Addition und Subtraktion.

Bei der **Addition** unterscheidet man den **Augend**, dem zugezählt wird, und den **Addend**, der zugezählt wird; oft sind es deren mehrere. Das Resultat der Adition heißt **Summe**, ein Begriff, der in der Algebra zu dem der **algebraischen Summe** erweitert wird. Das Additionszeichen ist +, genannt **plus** zum Unterschiede von dem copulativen „und". Es ist ein Unterschied, ob es heißt $a + b + c = 2R$ oder a und b und c sind die drei Innenwinkel eines Dreiecks.

Bei der **Subtraktion** ist der **Minuendus** die Zahl, von der subtrahiert, der **Subtrahendus** die Zahl, die subtrahiert wird. Das Resultat heißt **Differenz**, ein Begriff, der in der Algebra auch für Größen in Anwendung gebracht wird, deren Subtraktion unausgeführt bleibt. Das Zeichen der Subtraktion ist —, genannt **minus**, das dem „weniger" von vorne herein vorzuziehen ist.

Addition und Subtraktion stehen unter dem Gesetz: „Nur gleichbenannte Größen kann man addieren resp. subtrahieren", z. B.

$37\,\mathcal{M} + 8\,\mathcal{M} = 45\,\mathcal{M}$

$5\,a + 7\,a + 11\,a = 23\,a$

5 Kühe + 4 Pferde + 7 Kühe = 12 Kühe + 4 Pferde

$8\,x + 9\,y + 12\,x + 11\,y = 20\,x + 20\,y$

$4\,xy + 7\,xz + 9\,yz + 5\,xz + 5\,yz + 6\,xy = 10\,xy + 12\,xz + 14\,yz$

$5\,x^5 + 3\,x^3 + 4\,x^5 + 8\,x^3 = 9\,x^5 + 11\,x^3$

$3\sqrt[5]{xy} + 7\sqrt[5]{x^2y} + 2\sqrt[5]{x^2y} + 11\sqrt[5]{xy} = 14\sqrt[5]{xy} + 9\sqrt[5]{x^2y}$

3 E + 5 E = 8 E

7 Z + 5 E + 2 Z + 4 E = 9 Z + 9 E.

Der Vorzug des Rechnens in dem dekadischen System besteht ja gerade darin, daß gleichbenannte Größen untereinander zu stehen kommen und addiert resp. subtrahiert werden, so Zehner unter Zehner, Zehntel unter Zehntel usw. Ein sehr zu empfehlender Additions- resp. Subtraktionsversuch mit römischen Zahlen wird die zweckmäßige Einrichtung des dekadischen Systems zur Genüge beweisen. Additionen mit nebeneinander gestellten Gliedern dürfen als Vorübung für die spätere Praxis nicht vernachlässigt werden.

a) vertikal:

	T	H	Z	E
	4	6	3	8
+		5	4	9
+	9	0	8	2
+	1	7	4	5
	2	2	2	
	1	6	0	1 4

	ZT	T	H	Z	E	z	h	t	zt
	4	6	2	8	,	0	7	3	
+				0	,	4	8	5	6
+		2	5	9	,	0	3		
+	1	7	9	3	3	,	5	8	4 7
	1	1	1	2	1		2	1	1
	2	2	8	2	1	,	1	7	3 3

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) horizontal:

$$4638 + 549 + 9082 + 1745 = 16014$$
$$4628{,}073 + 0{,}4856 + 259{,}03 + 17933{,}5847 = 22821{,}1733.$$

Man addiert am besten von unten nach oben, damit die in höhere Einheiten verwandelten Zahlen zuerst verrechnet und nicht vergessen werden.

Bei gewöhnlichen Zahlen läßt man die Benennungen der dekadischen resp. decimalen Ordnungen fort und wendet sie nur so lange an, als das verstandesmäßige Eindringen in die Natur der Zahlen es erfordert.

Von hier aus ist der Übergang zur Addition resp. Subtraktion benannter Zahlen aus dem Gebiete der dezimalgeteilten Maße ein leichter:

	8 m	5 dm	6 cm	3 mm				10	12		
+	4 „	3 „	— „	8 „			8 m	— dm	2 cm	9 mm	
+	5 „	9 „	8 „	2 „		—	5. „	2. „	6 „	— „	
	1	1	1								
	18 m	8 dm	5 cm	3 mm			2 m	7 dm	6 cm	9 mm	
	17 hl	83 l						10 10		10	
+	48 „	72 „					428 qkm	— ha		3 a	
+	21 „	59 „				—	127. „	4.2. „		31 „	
	1 2	1									
	88 hl	14 l					300 qkm	57 ha		72 a	

Bei nicht decimal geteilten Maßen geschieht die Umwandlung in höhere resp. niedere Sorten mit Hilfe der entsprechenden Währungszahl.

	7 J	8 Mon	14 Tg			19	17	
+	5 „	11 „	23 „		14 Grs	7 Dtz	5 Stck	
+	2 „	9 „	28 „	—	10. „	8. „	11 „	
	2	2						
	16 J	6 Mon	5 Tg		3 Grs	10 Dtz	6 Stck	

Ungleich benannte Größen kann man nicht addieren, man kann sie aber auf gleiche Bennenung bringen.

$$5\ Z + 8\ z = 500\ z + 8\ z = 508\ z$$
$$= 5\ Z + 0{,}08\ Z = 5{,}08\ Z$$
$$= 50\ E + 0{,}8\ E = 50{,}8\ E$$

Im praktischen Leben bringt man sie stets auf Einer, wobei man die Benennung fortläßt.

$$\begin{array}{rl} 50 & (E) \\ +\ 0{,}8 & \\ \hline 50{,}8 & (E) \end{array}$$

$$421\ z - 743\ t = 42{,}1 - 0{,}743 = 41{,}357$$

1. Aufgabe: 4 a 15 qm + 3 ha 7 a 9 qm + 2 ha 42 a 45 qm = ?

$$\begin{array}{rl} & 4{,}15\ a \\ +\ & 307{,}09\ „ \\ +\ & 242{,}45\ „ \\ & 1\ \ 1 \\ \hline & 553{,}69\ a \end{array}$$

Antwort: 5 h 53 a 69 qm

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. **Aufgabe:** 528 ℔ — 3,14 ℳ

$$\begin{array}{r} 5{,}28\ \mathcal{M} \\ -\ 3{,}14\ \text{„} \\ \hline 2{,}14\ \mathcal{M} \end{array}$$

Bei der Addition resp. Subtraktion der Brüche ist gleichfalls von der Regel auszugehen, daß nur gleichbenannte d. s. **gleichnamige** Brüche vereinigt werden können:

$$\tfrac{7}{23} + \tfrac{2}{23} + \tfrac{5}{23} + \tfrac{3}{23} = \tfrac{17}{23}$$

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}; \qquad \tfrac{9}{11} - \tfrac{4}{11} = \tfrac{5}{11}$$

$$\frac{3\,m}{4\,n} - \frac{5\,p - 2\,m}{4\,n} = \frac{3\,m - 5\,p + 2\,m}{4\,n} = \frac{5\,m - 5\,p}{4\,n}$$

Ungleichnamige Brüche kann man nicht vereinigen. Man kann sie aber gleichnamig machen d. h. ihnen gleichen Nenner geben.

$$\overset{7}{\tfrac{3}{4}} + \overset{4}{\tfrac{5}{7}} = \tfrac{21}{28} + \tfrac{20}{28} = \tfrac{21+20}{28} = \tfrac{41}{28} = 1\tfrac{13}{28}$$

Zu diesem Zwecke werden die Brüche einzeln **erweitert.** Die Zahlen, mit denen dies geschieht, heißen **Erweiterungszahlen.** Der allen Brüchen gemeinschaftliche Nenner heißt **Hauptnenner.** Er ist das **kleinste gemeinschaftliche Vielfache** aller ursprünglichen Nenner, für dessen Auffindung das Verfahren a. a. O. angegeben ist.

Aufgabe: $\overset{8}{\tfrac{13}{15}} + \overset{3}{\tfrac{27}{40}} + \overset{10}{\tfrac{11}{12}}$

$$\begin{array}{rl} & 15 \quad 40 \quad 12 \\ \hline 15 & = \underline{3 \cdot 5} \\ 40 & = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 5 \\ 12 & = 2 \cdot 2 \cdot 3 \\ \hline \text{HN} & = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ & = 120 \end{array}$$

$$\tfrac{104}{120} + \tfrac{81}{120} + \tfrac{110}{120} = \tfrac{295}{120} = 2\tfrac{55}{120} \overset{5}{=} 2\tfrac{11}{24}$$

Aufgabe: $\overset{9}{\tfrac{5}{8}} - \overset{8}{\tfrac{4}{9}} = \tfrac{45-32}{72} = \tfrac{13}{72}$

Aufgabe: $\dfrac{\overset{6}{19\,a}}{20\,bc} - \dfrac{\overset{4}{26\,a}}{30\,bc} + \dfrac{\overset{5}{7\,a}}{24\,bc} =$

$$\frac{114\,a}{120\,bc} - \frac{104\,a}{120\,bc} + \frac{35\,a}{120\,bc} =$$

$$\frac{114\,a - 104\,a + 35\,a}{120\,bc} = \frac{45\,a}{120\,bc} \overset{15}{=} \frac{3\,a}{8\,bc}$$

Aufgabe: $\dfrac{\overset{9fgh^3}{3\,h}}{50\,f^2g} - \dfrac{\overset{75f^3}{f}}{6\,g^2h^3} + \dfrac{\overset{10g^2h^2}{2\,g}}{45\,f^3h}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{aligned} 50\,f^2g &= \underline{2 \cdot 5 \cdot 5}\,f^2g \\ 6\,g^2h^3 &= 2 \cdot 3\,\underline{g^2}\,\underline{h^3} \\ 45\,f^3h &= \underline{3 \cdot 3} \cdot 5\,\underline{f^3}h \\ \hline HN &= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5\,f^3g^2h^3 \\ &= 450\,f^3g^2h^3 \end{aligned}$$

$$\frac{27\,fgh^4 - 75\,f^4 + 20\,g^3h^2}{450\,f^3g^2h^3}$$

Aufgabe: $$\frac{\overset{30}{xy + y^2}}{4x^2 - 9y^2} + \frac{\overset{5(2x-3y}{x + y}}{12x + 18y} - \frac{\overset{3(2x+3y}{x - y}}{20y - 30y} =$$

$$\begin{aligned} 4x^2 - 9y^2 &= (2x + 3y)(2x - 3y) \\ 12x + 18y &= 6\,(2x + 3y) \\ 20x - 30y &= 10\,(2x - 3y) \\ \hline HN &= 2 \cdot 3 \cdot 5\,(2x + 3y)(2x - 3y) \end{aligned}$$

$$\frac{(xy + y^2) \cdot 30}{120x^2 - 270y^2} + \frac{(x + y) \cdot (10x - 15y)}{120x^2 - 270y^2} - \frac{(x - y)(6x - 9y)}{120x^2 - 270y^2} =$$

$$\frac{4x^2 + 22xy + 24y^2}{120x^2 - 270y^2} = \frac{2\,(x + 4y)(2x + 3y)}{30\,(2x + 3y)(2x - 3y)} = \frac{x + 4y}{30x - 45y}$$

Bei größeren Aufgaben in der Bruchrechnung, besonders bei gemischten Zahlen zieht man die Stellung untereinander als die bequemere vor, z. B.

Aufgabe: $516\frac{17}{48} + 43\frac{53}{60} + 637\frac{59}{80} + 75\frac{83}{120}$

Man sucht zunächst den Hauptnenner, dann ermittelt man die Erweiterungszahlen und erweitert die einzelnen Brüche, deren Zähler dann addiert resp. subtrahiert werden wie folgt:

Aufgabe:

			240
	$516\frac{17}{48}$	5	85
+	$43\frac{53}{60}$	4	212
+	$637\frac{59}{80}$	3	177
+	$75\frac{83}{120}$	2	166
	$1273\frac{2}{3}$		$\frac{640}{240} = 2\frac{160}{240} = 2\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 48 &= \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3 \\ 80 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ 120 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3 \cdot 5} \\ \hline HN &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 240 \end{aligned}$$

Aufgabe:

			228
	$53\frac{35}{76}$	3	105
			333
−	$29\frac{31}{57}$	4	124
	$23\frac{11}{12}$		$\frac{209}{228} = \frac{11}{12}$

$$\begin{aligned} 76 &= \underline{2 \cdot 2} \cdot 19 \\ 57 &= \underline{3} \cdot \underline{19} \\ \hline HN &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 \\ &= 228 \end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Additive Subtraktion.

Bei der Subtraktion ist jetzt allgemein die östreichische, die additive Subtraktionsmethode in Aufnahme gekommen. Sie hat eine Reihe von Vorzügen vor der sogenannten „Borgmethode“ und dürfte jener wegen ihrer allgemeinen Verwertbarkeit vorzuziehen sein. Subtrahieren heißt doch, eine Zahl suchen, die zum Subtrahendus addiert, den Minuendus ergibt, z. B. 8 — 3 heißt, es soll zu 3 eine Zahl 5 gesucht werden, die mit ihr zusammen 8 ergibt. Diese Methode findet im praktischen Leben bei allen Kassen Anwendung. Es wird beim Kaufmann der zu zahlende Betrag nicht etwa von der gegebenen Geldsumme abgezogen, subtrahiert, sondern es wird zu dem zu zahlenden Betrage die noch fehlende Summe ergänzend zugezählt, bis die gegebene Summe voll ist. Der Vorteil liegt auf der Hand, indem durch das leichtere Zuzählen bis zum vollen Betrage gleichzeitig eine Kontrolle ausgeübt wird. Demgemäß rechnet man auch bei der additiven Subtraktionsmethode.

$$\begin{array}{r} 9478 \\ -\ 4215 \\ \hline 5263 \end{array}$$

und liest: 5 plus **3** ist 8; 1 plus **6** ist 7; 2 plus **2** ist 4; 4 plus **5** ist 9, wobei gleichzeitig die fettgedruckten Zahlen geschrieben werden.

Ist eine Ziffer des Minuendus, im folgenden Beispiel 3, kleiner als die entsprechende des Subtrahendus, so wird erstere um eine Einheit der höheren Ordnung vermehrt. Wir erhalten also 13, von welcher Zahl die Subtraktion möglich ist. Die oben zugezählte Einheit wird mit dem Subtrahendus zugleich an der entsprechenden Stelle, hier mit den 4 Zehnern zusammen wieder abgezogen. Als Zeichen dafür gilt ein neben die 4 gesetzter Punkt.

Das Beispiel lautet dann:

$$\begin{array}{r} \overset{13}{\smile} \\ 83 \\ -\ 4.7 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \text{ „ } \mathbf{6} \text{ ist } 13 \\ 1 \text{ u. } 4 \text{ ist } 5 \text{ plus } \mathbf{3} \text{ ist } 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \overset{14}{\smile}\ \overset{16}{\smile} \\ 18456 \\ -\ .54.9 \\ \hline 17907 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \text{ plus } \mathbf{7} \text{ ist } 16 \\ 1 \text{ u. } 4 \text{ ist } 5 \text{ „ } \mathbf{0} \text{ „ } 5 \\ 5 \text{ „ } \mathbf{9} \text{ „ } 14 \\ 1 \text{ „ } \mathbf{17} \text{ „ } 18 \end{array}$$

Daß die übergeschriebenen Zahlen im Laufe des Unterrichtes bald fortfallen können, wird jeder Schüler bald einsehen lernen, doch ist die Beibehaltung des Punktzeichens im Subtrahend sehr zu empfehlen, weil dadurch eine Unmenge Rechenfehler vermieden werden.

Der Übergang zu dezimalen Zahlen bedingt keine Änderung in der Methode.

$$\begin{array}{r} 93{,}7 \\ -\ 2.8{,}4 \\ \hline 65{,}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \text{ plus } \mathbf{3} \text{ ist } 7 \\ 8 \text{ „ } \mathbf{5} \text{ „ } 13 \\ 1 \text{ u. } 2 \text{ ist } 3 \text{ „ } \mathbf{6} \text{ „ } 9 \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dasselbe Verfahren gilt bei der Subtraktion mehrfach benannter Zahlen, falls die Währungszahlen dem dezimalen System angehören:

	8 m	$\overset{13}{3}$ dm	4 cm	$\overset{15}{5}$ mm
—	5. „	6 „	2. „	8 „
	2 m	7 dm	1 cm	7 mm

Sind die Maße nicht dezimal geteilt, so wird hier eine Sorte höherer Ordnung in solche niederer Ordnung verwandelt, indem mit der entsprechenden Währungszahl multipliziert wird, im folgenden Beispiele J in Mon, Mon in Tg.

						4	plus	9 ist 13
	6 J	$\overset{17}{5}$ Mon	$\overset{43}{13}$ Tg		1 u. 2 ist	3	„	1 „ 4
—	2. „	8. „	24 „		oder	24	„	19 „ 43
	3 J	8 Mon	19 Tg					

Recht vorteilhaft läßt sich diese Methode anwenden bei der Subtraktion einer Summe von Zahlen.

Aufgabe: 528 — (72 + 37 + 94)

	528	
—	72	4 u. 7 ist 11 u. 2 ist 13 plus 5 ist 18
—	37	1, 10, 13, 20 „ 2 „ 22
—	94	2 „ 3 „ 5
	325	

Ausgedehnte Anwendung findet letzteres vielfach bei logarithmischen Berechnungen, wo die Logarithmen des Nenner mit einem Male subtrahiert werden können.

Aufgabe: $\log\sin\beta = \frac{2\,J}{ac}$

	log 2 J	= 2,77449
—	log a	= 1,38561
—	log c	= 1,45788
	logsin β	= 0,93100 — 1
	β	= 58° 33′

Ist bei der Subtraktion von Brüchen der Zähler im Minuendus kleiner als im Subtrahendus, so wird eine Einheit höherer Ordnung, d. i. 1 Ganzes, in unserem Beispiele also $\frac{56}{56}$ zu den vorhandenen $\frac{8}{56}$ addiert (sie stehen schon untereinander), und geben $\frac{64}{56}$

			56
	$12\frac{1}{7}$	8	~~8~~
			64
—	$9.\frac{7}{8}$	7	4.9
	$2\frac{15}{56}$		$\frac{15}{56}$

Man rechnet jetzt: 9 plus 5 ist 14
1 u. 4 ist 5 „ 1 „ 6

Das eine Ganze ist nachher mit der 9 zusammen abzuziehen.

1 u. 9 ist 10 plus 2 ist 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Soll der Subtrahendus zuvor multipliziert werden, so lassen sich Multipikation und Subtraktion zuweilen wie folgt verbinden:

Aufgabe: 8536 — 843 · 4

```
      8536
    — 843 · 4
    321
    ------
      5164
```

	3	mal	4	ist	12	plus	4	ist 16
1 u.	4	„	4	„	17	„	6	„ 23
2 u.	8	„	4	„	34	„	1	„ 35
					3	„	5	„ 8

Besonderen Nutzen gewährt die additive Subtraktionsmethode bei der Division, bei der durch Fortlassen und sofortiges Verrechnen der Teilprodukte die Rechnung bedeutend abgekürzt werden kann.

a) Division mit Teilprodukten:

```
430803 : 453 = 951
4077
 2310
 2265
   453
   453
     0
```

b) Division ohne Teilprodukte:

```
430803 : 453 = 951
2310
  453
    0
```

	3 · 9	ist	27	plus	1	ist 28		
2 u.	5 · 9	„	47	„	3	„ 50		
5 u.	4 · 9	„	41	„	2	„ 43		

Dies ist recht fleißig zu üben, da es bei dem späteren ziffermäßigen Rechnen manche Erleichterung gewährt, so auch beim Ausziehen der Quadratwurzel.

```
√6'00'25 = 245        gekürzt  √6'00'25 = 245
4                              200      : 44
20·0     : 44                    2425   : 485
176                                    0
 2425·5  : 485
 2425
    0
```


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Multiplikation.

Bei der **Multiplikation** hat man eine **passive** Zahl, die multipliziert wird, den **Multiplikandus**, und eine **aktive**, mit der multipliziert wird, den **Multiplikator**. Das Resultat heißt **Produkt**, ein Begriff, der bei der Buchstabenrechnung auch auf die unausgeführte Multiplikation übertragen wird, wobei die Begriffe Multiplikator und Multiplikandus in den weitergefaßten Begriff **Faktor** übergehen. Als Zeichen für die Multiplikation nehme man von vorne herein den Punkt (·) „mal" gelesen. Das liegende Kreuz als Multiplikationszeichen ist besser zu vermeiden, da es früher oder später doch fallen gelassen wird, auch sonst leicht zu Verwirrungen mit dem später auftauchenden x führen kann.

Der Multiplikandus steht in Übereinstimmung mit dem Sprachgebrauch stets vor dem Multiplikator, so daß beide daran schon kenntlich sind, so sind in

$$7{,}36\,\mathrm{m} \cdot 9$$
$$(7x + 1) \cdot 3$$
$$(8x + 1)\ (2x + 3)$$

9, 3, $2x + 3$ die Multiplikatoren. Bei der geometrischen Reihe a, ae, ae^2, ae^3 . . . findet sich übrigens dieselbe Anordnung. Die Durchführung dieses Prinzips in der Stellung sichert dem Unterrichte manche Erleichterung und fördert vor allem die gemeinschaftliche Verständigung zwischen Schüler und Lehrer, die bei willkürlicher Anordnung leider oft zu wünschen übrig läßt. So tritt bei der Lösung der Gleichung

$$5x + 1 = \frac{2}{x + 1}$$

$x + 1$ als Multiplikator hinter $5x + 1$ auf, also

$$(5x + 1)\ (x + 1) = 2$$

In vielen Fällen unterstützt diese Stellung die Ableitung der Regeln. Ist $(7x + 1)$ $(2x + 3)$ zu lösen, so ist der Multiplikandus $(7x + 1)$, die passive Zahl, mit dem Multiplikator $(2x + 3)$, der aktiven Zahl oder Größe, d. h. mit dem ganzen Ausdruck oder mit jedem Gliede einzeln zu multiplizieren.

$$(7x + 1) \cdot 2x + (7x + 1) \cdot 3$$

Im Einklang mit der Stellung müßte dann auch der mündliche Ausdruck bei der Multiplikation selbst stehen, es müßte in dem folgenden Beispiel heißen

$$\begin{array}{r} 843 \cdot 7 \\ \hline 5901 \end{array} \quad \text{statt} \quad \begin{array}{l} 3 \cdot 7 =;\ \ 4 \cdot 7 =;\ \ 8 \cdot 7 =; \\ 7 \cdot 3,\ \ 7 \cdot 4,\ \ 7 \cdot 8, \end{array}$$

also stets die Ziffer des Multiplikandus zuerst genannt werden.

Wegen der späteren Anwendung bei der abgekürzten Multiplikation beginne man bei der Multiplikation zweier Zahlen stets mit der größten Ordnung des Multiplikators zuerst zu multiplizieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

```
                                  0,3415 · 428,37
      4302 · 3027                 136 60
12906                               6 830
  8604                              2 7320
  30114                               10245
13022154                               23905
                                  146,288355
```

Für die Multiplikation mit dezimalen Zahlen gilt dasselbe, und es muß die Stellung der Ziffern in den Teilprodukten stets die sein, die ihnen ihr Wert im dezimalen System zuweist. Es steht deshalb vor allen Dingen Komma unter Komma, Einer unter Einer, Zehntel unter Zehntel u. s. f. — Das Verfahren läßt sich allgemein durch die Regel ausdrücken: „Man multipliziert mit einem E; Z, z; H, h; T, t usw., indem man bei feststehendem Komma das Resultat um 0, 1, 2, 3 usw. Stellen nach links resp. rechts rückt. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung mag dann immerhin gelten, daß die Zahl der Dezimalen hinter dem Komma im Resultat ebenso groß ist, als im Multiplikandus und Multiplikator zusammen.

Bei der Multiplikation mehrfach benannter Zahlen verwandelt man entweder alles in eine Sorte und multipliziert dann, wobei sich die Notwendigkeit ergibt, das erhaltene Resultat wieder zu reduzieren, z. B.

Aufgabe: (140 Schck 2 Mdl 9 Stck) · 23

```
140 (Schck) · 4 + 2 (Mdl)                8439 Stck · 23
562 (Mdl) · 15 + 9 (Stck)                16878
8439 (Stck)                              25.317
                                         194097 Stck
```

```
194097 (Stck) : 15 = 12939 (Mdl) Rest 12 (Stck)
44
140
59
147
12

12939 (Mdl) : 4 = 3234 (Schck) Rest (3 Mdl)
13
19
3
```

Antwort: 3234 Schck 3 Mdl 12 Stck.

oder man multipliziert jede Sorte für sich und verrechnet dabei gleich die dabei erhaltenen höheren Sorten.

Aufgabe: (140 Schck 2 Mdl 9 Stck) · 23

```
14                13                    18
280               46                    27
420               59 (Mdl) : 4 = 14 (Schck) Rest 3 (Mdl)   207 (Stck) : 15 = 13 (Mdl) Rest 12 (Stck)
3234 (Schck)      19                    57
                  3                     12
```

Antwort: 3234 Schck 3 Mdl 12 Stck.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind die Multiplikatoren zerlegbare Zahlen, so kann man wiederholt mit ihren Faktoren multiplizieren, wobei man dem Kopfrechnen einen weiten Raum lassen kann.

	(17 Tg	8 Std	— Min	36 Sek) · 32	(8 · 4)
4 Mon	18 „	16 „	4 „	48 „	
1 J 6 Mon	14 Tg	16 Std	19 Min	12 Sek	

Die Behandlung der Brüche bildet eine wichtige Vorstufe für das Rechnen mit algebraischen Quotienten. Die folgenden Beispiele mögen den Übergang und die Behandlung derselben bei der Multiplikation zeigen.

1. $\frac{2}{7} \cdot 5 = \frac{2 \cdot 5}{7} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$

2. $\frac{x}{y} \cdot z = \frac{x \cdot z}{y}$

3. $\frac{x}{y^2} \cdot y = \frac{x \cdot y}{y^2} \overset{y}{=} \frac{x}{y}$

4. $\frac{5\,a^2b^2}{12\,cd} \cdot 21\,a^2c^2 = \frac{5\,a^2b^2 \cdot 21\,a^2c^2}{12\,cd} \overset{3c}{=} \frac{5 \cdot 7\,a^4b^2c}{4\,d} = \frac{35\,a^4b^2c}{4\,d}$

5. $8\frac{5}{9} \cdot \frac{27}{33} = \frac{77}{9} \cdot \frac{27}{33} = \frac{77 \cdot 27}{9 \cdot 33} \overset{11 \cdot 9}{=} \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 3} \overset{3}{=} 7$

6. $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^3}{x^2} = \frac{x^2y^3}{yx^2} \overset{x^2y}{=} y^2$

7. $\frac{6\,a^3x^5}{25\,b^2y^4} \cdot \frac{15\,by^5}{4\,a^4x^4} = \frac{6\,a^3x^5 \cdot 15\,by^5}{25\,b^2y^4 \cdot 4\,a^4x^4} \overset{2 \cdot 5a^3bx^4y^4}{=} \frac{3 \cdot 3\,xy}{5 \cdot 2\,ab} = \frac{9\,xy}{10\,ab}$

Die Zwischenstufen in der Rechnung sind anfangs nicht zu vernachlässigen, denn dadurch prägt sich das Verfahren tiefer ein und bildet bei schwierigen algebraischen Multiplikationen einen Stützpunkt für den einzuschlagenden Weg.

Division.

Bei der **Division** ist der **Dividendus** die passive Zahl, die dividiert wird. Sie steht immer vorne. Der **Divisor** ist die aktive Zahl, durch die dividiert wird. Sie steht stets hinten. Das Resultat heißt **Quotient**, auch wenn die Division bei Buchstabengrößen nicht ausführbar ist. Das Divisionszeichen ist der Doppelpunkt — : — gelesen „dividiert durch". — Man lese entsprechend der Schreibweise zuerst den Dividendus 21 : 7 = 3 als 21 dividiert durch 7 ist 3 und vermeide Ausdrücke wie „geht dreimal" oder 7 in 21 ist 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Stellung der Divisionsgrößen bleibt auch in der Algebra dieselbe, stets ist die hinten stehende Zahl der Divisor, eine Stellung, die sich auch bei dem Ausziehen der Quadratwurzel wiederfindet.

1. $(4a - 8ab + 10ac) : 6ab = \frac{2}{3b} - \frac{4}{3} + \frac{5c}{3b}$

2. $(49a^4 - 25a^2 - 40a - 16) : (7a^2 - 5a - 4) = 7a^2 + 5a + 4$

$$\begin{array}{rrrr}
49a^4 & - 28a^2 & - 35a^3 & \\
\hline
+35a^3 & + 3a^2 & - 40a & \\
+35a^3 & - 25a^2 & - 20a & \\
\hline
 & + 28a^2 & - 20a & - 16 \\
 & + 28a^2 & - 20a & - 16 \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

3. $\sqrt{7|02|25} = 265$

$$\begin{array}{lll}
4 & & \\
\hline
30{\cdot}2 & : & 46 \\
276 & & \\
\hline
262{\cdot}5 & : & 525 \\
2625 & & \\
\hline
0 & &
\end{array}$$

Das Dividieren zerfällt in zwei Arten:

1) das **eigentliche Dividieren** oder **Teilen,** bei welchem der Dividendus in soviel gleiche Teile geteilt wird, als der Divisor angibt. Der Quotient trägt in diesem Falle die Benennung des Dividendus, z. B.

5679 m : 3 = 1893 m

2) Das **Enthaltensein** oder **Messen,** wobei festgestellt wird, wie oft eine Größe, der Divisor, in einer anderen, dem Dividendus, enthalten ist. Sowohl Dividendus als auch Divisor tragen dieselbe Benennung. Der Quotient ist eine unbenannte Zahl.

5679 m : 3 m = 1893

Bei dem **Messen** müssen Dividendus und Divisor gleichbenannte Zahlen sein. Fehlt die gleiche Benennung, so wird diese vor der Division erst geschaffen.

1. Aufgabe: 10,4689 a : 13 qm
10,4689 a : 0,13 a = 80,53

2. Aufgabe: Wie oft sind 2 ℳ 5 ₰ in 776 ℳ 95 ₰ enthalten?
a) 776,95 ℳ : 2,05 ℳ = 379
b) 77695 ₰ : 205 ₰ = 379

3. Aufgabe: Wie oft sind 3 Tg 3 Std 58 Min in 158 Tg 6 Std 20 Min enthalten?
227950 Min : 4558 Min = 50
Antwort: 3 Tg 3 Std 58 Min sind in 158 Tg 6 Std 20 Min 50 mal enthalten.

Bei dem **Teilen** kann man die einzelnen Teilprodukte, die man anfangs der besseren Übersicht und Sicherheit wegen noch braucht, auch fortlassen und das Teilprodukt von dem jeweiligen Minuendus sofort im Kopfe subtrahieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

```
5679 : 3 = 1893        5679 : 3 = 1893
3                      26
26                      27
24                       9
 27
 27
  9
  9
  0
```

Die Division geht nicht immer auf, es bleibt zuweilen ein Rest.

```
218334 : 153 = 1427 Rest 3
653
 413
 1074
    3
```

In der Bruchrechnung wird die abgebrochene Division als Bruch angedeutet

$$218334 : 153 = 1427\tfrac{3}{153}$$

Bei der Dezimalbruchrechnung wird die Division weitergeführt, indem man den Rest in niedere Einheiten verwandelt und dann weiter dividiert.

```
218334 : 153 = 1427,0196...
653
 413
 1074
    300
    1470
     930
      12 ...
```

Man stößt dabei auf endliche und periodische Dezimalbrüche.

Bei der Division mehrfach benannter Zahlen wird man bei einfacheren Beispielen jede Sorte für sich dividieren.

```
(331 Tg   15 Std   40 Min   12 Sek) : 36 = 9 Tg 5 Std 6 Min 7 Sek
  7    + 168     + 180     + 240
         183       220       252
           3         4         0
```

Sonst dürfte es sich empfehlen, die verschiedenen Sorten in eine einzige zu verwandeln und dann zu dividieren.

545 kg 748 g : 84 = 545748 g : 84 = 6497 g = 6 kg 497 g

Bei den gemeinen Brüchen kommt man mit der Regel aus: „Durch einen Bruch wird dividiert, indem man mit seinem umgekehrten Werte multipliziert.“ Es gilt dies auch für ganze Zahlen, zu denen man sich den Nenner 1 ergänzt denken kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. $\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{4 \cdot 7} = \frac{3}{28}$

2. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$

3. $\frac{16\,xy}{21\,pq} : 5\frac{1}{3}\,px = \frac{16\,xy}{21\,pq} \cdot \frac{3}{16\,px} = \frac{3 \cdot 16 \cdot xy}{21 \cdot 16\,p^2qx} = \frac{y}{p^2q}$

4. $7 : \frac{3}{4} = 7 \cdot \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

5. $na : \frac{n}{b} = na \cdot \frac{b}{n} = \frac{nab}{n} = ab$

6. $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$

7. $7\frac{3}{11} : 3\frac{1}{13} = \frac{80}{11} \cdot \frac{13}{40} = \frac{80 \cdot 13}{11 \cdot 40} = \frac{2 \cdot 13}{11 \cdot 1} = \frac{26}{11} = 2\frac{4}{11}$

8. $\frac{3\,p^2}{10\,q^2} : \frac{6\,p^3}{35\,q^2} = \frac{3\,p^2 \cdot 35\,q^2}{10\,q^2 \cdot 6\,p^3} = \frac{7}{4\,p}$

9. $\left(\frac{3\,ab}{2\,xy} - \frac{4\,a}{3\,x} + \frac{5\,b}{4\,y}\right) : \frac{5\,by}{6\,ax} = \frac{3\,ab \cdot 6\,ax}{2\,xy \cdot 5\,by} - \frac{4\,a \cdot 6\,ax}{3\,x \cdot 5\,by} + \frac{5\,b \cdot 6\,ax}{4\,y \cdot 5\,by} =$

$\frac{9\,a^2}{5\,y^2} - \frac{8\,a^2}{5\,by} + \frac{3\,ax}{2\,y^2}$

10. $\frac{x+3}{3\,x} : \frac{5\,x}{x-5} = \frac{(x+3)\,(x-5)}{3\,x \cdot 5\,x} = \frac{x^2 - 2\,x - 15}{15\,x^2}$

Bekanntlich ist jeder Bruch eine angedeutete Division, also $\frac{3}{4} = 3 : 4$. Es gibt also zwei verschiedene schriftliche Darstellungen für das gegenseitige Verhältnis dieser beiden Größen, die auch in der mündlichen Wiedergabe eine Unterscheidung verlangen, eine Notwendigkeit, die besonders bei den Doppelbrüchen und komplizierten algebraischen Ausdrücken sich geltend macht. Man bezeichnet dann das erste Verhältnis mit **„durch“**, das zweite mit **„dividiert durch“**. Demnach liest man:

1. $\frac{3\frac{1}{2} + 4}{7\frac{1}{2}}$ als $3\frac{1}{2} + 4$ durch $7\frac{1}{2}$

$(3\frac{1}{2} + 4) : 7\frac{1}{2}$ als $3\frac{1}{2} + 4$ dividiert durch $7\frac{1}{2}$

und unterscheidet zwischen

2. $\frac{8\,x^2 + 9\,x + 4}{2\,a}$ durch $2\,a$ und

$(8\,x^2 + 9\,x + 4) : 2\,a$ dividiert durch $2\,a$.

„Durch eine Dezimalzahl kann man **nicht** dividieren.“ Um die Division zu ermöglichen, erweitert man die Aufgabe derart, daß der Divisor eine ganze Zahl wird und deutet die Erweiterung durch hochgestellte Kommata an.

1. $7{,}6' : 0{,}4' = 19$
2. $336 \cdot ' : 0{,}4' = 840$
3. $733{,}23'6 : 74{,}82' = 9{,}8$

```
673 38
 59 856
 59 856
      0
```


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zerlegen in Primfaktoren.

Man teilt die Zahlen in **Primzahlen** und **zusammengesetzte Zahlen.** Nur die letzteren haben Teiler. Man kann sie in Produkte von Primfaktoren zerlegen.

$$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

Von den vielen schriftlichen Darstellungen scheint die nachstehende am durchsichtigsten, weil sie die Entstehung des Produktes der Primfaktoren am deutlichsten vor Augen führt.

$$\begin{aligned} 2835 &= 3 \cdot 945 \\ &\quad\;\; 3 \cdot 315 \\ &\qquad\;\; 3 \cdot 105 \\ &\qquad\qquad 3 \cdot 35 \\ &\qquad\qquad\quad 5 \cdot 7 \\ \hline 2835 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ &= 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Erkennt man in einer Zahl von vorne herein mehrere Primfaktoren, so kann man diese natürlich sofort aussondern.

$$\begin{aligned} 5544 &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 693 \\ &\qquad\qquad 3 \cdot 3 \cdot 77 \\ &\qquad\qquad\qquad\quad 7 \cdot 11 \\ \hline 5544 &= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11 \end{aligned}$$

Größter gemeinschaftlicher Teiler.

Das Zerlegen in Primfaktoren ist notwendig, um die Teiler einer Zahl ausfindig zu machen.

$$234 = 3 \cdot 7 \cdot 11$$

hat die Teiler: 3, 7, 11, 21, 33, 77.

Durch Vergleichen der Primfaktoren zweier oder mehrerer Zahlen findet man die gemeinschaftlichen Teiler.

Aufgabe: Suche sämtliche gemeinschaftlichen Teiler von 1365 und 130.

$$130 = 2 \cdot \underline{5} \cdot \underline{13}$$

$$1365 = 3 \cdot \underline{5} \cdot 7 \cdot \underline{13}$$

Gemeinschaftliche Teiler sind: 5, 13, 65.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der größte gemeinschaftliche Teiler ist dann das Produkt sämtlicher gemeinschaftlichen Primfaktoren.

$$126 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3} \cdot 7$$
$$90 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$$

Der größte gemeinschaftliche Teiler ist $2 \cdot 3 \cdot 3$ oder 18.

Aufgabe: $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$
$3528 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2$
$5544 = 2^3 \quad 3^2 \cdot 7 \cdot 11$
$7560 = 2^3 \quad 3^3 \quad 7 \cdot 5$

gemeinschaftlich sind 2^3, 3^2, 7
der größte gemeinschaftliche Teiler ist dann $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ oder 504.

Der größte gemeinschaftliche Teiler findet seine hauptsächlichste Anwendung bei dem Kürzen der Brüche, wenn man wiederholte Kürzungen vermeiden will.

Nicht immer läßt er sich so leicht ermitteln wie in den vorstehenden Beispielen, wo die Zahlen kleine Primfaktoren enthalten. Sind diese größer und macht die Zerlegung der Zahlen Schwierigkeiten, so wendet man die Kettendivision an, wobei man die größere Zahl durch die kleinere dividiert, diese wieder durch den Rest usw. Der letzte ohne Rest aufgehende Divisor ist der gesuchte größte gemeinschaftliche Teiler.

Aufgabe: Suche den größten gemeinschaftlichen Teiler von 1256 und 785.

1	1	1	2	
1256 :	785 :	471 :	314 :	157
785	471	314	314	
471	314	157	0	

Antwort: Der größte gemeinschaftliche Teiler ist 157.

Ist der letzte Divisor 1, so haben die beiden Zahlen außer 1 keinen anderen gemeinschaftlichen Teiler.

Aufgabe: 1616 und 1001.

1	1	1	1	1	2	5	1	1	
1616 :	1001 :	615 :	386 :	229 :	157 :	72 :	13 :	7 :	6 : 1
1001	615	386	229	157	144	65	7		
615	386	229	157	72	13	7	6		

Die Quotienten der Teildivisionen, die hier über dem jeweiligen Dividendus stehen, sind von untergeordneter Bedeutung und können auch ganz fortgelassen werden.

Das kleinste gemeinschaftliche Vielfache.

Eine weitere Verwendung des Zerlegens der Zahlen in Primfaktoren bietet sich bei der Auffindung des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen, wie man es gebraucht, um den Hauptnenner ungleichnamiger Brüche zu finden. Zwei Zahlen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$18 = 2 \cdot \underline{3 \cdot 3}$$
$$24 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3$$

sind gleichzeitig nur in einer Zahl enthalten, die sowohl die Primfaktoren der einen $(2 \cdot 3 \cdot 3)$ als auch die der anderen Zahl $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3)$ enthält. Das kleinste Vielfache ist demnach $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ oder 72.

Aufgabe: Suche das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Zahlen 50, 56, 60, 35.

$$50 = 2 \cdot \underline{5 \cdot 5}$$
$$56 = \underline{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \underline{7}$$
$$60 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$$
$$35 = 5 \cdot 7$$

kleinstes gemeinsames Vielfaches $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200$

Gilt es, die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{7}{15}, \frac{18}{35}, \frac{10}{27}, \frac{19}{40}, \frac{13}{48}$ zu addieren, so sucht man das für sämtliche Nenner gemeinsame kleinste Vielfache, welches hier den Namen Hauptnenner hat.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 15 & 35 & 27 & 40 & 48 \\ \hline & 15 & = & 3 \cdot 5 & & \\ & 35 & = & \underline{5 \cdot 7} & & \\ & 27 & = & \underline{3 \cdot 3 \cdot 3} & & \\ & 40 & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 & & \\ & 48 & = & \underline{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 3 & & \\ \hline & \mathrm{HN} & = & 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 & & \\ & & = & 2^4 \cdot 3^3\, 5 \cdot 7 & & \\ & & = & 15120 & & \end{array}$$

Die Addition resp. Subtraktion algebraischer Quotienten, die gleichnamig zu machen sind, die Auflösung von Gleichungen, in denen die Nenner fortgeschafft werden müssen, erfordern ebenfalls das Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen oder des Hauptnenners, z. B.

1. $$\frac{3x}{2ab^2c^3} + \frac{4y}{3a^3bc^2} - \frac{5z}{4a^3bc}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a\underline{b^2}\,\underline{c^3} \\ \underline{3}\,\underline{a^3}bc^2 \\ \underline{4}\,a^3bc \end{array}\right\} \mathrm{HN} = 3 \cdot 4a^3b^2c^3$$

$$\frac{18a^2x + 16bcy - 15bc^2z}{12a^3b^2c^3}$$

2. $$\frac{\overset{20x}{\smile}}{\frac{7}{3}} + \frac{\overset{12}{\smile}}{\frac{13}{5x}} = \frac{\overset{20}{\smile}}{\frac{13x - 24}{3x}} - \frac{\overset{3x}{\smile}}{\frac{37}{20}} + \frac{\overset{60}{\smile}}{\frac{10}{x}}$$

Der HN enthält die Größen 3, 5x, 3x, 20, x

$$\mathrm{HN} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x$$
$$= 60x$$

Die Erweiterungszahlen sind Teiler des Hauptnenners.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. $\frac{3x - 19}{x - 3} + \frac{7x - 1}{3x - 9} - \frac{2(2x - 1)}{5x - 15} = 4$

Der Hauptnenner enthält die Größen $x - 3$, $3(x - 3)$, $5(x - 3)$

$$HN = 3 \cdot 5 \cdot (x - 3)$$

Demnach sind die Erweiterungszahlen für die einzelnen Glieder $3 \cdot 5$; 5; 3; $3 \cdot 5 \cdot (x - 3)$.

Dezimalbrüche.

Sie treten als dezimale Zahlen schon recht früh auf, und der Sextaner lernt die dezimalen Ordnungen an der Hand leichter Aufgaben mit mehrfach benannten Zahlen kennen, ohne eine Ahnung von ihrer Bedeutung als Brüche zu haben. Er lernt sie addieren und subtrahieren, auch multiplizieren und dividieren, letzteres allerdings nur mit ganzzahligen Multiplikatoren und Divisoren.

Bei der eigentlichen Behandlung der Dezimalbrüche in der Quarta versäume man nie, unter Hinzufügung des Nenners ihren Charakter als Brüche durch häufiges Lesenlassen besonders hervorzuheben, wie auch das Schreibenlassen nach dem Gehöre eine mir unerläßlich erscheinende Übung bilden muß. Demnach liest man 7,834 als Bruch $7\frac{834}{1000}$. Für gewöhnlich ist es mit Rücksicht auf die unendlichen Dezimalbrüche vorteilhafter, beim Lesen die Ziffern hinter dem Komma einzeln zu nennen. So lautet 7,834 sieben, Komma, acht, drei, vier und nicht: sieben, Komma, achthundertvierunddreißig.

Bei allen Rechenoperationen mit Dezimalzahlen gilt als erster Grundsatz: Setze Komma unter Komma, so daß dadurch die zugehörigen dezimalen Ordnungen stets untereinander zu stehen kommen. Es dürfte manchem dieser Hinweis überflüssig erscheinen. Wenn man aber bedenkt, daß gerade bei der Behandlung der Dezimalbrüche eine ziemlich große Mannigfaltigkeit in der Methode besteht, wobei nicht immer diese Forderung aufgestellt ist, so wird man einen besonderen Hinweis darauf verständlich finden.

Es gibt **endliche** Dezimalbrüche z. B. 0,834 und unendliche, **periodische** Dezimalbrüche z. B. 0,333... Die Periode kennzeichnet ein über dieselbe gespannter Bogen z. B. $0,\widehat{27}\ldots$

Man unterscheidet **rein-periodische,** einstellige, zweistellige ..... mehrstellige, z. B.

$$0,\widehat{3}\ldots;\ 0,\widehat{42}\ldots;\ 0,\widehat{728}\ldots;\ 0,\widehat{8794}\ldots;$$

und **gemischt - periodische** Dezimalbrüche. Letztere besitzen vor der Periode noch **Vorziffern.** Danach ist

$$0,43\widehat{536}\ldots$$

ein dreistellig gemischt-periodischer Dezimalbruch mit zwei Vorziffern.

Die trigonometrischen Funktionen, Logarithmen und Wurzeln führen zu dezimalen Zahlen, die weder endlich noch periodisch sind, den irrationalen Zahlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dezimalbrüche und gemeine Brüche.

Der Verquickung der Dezimalbrüche mit gemeinen Brüchen gehen die Umwandlungen der Dezimalbrüche in gemeine Brüche und umgekehrt voraus.

Ein gemeiner Bruch wird in einen Dezimalbruch verwandelt, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert. Die Ausführung führt auf endliche, rein- und gemischt-periodische Dezimalbrüche.

1. $\frac{23}{625} = 23 : 625 = 0{,}0368$
2. $\frac{5}{37} = 5 : 37 = 0{,}\widehat{135}\ldots$
3. $\frac{13}{24} = 13 : 24 = 0{,}541\widehat{6}\ldots$

Bei der Verwandlung der Dezimalbrüche in gemeine Brüche unterscheidet man zwei Fälle:

a) Der endliche Dezimalbruch wird verwandelt, indem man dem Dezimalbruch den zugehörigen Nenner beifügt und durch Kürzen auf die kleinste Form zu bringen sucht, z. B.

$$0{,}1625 = \frac{1625}{10000} \overset{25}{=} \frac{65}{40} \overset{5}{=} \frac{13}{80}$$

b) Bei den unendlichen Dezimalbrüchen setzt man den gesuchten Bruch gleich der Unbekannten x. Dann bildet man zwei Gleichungen, durch deren Subtraktion sämtliche Perioden fortfallen, indem man in der Gleichung des Minuendus das Komma hinter, in der des Subtrahendus vor die erste Periode schafft.

1. $0{,}\widehat{52}\ldots = ?$

$$\begin{aligned} 100x &= 52{,}\widehat{52}\ldots \\ x &= 0{,}52 \\ \hline 99x &= 52 \\ x &= \tfrac{52}{99} \end{aligned}$$

2. $0{,}42\widehat{57}\ldots$

$$\begin{aligned} 10000x &= 4257{,}\widehat{57}\ldots \\ 100x &= 42{,}\widehat{57}\ldots \\ \hline 9900x &= 4215 \\ x &= \tfrac{4215}{9900} \overset{15}{=} \tfrac{281}{660} \end{aligned}$$

Es zeigt sich, daß bei rein-periodischen Brüchen der gemeine Bruch zum Zähler die Periode, zum Nenner den um 1 verminderten Nenner einer Periode hat oder soviel Neunen als die Periode Stellen.

$$0{,}\widehat{81}\ldots = \tfrac{81}{99} = \tfrac{9}{11};\quad 0{,}\widehat{2}\ldots = \tfrac{2}{9};\quad 0{,}\widehat{792}\ldots = \tfrac{792}{999} = \tfrac{88}{111}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei der Addition und Subtraktion gemeiner Brüche mit Dezimalbrüchen werden

1) beide in gemeine Brüche verwandelt

a. $5\frac{3}{7} + 2{,}45$	b. $2\frac{6}{7} - 0{,}7$
$5\frac{3}{7} + 2\frac{45}{100}$	$2\frac{6}{7} - \frac{7}{10}$
$5\frac{3}{7} + 2\frac{9}{20}$	$2\frac{60}{70} - \frac{49}{70}$
$7\frac{123}{140}$	$2\frac{11}{70}$

2) beide Brüche werden in Dezimalbrüche verwandelt und ergeben

α) einen endlichen Dezimalbruch

a. $7{,}625 + 5\frac{17}{20}$	b. $8{,}35 - \frac{7}{8}$
$7{,}625 + 5{,}85$	$8{,}35 - 0{,}875$
$13{,}475$	$7{,}475$

β) einen periodischen Dezimalbruch, also ein ungenaues Resultat.

a. $9\frac{2}{3} + 6{,}\widehat{42}\ldots$	b. $7{,}8\widehat{37}\ldots - 4\frac{17}{25}$
$9{,}\widehat{6}\ldots + 6{,}\widehat{42}\ldots$	$7{,}8\widehat{37}\ldots - 4{,}68$
$16{,}0\widehat{9}\ldots$	$3{,}15\widehat{73}\ldots$

Im praktischen Leben wird das Rechnen mit Dezimalbrüchen vorgezogen, trotz der sich ergebenden Ungenauigkeit. Auf der Schule jedoch dürfte jedes eine gleichmäßige Behandlung erfahren.

Bei der Multiplikation resp. Division zwischen Dezimalbruch und gemeinem Bruch macht man

1) alles zu gemeinen Brüchen:

a. $7\frac{4}{9} \cdot 8{,}1$	b. $0{,}58\widehat{3}\ldots : 7\frac{4}{9}$
$\frac{67}{9} \cdot \frac{81}{10}$	$\frac{7}{12} : \frac{67}{9}$
$\frac{67 \cdot 81}{9 \cdot 10}$	$\frac{7 \cdot 9}{12 \cdot 67}$
$\frac{67 \cdot 9}{10}$	$\frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 67}$
$\frac{603}{10}$	$\frac{21}{268}$
$60{,}3$	$0{,}078\ldots$

2) alles zu Dezimalbrüchen:

a. $\frac{7}{20} \cdot 0{,}9 = 0{,}35 \cdot 0{,}9 = 0{,}315$

b. $3{,}71 : 33\frac{1}{8} = 3{,}71 \cdot ' : 33{,}125' = 0{,}112$

3) Man ändert keinen der Brüche

a. $126{,}347 \cdot \frac{7}{8} = \frac{126{,}347 \cdot 7}{8} = \frac{884{,}429}{8} = 110{,}553625$

b. $75{,}3 : \frac{5}{6} = \frac{75{,}3 \cdot 6}{5} = \frac{451{,}8}{5} = 90{,}36$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erweitern.

Man kann einen Bruch **erweitern**, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl, der **Erweiterungszahl**, multipliziert.

a. $\frac{3}{5} \overset{7}{=} \frac{21}{35}$ b. $\frac{x}{y} \overset{3}{=} \frac{3x}{3y}$ c. $\frac{a}{b} \overset{c}{=} \frac{ac}{bc}$

Das Erweitern findet Anwendung bei der Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche, die durch das Erweitern erst gleichnamig gemacht werden müssen, bevor sie addiert resp. subtrahiert werden können.

Aufgabe: $\overset{225}{\frac{3}{4}} + \overset{150}{\frac{5}{6}} + \overset{100}{\frac{7}{9}} + \overset{60}{\frac{8}{15}} + \overset{90}{\frac{7}{10}} + \overset{36}{\frac{6}{25}}$

Zu diesem Zwecke erweitert man, nachdem man den Hauptnenner gefunden hat, die gegebenen Brüche der Reihe nach mit den Erweiterungszahlen

225, 150, 100, 60, 90, 36

und erhält die addierbaren gleichnamigen Brüche:

$$\frac{675}{900} + \frac{750}{900} + \frac{700}{900} + \frac{480}{900} + \frac{630}{900} + \frac{216}{900} = \frac{3451}{900} = 3\frac{751}{900}$$

Aufgabe: $\overset{6a^2}{\frac{x}{2ab^2c^3}} + \overset{4bc}{\frac{y}{3a^3bc^2}} + \overset{3bc^2}{\frac{z}{4a^3bc}}$

$$HN = 3 \cdot 4a^3b^2c^3$$

$$\frac{6a^2x + 4bcy + 3bc^2z}{12a^3b^2c^3}$$

Das Erweitern wird dann auch auf Proportionen ausgedehnt. Eine Proportion bleibt ungeändert, wenn man Vorder- und Hinterglieder mit derselben Zahl multipliziert.

$$\overset{m}{\frac{a}{b}} = \overset{n}{\frac{c}{d}}$$

$$\frac{am}{bm} = \frac{cn}{dn}$$

Ist der zu erweiternde Bruch gar ein Potenzexponent, so führt uns dies zur Erweiterung von Wurzeln.

$$x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \quad \text{erweitert mit 5}$$

$$x^{\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5}} = \sqrt[3 \cdot 5]{x^{2 \cdot 5}}$$

$$x^{\frac{10}{15}} = \sqrt[15]{x^{10}}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kürzen.

Einen gemeinen Bruch kann man **heben** oder **kürzen**, d. i. Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl, die **Kürzungszahl**, dividieren.

$$\frac{27}{36} \overset{9}{=} \frac{3}{4}$$

Bei der mündlichen Darstellung begnüge man sich nicht mit der allgemeinen Angabe „ich kürze", sondern gewöhne den Schüler beizeiten daran, stets die Kürzungszahl und, was besonders bei größeren Bruchstrichen für die allseitige Verständigung wichtig ist, auch die bei der Kürzung angegriffenen Zahlen zu nennen. Es heißt demnach: „Ich kürze durch 9, 27 dividiert durch 9 ist 3, 36 dividiert durch 9 ist 4.

a. $\frac{946}{1738} \overset{2}{=} \frac{473}{869} \overset{11}{=} \frac{43}{79}$

b. $\frac{8316}{10692} \overset{4}{=} \frac{2079}{2673} \overset{9}{=} \frac{231}{297} \overset{3}{=} \frac{77}{99} \overset{11}{=} \frac{7}{9}$

c. $\frac{ac}{bc} \overset{c}{=} \frac{a}{b}$

d. $\frac{5x^2y}{3xy^2} \overset{xy}{=} \frac{5x}{3y}$

e. $\frac{6xy^2}{3x^2y} \overset{3xy}{+} \frac{7m^2}{14n} \overset{7}{+} \frac{35a^2b}{15abc} \overset{5ab}{}$

$$\frac{2y}{3x} + \frac{m^2}{2n} + \frac{7a}{3c}$$

In den Proportionen kann man die Glieder eines Verhältnisses durch dieselbe Zahl dividieren.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a:m}{b:m} = \frac{c:n}{d:n}$$

Vielfach ist es schwierig, die Kürzungszahl ausfindig zu machen; man wendet dann die Kettendivision an, um den größten gemeinschaftlichen Teiler von Zähler und Nenner zu suchen:

Aufgabe: Kürze $\frac{2795}{3398}$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 31 & & 1 & & 1 & & 1 & & 4 \\
3397 & : & 2795 & : & 602 & : & 387 & : & 215 & : & 172 & : & 43 \\
2795 & & 1806 & & 387 & & 215 & & 172 & & 172 \\
602 & & 989 & & 215 & & 172 & & 43 & & 0 \\
 & & 602 & & & & & & & & \\
 & & 387 & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\frac{2795}{3397} \overset{43}{=} \frac{65}{79}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Besonders wichtig namentlich für die Regeldetri ist die Entwickelung des Bruchstriches. Man vermeide vor allen Dingen das Durchstreichen, das nicht nur die Kontrolle unmöglich macht, sondern den Schüler auch zur Unklarheit und Unordnung anleitet.

$$\frac{30 \cdot 26 \cdot 27}{39 \cdot 45 \cdot 40} \overset{10}{=} \frac{3 \cdot 26 \cdot 27}{39 \cdot 45 \cdot 4} \overset{13}{=} \frac{3 \cdot 2 \cdot 27}{3 \cdot 45 \cdot 4} \overset{9}{=} \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 4} \overset{3}{=} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 5 \cdot 4} \overset{2}{=} \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

Durch gleichzeitiges mehrfaches Kürzen kann man die lange Entwickelungskette auch abkürzen:

$$\frac{30 \cdot 26 \cdot 27}{39 \cdot 45 \cdot 40} \overset{10 \cdot 13 \cdot 9}{=} \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 4} \overset{3 \cdot 2}{=} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{1 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$$

Nur einen **Bruch** kann man kürzen, darum vermeide man Kürzungen in einem **Produkte** wie folgt:

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{14}{15} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{y^2} \cdot y = \frac{x}{y}$$

und bringe die Zahlen zunächst auf **einen** Bruchstrich. Es muß dem Schüler klar gemacht werden, daß der ganze Zähler und der ganze Nenner durch dieselbe Zahl dividiert werden, damit später Kürzungen wie $\frac{ax + b}{a} \overset{a}{=} x + b$ nicht mehr vorkommen können.

Die Kürzung verläuft vielmehr so:

$$\text{a.} \quad \frac{69 - 9y}{3} \overset{3}{=} 23 - 3y$$

$$\text{b.} \quad \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a + b)\,(a + b)}{(a + b)\,(a - b)} \overset{a+b}{=} \frac{a + b}{a - b}$$

Resolvieren.

Resolvieren nennt man das Überführen oder Verwandeln höherer Sorten in niedere. Im allgemeinen wird dieser Rechnungsart viel zu wenig Bedeutung beigelegt und meist in der Sexta als erledigt betrachtet. Das geschieht mit Unrecht, denn erstens lassen sich die in Sexta erlernten Maße, Münzen und Gewichte dabei wiederholen, und man wird dann weniger nötig haben auf diese in den späteren Klassen immer wieder zurückzukommen, sodann geben sie sehr günstige Gelegenheit zur Einübung der Bruchrechnung und einfacher Redeldetrischlüsse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Resolvieren mit dezimal geteilten Maßen, deren Währungszahlen ja Potenzen von 10 sind, läuft hinaus auf das Erkennen der dezimalen Ordnungen, die für die einzelnen Maße charakteristisch sind.

Aufgabe: Verwandle in l 90 hl 8 l.

90 hl	= 90 · 100 l	= 9000 l
8 l		= 8 l
90 hl 8 l		= 9008 l

Aufgabe: Verwandle in mm 3 m 4 cm.

3 m	= 3 · 1000 mm	= 3000 mm
4 cm	= 4 · 10 „	= 40 „
3 m 4 cm		3040 mm

Aufgabe: Verwandle in qmm 6 qm 7 qdm 6 qcm.

6 qm	= 6 · 100 · 100 · 100 qmm	= 6000000 qmm
7 qdm	= 7 · 100 · 100 „	= 70000 „
6 qcm	= 6 · 100 „	= 600 „
6 qm 7 pdm 6 qcm		= 6070600 qmm

Es nehmen hierbei die m stets die Ordnung der Tausender, die hl die Ordnungen der H und T, die qdm die Ordnungen der ZT und HT ein.

Sind die Maße nicht dezimal geteilt, so wird die höhere Sorte mit der entsprechenden Währungszahl multipliziert, um die nächst niedere zu erhalten.

Aufgabe: Verwandle 18 Tg in Std.

18 (Tg) · 24
36
72
432 (Std)

Antwort: 18 Tg sind 432 Std.

Aufgabe: Verwandle 18 Tg in Min.

18 (Tg) · 24
36
72
432 (Std) · 60
25930 (Min)

Antwort: 18 Tg sind 25920 Min.

Man muß hier vorsichtig mit der Zufügung der Benennung sein. In dem zweiten Beispiel ergeben 18 Tg mit 24 multipliziert doch sicher 432 Tg, die weiter mit 60 multipliziert wieder Tg ergeben. Deswegen füge man, um einerseits logische Fehler zu vermeiden, andererseits einen Überblick zu haben, die Benennungen stets nur in Klammern bei.

Sind mehrfach benannte Zahlen zu resolvieren, so muß die Ziffer der niederen Sorte bei der jedesmaligen Multiplikation mit verrechnet werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe: Wieviel Stunden sind 18 Tg 5 Std?

```
 18 (Tg) · 24 + 5 (Std)
36
 72
  5
437 (Std)
```

Antwort: 18 Tg 5 Std sind 437 Std.

Aufgabe: Verwandle 18 Tg 5 Std 36 Min in Min.

```
    18 (Tg) · 24 + 5 (Std)
   36
    72
     5
   437 (Std) · 60 + 36 (Min)
26 220
    36
26 256 (Min)
```

Antwort: 18 Tg 5 Std 36 Min sind 26 256 Min.

Die zuzufügenden Ziffern der niederen Sorten kann man mit dem letzten Teilprodukt zugleich verrechnen, wodurch eine Zeile gespart und die Rechnung abgekürzt wird.

Aufgabe: Verwandle 25 Grs 11 Dtz 8 Stck in Stck.

```
  25 (Grs) · 12 + 11 (Dtz)
 25
  61
 311 (Dtz) · 12 + 8 (Stck)
311
 630
3740 (Stck)
```

Antwort: 25 Grs 11 Dtz 8 Stck sind 3740 Stck.

Außerdem kann man auch eine andere Form für die Lösung benutzen. Man berechnet jeden Teil einzeln und addiert die Teile.

Aufgabe: Verwandle 18 Tg 5 Std 36 Min in Min.

18 Tg	= 18 · 24 · 60 Min	=	25 920 Min
5 Std	= 5 · 60 „	=	300 „
36 Min		=	36 „
18 Tg 5 Std 36 Min		=	26 256 Min

Mir will diese Form als die bessere erscheinen, denn erstens enthält sie die für später wichtige Gleichungsform und zweitens trennt sie klar und deutlich die Hauptrechnung von den Nebenrechnungen. Letztere können, falls es sich um größere Zahlen handelt, unterhalb der Hauptrechnung beigefügt werden. Auch gestattet diese Form oftmals Abkürzungen, sofern man sofort mit der höchsten Währungszahl multipliziert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe: Verwandle 25 Grs 11 Dtz 8 Stck in Stck.

25 Grs	= 25 · 144 Stck	=	3600 Stck
11 Dtz	= 11 · 12 „	=	132 „
8 Stck		=	8 „
25 Grs 11 Dtz 8 Stck		=	3740 Stck

Übrigens wird in jedem einzelnen Falle die Entscheidung über die zu wählende Form der Lösung von der Art der gestellten Aufgabe abhängig gemacht werden können.

Besonders fruchtbringend wird das Resolvieren bei der Einübung der Bruchrechnung angewendet, wobei auch leichtere Regeldetrischlüsse zur Geltung kommen und somit dieser Rechnungsart vorgearbeitet wird.

Aufgabe: Verwandle $\frac{25}{96}$ J in Mon, Tag, Std.

1 J sind			12 Mon
$\frac{25}{95}$ „ „	$\frac{12 \cdot 25}{96}$	=	$\underline{\underline{3\frac{1}{8}}}$ „
1 Mon sind			30 Tg
$\frac{1}{8}$ „ „	$\frac{31}{8}$	=	$\underline{\underline{3\frac{3}{4}}}$ „
1 Tg sind			24 Std
$\frac{3}{4}$ „ „			$\underline{\underline{18}}$ „

Antwort: $\frac{25}{96}$ J sind 3 Mon 3 Tg 18 Std.

Durch die Kenntnis der Dezimalbrüche tritt ein neues Element in die Rechnung und sind gerade diese Aufgaben nicht außer acht zu lassen.

Aufgabe: Verwandle 0,42 J in Mon, Tg, Std, Min.

1 J hat			12 Mon
0,42 „ haben	12 · 0,42	=	5,04 „
1 Mon hat			30 Tg
0,04 „ haben	30 · 0,04	=	1,2 „
1 Tg hat			24 Std
0,2 „ haben	24 · 0,2	=	4,8 „
1 Std hat			60 Min
0,8 „ haben	60 · 0,8	=	48 „

Antwort: 0,42 J = 5 Mon 1 Tg 4 Std 48 Min.

Auch Aufgaben wie die folgende können für später Zeit ersparend wirken.

Aufgabe: Verwandle 8,36 Grade in Grade, Min, Sek.

1^0		=	$60'$
$0{,}36^0$	$= 60 \cdot 0{,}36$	=	$21{,}6'$
$1'$		=	$60''$
$0{,}6'$	$= 60 \cdot 0{,}6$	=	$36''$

Antwort: $8{,}36^0 = 8^0\ 21'\ 36''$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Reduzieren.

Das Reduzieren, d. i. die Verwandlung niederer Sorten in höhere, stellt die Umkehrung des Resolvierens dar. Soweit es sich um dezimal geteilte Maße handelt, gilt hier dasselbe, was beim Resolvieren gesagt wurde. Es ist hier umgekehrt aus der Stellung im dezimalen System das zugehörige Maß oder die Sorte zu erkennen.

1. 9008 l = 90 hl 8 l.
2. 4040 mm = 3 m 4 cm.
3. 6070600 qmm = 6 qm 7 qdm 6 qcm.

Bei nicht dezimal geteilten Maßen erreicht man die Reduktion durch Division mit den entsprechenden Währungszahlen.

Aufgabe: Verwandle 432 Std in Tg.

432 (Std) : 24 = 18 (Tg)
192
0

Antwort: 432 Std sind 18 Tg.

Aufgabe: Verwandle 25920 Min in Tg.

25920 (Min) : 60 = 432 (Std)
192
120
0

432 (Std) : 24 = 18 (Tg)
192
0

Antwort: 25920 Min sind 18 Tg.

Aufgabe: Verwandle 437 Std in Tg, Std.

437 (Std) : 24 = 18 (Tg) Rest 5 (Std)
197
5 (Std)

Antwort: 437 Std sind 18 Tg 5 Std.

Da 437 Std : 24 wieder Std ergeben müssen, so würde die Gleichung 437 Std : 24 = 18 Tg 5 Std logisch falsch sein, deswegen sind auch hier die Bezeichnungen, die nur der Übersicht dienen sollen, mit Klammern zu versehen.

Bei längeren Aufgaben vermeide man wegen des Gleichheitszeichens die fortlaufende Division und führe jede Division als etwas Selbständiges für sich durch.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe: Verwandle 26 256 Min in Tg, Std, Min

nicht etwa:

26 256 (Min) : 60 = 437 (Std) : 24 = 18 (Tg)
Rest 36 Rest 5

sondern:

26 256 (Min) : 60 = 437 (Std) Rest 36 (Min)
225
456
36

437 (Std) : 24 = 18 (Tg) Rest 5 (Std)
197
5

Antwort: 26 256 Min sind 18 Tg 5 Std 36 Min.

Auch hier kann man zuweilen durch sofortige Division mit der höchsten Währungszahl die Rechnung abkürzen.

Aufgabe: Verwandle 3740 Stck in Grs, Dtz u. Stck.

3740 (Stck) : 144 = 25 (Grs) Rest 140 (Stck)
860
140

140 (Stck) : 12 = 11 (Dtz) Rest 8 (Stck)
8

Antwort: 3740 Stck sind 25 Grs 11 Dtz 8 Stck.

Ein reiches Übungsfeld geben die gemeinen und Dezimalbrüche.

Aufgabe: Verwandle 3 Mon 3 Tg 18 Std in J . . .

a) 18 Std = ? Tg.
24 Std = 1 Tg
1 „ = $\frac{1}{24}$ „
18 „ = $\frac{18}{24}$ = $\frac{3}{4}$ „

b) $3\frac{3}{4}$ Tg = $\frac{15}{4}$ Tg = ? Mon.
30 Tg = 1 Mon
1 „ = $\frac{1}{30}$ „
$\frac{15}{4}$ „ = $\frac{15}{4 \cdot 30}$ = $\frac{1}{8}$ „

c) $3\frac{1}{8}$ Mon = $\frac{25}{8}$ Mon = ? J
12 Mon = 1 J
1 „ = $\frac{1}{12}$ „
$\frac{25}{8}$ „ = $\frac{25}{8 \cdot 12}$ = $\frac{25}{96}$ „

Antwort: 3 Mon 3 Tg 18 Std sind $\frac{25}{96}$ J.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe: Verwandle $8^0\ 21'\ 36''$ in Grade.

a) $36'' = ?'$

$60'' = 1'$

$36'' = \frac{36}{60} = \frac{3}{5}'$

b) $21\frac{3}{5}' = \frac{108}{5}' = ?^0$

$60' = 1^0$

$\frac{108}{5}' = \frac{108}{5 \cdot 60} = \frac{9}{25}^0 = 0{,}36^0$

Antwort: $8^0\ 21'\ 36'' = 8{,}36^0$

Doppelbrüche.

Jeder Bruch ist eine angedeutete Division, demnach auch der Doppelbruch; es ist also:

$$\frac{4}{5\frac{1}{3}} = 4 : 5\tfrac{1}{3} = 4 : \tfrac{16}{3} = 4 \cdot \tfrac{3}{16} = \tfrac{4 \cdot 3}{16} = \tfrac{3}{4}$$

Es wird sich empfehlen, die fortlaufenden Entwickelungsstufen in der Rechnung durch das Gleichheitszeichen zu verbinden, um die Schüler an eine stetige Entwickelung der Lösung, wie sie bei algebraischen Entwickelungen und bei der Auflösung von Gleichungen üblich ist, von vorne herein zu gewöhnen. Es kann und soll natürlich dem Kopfrechnen ein weiter Raum gewährt werden, wodurch die lange Entwickelungsreihe eine wesentliche und auch wünschenswerte Abkürzung erfährt.

Aufgabe: $$\frac{5\frac{3}{4} \cdot 2}{8\frac{1}{2} : 2\frac{5}{8}} = \frac{\frac{23}{4} \cdot 2}{\frac{17}{2} \cdot \frac{8}{21}} = \frac{\frac{23 \cdot 2}{4}}{\frac{17 \cdot 8}{2 \cdot 21}} = \frac{23 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21}{4 \cdot 17 \cdot 8} = \frac{23 \cdot 21}{17 \cdot 8} = \frac{483}{136} = 3\frac{75}{136}$$

Aufgabe: $$\frac{3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{7}}{\frac{5}{9} + \frac{3}{5}} = \frac{\frac{7}{2} : \frac{15}{7}}{\frac{25 + 27}{45}} = \frac{\frac{49}{30}}{\frac{52}{45}} = \frac{49}{30} \cdot \frac{45}{52} = \frac{49 \cdot 45}{30 \cdot 52} = \frac{49 \cdot 3}{2 \cdot 52} = \frac{147}{104} = 1\frac{43}{104}$$

Bei umfangreicheren Doppelbrüchen neigen die Schüler dazu, die Aufgabe in ihre Bestandteile zu zerlegen, indem sie Zähler und Nenner oder einzelne Gruppen partiell ausrechnen. Man halte sie dabei von vorne herein an, hierbei den Überblick über das Ganze nicht zu verlieren und jene partiellen Lösungen als Nebenrechnungen zu betrachten, die im Gange der Lösung der Aufgabe etwas Sekundäres sind. Meist wird es sich ohne Nebenrechnung auskommen lassen, wenn man die partiellen Lösungen in die Hauptentwickelungsreihe aufnimmt.

Aufgabe: $$\frac{12\frac{1}{2} \cdot \frac{8}{15} : (4\frac{2}{9} - 2\frac{5}{6})}{9\frac{6}{11} \cdot 4\frac{23}{30} + 81\frac{3}{4} : 18\frac{1}{6}} = \frac{\frac{25 \cdot 8}{2 \cdot 15} : \left(4\frac{4}{18} - 2\frac{15}{18}\right)}{\frac{105 \cdot 143}{11 \cdot 30} + \frac{327 \cdot 6}{4 \cdot 109}} = \frac{\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 3} : 1\frac{7}{18}}{\frac{7 \cdot 13}{1 \cdot 2} + \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 1}} = \frac{\frac{20}{3} : \frac{25}{18}}{\frac{91}{2} + \frac{9}{2}}$$

$$= \frac{\frac{20 \cdot 18}{3 \cdot 25}}{\frac{100}{2}} = \frac{\frac{4 \cdot 6}{1 \cdot 5}}{50} = \frac{24}{5} : 50 = \frac{24}{5 \cdot 50} = \frac{12}{5 \cdot 25} = \frac{12}{125}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Praktische Verwendung finden die Doppelbrüche in der Regeldetri. Da bei dieser das Hauptinteresse aber den Schlußreihen zugewandt ist, so treten sie dort mehr in den Hintergrund d. h. ihre Behandlung muß als bekannt vorausgesetzt werden. Die Einführung der Dezimalbruchrechnung läßt sie dann noch einmal wieder in den Vordergrund treten, wobei die Verbindung zwischen gemeinen und dezimalen Brüchen zu mannigfacher Behandlung Anlaß gibt.

Aufgabe: $\frac{5{,}48 \cdot 3\frac{5}{8}}{9{,}475} = \frac{5{,}48 \cdot \frac{29}{8}}{9{,}475} = \frac{\frac{5{,}48 \cdot 29}{8}}{9{,}475} = \frac{5{,}48 \cdot 29}{8 \cdot 9{,}475} = \frac{158{,}92}{75{,}8} = 2{,}09\ldots$

Die sorgfältige Einübung der Doppelbrüche läßt dann bei dem Übergang auf algebraisches Gebiet vor Aufgaben wie:

$$\frac{8mb}{9ax} : \tfrac{4}{3}bx \quad \text{oder} \quad \tfrac{2}{3}xy : \frac{6ax}{5by}$$

die Schüler nicht mehr stutzig werden. Je sicherer sie darin sind, umso weniger Schwierigkeiten werden ihnen in der Algebra, wo ihre Aufmerksamkeit ohnehin schon durch andere Schwierigkeiten in Anspruch genommmen wird, verwandte Aufgaben machen.

Aufgabe: $\frac{\frac{24a^2b^3}{35x^3y^2}}{\frac{36ab}{49x^2y}} = \frac{24a^2b^3}{35x^3y^2} : \frac{36ab}{49x^2y} = \frac{24a^2b^3}{35x^3y^2} \cdot \frac{49x^2y}{36ab} = \frac{24 \cdot 49a^2b^3x^2y}{35 \cdot 36abx^3y^2}$

$$= \frac{4 \cdot 7ab^2}{5 \cdot 6xy} = \frac{28ab^2}{30xy}$$

Aufgabe: $\frac{3a - \frac{4x^2}{3a}}{1 + \frac{2x}{3a}} = \frac{\frac{9a^2 - 4x^2}{3a}}{\frac{3a + 2x}{3a}} = \frac{(3a + 2x)\,(3a - 2x)}{3a - 2x} = 3a + 2x$

Aufgabe: $\frac{7}{3 + \frac{5}{4 + \frac{2}{3}}} = \frac{7}{3 + \frac{5}{\frac{12+2}{3}}} = \frac{7}{3 + \frac{5}{\frac{14}{3}}} = \frac{7}{3 + \frac{5 \cdot 3}{14}} = \frac{7}{\frac{42 + 15}{14}} = \frac{7 \cdot 14}{57} = \frac{98}{57} = 1\frac{41}{57}$

Regeldetri.

Die Regeldetri oder der Dreisatz beginnt mit Vorübungen schon in der Sexta und früher bei der Anwendung der Multiplikation und Division in eingekleideten Aufgaben.

Aufgabe: 23 Pferde kosten 22425 ℳ. Wieviel kostet 1 Pferd?

Angabesatz: 23 Pferde kosten 22425 ℳ

Schlußsatz: 1 Pferd kostet den 23. Teil

22425 : 23 = 975
172
115
0

Antwort: 1 Pferd kostet 975 ℳ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man nennt hierbei den ersten Satz, der die Angabe enthält, von der man ausgeht, den **Angabesatz**, den zweiten, der die Rechnung abschließt, und der mit der Antwort identisch ist, den **Schlußsatz**. Jeder Satz beansprucht eine Zeile.

Den umgekehrten Schluß macht man bei der Multiplikation.

Angabesatz: 1 Pferd kostet 975 ℳ
Schlußsatz: 18 Pferde kosten 18 mal so viel

$$\begin{array}{r} 975 \cdot 18 \\ \hline 975 \\ 7800 \\ \hline 17550 \end{array}$$

Antwort: 18 Pferde kosten 17550 ℳ.

Die Verbindung beider Aufgaben erfordert den **Mittelsatz**, der durch Übergang auf die Einheit die Rechnung vermittelt.

Aufgabe: 23 Pferde kosten 22425 ℳ. Wieviel kosten 18 Pferde?

Angabesatz:	23 Pferde kosten	22425 ℳ
Mittelsatz:	1 Pferd kostet den 23. Teil	975 „
Schlußsatz:	18 Pferde kosten 18 mal so viel	17550 „

Antwort: 18 Pferde kosten 17550 ℳ.

Ich halte es für den Anfang für unbedingt notwendig, daß die Bezeichnungen „den 23ten Teil“ „18 mal so viel“ schriftlich fixiert und auch im weiteren Verlauf der Entwickelung wenigstens mündlich scharf hervorgehoben werden, da sie einen wesentlichen Stützpunkt für die Schlußfolgerungen bilden und an ihnen in erster Linie mit einer eventuellen Korrektur wirksam eingesetzt werden kann.

Die Aufstellung des Ansatzes bereitet den Schülern, besonders bei gewissen Zinsaufgaben, vielfach Schwierigkeiten, z. B. wenn die Aufgabe wie folgt formuliert ist. „Für 22425 ℳ kauft man 23 Pferde. Wieviel kosten 18 Pferde?“ — Die zu erwartende Antwort ergibt die Form des **Fragesatzes**: „18 Pferde kosten wieviel ℳ?“, mit dem übereinstimmend dann der Angabesatz gebildet wird: „23 Pferde kosten 22425 ℳ“. Da vom Angabesatz die Lösung ausgeht, so empfiehlt es sich, diesen im Gegensatz zu sonstigem Brauche, dem auch logisch zuerst aufgestellten Fragesatz folgen zu lassen, wodurch gleichzeitig eine Zeile gespart werden kann.

a. Aufgabe: Wieviel kosten 18 Pferde, wenn 23 Pferde 22425 ℳ kosten?

b. Ansatz:	Fragesatz: 18 Pferde kosten	? ℳ
	Angabesatz: 23 „ „	22425 „
c. Lösung:	Mittelsatz: 1 Pferd kostet den 23. Teil	975 „
	Schlußsatz: 18 Pferde kosten 18 mal so viel	17550 „

d. Antwort: 18 Pferde kosten 17550 ℳ.

Die Bruchrechnung ermöglicht die Anwendung einer längeren Kette von Schlüssen und bietet durch die Behandlung des Bruchstriches neue Schwierigkeiten. Es ist nicht un-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wesentlich dabei, daß der Schüler die Entwickelung des Bruchstriches Zeile für Zeile verfolgen kann, weshalb man ihm ein jedesmaliges Fixieren des jeweiligen Bruchstrichwertes nicht ersparen darf. Je mehr Zeit man hier verwendet, umso schneller und leichter wird man in der Folge vorwärts kommen.

Aufgabe: $4\frac{3}{13}$ $(\frac{55}{13})$ kg kosten $8\frac{4}{7}$ $(\frac{60}{7})$ ℳ. Wieviel kosten $12\frac{5}{6}$ $(\frac{77}{6})$ kg?

Ansatz: Fragesatz:	$\frac{77}{6}$ kg	kosten		? ℳ
Angabesatz:	$\frac{55}{13}$ „	„		$\frac{60}{7}$ „
Lösung:	$\frac{1}{13}$ „	kostet	den 55. Teil	$\frac{60}{7 \cdot 55}$ „
Mittelsatz:	1 „	„	13 mal so viel	$\frac{60 \cdot 13}{7 \cdot 55}$ „
	$\frac{1}{6}$ „	„	den 6. Teil	$\frac{60 \cdot 13}{7 \cdot 55 \cdot 6}$ „
Schlußsatz:	$\frac{77}{6}$ „	kosten	77 mal so viel	$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6}$ „

$$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 13 \cdot 7}{7 \cdot 5 \cdot 1} = \frac{2 \cdot 13}{1} = 26$$

Antwort: $4\frac{3}{13}$ kg kosten 26 ℳ.

Ist diese elementare Art der Entwickelung dem Schüler in Fleisch und Blut übergegangen, so kann mit dem Schreibwerk nachgelassen werden, indem nur ein Bruchstrich benutzt wird.

Frag.:	$\frac{77}{6}$ kg	kost.		? ℳ
Ang.:	$\frac{55}{13}$ „	„		$\frac{60}{7}$ „
	$\frac{1}{13}$ „	„	d. 55. T.	
Mitt.:	1 „	„	13 m. s. v.	$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6}$
	$\frac{1}{6}$ „	„	d. 6. T.	
Schlußs.:	$\frac{77}{6}$ „	„	**77 m. s. v.**	

Schließlich wählt man die für Übungszwecke besonders kurze und doch übersichtliche Form.

	kg	ℳ
Angabes.:	$\frac{55}{13}$	$\frac{60}{7}$
	$\frac{1}{13}$	
Mittels.:	1	$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6}$
	$\frac{1}{6}$	
Schlußs.:	$\frac{77}{6}$	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Den nächsten Schritt bildet dann der Dreisatz mit direktem Schluß auf der Einheit.

Fr.:	$\frac{77}{6}$ kg kost.			? ℳ
Ang:	$\frac{55}{13}$ „ „			$\frac{60}{7}$ „
Mitt.:	1 „ „	d. $\frac{55}{13}$ T.		$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6}$
Schl.:	$\frac{77}{6}$ „ „	$\frac{77}{6}$ m. s. v.		

abgekürzt:

	kg	ℳ
A.:	$\frac{55}{13}$	$\frac{60}{7}$
M.:	1	$\frac{60 \cdot 13 \cdot 77}{7 \cdot 55 \cdot 6}$
S.:	$\frac{77}{6}$	

Sind die Schüler sicher genug im Schließen, so bringt man den Dreisatz ohne vorheriges Einrichten der gemischten Zahlen direkt zur Anwendung.

Fr.:	$12\frac{5}{6}$ kg kost.			ℳ ?
A.:	$4\frac{3}{13}$ „ „			$8\frac{4}{7}$ „
M.:	1 „ „	d. $4\frac{3}{13}$ Teil		$\frac{8\frac{4}{7}}{4\frac{3}{13}}$ „
S.:	$12\frac{5}{6}$ „ „	$12\frac{5}{6}$ m. s. v.		$\frac{8\frac{4}{7} \cdot 12\frac{5}{6}}{4\frac{3}{13}}$ „

abgekürzt:

	kg	ℳ
A.:	$4\frac{3}{13}$	$8\frac{4}{7}$
M.:	1	$\frac{8\frac{4}{7} \cdot 12\frac{5}{6}}{4\frac{3}{13}}$
S.:	$12\frac{5}{6}$	

Zum Schluß noch die Behandlung einer Aufgabe aus der zusammengesetzten Regeldetri.

Aufgabe: 9 Arbeiter verdienen in 7 Wochen 1701 ℳ. Wieviel verdienen 13 Arbeiter in 3 Wochen?

Ansatz:	Fr.:	13 Arb. verd. i. 3 Woch.				? ℳ
	A.:	9 „ „	„ 7 „			1701 „
Lösung:		1 „ „	„ 7 „	d. 9. T.		
	M.:	1 „ „	„ 1 „	d. 7. T.		$\frac{1701 \cdot 13 \cdot 3}{9 \cdot 7}$
		13 „ „	„ 1 „	13 m. s. v.		
	S.:	13 „ „	„ 3 „	3 m. s. v.		

$$\frac{1701 \cdot 13 \cdot 3}{9 \cdot 7} \overset{7 \cdot 3}{=} \frac{243 \cdot 13 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{3159}{3} = 1053$$

Antwort: 13 Arbeiter verdienen in 3 Wochen 1053 ℳ

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

abgekürzt:

	Arb.	Woch.	ℳ
A.:	9	7	1701
	1	7	
M.:	1	1	$\frac{1701 \cdot 13 \cdot 3}{9 \cdot 7}$
	13	1	
S.:	13	3	

oder noch mehr verkürzt durch sofortigen Übergang auf den Mittelsatz:

	Arb.	Woch.	ℳ
A.:	9	7	1701
M.:	1	1	$\frac{1701 \cdot 13 \cdot 3}{9 \cdot 7}$
S.:	13	3	

Potenzen.

Die Lehre von den Potenzen bildet einen Teil des Pensums der O III resp. U II. Man bedarf ihrer jedoch schon in den früheren Klassen, z. B. in U III, wo eine ausgiebige Behandlung des algebraischen Pensums ohne die Kenntnis wenigstens der beiden ersten Potenzsätze über die Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Basis undenkbar ist. In der Quinta treten sie bei der Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren auf. Es läßt sich bei der Natur der Potenzen hier sehr bequem vorarbeiten, ohne den späteren Pensen etwas vorweg zu nehmen. Schon der Sextaner wird mit der Potenz als abgekürzter Schreibweise für ein Produkt aus gleichen Faktoren bekannt gemacht, z. B. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Er lernt den Unterschied kennen zwischen $5 \cdot 4$ und 5^4, er sieht, daß im dekadischen System die Grundeinheiten Potenzen der Zahl 10 sind, und wird mit den Potenzen vertraut durch eine Reihe leichterer Übungsaufgaben, die sich gelegentlich an verschiedenen Stellen des Pensums einflechten lassen, z. B.

$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$$
$$86^3 = 86 \cdot 86 \cdot 86 = 636\,056$$
$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$$
$$2 \cdot 10^2 = 2 \cdot 100 = 200$$
$$2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32$$
$$5^3 - 6^2 = 125 - 36 = 89$$

Auch dürfte es sich empfehlen beim Kopfrechnen gelegentlich auf die Quadratzahlen zurückzukommen, die hier gelernt erfahrungsmäßig viel fester im Gedächtnis haften bleiben, als in einer späteren Klasse und deren Kenntnis eine wesentliche Unterstützung für die spätere Behandlung der Quadratwurzeln bildet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren z. B. $24 = 2^3 \cdot 3$ lehrt dann zuerst die Verwendung der Potenz als die Übersicht wesentlich erleichternd, auch findet sie beim Aufsuchen des Hauptnenners ausgedehnte Anwendung.

$$\begin{aligned} 24 &= \underline{2^3} \cdot 3 \\ 36 &= 2^2 \cdot \underline{3^2} \\ \hline \mathrm{HN} &= 2^3 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

Während schon in der VI durch Aufgaben wie $5^2 \cdot 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ das Fundament zu dem ersten Potenzsatz gelegt wurde, kann in der Quinta, wo das Kürzen der Brüche sowie die Behandlung der Brüche bekannt sind, das Verständnis für den zweiten Potenzsatz fundamentiert werden durch Aufgaben folgender Art:

$$\frac{3^5}{3^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \overbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}^{} = 3$$

Es läßt sich überhaupt in dieser Klasse eine Reihe schöner Übungsaufgaben stellen.

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16}{81}$

2. $\frac{5^4 - 5^3}{8^2 + 6^2} = \frac{625 - 125}{64 + 36} = \frac{500}{100} = 5$

3. $\frac{7^4 \cdot 4^2}{2^3 \cdot 14^2} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 14 \cdot 14} = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2} = 24\frac{1}{2}$

Das Pensum der Quarta bietet für die Behandlung und Anwendung der Potenzen keine wesentlich neuen Gesichtspunkte, doch wird man auch hier gelegentlich auf dieselben zurückgreifen, ist es doch gleichgültig, ob man z. B. bei der Multiplikation Aufgaben gibt wie $48{,}92 \cdot 32{,}05$ und $(7{,}5 + 6{,}3) \cdot (9{,}7 - 4{,}37)$ oder $(48{,}92)^2$ und $(7{,}5 + 6{,}3)^2$, die gleichzeitig dazu geeignet sind, den Begriff der Potenz nicht in Vergessenheit geraten zu lassen.

Mit diesen Vorkenntnissen über die Potenz lassen sich in der UIII an konkreten Beispielen die beiden ersten Potenzsätze $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3}$, $a^5 : a^3 = a^{5-3}$ verständlich ableiten und bieten Gelegenheit zur Lösung einer unbegrenzten Fülle von Aufgaben, bei denen man gelegentlich auch dem Verständnis der anderen Potenzsätze näherrücken kann.

Verbindungszeichen und Klammern.

Je nach der Art der Rechnung werden zwei oder mehrere Zahlen entweder durch Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- oder Divisionszeichen miteinander verbunden. 5 ± 3, $5 \cdot 3$, $5 : 3$. Die Zeichen der beiden ersten Rechnungsarten sind Striche, die der beiden letzten Punkte. Die Verbindung der vier Spezies führt nun zu Aufgaben, bei denen mehrere Rechenoperationen auszuführen sind z. B. $7 + 3 \cdot 4$ und die eine Entscheidung über die Wertigkeit der Verbindungszeichen verlangen. Die Erfahrung lehrt, daß gerade dieses Kapitel eine ergiebige Fehlerquelle bildet, besonders wenn außerdem noch Klammern hinzu-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

treten. Deswegen kann man nicht früh genug beginnen, um mit ganz elementaren Aufgaben einsetzend die Kenntnis über die Wertigkeit der Verbindungszeichen dem Schüler einzuimpfen.

1. $2 \cdot 3 + 4$	2. $432 : 9 + 15 \cdot 7$	3. $2\,(3 + 4)$
$6 + 4$	$48 + 105$	$2 \cdot 7$
10	153	14

Aufgaben, wie obenstehend, kann und muß jeder Sextaner rechnen und er wird unschwer das Gesetz kennen lernen, das man kurz so fassen kann: „Punkte (Multiplikations- und Divisionszeichen) verbinden stärker als Striche. (Additions- und Subtraktionszeichen.) Klammern verbinden am stärksten."

Durch entsprechende Steigerung der Schwierigkeiten, die sich aber mehr auf die im Pensum geforderte Einübung der 4 Spezis beziehen soll, kann für später Klassen gleichzeitig mühelos vorgearbeitet werden.

$$(892\,782 : 486 + 42\,315) \cdot 357$$
$$(1837 + 42\,315) \cdot 357$$
$$44\,152 \cdot 357$$
$$15\,762\,264$$

Man wähle von vorne herein die bei algebraischen Entwickelungen übliche Form und lasse Nebenrechnungen gesondert davon bringen, falls auf sie Wert gelegt wird. Da in allen Klassen die 4 Spezies immer wiederkehren, sei es bei der Behandlung der gemeinen oder Dezimalbrüche oder beider vereint, so wird die Verbindung dieser 4 Rechnungsarten immer wieder Stoff zu erneuter Behandlung dieser Frage geben. Zu bemerken ist, daß in der Quinta durch den **Bruchstrich** ein neues zusammenhaltendes Element hinzutritt, das den Wert einer Klammer hat.

Ich lasse nun einige Beispiele folgen in der Reihenfolge, wie die Behandlung des Stoffes sie verlangt.

1. $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}$
$\frac{15}{28} + \frac{5}{8}$
$\frac{65}{56}$
$1\frac{9}{56}$

2. $$\frac{\left(5\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{6} - 5\right) : 2}{4\frac{1}{2} - \frac{3}{8}} = \frac{\left(\frac{49}{8} - 5\right) : 2}{\frac{33}{8}} = \frac{1\frac{1}{8} : 2}{\frac{33}{8}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{33}{8}} = \frac{3}{22}$$

3. $5{,}36 \cdot 91 - 371{,}5 : 100$
$48{,}776 - 3{,}715$
$45{,}061$

4. $(20{,}4 + 5{,}6 \cdot 7{,}8) : 2{,}75$
$(20{,}4 + 43{,}68) : 2{,}75$
$64{,}08 : 2{,}75$
$23{,}30\overset{\frown}{18}\ldots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. $$\frac{5{,}25 + 8{,}75 : 11\frac{2}{3}}{1{,}35 - \frac{3}{4}} = \frac{5{,}25 + 0{,}75}{0{,}6} = \frac{6{,}0}{0{,}6} = 10$$

Durch diese allmähliche Vorbereitung gewinnt die jetzt sich anschließende Behandlung algebraischer Ausdrücke mehr Fühlung mit den vorhergehenden Pensen, und mancher Stein des Anstoßes ist schon aus dem Wege geräumt.

Gleichheitszeichen.

Das Gleichheitszeichen ist ein mathematisches Zeichen, ähnlich wie das Additions-Multiplikationszeichen, mit dem richtig zu operieren der Schüler frühzeitig lernen muß. Das Urteil, daß zwei Größen gleich oder ungleich sind, nennt man eine Gleichung oder Ungleichung. Im ersten Rechenunterricht werden schon Gleichungen gebildet, z. B. $3 + 4 = 7$; $5 \cdot 4 = 20$; $8 - 5 = 3$; $16 : 8 = 2$ und es empfiehlt sich, durch zeitweilige Aufstellung von Ungleichungen das Urteil der Schüler hierin zu schärfen. Größen, die nicht absolut gleich sind, soll man auch nicht gleich setzen und überhaupt mit der Anwendung des Gleichheitszeichens recht vorsichtig sein. So ist in folgendem Beispiel

$$69 \cdot 14 = 69 \cdot 10 = 690$$
$$69 \cdot 4 = 276$$
$$690 + 276 = 966$$

die Anwendung des Gleichheitszeichens falsch, es muß vielmehr heißen:

$$69 \cdot 14 = 69 \cdot 10 + 69 \cdot 4 = 690 + 276 = 966.$$

Ebenso falsch ist es zu schreiben

$$17 \text{ Std} \cdot 60 = 1020 \text{ Min}$$

es muß heißen: $17 \text{ Std} = 17 \cdot 60 \text{ Min} = 1020 \text{ Min}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. $\dfrac{5{,}25 + 8{,}75 : 11\frac{2}{3}}{1{,}35 - \frac{3}{4}} =$

Durch diese allmähliche … sich anschließende Behandlung algebraischer Ausdr… ergehenden Pensen, und mancher Stein des Anstoßes is…

Das Gleichheitszeichen i… lich wie das Additions-Multiplikationszeichen, mit de… r frühzeitig lernen muß. Das Urteil, daß zwei Größen… man eine Gleichung oder Ungleichung. Im ersten Rechen… gebildet, z. B. $3 + 4 = 7$; $5 \cdot 4 = 20$; $8 - 5 = 3$; $16 :$ … h zeitweilige Aufstellung von Ungleichungen das Urteil… rößen, die nicht absolut gleich sind, soll man auch n… mit der Anwendung des Gleichheitszeichens recht vorsi… spiel

die Anwendung des Gleichheit… eißen:

$69 \cdot 14 =$ … 6.

Ebenso falsch ist es zu s…

17 Std · 6…

es muß heißen: 17 Std = 17 …

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf