EINLEITUNG.

Der Erfinder der Logarithmen, Neper, schlägt in einer zur Erläuterung seiner Tafeln dienenden Schrift vier Methoden vor zur Berechnung der Logarithmen. Eine dieser Methoden beruht auf dem fortgesetzten Quadratwurzelziehen. Neper selbst scheint nach dieser Methode nicht gearbeitet zu haben; wohl aber hat sie Kepler benutzt bei seiner im Jahre 1624 erschienenen Tafel »Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos.[1]«

Der Algorithmus jener Methode ist folgender: Wird der Logarithmus einer zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl x gesucht, wo a_1 und a_2 positive reelle Grössen sind mit den schon bekannten Logarithmen b_1 und b_2, so bilde man das geometrische Mittel

$$a_3 = \sqrt{a_2 \cdot a_1}$$

es ist dann

$$\log a_3 = b_3 = \frac{b_2 + b_1}{2}$$

a_3 liegt jedenfalls zwischen a_2 und a_1, wird aber im allgemeinen von x noch verschieden sein. Man bilde daher

$$a_4 = \sqrt{a_3 \cdot a_2}$$

und so weiter. Allgemein lässt sich also dieser Prozess der fortgesetzten Bildung des geometrischen Mittels darstellen durch die Gleichung:

$$a_x = \sqrt{a_{x-1} \cdot a_{x-2}}$$

Es erhebt sich nun die Frage: *Welcher Grenze nähern sich die so definierten* a_x oder in Zeichen:

$$\text{Was ist } \lim_{x=\infty} a_x \text{ ?}$$

Diese Frage ist, soweit dem Verfasser bekannt ist, bisher in der Litteratur noch nicht behandelt. Den ersten Berechnern der Logarithmen lag sie offenbar fern; allerdings gebrauchten sie die fortgesetzte Mittelbildung nicht in der oben definierten Gesetzmässigkeit. Da sie sich die Aufgabe stellten, den Logarithmus einer ganz bestimmten zwischen a_1 und a_2 liegenden Zahl x zu bestimmen, so suchten sie durch verschiedenartige Combinationen der einzelnen Mittel der Zahl x so nahe als möglich zu kommen. Ein Beispiel kann diese Abweichung erläutern. Bis $a_5 = \sqrt{a_4 \cdot a_3}$ sei nach der allgemeinen Vorschrift gerechnet; es sei nun

$$a_5 < a_4 < x < a_3$$

Bildet man jetzt gesetzmässig $a_6 = \sqrt{a_5 a_4}$, so wird offenbar $x - a_6 > x - a_5$; man käme also der gesuchten Zahl nicht näher. Abweichend von der Regel bildet man daher:

$$a'_6 = \sqrt{a_5 \cdot a_3}$$

(Bei Abweichungen sollen gestrichelte Buchstaben benutzt werden).

[1]) Cantor, Geschichte der Mathematik, II., 672 und 677.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da a'_6 zwischen a_5 und a_3 liegt, so ist sicher

$$|x-a'_6|<|x-a_5|.$$

Ein Zahlenbeispiel bringt Eulers Introductio.[2] Dort ist

$$a_1=1 \quad a_2=10 \quad x=5.$$

Das Mittel wird 22 mal gebildet und liefert schliesslich auf 6 Dezimalen

$$a'_{24}=5{,}000\,000;$$

während $a'_{23}=5{,}000\,003$ und $a'_{22}=4{,}999\,997$ ist. Das angewandte Verfahren lässt sich symbolisch in leicht ersichtlicher Weise so beschreiben:

$$(1{,}2)\ (2{,}3)\ (3{,}4)\ (4{,}5)\ (\underline{4}{,}6)\ (6{,}7)\ (\underline{6}{,}8)\ (8{,}9)\ (9{,}10)\ (10{,}11)\ (\underline{10}{,}12)\ (\underline{10}{,}13)\ (13{,}14)\ (14{,}15)\ (\underline{14}{,}16)$$
$$(\underline{14}{,}17)\ (\underline{14}{,}18)\ (\underline{14}{,}19)\ (19{,}20)\ (20{,}21)\ (\underline{20}{,}22)\ (22{,}23).$$

Von der allgemeinen Vorschrift $(x, x-1)$ ist also in diesem Beispiel 9 mal abgewichen.

Im Anschluss hieran erhebt sich eine zweite Frage, die wir hier zunächst ohne weitere Erläuterung so aussprechen:

> *Kann durch den fortgesetzten Prozess des Mittelbildens jede zwischen* a_1 *und* a_2 *liegende Grösse als Grenzwert dargestellt werden?*

Die Beantwortung der beiden Fragen ist der Zweck vorliegender Arbeit. Das Problem wird darin aber ausgedehnt auf den allgemeinen Fall des geometrischen Mittels aus n Grössen. Die Behandlung der ersten Frage führt auf Differenzengleichungen, über die daher in einem besonderen Paragraphen das nötige gesagt wird. Benutzt werden dabei die betreffenden Kapitel aus der Differenzenrechnung von Markoff. Die Absicht des Verfassers war es, die nicht gerade flüssige Darstellung bei Markoff in eine bessere Form zu bringen. Das Ergebnis im Falle zweier Grössen, eine kubische Irrationalität, zeigt mit dem sogenannten Delischen Problem eine nahe Verwandtschaft, die klar zu legen ebenfalls ein besonderer Abschnitt bestimmt ist. Vorerst aber soll über ähnliche Prozesse berichtet werden.

[2]) Deutsche Ausg. von Michelsen, S. 106.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf