, dass

$$|\zeta_\lambda| < n \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n)$$

Dass aber diese Ungleichung erfüllt ist, sieht man sofort, wenn man die Gleichung

$$f(z) = z^n - z^{n-1} - n z^{n-2} \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0$$

mit n^n dividiert. Setzt man nämlich $\frac{z}{n} = v$, so erhält man die Beziehungsgleichung des arithmetischen Mittels, d. h. die Gleichung

$$v^n - \frac{1}{n} v^{n-1} - \cdot \cdot \cdot - \frac{1}{n} = 0.$$

Nun ist $v_1 = 1$, während, wie oben gezeigt, $|v_\lambda| < 1 \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n)$

Demnach ist

$$|\zeta_\lambda| < n \qquad (\lambda = 2, \cdot \cdot \cdot n).$$

Es wird also

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_x}{n^{x-n}} = c_1 n^n.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Aufgabe ist damit zurückgeführt auf die Bestimmung der Constanten c_1. Den n Grössen $y_x^{(\lambda)}$ entsprechend unterscheiden wir die Constanten c_1 für die einzelnen Fälle durch den oberen Index (λ). Zu ihrer Bestimmung benutzen wir das System der Gleichungen $(\lambda = 1, \cdot \cdot \cdot n)$

$$\begin{array}{l}
y_1^{(\lambda)} = c_1^{(\lambda)} n + c_2^{(\lambda)} \zeta_2 + \cdot \cdot \cdot c_n^{(\lambda)} \zeta_n \\
y_2^{(\lambda)} = c_1^{(\lambda)} n^2 + c_2^{(\lambda)} \zeta_2 + \cdot \cdot \cdot c_n^{(\lambda)} \zeta_2^n \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_n^{(\lambda)} = c_1^{(\lambda)} n^n + c_2^{(\lambda)} \zeta_2^n + \cdot \cdot \cdot c_n^{(\lambda)} \zeta_n^n
\end{array}$$

Die Anfangswerte $y_1^{(\lambda)}\ y_2^{(\lambda)}\ y_n^{(\lambda)}$ ergeben sich wieder aus den n Gleichungen

$$\begin{array}{l}
y_{n+1}^{(\lambda)} = y_n^{(\lambda)} + n\, y_{n-1}^{(\lambda)} + \cdot \cdot \cdot n^{n-1} y_1^{(\lambda)} \\
y_{n+2}^{(\lambda)} = y_{n+1}^{(\lambda)} + n\, y_n^{(\lambda)} + \cdot \cdot \cdot n^{n-1} y_2^{(\lambda)} \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
y_{n+n}^{(\lambda)} = y_{n+n-1}^{(\lambda)} + n\, y_{n+n-2}^{(\lambda)} + \cdot \cdot \cdot n^{n-1} y_n^{(\lambda)},
\end{array}$$

wenn man die n Werte $y_{n+1}^{(\lambda)} \cdot \cdot \cdot y_{n+n}^{(\lambda)}$ für jedes λ kennt.

Die Berechnung dieser n Grössen $y_{n+1} \cdot \cdot \cdot y_{n+n}$ für den Fall $\lambda = 1$ ersieht man aus folgender Tabelle:

Es erscheint a_1:

in	geliefert von	mit dem Exponenten	
a_{n+1}	a_1	$\frac{1}{n}$	
a_{n+2}	a_{n+1}	$\frac{1}{n^2}$	
a_{n+3}	$a_{n+2}\ a_{n+1}$	$\frac{1+n}{n^3}$	$1 < \nu \leqq n$
a_{n+4}	$a_{n+3}\ a_{n+2}\ a_{n+1}$	$\frac{(1+n)^2}{n^4}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$a_{n+\nu}$	$a_{n+\nu-1} \cdots a_{n+1}$	$\frac{(1+n)^{\nu-2}}{n^\nu}$	

Durch Einsetzen dieser Werte kann man rückwärts $y_n^{(1)}\ y_{n-1}^{(1)} \cdot \cdot \cdot y_1^{(1)}$ berechnen und findet

$$y_n^{(1)} = y_{n-1}^{(1)} = \cdot \cdot \cdot y_2^{(1)} = 0$$

$$y_1^{(1)} = \frac{1}{n^{n-1}}$$

Noch einfacher kommt man zu diesen Grössen, wenn man von der allgemeinen Formel ausgeht

$$a_x = \prod a_\lambda^{\frac{y_x^{(\lambda)}}{n^{x-n}}}$$

und diese Darstellung der a_x auch als gültig betrachtet für $x < n + 1$.

Dann ergiebt sich sofort

$$y_\nu^{(\lambda)} = 0$$

$$y_\lambda^{(\lambda)} = \frac{1}{n^{n-\lambda}} \qquad \nu \leqq \lambda \begin{cases} \lambda = 1, \cdot \cdot \cdot n \\ \nu = 1, \cdot \cdot \cdot n \end{cases}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus dem obigen Gleichungssystem erhält man nun zunächst

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{\Delta(y_k^{(\lambda)} \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{n \Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Hierbei bedeutet $\Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdot \cdot \cdot & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \cdot \cdot \cdot & \zeta_n \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \zeta_1^{n-1} & \zeta_2^{n-1} & \cdot \cdot \cdot & \zeta_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

während $\Delta(y_k^{(\lambda)} \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die Determinante darstellt, die aus der Determinante des Nenners entsteht, wenn ζ_1^{k-1} ersetzt wird durch $y_k^{(\lambda)}$. Der Faktor n im Nenner erklärt sich dadurch, dass bei den beiden Determinanten die gemeinsamen Faktoren $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ bezw. $\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ herausgezogen sind und dann gekürzt wurde. Für den im Nenner übrig bleibenden Faktor ζ_1 wurde sein Wert n gesetzt, während in der Determinante der besseren Übersicht wegen ζ_1 beibehalten wird.

Entwickelt man nun die Zählerdeterminante nach den Elementen der ersten Kolonne und bezeichnet die entsprechenden Adjunkten mit δ_k so wird also

$$\Delta(y_k^{(\lambda)} \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \, y_k^{(\lambda)}$$

Setzt man diese Entwickelung ein und berücksichtigt die oben berechneten Anfangswerte, so folgt:

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{\delta_\lambda}{n^{n+1-\lambda} \Delta(\zeta_1, \zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Die Grössen δ_λ und die Determinante $\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ können wir nun berechnen ohne Kenntnis der Wurzeln $\zeta_2, \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$. Wir brauchen nur die symmetrischen Grundfunktionen dieser Wurzeln; diese ergeben sich aber aus der Gleichung

$$\frac{f(z)}{z-n} = 0.$$

Es treten nämlich dieselben Adjunkten δ_k auch auf bei der Entwickelung der Determinante des Nenners nach Potenzen von ζ_1; d. h.

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k \zeta_1^{k-1}$$

Für diese Determinante kann man nun aber noch eine andere Entwickelung finden, wenn man sich des Zusammenhangs dieser Determinante mit der Discriminante der Gleichung $f(z) = 0$ erinnert, wonach die Determinante identisch wird ihrem absoluten Werte nach mit der Quadratwurzel aus der Discriminante.[15]

Es besteht nämlich die Beziehung

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \prod_{\nu=1}^{\mu-1} \prod_{\mu=2}^{n} (\zeta_\mu - \zeta_\nu)$$

[15]) Vergl. etwa Weber Algebra I (erste Aufl.) S. 151.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedeutet nun $\Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$ die entsprechend gebildete Determinante $(n-1)$ten Grades, so gilt offenbar die Gleichung:[16]

$$\Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = \frac{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{\prod_{\mu=2}^{n} (\zeta_\mu - \zeta_1)}$$

Das Produkt im Nenner lässt sich aber durch die Ableitung der Funktion $f(z)$ ausdrücken. Aus

$$f(z) = \prod_{\mu=1}^{n} (z - \zeta_\mu)$$

folgt nämlich

$$f'(\zeta_1) = \prod_{\mu=2}^{n} (\zeta_1 - \zeta_\mu)$$

Daraus ergiebt sich die neue Darstellung für $\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$:

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = (-1)^{n-1} f'(\zeta_1) \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n).$$

Entwickeln wir die rechte Seite nach Potenzen von ζ_1, so treten dabei, wie die Produktendarstellung von $f'(\zeta_1)$ zeigt, die symmetrischen Grundfunktionen der Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ auf. Bezeichnen wir diese unter Berücksichtigung des Vorzeichens allgemein mit C_k, sodass also

$$C_1 = -\sum \zeta_2, \quad C_2 = \sum \zeta_2 \zeta_3, \quad C_3 = -\sum \zeta_2 \zeta_3 \zeta_4, \cdot \cdot \cdot, \quad C_{n-1} = (-1)^{n-1} \zeta_2 \zeta_3 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$$

ist, dann ergiebt sich die Identität:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k \zeta_1^{k-1} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \Delta(\zeta \cdot \cdot \cdot \zeta_n) \sum_{k=1}^{n} C_{k-1} \zeta_1^{n-k}$$

(Es wird natürlich $C_0 = 1$ gesetzt).

Durch Coefficientenvergleichung folgt daraus

$$\delta_k = (-1)^{n-1} \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) \; C_{n-k}$$

Für den besonderen Wert $k = \lambda$ erhalten wir dann den Quotienten

$$\frac{\delta_\lambda}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)} = \frac{(-1)^{n-1} C_{n-\lambda} \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)}$$

Setzen wir rechts noch den oben berechneten Ausdruck

$$\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n) = (-1)^{n-1} f'(\zeta_1) \Delta(\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)$$

ein, so ergiebt sich schliesslich

$$\frac{\delta_\lambda}{\Delta(\zeta_1 \cdot \cdot \cdot \zeta_n)} = \frac{C_{n-\lambda}}{f'(\zeta_1)}$$

und daher

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{C_{n-\lambda}}{n^{n+1-\lambda} f'(\zeta_1)}$$

Um nun die Constante $c_1^{(\lambda)}$ als Funktion von n und λ darzustellen, haben wir nur noch die symmetrischen Funktionen C_k zu berechnen.

[16]) Die folgenden Entwickelungen beruhen auf Baltzer, Determinanten (fünfte Aufl.) § 10.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir bilden dazu, wie oben schon angedeutet, die Gleichung, der die Wurzeln $\zeta_2 \cdot \cdot \cdot \zeta_n$ genügen, d. h. die Gleichung

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta_1)} = 0.$$

Nun war $f(z) = z^n - z^{n-1} - n\,z^{n-2} - n^2 z^{n-3} - \cdot \cdot \cdot - n^{n-1} = 0$ und $\zeta_1 = n$.

Daraus ergiebt sich

$$\frac{f(z)}{(z-\zeta_1)} = z^{n-1} + (n-1)\,z^{n-2} + n\,(n-2)\,z^{n-3} + n^2\,(n-3)\,z^{n-4} + \cdot \qquad n^{n-2} = 0.$$

Setzen wir rechts $z = \zeta_1 = n$, so erhalten wir

$$f'(\zeta_1) = \sum_{k=0}^{n-1} n^{k-1}\,(n-k)\,n^{n-1-k} = n^{n-2} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)$$

$$\text{oder } f'(\zeta_1) = \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

Ferner wird $\qquad C_k = n^{k-1}\,(n-k),$

also $\qquad C_{n-\lambda} = \lambda\, n^{n-\lambda-1}$

und demnach schliesslich $\qquad c_1^{(\lambda)} = \dfrac{2\,\lambda}{n^{n+1}\,(n+1)}$

Daraus erhalten wir denn endlich unter Berücksichtigung des auf Seite 19 gefundenen Ausdruckes für den Grenzwert des Exponenten das gesuchte Resultat, das wir so zusammenfassen:

Wird a_x durch den Algorithmus

$$a_x = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2} \cdot a_{x-3} \cdot \cdot \cdot a_{x-n}}$$

bestimmt, indem man von n reellen positiven Grössen $a_1\, a_2\, a_3 \cdot \cdot \cdot a_n$ ausgeht, dann ist

$$\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\,\lambda}{n\,(n+1)}}$$

Oder in Worten:

Durch den Prozess der Bildung einer Kette n *ter Wurzeln wird die* $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ *te Wurzel angenähert.*

Man erkennt sofort in diesem allgemeinen Resultat das besondere für den Fall zweier Grössen, wo ja, wie wir oben gefunden haben, die $\frac{2 \cdot 3}{2} = 3$ te Wurzel angenähert wird. Ferner stimmt natürlich der auf Seite 14 gefundene Wert der Constanten überein mit dem Wert, der sich aus der allgemeinen Formel

$$c_1^{(\lambda)} = \frac{2\,\lambda}{n^{n+1}\,(n+1)}$$

für $n = 2$ ergiebt.

In der That wird $c_1^{(1)} = \frac{1}{12} \qquad c_1^{(2)} = \frac{1}{6}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7.

Die Beziehung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel.

Zwei neue Ableitungen des allgemeinen Resultates.

Wenn man zum Ausgangspunkt der Untersuchungen der vorliegenden Arbeit zurückkehrt, der Logarithmenberechnung und der hierbei benutzten Parallelität in der Bildung des arithmetischen Mittels und des geometrischen, so liegt es nahe, die Grenzwerte beider zu vergleichen. Wir stellen zu dem Zweck die Grössen a_x dar als Potenzen einer positiv reellen Basis b und bezeichnen die zugehörigen Logarithmen mit β_x. Es ist also $a_1 = b^{\beta_1}$ $a_2 = b^{\beta_2} \cdot \cdot \cdot$ $a_n = b^{\beta_n}$. Weiter wird dann

$$a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu}}_{\nu=1 \cdot \cdot \cdot n} = b^{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \beta_{x-\nu}}$$

Also

$$\lim_{x=\infty} a_x = b^{\lim_{x=\infty} \beta_x}$$

Der Grenzwert des arithmetischen Mittels ist aber, wie wir auf Seite 12 gefunden haben:

$$\lim_{x=\infty} \beta_x = \frac{2 \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda \beta_\lambda}{n(n+1)}$$

Setzen wir diesen Wert ein, so folgt:

$$\lim_{x=\infty} a_x = b^{\frac{2\beta_1}{n(n+1)}} \; b^{\frac{2 \cdot 2 \cdot \beta_2}{n(n+1)}} \; b^{\frac{2 \cdot 3 \cdot \beta_3}{n(n+1)}} \cdot \cdot \cdot b^{\frac{2 \cdot n \cdot \beta_n}{n(n+1)}}$$

Daraus ergiebt sich aber unser Resultat

$$\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$$

Neben dieser einfachen Ableitung des geometrischen Mittels aus dem arithmetischen dürfte die von dem arithmetischen Mittel unabhängige Behandlung allein schon dadurch berechtigt sein, dass sie auf die Verwandtschaft mit dem Delischen Problem führte.

Auf die im Falle $n = 2$ bei beiden Mitteln entsprechende Annäherung an die betreffenden Grenzwerte von oben und unten braucht nur hingewiesen zu werden.

Nachdem nun die Existenz eines Grenzwertes feststeht, soll eine dritte Ableitung des allgemeinen Resultates hier noch Platz finden, die der Verfasser für den besonderen Fall $n = 2$ seinem Amtsgenossen Herrn Dr. Maey verdankt.

Wir geben sie gleich allgemein.

Es ist a_x definiert durch

$$a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu}} \qquad (\nu = 1, 2 \cdot \cdot n).$$

Wir bilden nun zunächst für endliche x

$$\prod a_x = a_x \, a_{x-1} \, a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_3$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und erhalten

$$\prod a_x = \sqrt[n]{\Pi a_{x-\nu}\ \Pi a_{x-\nu-1} \cdot \cdot \cdot a_n\ a_1}$$

Die entsprechenden Faktoren auf beiden Seiten heben sich weg, und es bleibt:

$$a_x\, a_{x-1}\, a_{x-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1} = \sqrt[n]{a_{x-1} \cdot a_{x-2}^{\,2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1}^{n-1}\, a_n^n\, a_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot a_1}$$

Wird beiderseitig mit n potenziert, so folgt:

$$a_x^n\, a_{x-1}^{n-1}\, a_{x-2}^{n-2} \cdot \cdot \cdot a_{x-n+1} = a_n^n\, a_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot a_2^2\, a_1.$$

Nun wird aber:

$$\lim_{x=\infty} a_x = \lim a_{x-1} = \cdot \cdot \cdot \lim a_{x-n+1}$$

folglich

$$\lim \mathbf{a}_x^{\frac{n(n+1)}{2}} = \mathbf{a}_n^n\, \mathbf{a}_{n-1}^{n-1} \cdot \cdot \cdot \mathbf{a}_2^2\, \mathbf{a}_1$$

oder wieder

$$\lim_{x=\infty} \mathbf{a}_x = \prod_{\lambda=1}^{n} \mathbf{a}_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$$

Ein Nachteil dieser Ableitung ist schon angedeutet: Die Existenz des Grenzwertes wird ohne weiteres vorausgesetzt. Dann aber liefert sie nicht, wie die anderen Methoden im Falle $n = 2$ auch für endliche x die a_x als Funktionen von a_1 und a_2.

§ 8.

Die Mächtigkeit der möglichen Prozesse.

Es bleibt uns jetzt noch die zweite der in der Einleitung erwähnten Fragen zur Beantwortung übrig:

Kann durch den Prozess des geometrischen Mittels jede zwischen a_1 und a_2 liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden?

Der Gedankengang, der zu dieser Frage führte, ist in der Einleitung auseinandergesetzt; er braucht also hier nicht wiederholt zu werden. Dagegen bedarf der Sinn der Frage einer ausführlichen Erörterung. Es handelt sich dabei um folgendes.

Bildet man von zwei positiv reellen Grössen a_1 und a_2 das geometrische Mittel $a_3 = \sqrt{a_2\, a_1}$ und vereinigt a_3 nicht allein mit dem unmittelbar vorhergehenden a_2 sondern auch mit a_1 zu einem geometrischen Mittel, so erhält man die zwei neuen Grössen:

$$a_4^{\mathrm{I}} = \sqrt{a_3\, a_1}\,; \qquad a_4^{\mathrm{II}} = \sqrt{a_3\, a_2}$$

Wird jetzt jede der Grössen a_4 mit irgend einer der vorhergehenden zur Bildung eines geometrischen Mittels benutzt, so ergeben sich 6 Grössen a_5. So fortfahrend, indem man also jedesmal jede der neuen Grössen mit irgend einer der vorhergehenden vereinigt, erhält man schliesslich unendlich viel Ketten. Die Glieder der Kette, deren Algorithmus $a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$ in der vorliegenden Arbeit untersucht wurde, nähern sich der ganz bestimmten zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl $\alpha = \sqrt[3]{a_1\, a_2^2}$, und es ist $\alpha = \lim\limits_{x=\infty} a_x$. Bildet man das geometrische Mittel immer nach links hin, benutzt also die Kette mit dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Algorithmus $a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_1}$, so wird $\lim\limits_{x=\infty} a_x = a_1$. Bei der entsprechenden Bildung nach rechts hin, wird $\lim\limits_{x=\infty} a_x = a_2$.

Gebrauchen wir die Ausdrucksweise: Eine Zahl α ist einer Kette zugeordnet, wenn $\alpha = \lim\limits_{x=\infty} a_x$ ist, so können wir also sagen:

Die Zahlen a_1, $\sqrt[3]{a_1 a_2^2}$, a_2 sind den Ketten $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_1}$, $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$, $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_2}$ zugeordnet.

Der obigen Frage kann man dementsprechend auch die Form geben:

Kann jede zwischen a_1 und a_2 liegende Grösse einer der möglichen Ketten zugeordnet werden?

Hierbei ist nun allerdings vorausgesetzt, dass für jede Kette $\lim a_x$ existiert. Da wir aber weiter unten sehen werden, dass die Existenz oder Nichtexistenz eines limes für die Beantwortung der Frage unwesentlich ist, so können wir die Voraussetzung zunächst formal beibehalten ohne nähere Existenzuntersuchung. Die ganze Frage hat natürlich nur rein theoretisches Interesse; vom praktischen Standpunkt aus, das heisst vom Standpunkte des Logarithmenberechners kann durch das geometrische Mittel ***jede*** zwischen a_1 und a_2 liegende Zahl ***angenähert*** werden, wie in dem aus Euler entnommenen Beispiel der Einleitung die Zahl 5 mit $a_1 = 1$ $a_2 = 10$. Ebenso könnte auch e oder π ***angenähert*** werden. Daraus folgt aber durchaus nicht, dass unter den möglichen Ketten es eine giebt, für die $\lim a_x = e$ oder π.

Die Beantwortung der Frage ergiebt sich nun mittels der einfachsten Begriffe der G. Cantorschen Mengenlehre.[17] Wir haben nur zu untersuchen, welche Mächtigkeit die Menge der möglichen Ketten hat.

Zu dem Zwecke wollen wir folgende symbolische Bezeichnung gebrauchen. Das n te Glied werde allgemein durch die arabische Ziffer angedeutet, ein oberer Index I oder II weise auf die Abstammung von a_1 oder a_2 hin, so dass also

$$4^{\mathrm{I}} = \sqrt{a_3 \cdot a_1} = \sqrt{3 \cdot a_1}; \qquad 4^{\mathrm{II}} = \sqrt{3 \cdot a_2}$$

Des weiteren soll ein unterer Index erkennen lassen, mit welchem der vorhergehenden Glieder das n te verbunden wurde; es bedeutet demnach:

$$5^{\mathrm{I}}_1 = \sqrt{4^{\mathrm{I}} \cdot 1} \qquad 5^{\mathrm{II}}_3 = \sqrt{4^{\mathrm{II}} \cdot 3}$$

Schliesslich sollen zu dem Index I und II hinzutretende arabische Ziffern zeigen, welches n te Glied genommen wurde. Ihre Bedeutung wird klarer aus den symbolischen Gleichungen hervortreten

$$6^{\mathrm{I},1}_1 = \sqrt{5^{\mathrm{I}}_1 \cdot 1}; \qquad 6^{\mathrm{I},3}_{4^{\mathrm{II}}} = \sqrt{5^{\mathrm{I}}_3 \cdot 4^{\mathrm{II}}}; \qquad 6^{\mathrm{II},2}_{4^{\mathrm{I}}} = \sqrt{5^{\mathrm{II}}_2 \cdot 4^{\mathrm{I}}}$$

[17]) Die Begriffe der Mengenlehre finden sich ausser in den Cantorschen Arbeiten in der neuesten Zeit dargestellt in der Encyclopädie der math. Wissenschaften I, A 5 und sehr ausführlich im Charakter eines Lehrbuches im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung B. 8. Beide Darstellungen sind von Schoenflies verfasst. Es soll hier auch erwähnt werden, dass der so wichtige Begriff der Mächtigkeit auch in einem der besten elementaren Lehrbücher erscheint, in den »Elementen der Arithmetik und Algebra« von Friedrich Meyer. Halle a. S. H. W. Schmidt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Algorithmus $a_x = \sqrt{a_x}$ [illegible] er entsprechenden Bildung nach rechts hin, wird $\lim_{x=\infty}$ [illegible]

Gebrauchen wi [illegible] l α ist einer Kette zugeordnet, wenn $\alpha = \lim_{x=\infty} a_x$ ist, s [illegible]

Die Zahlen a_1, $\sqrt[3]{a_1 a_2}$ [illegible] $a_{x-1} \cdot a_{x-2}$, $\sqrt{a_{x-1} \cdot a_2}$ zugeordnet.

Der obigen Fra [illegible] ch die Form geben:

Kann [illegible] de Grösse einer der möglichen Kette [illegible]

Hierbei ist nun [illegible] jede Kette $\lim a_x$ existiert. Da wir aber weiter unt [illegible] z oder Nichtexistenz eines limes für die Beantwortun; [illegible] können wir die Voraussetzung zunächst formal beil [illegible] rsuchung. Die ganze Frage hat natürlich nur rein th [illegible] hen Standpunkt aus, das heisst vom Standpunkte de: [illegible] rch das geometrische Mittel *jede* zwischen a_1 und a_2 l [illegible] e in dem aus Euler entnommenen Beispiel der Einleitu [illegible] Ebenso könnte auch e oder π *angenähert* werden. [illegible] lass unter den möglichen Ketten es eine giebt, für die [illegible]

Die Beantwortu [illegible] tels der einfachsten Begriffe der G. Cantorschen Meng [illegible] rsuchen, welche Mächtigkeit die Menge der möglicher [illegible]

Zu dem Zwecke [illegible] Bezeichnung gebrauchen. Das n te Glied werde all [illegible] r angedeutet, ein oberer Index I oder II weise auf d [illegible] n, so dass also

[illegible] $= \sqrt{3 \cdot a_2}$

Des weiteren s [illegible] ssen, mit welchem der vorhergehenden Glieder da [illegible] tet demnach:

[illegible] $^{II} \cdot 3$

Schliesslich soll [illegible] etende arabische Ziffern zeigen, welches n te Glied ge [illegible] wird klarer aus den symbolischen Gleichungen hervortr [illegible]

$$6^{I_1}_{1} = \sqrt{5^{I}_{1}} \qquad 6^{II_2}_{4^1} = \sqrt{5^{II}_{2} \cdot 4^1}$$

[17]) Die Begriffe de [illegible] Cantorschen Arbeiten in der neuesten Zeit dargestellt in der En [illegible] 5 und sehr ausführlich im Charakter eines Lehrbuches im Jahres [illegible] igung B. 8. Beide Darstellungen sind von Schoenflies verfasst. Es s [illegible] o wichtige Begriff der Mächtigkeit auch in einem der besten elem [illegible] ementen der Arithmetik und Algebra« von Friedrich Meyer. Ha [illegible]

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die entstehenden Grössen lassen sich nun folgendermaassen anordnen:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & 3 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 4^{\mathrm{I}} & & 4^{\mathrm{II}} & & & & & & & & \\
 & & & & 5_1^{\mathrm{I}} & 5_2^{\mathrm{I}} & 5_3^{\mathrm{I}} & & 5_1^{\mathrm{II}} & 5_2^{\mathrm{II}} & 5_3^{\mathrm{II}} & & & & & & \\
 & 6_1^{\mathrm{I}_1} & 6_2^{\mathrm{I}_1} & 6_3^{\mathrm{I}_1} & 6_{4^{\mathrm{I}}}^{\mathrm{I}_1} & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_1} & & 6_1^{\mathrm{I}_2} \cdots & 6_{4^{\mathrm{II}}}^{\mathrm{I}_2} & \cdots & 6_1^{\mathrm{I}_3} \cdots ; & 6_1^{\mathrm{II}_1} \cdots & 6_1^{\mathrm{II}_2} \cdots & 6_1^{\mathrm{II}_3} \cdots & & \\
7_1^{\mathrm{I}_{1,1}} \cdots & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & 7_1^{\mathrm{II}_{1,1}} \cdots & & \\
 & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & &
\end{array}
$$

Diese Anordnung lässt aber sofort erkennen, dass wir schliesslich in den Horizontalreihen eine unendliche Menge unendlicher Mengen erhalten. Die Menge der Mengen ist aber offenbar abzählbar und ebenso ist jede Teilmenge abzählbar. Also ist auch nach einem bekannten Satze der Mengenlehre die Menge der Grössen in der Horizontalreihe selbst abzählbar oder von der ersten Mächtigkeit.

Das Continuum zwischen a_1 und a_2 hat nun aber bekanntlich eine höhere Mächtigkeit: Also ist es unmöglich, jeder Zahl zwischen a_1 und a_2 eine der Ketten zuzuordnen.[18]

Sollten nun unter den Ketten solche sein, für die $\lim a_x$ nicht existiert, so können wir diese ausscheiden. Die übrig bleibende Menge ist endweder endlich oder unendlich von der ersten Mächtigkeit, keinesfalls von höherer.

Der Satz bleibt also bestehen und wir können noch einmal zusammenfassend die zweite Frage, wie folgt, beantworten:

> ***Es kann durch den Prozess des geometrischen Mittels nicht jede zwischen*** a_1 ***und*** a_2 ***liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden.***

Die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall des geometrischen Mittels aus n Grössen bietet keine Schwierigkeit.

Schluss.

Die vorliegende Arbeit scheint dem Verfasser nach zwei Richtungen hin Anknüpfungspunkte für weitere Untersuchungen zu bieten. Einmal führt die im Paragraphen 5 vorkommende Bestimmung durch eine Differenzengleichung ***erster*** Ordnung, während im vorhergehenden Paragraphen eine solche ***zweiter*** Ordnung auftritt, auf den Begriff der Reducibilität der Differenzengleichungen.

Dann aber wird es von Interesse sein den Zusammenhang zu finden zwischen der hier gefundenen Annäherung einer kubischen Irrationalität durch quadratische mit den neueren Untersuchungen von Meyer[19] und Minkowski[20] besonders über die Annäherung kubischer und allgemein algebraischer Irrationalitäten durch kettenbruchartige Algorithmen.

[18]) Es ist nicht nötig ein-eindeutig hinzuzusetzen bei unserer Definition des Zuordnens.

[19]) Königsberg, phys.-ökon. Gesellschaft, Jahrg. 38, S. 57.

[20]) Göttinger Nachr. 1899, S. 64. Vergl. auch Encyclopädie I C 3, S. 688.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf