Die Eigenthümlichkeiten der periodischen Decimalbrüche.

Von den periodischen Decimalbrüchen finden sich in den gebräuchlichen Lehrbüchern der Arithmetik nur die ersten allgemeinsten Lehren. Der strebsame Schüler, so wie auch mancher gebildete Laie, der an mathematischen Speculationen Gefallen findet, ist daher für sein weiteres Selbststudium in einiger Verlegenheit. Schwerlich wird er wohl zu den Originalwerken, wie Gauß: disquisitiones arithmeticae, greifen, aber selbst leichtere Schriften wie etwa Nagel: Theorie der periodischen Decimalbrüche, dürften ihm noch nicht mundgerecht genug sein. — Ich versuche daher im Folgenden, die Eigenthümlichkeiten der periodischen Decimalbrüche für den Nichtmathematiker und den gereifteren Schüler in einer Weise darzustellen, daß zu ihrer Begründung keine Vorkenntnisse nöthig sind, als die Lehre von den gemeinen Brüchen und den ersten einfachsten Begriffen der Gleichungen. — Die §§ 20 sowie 27 bis 32 kann der weniger geübte Leser zuerst übergehn.

Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche. Geschlossene und periodische Decimalbrüche.

§. 1.

Bei der Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche — wobei bekanntlich der Nenner in den Zähler, nachdem diesem Nullen angehängt sind, einfach dividirt wird — bieten sich uns drei zu unterscheidende Fälle dar:

1) die Division geht nach Anhängung von mehr oder weniger Nullen auf, der Decimalbruch wird „geschlossen", z. B. bei $\frac{3}{8} = 0{,}375$;

2) die Division geht, auch nach Anhängung von noch so viel Nullen, nie auf; es kehren von irgend einer Stelle der Rechnung an die Reste, und nachdem diesen eine Null angehängt worden, also die Zahlen, in welche dividirt wird, und somit auch die Ziffern des Quotienten in derselben Reihenfolge wieder, — es entsteht eine „Periode".

Diese Periode beginnt nun entweder

a) gleich nach dem Komma — reinperiodische Decimalbrüche, z. B bei $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ 142857 . . . . . ; (Periode = 142857);

b) es gehen nach dem Komma vor der Periode erst einige nicht zur Periode gehörige Ziffern, die Vorperiode, voraus; unreinperiodische Decimalbrüche, z. B. bei $\frac{5}{12} = 0{,}\ 41\ 666\ldots$ (Vorperiode 41; Periode 6.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Rechnung sieht dann so aus:

1) 8 | 3,0 | 0,375
24
60
56
40
40
0

2ᵃ) 7 | 1,0 | 0, 142857 142857 . . . .
7
30
28
20
14
60 (A
56
40
35
50
49
10
7
30
28
20
14
60 (B
56
40
35
50
49
10

2ᵇ, 12 | 5,0 | 0, 41 6 6 . . .
48
20
12
80
42
80
72

Wir können auch sagen: In allen 3 Fällen kommen bei Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche stets eine Vorperiode (V) und eine Periode (P) vor.

Im Falle 1) erscheint (V); (P) ist Null; . . . 0, V
" " 2ᵃ ist (V) Null und es erscheint nur (P) 0, P . . . .
" " 2ᵇ erscheint (V) und (P) . . 0, V P . . . .

§. 2.

Für die Untersuchung, wann diese Fälle eintreten, (so wie überhaupt für alle folgenden Betrachtungen) können wir ein für allemal voraussetzen

1) daß der fragliche gemeine Bruch ein ächter sei. Einen unächten Bruch kann man ja vorher in eine gemischte Zahl verwandeln, davon blos den ächten Bruch in einen Decimalbruch verwandeln und diesem die ganze Zahl vorsetzen, z. B. $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3} = 5,666\ldots$

2) daß der fragliche gemeine Bruch soweit aufgehoben sei als möglich, so daß also Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler mehr haben. Man sieht leicht, daß ein unaufgehobener Bruch kein anderes Resultat geben wird, als der aufgehobene, weil der doppelte, dreifache ꝛc. Nenner in den doppelten, dreifachen ꝛc. Zähler dividirt ebenso oft geht als der einfache Nenner in den einfachen Zähler.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Entstehung geschlossener Decimalbrüche.

§. 3.

Geschlossen wird der Decimalbruch nur werden können, wenn der Nenner in den Dividendus aufgeht. Da der Nenner größer, ist als der ursprüngliche Zähler, so werden an diesen Nullen gehängt, d. h. er wird mit 10, 100, 1000 u. s. w. multiplicirt. Da aber der Nenner mit dem ursprünglichen Zähler keinen Factor gemein hat, so kann die Division nur aufgehen, wenn die Factoren des Nenners alle in 10, oder 100 oder 1000 ꝛc. enthalten sind. Diese Zehnzahlen sind aber nur aus Zweien und Fünfen zusammengesetzt.

(1) Geschlossen wird also ein Decimalbruch nur werden können, wenn sein Nenner keine andern Factoren enthält, als Zweien und Fünfen.

Um aber zu bestimmen, wie viel Decimalstellen der Bruch bekommen werde, brauchen wir blos zu bedenken: Nach Anhängung von 1 Null kommt in den Dividendus 1 Zwei und 1 Fünf als Factor; durch Anhängen von 2 Nullen erhält derselbe 2 Zweien und 2 Fünfen als Factoren u. s. w. Hat also der Nenner z. B. 3 Zweien und 1 Fünf (d. h. ist er $= 2^3 . 5 = 40$) so kommen in den Dividendus erst nach Anhängung von 3 Nullen 3 Zweien als Factoren; die geringere Anzahl von Fünfen schon früher. — Die Division wird daher nach Anhängen von 3 Nullen aufgehn, aber nicht früher; der geschlossene Decimalbruch also 3 Stellen nach dem Komma erhalten.

(2) Der geschlossene Decimalbruch (Decimalbruch mit bloßer Vorperiode) wird daher so viel Decimalstellen erhalten, wie die höchste Anzahl der Zweien oder Fünfen im Nenner des gemeinen Bruchs beträgt.

So wird z. B. ein Bruch mit dem Nenner

4	= 2 . 2	2	Decimalstellen
20	= 2 . 2 . 5	2	„
25	= 5 . 5	2	„
50	= 2 . 5 . 5	2	„
8	= 2 . 2 . 2	3	„
40	= 2 . 2 . 2 . 5	3	„ u. s. w.

erhalten. Natürlich darf — falls man etwa vorher nicht vollständig gehoben — der Zähler keinen Factor erhalten, der im Nenner in der höchsten Anzahl vorkommt.

Entstehung periodischer Decimalbrüche.

§. 4.

Sobald aber der Nenner außer Zweien und Fünfen (welche auch ganz fehlen können) noch andere Primzahlen enthält, so kann die Division unmöglich aufgehen, weil der Zähler (nach §. 2. 2) diese Primfactoren des Nenners nicht enthält und durch Anhängen von Nullen auch nicht bekommt.

Führt man nun die Division wirklich aus, so können, weil jeder Rest kleiner als der Divisor ist, höchstens so viel verschiedene Reste erscheinen als der Nenner weniger 1 beträgt. Daher muß bei dann noch fortgesetzter Division einer der früheren Reste wieder zum Vorschein kommen, und da an jeden Rest ein Null gehängt wird, eine schon früher dagewesene Zahl, in welche dividirt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, erscheinen, somit die ganze Rechnung in derselben Reihenfolge, also auch die Ziffern des Quotienten sich wiederholen, — es muß eine Periode entstehen

(3) Enthält also der Nenner andere Primzahlen als Zweien oder Fünfen, so entsteht eine — (ohne Ende sich wiederholende) Periode, die höchstens n —1 Ziffern haben kann, wenn der Nenner n heißt.

Reinperiodische Decimalbrüche.

§. 5.

Sehen wir jetzt zu, unter welchen Bedingungen die Periode sogleich nach dem Komma beginnen wird Es wird dies offenbar dann der Fall sein, wenn der erste Rest,*) der sich wiederholt, der ursprüngliche Zähler selbst ist. So hatten wir oben (§ 1) bei der Verwandlung von $\frac{1}{7}$ in einen Decimalbruch nach der Reihe die Reste 1 3 2 6 4 5, dann erschien wieder der erste Rest oder ursprüngliche Zähler 1.

Betrachten wir nun genauer, wie die Reste entstehen. Ein bestimmter Rest, etwa 6 (B (§ 1), kommt zum Vorschein, indem ein Vielfaches des Nenners hier das 2fache, = 14 von einer Zahl abgezogen wird, die sich auf 0 endigt. Ist also ein solcher Rest einem vorhergehenden, der 6 (A gleich, so muß das vorhergehende Vielfache des Divisors sich hier wie dort wenigstens auf dieselbe Ziffer (hier 4) endigen, damit die 6 beidesmal als Rest erscheinen könne.

Gibt es nun Fälle, wo nur ein einziges von den 10 möglichen**) Vielfachen des Divisors sich auf eine bestimmte Ziffer (hier 4) endigt, so muß auch das über dem Rest 6 in (B und (A stehende Vielfache (hier 14) unten und oben übereinstimmen, also auch, wenn derselbe Rest 6 bleiben soll, die darüberstehende Zahl 20 also auch der dem fraglichen Reste 6 vorangehende Rest 2 unten und oben derselbe sein.

Wenn es also allemal nur ein einziges Vielfache des Divisors gibt, das sich auf eine bestimmte Ziffer endigt, so muß, wenn ein Rest sich wiederholt, auch schon der vorhergehende sich wiederholt haben. So fortschließend übersieht man leicht, daß kein Rest früher zum zweitenmal erscheinen kann, bevor nicht der ursprüngliche Zähler sich wiederholt hat.

Kämen aber wie im Beispiel $\frac{5}{12}$ (§ 1) zwei verschiedene Vielfache des Divisors, z. B. das 6fache und 1fache von 12 sich auf einerlei Ziffer, 2, endigen, so kann in beiden Fällen 8 Rest bleiben und dann müssen nicht die vorhergehenden Reste einerlei gewesen sein.

Sehen wir also jetzt zu, in welchen Fällen nur ein einziges Vielfache eines Nenners eine bestimmte Endziffer hat, und wann deren mehrere auf dieselbe Ziffer sich endigen.

*) Bei der Division ist der Zähler als ein Rest, jeder Rest aber als neuer Zähler zu betrachten.

**) Der Quotientenziffern können es zehn verschiedene sein: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stellen wir also zusammen:

Endziffer des Nenners	Endziffer vom										fachen d. Nenners.
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8	
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6	
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5	
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4	
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3	
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2	
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1	

Hier sehen wir sogleich, daß für alle Zahlen, die sich auf 1, 3, 7 oder 9 endigen, alle zehn Vielfachen eine verschiedene Endziffer haben — oder nur ein Vielfaches mit einer bestimmten Endziffer existirt; während von den auf 0, 2, 4, 5, 6, 8 sich endigenden mehrere Vielfache dieselbe Endziffer haben können.

Diese beiden Gruppen von Zahlen unterscheiden sich aber augenblicklich so: Die zweite Gruppe enthält Zweien oder Fünfen als Factoren, die erste ist zwei- und fünffrei.

(4) Enthält also der Nenner des gemeinen Bruchs keine Zwei oder Fünf, so fängt die Periode sogleich nach dem Komma an, es entsteht ein reinperiodischer Decimalbruch.

Unreinperiodische Decimalbrüche.

§. 6.

Ob für einen zwei- oder fünfhaltigen Nenner der Decimalbruch nicht auch reinperiodisch werden könne, ist dadurch freilich noch nicht entschieden. Denken wir uns aber einen gemeinen Bruch mit 2- und 5haltigem Nenner, so können wir denselben immer mit einer solchen Zehnzahl (Potenz von 10) multipliciren, daß sich die Zweien und Fünfen des Nenners gerade wegheben lassen, d. h. mit einer Zehnzahl, die so viel Nullen hat, als die höchste Anzahl der Zweien oder Fünfen im Nenner beträgt.

Der so gehobene Bruch mit nun 2- und 5freiem Nenner liefert dann jedenfalls einen reinperiodischen Decimalbruch.

Wird dieser nun wieder mit jener Zehnzahl dividirt, mit der wir oben den gemeinen Bruch multiplicirt hatten, wodurch sein Werth dem ursprünglichen gemeinen Bruch wieder gleichkommt, so rückt das Komma so viel Stellen nach links als die Zehnzahl Nullen hatte, und der Decimalbruch erhält dann nothwendig so viel Stellen als Vorperiode.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So wird z. B.: $\frac{15}{28} = \frac{15}{4.7}$ erst mit 100 multiplicirt $= \frac{375}{7} =$ 53,571428 . . . . .

dies mit 100 dividirt $=$ 0,53,571428 . . . . .

$\frac{1}{35} = \frac{1}{5.7}$ mit 10 multiplicirt $= \frac{2}{7} =$ 0,285714 . . . . . .

dann mit 10 dividirt $=$ 0, 0 285714 . . . .

(5) Enthält der Nenner außer andern Primzahlen auch Zweien oder Fünfen, so wird der Decimalbruch unreinperiodisch, und zwar erhält die Vorperiode soviel Ziffern, als die höchste Anzahl der Zweien oder Fünfen im Nenner beträgt.

(6) Die Factoren 2 oder 5 im Nenner bilden nur die Vorperiode und haben keinen Einfluß auf die Periode selbst. Die Periode entsteht durch andere Primzahlen und diese sind wieder ohne Einfluß auf die Vorperiode.

Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine.

§. 7.

Bietet auch die Verwandlung eines geschlossenen Decimalbruchs in einen gemeinen nicht die geringste Schwierigkeit, da man ihn blos als gemeinen zu schreiben — und etwa noch zu heben — braucht, so verlangt die Verwandlung eines periodischen Decimalbruchs doch eine eigene zum Ziele führende Betrachtung. Ein bekannter Kunstgriff, um die endlose Reihe der periodischen Stellen aus der Rechnung zu bringen, besteht darin, daß man sich zwei Vielfache des Bruchs verschafft, die von einander abgezogen, jene endlose Reihe Ziffer für Ziffer vernichten. Diese Vielfachen müssen natürlich so beschaffen sein, daß hinter dem Komma in beiden gerade eine Periode beginnt, damit bei der Subtraction jede Ziffer unter eine gleiche zu stehen kommt.

1) Für reinperiodische reicht man aus mit dem Einfachen und dem 10-, 100-, 1000- ꝛc. fachen, je nachdem die Periode 1, 2, 3 ꝛc. Stellen hat.

Der periodische Bruch sei z. B. 0,459 459 . . . . . ., so ist, wenn man mit B den bestimmten zur Zeit noch unbekannten gemeinen Bruch bezeichnet

1000 B = 459, 459 459 459 . . . (ohne Ende)

und 1 B = 0, 459 459 459 459 (ohne Ende)*)

Zieht man die untere Reihe von der obern ab, so erhält man

999 B = 459, also beiderseits den 999sten Theil genommen,

$B = \frac{459}{999}$

Man konnte auch offenbar, wenn man wollte, in der obern Reihe mehrere ganze Perioden vor das Komma bringen; ebenso auch in der untern — in dieser nur weniger —, und würde so z. B. erhalten, aus 1000000 B — 1 B;

$B = \frac{459\ 459}{999\ 999}$; aus 1000000 B — 1000 B aber $B = \frac{459\ 000}{459\ 000}$.

Dann wäre der einfache Bruch $\frac{459}{999}$ nur mit 1001, beziehungsweise 1000 erweitert. — So entsteht die bekannte Regel:

(7) Nimm zum Zähler eine Periode (resp. mehrere); zum Nenner eine Zahl,

*) Da die Perioden ohne Ende sich anreihen, so hat nicht etwa die untere Reihe eine Periode mehr als die obere. Dies würde nur bei einer endlichen Anzahl von Perioden stattfinden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die mit so viel Neunen geschrieben wird, als die Periode (resp. der Zähler) Stellen hat — und hebe wo möglich.

2) Unreinperiodische. Der Bruch sei z. B 0, 41 6 6 6 . . . .

Dann hat man wegen der 2ziffrigen Vorperiode und 1ziffrigen Periode

$$(100 \times 10)\ B = 416,\ 6\ 6\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$100\ B = 41,\ 6\ 6\ 6\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$
$$900\ B = 416 - 41 \quad \text{(untere Reihe von der obern abgezogen)}$$
$$\text{also } B = \frac{416-41}{900}; \text{ so daß die Regel heißt:}$$

(7′) Um den Zähler zu bilden, nimm die Vorperiode und eine Periode als Zahl zusammen und subtrahire davon die Vorperiode. — Der Nenner hat so viel Neunen als die Periode Ziffern und dahinter so viel Nullen als die Vorperiode Ziffern hat.

Die Regel (7′) enthält übrigens die (7) als besondern Fall (in dem die Vorperiode wegfällt) in sich.

Wollen wir das Erscheinen einer unendlichen Reihe vermeiden, so brauchen wir nur daran zu denken, daß bei der Umwandlung eines gemeinen Bruchs in einen reinperiodischen nach Bildung einer ganzen Periode der ursprüngliche Zähler als Rest bleibt, so daß man der Periode nur den ursprünglichen Bruch noch als Ergänzungsglied zuzufügen hat; so wird z. B.

$$\frac{5}{11} = 0,\ 45\ \frac{5}{11}$$ — der Werth liegt zwischen 45 und 46 Hundertel —

$$\text{allgemein } B = 0,\ P+B = \frac{P+B}{100\ .\ .}$$

wo die Zehnzahl im Nenner so viel Nullen hat als die Periode Ziffern.

Sucht man also aus dieser Gleichung: $B = \frac{P+B}{100\ .\ .}$ das unbekannte B so erhält man zunächst, (mit 100 . . beide Seiten multiplicirt) 100 . . B = P+B, dann 1 B beiderseits abgezogen: 99 . . B = P und endlich $B = \frac{P}{99\ .\ .}$, wie oben (7).

Für einen unreinperiodischen Bruch, z. B. 0, 41 6 6 . . . multipliciren wir erst mit einer solchen Zehnzahl, daß die Vorperiode zur ganzen Zahl wird und verwandeln dann den reinperiodischen Bruch nach dem eben Vorhergehenden in einen gemeinen; so erhalten wir

$$41\frac{6}{9} \text{ oder } \frac{41\ .\ 9+6}{9} = \frac{41\ [10-1]\ +6}{9} = \frac{41\ .\ 10+6-41}{9} = \frac{416-41}{9}$$

und dividiren nun wieder, um den wahren Werth zu erhalten, mit jener Zehnzahl, wodurch wir denselben Ausdruck bekommen, wie oben unter 2).

Schließlich werden wir bald die Bemerkung machen, daß es durchaus nichts ändert, ob wir eine oder mehrere Stellen der Periode als Vorperiode — oder, wenn schon eine Vorperiode da war, noch als zu dieser gehörig ansehn. Der Bruch wird dadurch nur mit einer Zehnzahl erweitert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

So wird z. B. $0{,}459.459\ldots = \frac{459}{999}$

$$0{,}\,4\,594\,594\ldots = \frac{4594-4}{9990} = \frac{4590}{9990}$$

ähnlich $0{,}\,3\,459\,459\ldots = \frac{3459-3}{9990} = \frac{3456}{9990}$

$$0{,}\,34\,594\,594\ldots = \frac{34594-34}{99900} = \frac{34560}{99900}$$

Eigenschaften der Perioden. Anzahl der Periodenziffern.

§. 8.

Verwandelt man nach der Reihe $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}$, in einen Decimalbruch, so erhält man stets eine 6ziffrige Periode, bei $\frac{1}{11}, \frac{2}{11}$ . . . . . stets eine 2ziffrige, bei $\frac{1}{37}, \frac{2}{37}$ . . . stets eine 3ziffrige. Es scheint also, als wenn die Zifferzahl der Periode nur vom Nenner abhänge.

In der That, gibt z. B. $\frac{1}{n}$ eine Periode, so muß offenbar der Werth von $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}$ ꝛc. dadurch gefunden werden, daß man den Decimalbruch aus $\frac{1}{n}$ mit 2, 3 ꝛc. multiplicirt. Zieht man nun blos ächte Brüche in Betracht (wie es nach §. 2. 1, nur nöthig ist) so ist ein Multiplicator kleiner als der Nenner — bei $\frac{1}{7}$ also höchstens 6; die multiplicirte Periode ist also kleiner als 1, daher kann das Product der vordersten Ziffer nicht in eine vorhergehende Periode hineinragen, also bilden alle Vielfachen einer Periode wieder solche Perioden, jede für sich, mit derselben Anzahl von Ziffern, z. B. bei $\frac{1}{7} = 0{,}\,142857\,142857\,142857..$ mit 6 multiplicirt

$$\frac{6}{7} = 0{,}\,857142\,857142\,857142..$$

— Aber auch bei unächten Brüchen sieht man auf diese Weise leicht sich eine gleichziffrige Periode bilden, denn wenn auch ein Ueberschuß aus einer Periode in die vorhergehende ragt, so widerfährt jeder folgenden dasselbe, weil jede eben noch eine folgende hat; z. B. ragt

$$\text{für } \frac{9}{7} = 1{,}\,\overset{\overset{1285713}{1285713}}{285713}$$

aus jeder Periode eine 1 in die vorhergehende. —

Mehr Ziffern kann also eine Periode nicht bekommen, wenn der Zähler größer wird — vielleicht aber weniger? Bei $\frac{1}{27}$ z. B. ist die Periode 037 037 . . . . 3ziffrig; bei $\frac{3}{27}$ wird sie 111 111.., also wenn man will 1ziffrig; sie ist aber auch noch 3ziffrig. Die Ursache ist, wie leicht zu sehen, weil $\frac{3}{27}$ aufgehoben $\frac{1}{9}$ ist, also hier wesentlich ein anderer Nenner ins Spiel tritt.

(8) Ist daher der Nenner wesentlich, d. h. läßt der Bruch sich nicht heben, so geben alle Brüche, die denselben Nenner haben, dieselbe Anzahl von Periodenziffern; die Stellenzahl der Periode ist nur abhängig vom Nenner.

Von dieser Wahrheit können wir uns auch noch auf einem andern Wege überzeugen, der uns zugleich eine offene Aussicht für weitere Erkenntniß zeigt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist z. B. $\frac{1}{7} = \frac{\text{Periode}}{999\,999}$, wie wir in (7) gesehen, so muß eine ganze Zahl existiren, mit welcher $\frac{1}{7}$ erweitert $\frac{\text{Periode}}{999\,999}$ gibt, d. h. der Nenner 7 muß in 999 999 aufgehn. Jedenfalls ist nun diese Nennerzahl (mit sechs Neunen) die kleinste solche Nennerzahl, in welche 7 aufgeht, sonst würde $\frac{1}{7}$ eine Periode von geringerer Stellenzahl gegeben haben. Könnte daher $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$, ꝛc. eine Periode von weniger Ziffern geben, so müßte dafür 7 in eine kleinere Nennerzahl aufgehn, was natürlich unmöglich ist.

§. 9.

Da also die Stellenzahl der Periode nur vom Nenner abhängt, so brauchen wir blos diesen näher ins Auge zu fassen und können der Einfachheit wegen als Zähler uns meist 1 denken. Da ferner die Factoren 2 und 5 nur die Vorperiode bedingen und die wirkliche Periode unberührt lassen, so können wir überhaupt jetzt nur 2- und 5freie Nenner, also reinperiodische Decimalbrüche, betrachten. Da bieten sich uns denn zunächst folgende Fälle zur weiteren Untersuchung dar:

1) der Nenner ist nur eine einfache Primzahl,
2) „ „ „ eine Potenz einer Primzahl,
3) „ „ „ ein Product aus Potenzen mehrerer Primzahlen.

§. 10.

1) Der Nenner des Bruchs ist nur eine einfache Primzahl.

Verwandeln wir die Brüche $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}$ ꝛc. in Decimalbrüche, so finden wir (§ 4. 3):

es könnte	der	Nenner	3	bedingen	2	periodische	Stellen,	hat wirklich 1
„	„	7	6	„	„	„	„	6
„	„	11	10	„	„	„	„	2
„	„	13	12	„	„	„	„	6
„	„	17	16	„	„	„	„	16
„	„	19	18	„	„	„	„	18
„	„	23	22	„	„	„	„	22
„	„	29	28	„	„	„	„	28
„	„	31	30	„	„	„	„	15
„	„	37	36	„	„	„	„	3
„	„	41	40	„	„	„	„	5
„	„	p	p−1	„	„	„	„	(?)

Zunächst sehen wir also:

(9) Jede Primzahl bedingt ihre eigene bestimmte Anzahl von Periodenziffern. —

Liefert der Bruch so viel Stellen, als er wirklich haben kann, z. B. beim Nenner 7, so kommen bei Bildung einer Periode schon alle möglichen Reste vor, bei 7 z. B. 1, 3, 2, 6, 4, 5,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in welche nach der Reihe dividirt wird. Gibt z. B. $\frac{1}{7}$ die Periode 142857 . . . .

so $\frac{2}{7}$ 285714...

$\frac{3}{7}$ 428571...

$\frac{4}{7}$ 571428...

$\frac{5}{7}$ 714285..

$\frac{6}{7}$ 857142...

Kurz stellt man diese Resultate so zusammen:

Nenner 7; Rest- oder Zählerreihe: 1 3 2 6 4 5 1 3 2 6 4 5..

Periode 1 4 2 8 5 7 1 4 2 8 5 7..

so daß für einen bestimmten Zähler der Restreihe die (hier 6ziffrige) Periode mit der Zahl beginnt, die unter diesem Zähler steht. Uebersichtlicher noch lassen sie sich in 2 Kreise zusammen stellen, im Mittelpunkt etwa den Nenner, im nächsten Kreise die Zähler, im äußersten die Periodenziffern.

Hat die Periode aber weniger Ziffern als sie haben könnte, so kommen bei Bildung einer Periode nicht alle Reste vor, z. B. bei $\frac{1}{13}$ nur 6, und zwar ähnlich zusammengestellt wie oben

A) 13 Restreihe 1 10 91 2 3 4 . . . .
Periode 0 7 6 9 2 3 . . . .

Dividirt man aber 13 in einen Zähler, der in dieser Restreihe noch nicht enthalten ist, so erhält man

B) Restreihe 2 7 5 11 6 8
Periode 1 5 3 8 4 6

Daß es für die Restreihe und Periode in B hier ebenso, wie für A, wieder 6 Reste und zwar durchweg andere geben müsse, sieht man leicht. Denn der Nenner 13 bedingt wesentlich eine 6ziffrige Periode, also gehören dazu auch 6 Reste; kein Rest von diesen kann aber einem unter A gleich sein, weil sonst von da an die Periode so fortgehen würde wie unter A, und die frühern Stellen als Vorperiode erscheinen würden.

Hatte man beim Nenner 13 zwei Gruppen von zusammen gehörigen Restreihen und Perioden, so hat man z. B. für den Nenner 41 deren 8, in jeder 5 verschiedene Reste mit je 5ziffriger Periode

A) 41 Restr. 1 10 18 16 37 . . . . .
Periode 0 2 4 3 9 . . . . .

B) Restr. 2 20 36 32 33 . . . .
Per. 0 4 8 7 8 . . . . .

C) Restr. 3 30 13 7 29 . . . . .
Per. 0 7 3 1 7 . . . . . u. s. f.

Man sieht leicht, daß wenn weniger Ziffern in der Periode vorkommen, als höchstens vorkommen könnten, ihre Anzahl so beschaffen sein muß, daß sich alle Reste in Gruppen von dieser selbigen Anzahl theilen können, d. h.

(*10*) Die wirkliche Anzahl der Periodenziffern muß immer in die höchst mögliche Anzahl verschiedener Reste aufgehn.

Ist der Nenner wie hier eine Primzahl p, so ist die höchst mögliche Anzahl der Reste p—1; daher fanden wir oben (§ 10) die wirkliche Stellenzahl der Periode immer in der Zahl p—1 ohne Rest enthalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist aber der Nenner zusammengesetzt, so fällt die höchst mögliche Anzahl verschiedener Reste (die wir später N nennen werden) geringer aus, indem nur die gerechnet werden können, welche mit dem Nenner keinen Theiler gemein haben, d. h. relative Primzahlen zu ihm sind; z. B. für den Nenner 27 können nicht 26 verschiedene Reste vorkommen, sondern, weil $\frac{3}{27}$ $\frac{6}{27}$ ꝛc. als aufhebbar wegfallen, nur 18.

§ 11.

(*11*) Wieviel Ziffern die Periode wirklich hat, muß aber für jede Primzahl besonders gesucht werden, ein Gesetz (wenn es existirt) ist bis jetzt nicht bekannt.

Man kann wohl durch Kunstgriffe schneller zum Ziel kommen, als durch einfaches Dividiren, dies interessirt uns aber nicht; wir denken uns, wir dividiren jede Primzahl in die aufeinander folgenden Zehnzahlen, bis wieder 1 als Rest erscheint. — Dadurch erfahren wir die kleinste Zehnzahl, in welche dividirt, die Primzahl 1 zum Rest läßt, mithin auch, wenn wir diese 1 davon wegnehmen, die kleinste Neunerzahl, in welche die fragliche Primzahl aufgeht, und deren Ziffernzahl mit der Periodenzifferzahl übereinstimmt.

§ 12.

Wollen wir jetzt umgekehrt wissen, welche Primzahlen eine 1-, 2-, 3- u. s. w. ziffrige Periode geben, so sind es diejenigen, die in der 1-, 2-, 3- u. s. w. ziffrigen Neunerzahl aufgehn; daher es von hohem Interesse ist, diese Neunerzahl in ihre Factoren zu zerlegen. Wir finden so

I	9	= 3.3
II	99	= 3.3 . 11
III	999	= 3.3.3 . 37
IV	9999	= 3.3 . 11 . 101
V	99999	= 3.3 . 41 . 271
VI	999999	= 3.3.3 . 7.11.13.37
VII	9999999	= 3.3 . 239 . 4649
VIII	99999999	= 3.3 . 11 . 73.101 . 137
IX	999999999	= 3.3.3.3 . 37 . 333667
X	9999999999	= 3.3. 11 . 41 . 271 . 9091
XII	999999999999	= 3.3.3.7. 11.13.37 . 101 . 9901

Von diesen Primzahlen geben einige eine kleinere Anzahl von Periodenziffern, aber auch allemal eine ebenso große als die Nennerzahl Stellen hat, wenn man nur mehrere Perioden, zusammen, als eine nimmt; so z. B. gibt 11 eine zweiziffrige, aber wenn man will, auch vier- oder sechs- oder achtziffrige ꝛc.; 37 eine 3- aber auch 6-, 9-, 12- ꝛc. ziffrige.

(*12*) Für jede Neunerzahl aber gibt es eine oder mehrere **characteristische** Primzahlen, die als Nenner wesentlich eine Periode von der bestimmten Ziffernzahl bedingen. Es sind das diejenigen, die in keiner kleineren Neunerzahl aufgehn; so

bedingt	3	wesentlich	eine	1ziffrige	Periode
„	11	„	„	2 „	„
„	37	„	„	3 „	„
„	101	„	„	4 „	„
„	41 und 271	„	„	5 „	„
„	7 „ 13	„	„	6 „	„

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bedingt	239	und	4649	wesentlich	eine	7ziffrige	Periode
„	73	„	137	„	„	8 „	„
„	333667			„	„	9 „	„
„	9091	„		„	„	10 „	„
„	9901	„		„	„	12 „	„

2) Der Nenner des Bruchs ist eine Potenz einer Primzahl.

§. 13.

Sei der Nenner zunächst die 2te Potenz einer Primzahl, so kann man den Bruch $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p \cdot p}$ trennen in $\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}\right)$; also den Decimabr., den $\left(\frac{1}{p}\right)$ gibt, nochmals mit p dividiren. Dabei kann nun

1) die Periode sich ohne Rest durch p dividiren lassen, wie z. B. bei $\frac{1}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot 0{,}33\ldots = 0{,}111\ldots$

Dann ist die Stellenzahl des Bruchs $\frac{1}{p^2}$ offenbar eben so groß als die des Bruchs $\frac{1}{p}$

2) die Periode, die $\frac{1}{p}\ldots$ liefert, ist nicht weiter durch p theilbar; so ist z. B. für $\frac{1}{49} = \frac{1}{7 \cdot 7} = \frac{1}{7} \cdot 0{,}142857\ldots$ die Periode P durch 7 nicht mehr theilbar.

Da aber $\frac{1}{p}$ nicht blos $= \frac{P}{99\ldots}$ sondern auch $= \frac{P\,P}{99\ldots 99\ldots}$ u. s. w. ist, so wird man mehrre Perioden neben einander als Zähler betrachten können, um mit p hinein zu dividiren, bis es aufgeht. Es fragt sich dann nur, wieviel Perioden man zusammenstellen muß, bis eine Zahl entsteht, die durch p theilbar ist.

Wenn p in P dividirt einen Rest r läßt, so wollen wir zunächst zusehen, welchen Rest p in zwei hinter einander gestellte Perioden, in PP, läßt. Hat P z. B. 6 Stellen, so stellt PP die Zahl $P \cdot 1000000 + P$ vor, welche wir trennen können in $P \cdot 999999 + P + P$. Da nun p in die Neunerzahl ohne Rest aufgeht, d. h. da die Neunerzahl eine ganze Anzahl von malen das p enthält, so ist auch das Pfache der Neunerzahl eine ganze Anzahl von p. Es handelt sich also blos noch darum, welchen Rest p in P+P läßt. Ein P ist nun eine ganze Anzahl von p und läßt 1.r übrig; also sind zwei P auch wieder eine ganze Anzahl von p und bleiben zwei r übrig. Stellt man also 2 Perioden zusammen, so bleibt bei der Division von p in diese Zahl der 2fache Rest. Drei Perioden zusammengenommen läßt sich trennen in $PP \cdot 1000000 + P$ oder $PP \cdot 999999 + PP + P$. Davon ist nun wieder der erste Theil eine ganze Anzahl von p, weil 999 999, also auch das PPfache davon eine ganze Anzahl p enthält. Der zweite Theil PP enthält, wie wir eben gesehen haben, außer einer Anzahl von vollen p noch 2.r und der dritte Theil P besteht auch aus einer Anzahl p und 1.r. Zusammen also enthalten 3 Perioden hinter einander gestellt als Zahl eine Anzahl voller p und 3 r.

So kann man weiter schließen und findet: Stellt man 2, 3, 4, 5 u. s. w. Perioden hinter einander als Zahl zusammen und dividirt p hinein, so kann man diese Zahl trennen in eine große Anzahl ganzer p und 2, 3, 4, 5 mal den Rest, den p in eine Periode dividirt läßt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es handelt sich also jetzt noch darum, wie viel solcher Reste man zusammenzählen muß, um eine ganze Anzahl von p zu bekommen. Dann weiß man, wie viel Perioden man mindestens hinter einander zu stellen hat, damit p darin aufgehe. Es fragt sich also, wie groß muß x mindestens sein, wenn $x.r$ durch p aufgehen, d. h. der Bruch $\frac{x.r}{p}$ eine ganze Zahl werden soll. Man sieht bald, weil r keinen Factor mit der Primzahl p gemein hat, daß p ganz in x enthalten sein, x also wenigstens $=$ p sein müsse.*) Daher wird man wenigstens p Perioden hinter einander nehmen müssen, bis p darin aufgeht. So ergibt sich also:

(13) Ist der Nenner eines Bruchs $p^2 =$ der zweiten Potenz einer Primzahl p und geht p in eine Periode für $\frac{1}{p}$ auf, so ist die Stellenzahl der Periode für $\frac{1}{p^2}$ ebenso groß wie die für $\frac{1}{p}$. Geht aber die Periode für $\frac{1}{p}$ nicht durch p auf, so hat die Periode für $\frac{1}{p^2}$ p mal so viel Ziffern als die für $\frac{1}{p}$.

So hat z. B. $\frac{1}{7}$ eine 6stellige Periode, da aber 7 in diese Periode nicht aufgeht, so bekommt $\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$ eine 7 mal 6- oder 42stellige Periode.

Sehen wir nun zu, wie viel Periodenstellen die höheren Potenzen von p in diesem Falle liefern. — Geht p nicht auf in die Periode, die $\frac{1}{p}$ gibt, so geht natürlich auch p^2, p^3 ... nicht darin auf. Dann ergibt sich durch dieselben Schlüsse (wenn man nur p^2, p^3 ... an die Stelle von p setzt),**), daß man p^2, p^3 ... Perioden von $\frac{1}{p}$ aneinanderreihen müsse, bis p^2, p^3 ... in diese neue Zahl aufgeht; daß also dann $\frac{1}{p^3} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p}$ eine p^2 mal, ebenso $\frac{1}{p^4} = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{p}$ eine p^3 mal so viel ziffrige Periode bekommen muß, als $\frac{1}{p}$ u. s. f.

So gibt also $\frac{1}{7}$ eine Periode von 6 Stellen,

$\frac{1}{49} = \frac{1}{7^2}$ „ „ „ 7.6 . . .

$\frac{1}{343} = \frac{1}{7^3}$ „ „ 7.7.6 . . .

$\frac{1}{2401} = \frac{1}{7^4}$ „ 7.7.7.6 . . . u. s. w.

---

*) Wünschen wir uns darüber noch strengere Rechenschaft zu geben, so stellen wir uns die Frage: wie x beschaffen sein müsse, um mit r multiplicirt ein durch p theilbares Product zu geben. Wir dividiren das kleinere r in p. Dies geht a mal und bleibt nothwendig ein Rest r, der aber kleiner ist als r. Nun haben wir die Beziehung $a.r + r = p$. Multipliciren wir diese Gleichung mit $\frac{x}{p}$, so gibt es $a\,\frac{r.x}{p} + r\,\frac{x}{p} = \frac{p.x}{p}$.

Die rechte Seite ist nun eine ganze Zahl, also muß auch die linke, und da $\frac{r.x}{p}$, also auch $a\,\frac{rx}{p}$ eine ganze Zahl sein soll, auch $r\,\frac{x}{p}$ eine solche sein, d. h. wenn x mal $\frac{r}{p}$ eine ganze Zahl gibt, so gibt dasselbe x auch mit r, einer noch kleineren Zahl, als r ist, ein durch p theilbares Product. So fortgeschlossen muß endlich auch $x.1$, d. h. x selbst eine durch p theilbare Zahl sein, d. h. x wenigstens 1 mal p sein.

**) Wenn bei der Division von P, (der Periode von $\frac{1}{p}$) mit p ein Rest r bleibt, so kann man wieder fragen, wie groß das x sein müsse, was $\frac{x.r}{p^2} \cdot \frac{x.r}{p^3}$ ... zur ganzen Zahl mache, und es ergibt sich wieder, weil r mit p^2, p^3 ... keinen Factor gemein hat, daß x wenigstens p^2 resp. p^3 ... sein müsse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Allgemein findet sich also: Geht p in die Periode, die $\frac{1}{p}$ gibt, auf und dann weiter auch noch in die Periode, die $\frac{1}{p^2}$ gibt u. s. w., geht also zuerst p nicht mehr auf in die Periode, die z. B. $\frac{1}{p^3}$ gibt, so fängt erst von da das Gesetz an, daß jede folgende Potenz der Primzahl eine p mal so viel stellige Periode liefert, als die vorhergehende.

So hat z. B. $\frac{1}{3}$ die Periode 0,3 . . . diese ist 1ziffrig,

$\frac{1}{3^2}$ „ „ 0,1 . . . diese ist auch 1ziffrig,

weil 3 in die Periode, die $\frac{1}{3}$ gibt, aufgeht. Da aber nun 3 nicht mehr in die Periode von $\frac{1}{3^2}$ aufgeht, so wird die Periode für

$\frac{1}{3^3}$ nur 3^1 mal 1ziffrig,

$\frac{1}{3^4}$ „ 3^2 mal 1ziffrig,

$\frac{1}{3^5}$ „ 3^3 mal 1ziffrig u. s. w.

Man hat also — allgemeiner als (13).

(*13'*) Geht von irgend einer Potenz einer Primzahl an die Periode derselben nicht mehr durch die Primzahl auf, so hat die Periode jeder folgenden Potenz p mal soviel Ziffern als die vorhergehende.

3) Der Nenner des Bruchs ist zusammengesetzt (Product) aus mehreren verschiedenen Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen.

§ 13.

Wir nehmen z. B. $\frac{1}{407} = \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{37}$ Da $\frac{1}{11}$ eine 2- oder 4- oder 6- oder 8ziffrige Periode liefert, so geht 11 auf in 99 oder 99 99 oder 99 99 99 . . .

Ebenso gibt $\frac{1}{37}$ eine 3- oder 6- oder 9- oder 12ziffrige Periode, d. h. es geht 37 auf in 999... 999 999 oder 999 999 999..., also 11 . 37 schon in das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Anzahl Neunen, die Nennerzahl, in welcher beide Nenner aufgehn; hier in 999 999.

So wird man leicht einsehen

(*14*) Ist der Nenner zusammengesetzt aus einzelnen Primzahlen oder Potenzen von Primzahlen, so liefert er eine so viel ziffrige Periode als das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der Periodenstellenzahlen seiner einzelnen Bestandtheile beträgt.

§ 14.

Jetzt sind wir im Stande, folgende Aufgabenarten zu lösen:

I. Wir suchen einen **gemeinen** Bruch, der in einen Decimalbruch verwandelt liefere

1) einen **geschlossenen** Decimalbruch von 3 Stellen. Der Nenner darf nach (1) u. (2) nur Zweien oder Fünfen enthalten und zwar muß die höchste Anzahl der Factoren einer Art 3 sein. Der Zähler beliebig, nur keinen Factor des Nenners enthaltend, deren dieser 3 hat;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) einen **reinperiodischen** mit 6 Stellen. Der Nenner muß 2- und 5frei sein, aber eine characteristische Primzahl für 6 Stellen, also 7 oder 13 (oder beide), enthalten. Außerdem kann er noch enthalten Primzahlen, die eine Stellenzahl von einem aliquoten Theil von 6, also eine 1-, 2-, 3ziffrige Periode geben. — Zähler beliebig, nur keinen Factor des Nenners enthaltend;

3) einen **unreinperiodischen** mit 2 vorperiodischen und 4 periodischen Stellen. Der Nenner muß enthalten, der Vorperiode wegen, 2 Zweien oder 2 Fünfen, der Periode wegen eine characteristische Primzahl für 4 Stellen, also 101. Sonst kann er noch enthalten Primzahlen, die 2 oder 1 Stelle geben.

Will man einen gemeinen Bruch bilden, der eine über das Bereich unserer näheren Kenntnisse der characteristischen Primzahlen reichende Anzahl von Periodenziffern geben soll, so kann man zum Nenner jedenfalls eine Zahl nehmen, die aus so viel Einsen besteht, als die Periode Stellen haben soll. Eigentlich sollte das die entsprechende Nennerzahl sein; aus dieser hat man dann den Factor 9 schon ausgeschieden. Vielleicht kann man leicht auch noch nach der Tabelle im §. 12 allerhand Nebenfactoren ausscheiden, um den Nenner kleiner zu bekommen, z. B. für eine 18ziffrige Periode die Factoren 3, 7, 11, 13, 37 ꝛc.

II. Es ist ein gemeiner Bruch gegeben, wir wünschen zu wissen, wie der Decimalbruch beschaffen sei, in den er verwandelt werden kann. Es kommt alles darauf an, den Nenner in seine Factoren zu zerlegen. Ist dieser z. B. = 3.3.5.5.5.37.41, so bekommt

der Bruch wegen	5.5.5	3 vorperiodische	
wegen	41	5	also 15 periodische Stellen.
„	37	3	
„	3.3	1	

Reciprocität der Nenner und Perioden.

§. 15.

Geben 2 Brüche reine Perioden von gleich viel Ziffern, z. B.: $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{13}$, so ist,

weil $\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}$ und $\frac{1}{13} = \frac{076923}{999999}$

$7 . 142857 = 13 . 76923$, (weil beide $= 999\,999$)

also 1) $142857 = \frac{13 . 76923}{7}$ und auch

2) $76923 = \frac{7 . 142857}{13}$

Haben nun die beiden Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler, so geht 7 ganz in 76923 und 13 ganz in 142857 auf, weil der Bruch beide mal eine ganze Zahl geben muß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es geht dann also jeder Nenner in die Periode des andern auf. Dabei brauchen die Perioden aber nicht gerade für die Zähler 1 gebildet zu sein, da jede Periode für einen andern Zähler, ja ein Vielfaches der für den Zähler 1 ist, also der Nenner dann auch in das Vielfache aufgehen muß.

Die beiden Nenner können sogar verschiedene Anzahlen von periodischen Stellen liefern, wenn man nur jede Periode so oft neben einander stellt, bis sie so viel Stellen hat, als ein gemeinschaftlicher Dividuus für beide Ziffermengen beträgt.

(15) Sind also 2 Nenner, welche reinperiodische Decimalbrüche liefern, relative Primzahlen zu einander, so geht jeder in so viel nebeneinander gestellte Perioden des andern auf, als nöthig sind, um eine Stellenzahl gleich einem gemeinsamen Dividuus beider Periodenstellenzahlen hervorzubringen.

So ist z. B. $\frac{2}{11} = \frac{181818}{999999}$ und $\frac{4}{37} = \frac{108108}{999999}$

und es geht 11 in 108108

37 in 181818 auf.

§. 16.

Gibt ein Bruch $\frac{z}{n}$ eine reine Periode, so hat man

$$\frac{z}{n} = \frac{\text{Periode}}{\text{Neunerzahl}}, \text{ also auch } \frac{z}{\text{Periode}} = \frac{n}{\text{Neunerzahl}}.$$

(16) Gibt also der Nenner eines Bruchs eine Periode, so liefert die Periode (als Nenner für denselben Zähler genommen) jenen Nenner als Periode oder Periode und Nenner sind reciprok; nur muß die Periode nöthigenfalls durch vorgeschriebene Nullen mit so viel Stellen geschrieben werden, als die Neunerzahl Neunen hat.

Um solche reciproken Zahlen zu erhalten, braucht man nur die Neunerzahl, welcher das Product der gesuchten Zahlen gleich ist, in 2 Factoren zu zerlegen.

So erhält man z. B. für den Zähler 1 die zusammengehörigen Zahlen n und P.

	n		P	
Da 99999 = 1.3 3.41.271	99999	. . .	00001	(99999
	33333	. . .	00003	zerlegt
	11111	. . .	00009	in
	02439	. . .	00041	1.3.3.271 und 41
	00813	. . .	00123	1.3.271 und 3.41
	00369	. . .	00271	1.3.3.41 und 271).

Für einen andern Zähler, z. B. 4 gibt natürlich

ein n als Nenner das 4fache P als Periode, z. B. $\frac{4}{369}$ gibt Periode 4.00271 = 01084

ein P „ „ „ 4fache n „ „ $\frac{4}{271}$ „ „ 4.00369 = 01476.

Gemeinschaftliche Theiler des Nenners und der Reste.

§. 17.

Betrachten wir bei einer Division mit einem Nenner, welcher Zweien (oder Fünfen) enthält also einen unreinperiodischen Decimalbruch liefert, z. B. $\frac{7}{24}$, die Reste — welche hier 7, 22,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4, 16, 16 ꝛc. sind — so sehen wir, daß, wenn auch der ursprüngliche Zähler keinen Factor mit dem Nenner gemein hat, doch die folgenden Reste deren enthalten. Daß dies nothwendig so sein muß, sehen wir leicht so: Durch Anhängen einer Null bekommt der Zähler den Factor 10 d. h. 2.5. Man dividirt also in eine ganze Anzahl von Zwei (Fünf), d. h. man zieht davon ein Vielfaches des Nenners, also auch eine ganze Anzahl von Zwei (Fünf) ab, weshalb eine ganze Anzahl von Zwei (Fünf) übrig bleiben muß, d. h. der 1ste Rest muß den Factor 2 (resp. 5) enthalten.

Vor der neuen Division mit dem Nenner in diesen 1sten Rest könnte man diesen Factor erst wegheben. Enthält nun der so entstandene neue Nenner noch eine Zwei (Fünf), so bekommt der 2te Rest ganz eben so, wie oben der 1ste, wiederum den Factor Zwei (Fünf). Hätte man aber vor der zweiten Division nicht aufgehoben, so hätte nun der 2te Rest mit dem Nenner den Factor 2.2 (resp. 5.5) gemein. So überzeugt man sich also bald

(17) Hat der Nenner den Factor 2^p, so hat der 1ste Rest den Factor 2^1,
" " 2te " " " 2^2,
" " 3te " " " 2^3,
und so fort, bis der pte Rest den Factor 2^p mit dem Nenner gemein hat, der nun auch bei der fortgesetzten Division, welche die (reine) Periode liefert, bleibt.

Mit 5 ist derselbe Fall wie mit 2, und hat der Nenner Zweien und Fünfen, so bekommt jeder folgende Rest eine Zwei und eine Fünf mehr bis zur höchsten Anzahl im Nenner, welche dann bleibt.

Daß man practisch wohl thut, jedesmal diese neuen Factoren gleich zu beseitigen, um kleinere Zahlen zu bekommen, versteht sich von selbst.

§. 18.

(18) Enthält aber der Nenner **keine** 2 oder 5 (also auch im vorigen Falle, nachdem alle Zweien und Fünfen beseitigt sind, beim Beginn der Bildung der Periode) so hat **kein** Rest mit dem Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler.

Stellen wir uns nämlich den Anfang einer Division von n in z.10 vor:

$$\begin{array}{c|c|c} n & z.10 & \alpha \\ & \alpha.n & \\ \hline & r & \end{array}$$

so sehen wir, daß $r+\alpha.n = z.10$ sein muß. Gäbe es also für den ersten Rest und den Nenner n einen gemeinsamen Factor, so wäre r und n, also auch $\alpha.n$, also auch $r+\alpha.n$ ein Vielfaches dieses Factors. Also müßte auch z.10 eine ganze Anzahl von diesem Factor sein. Da aber 10 nur 2 und 5, und z, das keinen Factor mit n gemein hat, diesen Factor auch nicht enthält, so ist dies nicht möglich. Der erste Rest hat also keinen Factor mit dem Nenner gemein. — Bei fortgesetzter Division tritt nun r an die Stelle von z und wir schließen so, daß auch der 2te Rest u. s. w., daß kein einziger Rest einen Factor mit dem Nenner gemein habe.

Anzahl der Reste, möglichen Zähler.

§. 19.

Wir sahen oben (10), daß die Anzahl der Periodenziffern in der höchsten Anzahl der mög-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lichen Reste (Zähler der ächten Brüche) aufgehn müsse. Diese höchste Zahl ist nun, wenn der Nenner eine Primzahl p ist, immer p—1. Ist aber der Nenner zusammengesetzt, so fällt diese Zahl geringer aus, weil alle die Reste (oder möglichen Zähler) wegfallen, die einen Factor mit dem Nenner gemein haben. So fallen für den Nenner $21 = 3 . 7$, z. B. alle Zähler, welche 3 oder 7 enthalten, weg; also 3, 6, 9, 12, 15, 18, so wie 7, 14. Statt der möglichen 20 haben wir also, da die vorstehenden 8 ausfallen, nur 12 3- und 7freie. Wir wollen daher jetzt diese wirkliche Anzahl brauchbarer Zähler — die wir N nennen wollen — zu bestimmen suchen.

Enthält der Nenner n mehrere Primzahlen, z. B. Dreien, Fünfen, Siebenen (wie z. B. der Nenner 105, 315, 525 u. s. w.), so scheiden wir aus der Reihe der natürlichen Zahlen bis zum Nenner nach und nach die, welche eine erste, dann die, welche eine 2te Primzahl ꝛc. enthalten, aus;

z. B. 1) die, welche 7 enthalten, d. h. die $\frac{n}{7}$ Zahlen 7, 14, 21, 28. . n;

2) ferner die $\frac{n}{5}$ Zahlen, welche 5 enthalten, also 5, 10, 15, 20, ... n, oder $5 . (1, 2, 3, \ldots \frac{n}{5})$. — Nur müssen wir davon diejenigen abrechnen, welche zugleich 7 enthalten, wie 35, 70, 105; weil diese schon unter 1) ausgeschieden sind, deren sind es offenbar $\frac{n}{5 . 7}$.

3) die $\frac{n}{3}$ 3haltigen Zahlen 6, 3, 9, 12 ꝛc. Davon gehen ab, die, welche außer 3 noch 7 und die, welche außer 3 auch noch 5 enthalten, weil sie unter 1) und 2) schon abgerechnet sind, der ersteren sind es offenbar $\frac{n}{3 . 7}$, der letzteren $\frac{n}{3 . 5}$.

Nun sind aber die 7- u. 5- u. 3haltigen, wie 105 ꝛc., unter 1), 2) und 3) dreimal ausgeschieden, und unter 2) einmal, unter 3) zweimal, d. h. dreimal wieder ausgenommen, müssen also wieder einmal als auszuscheiden angesetzt werden; ihrer sind es $\frac{n}{3 . 5 . 7}$.

Rechnen wir das alles zusammen, so sind auszuscheiden:

$$\frac{n}{7} + \frac{n}{5} + \frac{n}{3} - \frac{n}{7 . 5} - \frac{n}{7 . 3} - \frac{n}{5 . 3} + \frac{n}{7 . 5 . 3}$$

übrig bleiben also:

$$n - n . \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{7 . 5} - \frac{1}{7 . 3} - \frac{1}{5 . 3} + \frac{1}{7 . 5 . 3}\right)$$

So könnten wir in jedem Falle uns die auszuscheidenden und also übrigbleibenden, d. h. die Zahl N verschaffen, bekämen aber noch keine alle Fälle umfassende Regel*), daher wir lieber einen andern, eine solche allgemeine Regel liefernden, Weg einschlagen wollen:

Der 7haltigen Zahlen von 1 bis n waren es, wie wir oben sahen, $\frac{1}{7}$ n.

Scheiden wir dieses eine Siebtel von n aus, so bleiben $\frac{6}{7}$ n übrig, welche keine 7 mehr enthalten, also 7frei sind.

Von diesen gebliebenen $\frac{6}{7}$ n wollen wir nun die 5haltigen entfernen. Wie viele deren sind,

*) Letzterer Ausdruck läßt sich zwar in die kürzere und übersichtliche Form

$$n \frac{(7-1)\ (5-1)\ (3-1)}{7 . 5 . 3}$$

bringen, wie wir leicht etwa durch Nachrechnen prüfen könnten, gibt uns aber keine Ueberzeugung von einem allgemeinen Gesetz.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

erfahren wir so: Von 1 bis n gibt es offenbar die $\frac{1}{5}$n 5haltigen Zahlen $(1, 2, 3 .. \frac{n}{5}) . 5$. Unter diesen Zahlen sind aber auch noch 7haltige, welche oben schon ausgeschieden sind, so daß als neu auszuscheidende nur die 7freien unter den $\frac{1}{5}$n 5haltigen entfernt werden dürfen. Wenn aber unter den n auf einander folgenden Zahlen 1 bis n $\frac{6}{7}$n 7frei sind, so sind unter den $\frac{1}{5}$n Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{n}{5}$, also auch unter den Zahlen $(1, 2, 3 .. \frac{n}{5}) . 5$ $\frac{6}{7} . (\frac{1}{5}n)$ 7freie. Da aber diese Anzahl $\frac{6}{7}$ von $\frac{1}{5}$n auch übereinstimmt mit $\frac{1}{5}$ von $\frac{6}{7}$n, so ersehen wir, daß ein Fünftel der 7freien Zahlen noch 5haltig, also vier Fünftel der 7freien Zahlen auch 5frei sind. Von den n auf einander folgenden Zahlen 1 . . . n sind also $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} . n$ Zahlen 7- und 5frei. Von diesen gebliebenen sind nun noch die 3haltigen auszuscheiden.

Von 1 bis n gibt es wieder $\frac{1}{3}$n 3haltige, darunter sind aber noch 7- und 5haltige, die schon oben ausgeschieden sind. Es dürfen nur die 7- und 5freien der 3haltigen neu entfernt werden. Aber 7- und 5freie gibt es offenbar so viele, als in der Reihe $1, 2, 3 \ldots \frac{n}{3}$, also auch in $(1, 2, 3 \ldots \frac{n}{3}) . 3$, deren enthalten sind, d. h. nach vorstehenden Ueberlegungen: $\left(\frac{4}{5} . \frac{6}{7}\right) . \frac{n}{3}$. Da diese Anzahl aber auch mit $\frac{1}{3}$ von $\left(\frac{4}{5} . \frac{6}{7}\right)$n übereinstimmt, so gibt es in den noch gebliebenen $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$n Zahlen ein Drittel 3haltige, also zwei Drittel 3freie. Die Anzahl der 7- und 5- und 3freien Zahlen ist also $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}$ n.

(*19*) Man sieht daher, um unsere Zahl N zu finden, hat man die Zahl n mit einem Product von Brüchen zu multipliciren, deren Nenner die einzelnen **verschiedenen** in n enthaltenen Primzahlen sind, während die Zähler beziehungsweise allemal um 1 kleiner sind, als die betreffenden Nenner.

So erhält man z. B. für $21 = 3.7 \quad N = 12 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} . 21$

„ $210 = 2.3.5.7 \quad N = 48 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} . 210$

„ $63 = 3.3.7 \quad N = 36 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} . 63.$

Man sieht leicht:

1) die Zahl N wird, da die Zähler (außer für den Factor 2 des Nenners, wo er aber $= 1$ wäre) alle gerade sind, immer eine gerade Zahl;
2) ist n eine Primzahl, so wird $N = n - 1$;
3) Kommt jede Primzahl nur einmal vor, so wird $N = (3-1).(5-1).(7-1)$ für $n = 3.5.7 \ldots$;
4) hat der Nenner eine Primzahl mehrmals als Factor, wie z. B. $63 = 3.3.7$ und nimmt man blos die verschiedenen Factoren $3.7 = 21$ heraus, so bekommt man $63 = 3.21$, und N wird 3 mal so groß als für 21. Die N Zahlen zerfallen gleichsam in 3 Gruppen, jede wie für 21; die erste Gruppe hält die Zahlen von 1 bis . . . 21,
   „ zweite „ „ „ „ „ $21 + 1$ bis $21 + 21$,
   „ dritte „ „ „ „ „ $42 + 1$ „ $42 + 21$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Summe der möglichen Reste.

§. 20.

Wollen wir jetzt auch auf diesem Wege die Summe aller N möglichen Reste finden — obgleich sie sich später (§. 22) auf andere Weise ungesucht ergibt — so erinnern wir uns nur an die bekannte Regel, nach welcher man die Summe von den n auf einander folgenden Zahlen $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, dadurch findet, daß man 1ste und letzte Zahl addirt, diese Summe mit der Anzahl der Zahlen multiplicirt und davon die Hälfte nimmt*), d. h., daß die Summe von $1, 2, \ldots n = (1+n)\frac{n}{2}$ ist.

Nehmen wir etwa wieder $n = 7.5.3$. Von der Summe dieser 105 Zahlen muß die Summe der 7-, 5- und 3haltigen Zahlen ausgeschieden werden. Zunächst findet man die Summe der Zahlen, welche den Factor 7 enthalten, d. h. Summe der Zahlen $7, 14, 21, \ldots n$ oder $7.(1+2+3+\ldots \frac{n}{7})$ 7 mal so groß als die Summe der aufeinander folgenden Zahlen $1, 2 \ldots \frac{n}{7}$, also nach obiger Regel (wo nur $\frac{n}{7}$ statt n zu setzen ist),

$$7.(1+\frac{n}{7})\frac{n}{7}.\frac{1}{2}, \text{ welches aufgehoben } (1+\frac{n}{7})\frac{n}{2} \text{ gibt.}$$

Ziehen wir nun diese Summe der 7haltigen von obiger Summe aller Zahlen ab**), so bleibt als Summe der 7freien Zahlen von $1 \ldots n$ übrig $\left(\frac{6}{7}n\right)\frac{n}{2}$ $\alpha)$

Weiter muß nun ausgeschieden werden die Summe der 5haltigen darunter, oder was einerlei ist, die Summe aller 5haltigen Zahlen von $1 \ldots n$ mit Ausnahme der 7haltigen davon (weil diese schon ausgeschieden sind), also der 5haltigen aber 7freien Zahlen.

Um die Summe dieser Zahlen zu bestimmen, können wir obiges Resultat, daß in der Reihe $1 \ldots n$ die Summe der 7freien Zahlen $\frac{6}{7}n.\frac{n}{2}$ sei, benutzen. Die Summe aller 5haltigen Zahlen von $1 \ldots n$, oder der Zahlen $5.(1, 2, 3 \ldots \frac{n}{5})$ können wir darstellen als $= 5$ mal der Summe aller Zahlen in der Reihe $(1 \ldots \frac{n}{5})$. Die Summe der 7freien dieser Reihe ist nach $\alpha) = (\frac{6}{7}.\frac{n}{5})\frac{n}{5}.\frac{1}{2}$ (indem wir statt n in $\alpha)$ nur $\frac{n}{5}$ setzen. Diese Anzahl 5 mal genommen, oder $5.\left(\frac{6}{7}.\frac{n}{5}.\frac{n}{5}.\frac{1}{2}\right)$ liefert also die Summe unserer 5haltigen 7freien Zahlen. Dieser Ausdruck ist aber, aufgehoben, $= \frac{1}{5}\left(\frac{6}{7}n\right)\frac{n}{2}$, d. h. die Summe der 5haltigen 7freien Zahlen beträgt den fünften Theil der Summe der 7freien Zahlen. Zieht man dieses Fünftel der Summe der 7freien Zahlen von der ganzen Summe der 7freien Zahlen (den noch gebliebenen) ab, so hat man auch noch die neu auszuscheidenden 7freien 5haltigen ausgeschieden, und man behält als

*) Man schreibe unter die Reihe 1, 2, 3 . . n, dieselbe nochmals rückwärts n . . 1 und addire die über einander stehenden Zahlen, dann erhält man n Partialsummen, jede $= n + 1$, die zusammen die doppelte Summe ausmachen.

**) $(1+n)\frac{n}{2} - (1+\frac{n}{7})\frac{n}{2} = \left((1+n) - (1+\frac{n}{7})\right)\frac{n}{2}$ u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Summe der 7- und 5freien Zahlen übrig: $\frac{4}{5}\left(\frac{6}{7}n\right)\frac{n}{2}$

Ganz ebenso können wir nun auch noch die 3haltigen darunter, oder die Summe aller 3haltigen von 1 . . n, mit Ausschluß der 7- und 5haltigen (welche schon entfernt sind) ausscheiden. Summe aller 3haltigen von 1 . . n $= 3.(1+2+3\ .\ .\ \frac{n}{3})$; die der (7- u. 5-) freien darunter $= 3\ .\ \frac{4}{5}.\frac{6}{7}.\frac{n}{3}.\frac{n}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{5}\ \frac{6}{7}\ n\right)\frac{n}{2}$. Dieses eine Drittel der Summe der (7- u. 5-) freien Zahlen von der ganzen Summe der 7- und 5freien (den noch gebliebenen) abgezogen, gibt als Summe der 7-, 5- und 3freien Zahlen $\frac{2}{3}.\left(\frac{4}{5}.\frac{6}{7}\ n\right)\frac{n}{2}$ oder $\left(\frac{2}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{7}\ n\right)\frac{n}{2}$.

Man sieht nun leicht, wie sich diese Betrachtungen für etwa noch mehrere Primzahlen fortsetzen ließen und erkennt also das Gesetz:

(20) Daß die Summe aller N Reste $= \mathbf{N}\ .\ \frac{n}{2}$ oder $\frac{\mathbf{N}}{2}\ .\ \mathbf{n}$ sei.

Vollständige und complementäre Perioden und Restreihen.

Reihenfolge der Reste.

§. 21.

Wir sahen oben (§. 19), daß es für einen bestimmten Nenner n immer N verschiedene Reste gibt. Findet sich nun unter diesen N Zahlen eine Zahl z, so ist auch allemal die Zahl n − z darunter. Um uns davon zu überzeugen, brauchen wir nur zu bedenken, wie wir unter den n auf einander folgenden Zahlen 1, 2, 3 . . n die N Zahlen heraussuchen könnten, — indem wir nämlich von vorn angefangen, jede, die einen Factor des Nenners n enthielt, ausschieden. Nehmen wir z. B. n = 21 = 3.7 und schreiben unter einander

1	2	3	4	5	6	7	8 . . .
(21—1)	(21—2)	(21—3)	(21—4)	(21—5)	(21—6)	(21—7)	21—8) . . .

so scheiden wir von vorne angefangen aus die 3, die 6, die 7 u. s. w. als 3- oder 7haltig. Die darunter stehende Zahl 21—3, 21—6, 21—7 enthält aber immer denselben Factor (weil Minuend und Subtrahend eine ganze Anzahl von diesem Factor sind), muß also auch ausgeschieden werden. Enthält aber eine Zahl oben keinen die Ausscheidung fordernden Factor, so auch nicht die darunter stehende; diese müssen also beide bleiben.

Dividiren wir nun einmal n in z.10, ein ander mal n in (n—z).10, so erhalten wir

$$1)\quad n\left|\begin{array}{c} z.10 \\ \alpha.n \\ \hline r \end{array}\right.\alpha \qquad 2)\quad n\left|\begin{array}{c} (n-z).10 \\ \beta.n \\ \hline \rho \end{array}\right.\beta$$

und wir sehen leicht, daß die nächsten Zähler (die Reste r und ρ) wieder eben so beschaffen sein müssen, daß $r = n-\rho$ und $\rho = n-r$ sei, d. h. daß sich beide zu n ergänzen. Denn aus 1) folgt $\alpha.n + r = z.10$ und aus 2) $\beta.n + \rho = (n-z)\ 10$. Addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$3)\ (\alpha + \beta)\ n + (r + \rho) = n.10,$$

also muß $(r+\rho)$ auch eine ganze Anzahl von n betragen, weil es sonst mit der ganzen Anzahl von n, nämlich $(\alpha+\beta)$ n nicht gerade die ganze Anzahl von n, nämlich 10 n ausmachen könnte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber r kleiner als n und auch ρ kleiner als n ist, so müssen sie zusammen kleiner als 2 n sein; d. h. sie müssen 1 . n ausmachen; d. h. wenn bei der Division von $\frac{z}{n}$ ein Rest r bleibt, so bei der Division von $\frac{n-z}{n}$ der Rest n—r u. s. f. für alle folgenden Reste.

Daraus ergibt sich also für die Reihenfolge der Reste die Wahrheit:

(21) Wenn bei einer Division von n in z die Restreihe ist: z, r, s, t . . so ist bei der Division von n in (n—z) die Restreihe: (n—z), (n—r), (n—s), (n—t) . .

Aus obiger Gleichung 3), die wir nun so schreiben können:

$$(\alpha+\beta)\ n + n = 10\ n \text{ oder}$$
$$(\alpha+\beta)\ n = 9\ n,$$

ersehen wir aber auch, daß die beiden Quotienten (Periodenziffern) α und β zusammen sich zu 9 ergänzen müssen.

(22) Daher müssen die Perioden in den beiden Divisionen auch noch so beschaffen sein, daß sich Ziffer um Ziffer zu 9 ergänzen.

So gibt z. B. bei $\frac{11}{43}$ und $\frac{43-11}{43}$

$\frac{11}{43}$	die Reste	11	24	25	35	die Periode	2	5	5	8 . . .
$\frac{32}{43}$	„ „	32	19	18	8	„ „	7	4	4	1 . . .

Vollständige und complementäre Perioden und Restreihen.

§. 22.

Alle Reste (Zähler) deren es N sind, theilen sich daher in 2 Abtheilungen von gleich viel, nämlich $\frac{N}{2}$ Zahlen, so daß jeder Rest der einen Abtheilung in der andern Abtheilung seine Ergänzung zu n erhält.*)

Dividirt man also in einen Zähler, z B. 1, so wird man eine Anzahl dieser Reste für diese Division verbrauchen — und zwar so viele, als die Periode Ziffern hat.

Dividirt man dann auch in (n—1), so wird man für diese zweite Division wieder eine und zwar ebenso große Anzahl der Reste verbrauchen. — Es folgen dann die Reste der zweiten Division so, daß, wenn sie für die erste waren: 1, a, b, c, d . . .

sie für die zweite sind: (n—1), (n—a), (n—b), (n—c), (n—d) . . .

so heißen z. B. die 6 Reste bei $\frac{1}{21}$ 1 10 16 13 4 19

bei $\frac{20}{21}$ 20 11 5 8 17 2 —

*) Hier sehen wir eine neue Bestätigung der Formel (20) für die Summe aller möglichen N Reste, die bei einem bestimmten Nenner n vorkommen können.

Alle N Reste können wir nämlich auch getheilt denken in $\frac{N}{2}$ Paare, jedes Paar zur Summe n gebend, die Summe aller N Reste muß also $= \frac{N}{2}\ n$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind durch dieses Paar Divisionen noch nicht alle Reste erschöpft und man dividirt in einen noch nicht dagewesenen Rest, so entsteht eine neue Division mit eben so viel Resten, wozu eine 4te mit den dazu gehörigen Ergänzungen gehört. So gibt es also ein 2tes Paar solcher complementären Divisionen.

Sind dadurch noch nicht alle Reste verbraucht, so erhält man ein drittes Paar u. s. f., bis sich alle Reste — deren keiner doppelt vorkommen kann — vertheilt haben in lauter complementäre Paare von Divisionen, die alle gleich viel Reste und daher auch Periodenziffern haben und in denen sich die Zähler (Reste) der Reihe nach zu n, die Periodenziffern zu 9 ergänzen.

Nun kann es aber vorkommen, daß ein solches Paar complementärer Divisionen sich schon in einer einzigen Division verbunden vorfindet; z. B. heißen die 16 Reste für

$\frac{1}{17}$: 1, 10, 15, 14, 4, 6, 9, 5, 16, 7, 2, 3, 13, 11, 8, 12

und die ersten 8 ergänzen sich der Reihe nach mit den letzten 8 zu 17.

(23) Findet die Ergänzung in einer einzigen Division statt, so nennt man die Periode und Restreihe **vollständig**, während sie, wenn die Ergänzung in 2 verschiedenen Divisionen stattfindet, **complementär** heißen. (Man könnte diesen Gegensatz vielleicht bezeichnender characterisiren durch: verbunden (monöcisch) und getrennt (diöcisch)-complementär.

Für die practische Rechnung erwächst bei einer vollständigen Periode der Vortheil, daß man die zweite Hälfte der Periode nicht mehr auf gewöhnliche Weise zu berechnen braucht, indem man, sobald der Rest n—z erschienen, nur immer die Ergänzungsziffer zu 9 aus der ersten Hälfte hin zu schreiben hat.

Vollständige Perioden.

§. 23.

Untersuchen wir jetzt näher, unter welchen Bedingungen eine Periode vollständig werden wird. Zunächst bemerken wir sogleich, daß nur geradstellige Perioden vollständig sein können. Sodann muß, wenn man die Division von n in 1... bis zu 1 mit halb so viel Nullen, als die Periode Ziffern erhält, vollendet hat, der Rest n—1 erscheinen, damit dieser mit dem ersten Reste, hier 1, (dem ursprünglichen Zähler) sich zu n ergänze.

Dieser Fall scheint auf den ersten Blick vielleicht nur selten vorzukommen, wir werden aber sogleich sehen, daß er zunächst bei jeder einfachen Primzahl, die eine geradstellige Periode gibt, erscheinen muß. Denn eine solche Primzahl p muß aufgehn in die Neunerzahl mit so viel Neunen, als die Periode Ziffern hat. Diese Neunerzahl können wir aber zertheilen in das Product

$$\circledast \quad (99..9) \text{ mal } (100..1)$$

wo 99..9 halb so viel Neunen hat, als die Periode Ziffern, und 100..1 die um 2 größere Zahl ist.

Da nun p in die ganze Neunerzahl, also auch in das Product $\circledast$ aufgehen muß, in die Neunerzahl mit halb so viel Neunen aber nicht aufgehen kann, weil p sonst eine nur halb so vielstellige Periode liefern würde, so wird p aufgehen müssen in 100..1.

Da nun p in 100..1 zum Reste 0 oder p gibt, so muß bei der Division von p in die um 1 kleinere Zahl 100..0, auch der um 1 kleinere Rest p—1 bleiben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Nenner n darf aber nun vielleicht noch Nebenfactoren enthalten, ohne daß er die Eigenschaft verliert, als ersten Rest der zweiten Hälfte der Periode n—1 zu liefern, d. h. Nebenfactoren, die alle in 100..1 aufgehn. Suchen wir jetzt die zulässigen Nebenfactoren zu bestimmen.

Zunächst darf ein solcher natürlich nicht mehr Periodenstellen bedingen als der Hauptfactor, aber auch keine solche Anzahl, die mit der des Hauptfactors einen anderen gemeinschaftlichen Dividuus liefern würde. Er darf also nur eine Periodenstellenzahl bedingen, die ein aliquoter Theil der Stellenzahl ist, welche der Hauptfactor bedingt. Hat also der Hauptfactor etwa 6 Stellen so darf ein Nebenfactor nur 1, 2, 3 oder 6 Stellen bedingen, d. h. haben wir als Hauptfactor z. B. 7, so könnten wir als Nebenfactoren nur gebrauchen 3, 11, 37, 13.

Nun muß er aber noch in 100..1 aufgehn, weil der ganze Nenner darin aufgehn soll. Statt der Bedingung: in 100..1 aufgehn, können wir aber als gleichbedeutend an die Stelle setzen: in 99..9 nicht aufgehn. Denn wenn eine Zahl f in 100..1 aufgeht, d. h. den Rest 0 oder f läßt, kann sie in der um 2 kleineren Zahl 99..9 nicht auch aufgehen; sie wird darin den Rest f — 2 lassen, der nur = 0 sein könnte, wenn f selbst = 2 wäre, was aber nicht vorkommen kann.

In 99..9 nicht aufgehen heißt aber so viel als: keine Periodenstellenzahl bedingen, welche die Hälfte oder ein aliquoter Theil der Hälfte der Periodenstellenzahl des Hauptfactors ist. Daher werden wir z. B. für den Hauptfactor 7, den Factor 3 und 37 als unzulässig ausscheiden müssen, weil 3 eine 1ziffrige, 37 eine 3ziffrige Periode bedingt, während wir 11 und 13 beibehalten dürfen. Die Nenner, welche also eine vollständige 6stellige Periode liefern werden, dürfen enthalten die Factoren 11, 7, 13, worunter natürlich 7 oder 13 selbst sein muß. Die Nenner, die eine vollständige 6ziffrige Periode geben, sind also 7, 13, 91, 77, 143, 1001.

§. 24.

So erhalten wir die Wahrheiten:

(24) **Vollständig** (monöcisch) wird Periode und Restreihe, wenn sie **geradstellig** ist und der Nenner **keinen** Nebenfactor enthält, der eine Periode von der **halben Anzahl** Stellen oder einen **aliquoten** Theil dieser **Hälfte** bedingt.

(25) **Complementär** (diöcisch) wird Periode und Restreihe, 1) wenn sie **geradstellig** ist und der Nenner enthält einen Nebenfactor, der eine Periode von halb so viel Stellen oder einem aliquoten Theil dieser Hälfte bedingt, oder 2) wenn die Periode **ungeradstellig** ist.

Da diese Bedingungen blos von dem Nenner abhängen, so hat ein bestimmter Nenner entweder nur vollständige oder nur complementäre Perioden und Restreihen.

Man sieht noch leicht

(26) Wenn der Nenner den Factor 3 enthält, so wird die Periode stets complementär (diöcisch), da 3 eine 1ziffrige Periode bedingt und 1 immer die Hälfte oder ein aliquoter Theil der Hälfte jeder geradstelligen Periode ist; eine ungeradstellige Periode wäre, weil sie ungeradstellig ist, complementär.

(27) Ist der Nenner eine einfache Primzahl, so ist die Periode **vollständig**, wenn die Stellenzahl **gerade**, **complementär**, wenn sie **ungerade** ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§. 25.

Zur leichteren Auswahl für Beispiele, die der Leser sich bilden will, stellen wir zusammen:

Nenner	(N)	liefert				Nenner	(N)	liefert			
3	2	1	compl. Paar	1ziffr.	Perioden	7	6	1	vollständige	6ziffr.	Per
9	6	3	»	1 „	„	11	10	5	»	2 „	„
13	12	2	vollständige	6 „	„	17	16	1	»	16 „	„
19	18	1	„	18 „	„	21	12	1	compl. Paare	6 „	„
23	22	1	„	22 „	„	27	18	3	„ „	3 „	„
29	28	1	„	28 „	„	31	30	1	„ „	15 „	„
33	20	5	compl. Paare	2 „	„	37	36	6	„ „	3 „	„
39	24	2	„ „	6 „	»	41	40	4	„ „	5 »	„
43	42	1	„ „	21 „	„	47	46	1	vollständige	46 „	„
49	48	1	vollständige	48 „	„	51	32	1	compl. Paare	16 „	„
53	52	2	compl. Paare	13 „	„	57	36	1	„	18 „	„
59	58	1	vollständige	58 „	„	61	60	1	vollständige	60 „	»
63	36	3	compl. Paare	6 „	„	67	66	1	compl. Paare	33 „	„
69	44	1	„	22 „	„	71	70	1	„	35 „	„
73	72	9	vollständige	8 „	„	77	60	10	vollständige	6 „	„
79	78	3	compl. Paare	13 „	„	81	54	3	compl. Paare	9 „	„
83	82	1	„	41 „	»	87	56	1	„	28 »	„
89	88	1	„	44 „	„	91	72	12	vollständige	6 „	„
93	60	2	„	15 „	„	97	96	1	»	96 »	»
99	60	15	»	2 »	»	101	100	25	»	4 „	»
137	136	17	vollständige	8 »	„	239	238	17	compl. Paare	7 »	»
271	270	27	compl. Paare	5 „		u. s. w.					

Nennt man die Anzahl der verschiedenen Restreihen a und die Stellenzahl der dazu gehörigen Periode π, so ist, wie leicht zu sehen, allemal $a . \pi = N$ und da N eine gerade Zahl ist, so muß wenigstens eine der Zahlen, a oder π, bei complementären Brüchen allemal a, gerade sein.

Restreihen und dazu gehörige Perioden.

Nenner				
3	Restreihe	1		complementär
	Periode	3		
	Restreihe	2		
	Periode	6		
7	Restreihe	1 3 2	6 4 5	vollständig
	Periode	1 4 2	8 5 7	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nenner					
9	Restreihe	1	2	4	complementär
	Periode	1	2	4	
	R.	8	7	5	
	P.	8	7	5	
11	R.	1 | 10	2 | 9	3 | 8	4 | 7	5 | 6 vollst.
	P.	0 | 9	1 | 8	2 | 7	3 | 6	4 | 5
13	R.	1 10 9 | 12 3 4	2 7 5 | 11 6 8	vollständig
	P.	0 7 6 | 9 2 3	1 5 3 | 8 4 6	
17	R.	1 10 15 14 4 6 9 5 | 16 7 2 3 13 11 8 12	vollst.
	P.	0 5 8 8 2 3 5 2 | 9 4 1 1 7 6 4 7	
19	R.	1 10 5 12 6 3 11 15 17 | 18 9 14 7 13 16 8 4 2	vollst.
	P.	0 5 2 6 3 1 5 7 8 | 9 4 7 3 6 8 4 2 1	
21	R.	1 10 16 13 4 19	complementär
	P.	0 4 7 6 1 9	
	R.	20 11 5 8 17 2	
	P.	9 5 2 3 8 0	
23	R.	1 10 8 11 18 19 6 14 2 20 16 | 22 13 15 12 5 4 17 9 21 3 7	vollst.
	P.	0 4 3 4 7 8 2 6 0 8 6 | 9 5 6 5 2 1 7 3 9 1 3	
27	R.	1 10 19 2 20 11 4 13 22	complem.
	P.	0 3 7 0 7 4 1 4 8	
	R.	26 17 8 25 7 16 23 14 5	
	P.	9 6 2 9 2 5 8 5 1	
29	R.	1 10 13 14 24 8 22 17 25 18 6 2 20 26 | 28 19 ꝛc.	vollst.
	P.	0 3 4 4 8 2 7 5 8 6 2 0 6 8 | 9 6 ꝛc.	
31	R.	1 10 7 8 18 25 2 20 14 16 5 19 4 9 28	compl.
	P.	0 3 2 2 5 8 0 6 4 5 1 6 1 2 9	
	R.	30 21 24 23 13 6 29 11 17 15 26 12 27 22 3	
	P.	9 6 7 7 4 1 9 3 5 4 8 3 8 7 0	
33	R.	1 10 2 20 4 7 5 17 8 14	compl.
	P.	0 3 0 6 1 2 1 5 2 4	
	R.	32 23 31 13 29 26 28 16 25 19	
	P.	9 6 9 3 8 7 8 4 7 5	

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nenner

37	R.	1 10 26	2 20 15	3 30 4	5 13 19	6 23 8	9 16 12
	P.	0 2 7	0 5 4	0 8 1	1 3 5	1 6 2	2 4 3
	R.	36 27 11	35 17 22	34 7 33	32 24 18	31 14 29	28 21 25
	P.	9 7 2	9 4 5	9 1 8	8 6 4	8 3 9	7 5 6

compl.

39	R.	1 10 22 25 16 4	2 20 5 11 32 8
	P.	0 2 5 6 4 1	0 5 1 2 8 2
	R.	38 29 17 14 23 35	37 19 34 28 7 31
	P.	9 7 4 3 5 8	9 4 8 7 1 7

compl.

41	R.	1 10 18 16 37	2 20 36 32 33	3 30 13 7 29	6 19 26 14 17
	P.	0 2 4 3 9	0 4 8 7 8	0 7 3 1 7	1 4 6 3 4
	R.	40 31 23 25 4	39 21 5 9 8	38 11 28 34 12	35 22 15 27 24
	P.	9 7 5 60	9 5 1 2 1	9 2 6 8 2	8 5 3 6 5

compl.

u. s. w.

Beziehungen zwischen der Summe der Reste und der Periodenziffern.

§. 26.

Betrachten wir das Schema der Division bei Verwandlung eines Bruchs in einen reinperiodischen Decimalbruch, wie z. B. für $\frac{1}{7}$ im §. 1 oder allgemein für $\frac{r_1}{n}$, so sehen wir, daß es eigentlich aus vielen einzelnen kleinen Divisionsexempeln besteht.

$$1)\ 7 \left| \begin{array}{c} 1.10 \\ 1.\ 7 \\ \hline 3 \end{array} \right| 1 \qquad 2)\ 7 \left| \begin{array}{c} 3.10 \\ 4.\ 7 \\ \hline 2 \end{array} \right| 4 \qquad 3)\ 7 \left| \begin{array}{c} 2.10 \\ 2.\ 7 \\ \hline 6 \end{array} \right| 2 \quad \text{u. s. w.}$$

welche allgemein lauten:

$$1)\ n \left| \begin{array}{c} 10.r_1 \\ p_1.n \\ \hline r_2 \end{array} \right| p_1 \qquad 2)\ n \left| \begin{array}{c} 10.r_2 \\ p_2.n \\ \hline r_3 \end{array} \right| p_2 \qquad 3)\ n \left| \begin{array}{c} 10.r_3 \\ p_3.n \\ \hline r_4 \end{array} \right| p_3$$

u. s. fort, wenn wir die auf einander folgenden Reste mit r_1, r_2, r_3, r_4 . . .
die Periodenziffern mit p_1, p_2, p_3, p_4 . . . bezeichnen.

Die Resultate dieser Partialdivisionen können wir in Form von Gleichungen so zusammenstellen:

$$1)\ 10\, r_1 = p_1 . n + r_2$$
$$2)\ 10\, r_2 = p_2 . n + r_3$$
$$3)\ 10\, r_3 = p_3 . n + r_4 \quad \text{u. s. w.,}$$

wobei die letzte Gleichung, womit eine Periode abgeschlossen ist, z. B. die 6te, wenn die Periode 6 Ziffern hat — lauten muß: 6) $10\, r_6 = p_6 . n + r_1$ indem der Rest, der bei der letzten Division bleibt, nothwendig wieder der ursprüngliche Zähler, also $= r_1$ ist.

Addiren wir nun alle diese Gleichungen, so ergibt sich (für jede besondere Periode):

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

10 mal Summe der Reste = n mal Summe der Periodenziffern + Summe der Reste, oder wenn wir die Summe der Reste kurz mit $\mathfrak{R}$, die Summe der Periodenziffern mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen.

$$\text{☺} \quad 10\,\mathfrak{R} = n.\mathfrak{P} + \mathfrak{R}$$

Subtrahiren wir jetzt auf beiden Seiten $\mathfrak{R}$, so erhalten wir die interessante Beziehnung

$$\mathbf{9\,\mathfrak{R} = n\,\mathfrak{P}}$$

(28) d. h. für jede einzelne Periode beträgt das Neunfache der Summe der Reste soviel, wie das nfache der Summe der Periodenziffern.

So ist z. B für $\frac{1}{7}$ $\mathfrak{R} = 21$, $\mathfrak{P} = 27$ und es ist $9.21 = 7.27$,

für $\frac{4}{21}$ $\mathfrak{R} = 63$, $\mathfrak{P} = 27$ und es ist $9.63 = 21.27$.

Aus obiger Gleichung (28) folgt zunächst, beiderseits mit n dividirt,

$$\frac{9\mathfrak{R}}{n} = \mathfrak{P} \qquad \mathfrak{C}$$

d. h. da $\mathfrak{P}$ eine ganze Zahl ist, muß auch n in 9 $\mathfrak{R}$ aufgehen

Haben nun 9 und n keinen gemeinschaftlichen Factor, d. h. ist der Nenner außer 2- u. 5- auch 3frei, so muß der Nenner in $\mathfrak{R}$ allein aufgehn und weil dann die Gleichung $\mathfrak{C}$ lautet: $9\,g = \mathfrak{P}$, wenn $\frac{\mathfrak{R}}{n}$ etwa gleich der ganzen Zahl g ist, so muß auch $\mathfrak{P}$ ein Vielfaches von 9 sein*) und zwar das gfache: also

(29) Ist der Nenner außer 2- und 5- auch 3frei, so enthält die Summe der Periodenziffern so oft die Zahl 9, als die Summe der Reste den Nenner.

So ist in obigem Beispiel für $\frac{1}{7}$ $21 = \mathfrak{R} = 3$ mal 7

und $27 = \mathfrak{P} = 3$ mal 9.

Hat aber der Nenner n einen Factor f mit 9 gemein, enthält also der Nenner 3 oder 9, so wird man nicht mehr sagen können, weil $\frac{9\mathfrak{R}}{n}$ eine ganze Zahl sein muß, muß das ganze n in $\mathfrak{R}$ aufgehen, indem der Nebenfactor f, den n enthält, in $\mathfrak{R}$ nicht enthalten sein kann, sondern die 9 in 9 $\mathfrak{R}$ herbeigezogen werden und $\mathfrak{R}$ dann nur nothwendig die andern Factoren des Nenners, also $\frac{n}{f}$ enthalten muß.

In diesem Falle tritt also an die Stelle von n, welches in $\mathfrak{R}$ aufgehn sollte, nur n : f und an die Stelle von 9, welches in $\mathfrak{P}$ enthalten sein sollte, nur 9 : f, d. h.

(30) $\mathfrak{R}$ enthält nur den Factor n : f und $\mathfrak{P}$ nur 9 : f.

So ist z. B. für $\frac{107}{123} = \frac{107}{3.41}$ $\mathfrak{R} = 451$ nur $= 11.(123:3)$

$\mathfrak{P} = 33$ nur $= 11.(9:3)$

weil 451 nicht durch 123, sondern nur durch 41 aufgeht und in 9.451, welches durch 3.41 aufgehn muß, die 3 in die 9 gehoben werden muß.

Ebenso wird man für $\frac{352}{369} = \frac{352}{9.41}$ nur erhalten: $\mathfrak{R} = 1148 = 26.(369:9)$

$\mathfrak{P} = 28 = 28.(9:9)$

*) Nach einer bekannten Wahrheit (Kennzeichen der Theilbarkeit) ist, wenn $\mathfrak{P}$, die Ziffern- oder Quersumme der Periode P, durch 9 theilbar ist, die Periode P selbst, als Zahl, durch 9 theilbar; denn die Zahl P zerlegt sich in eine ganze Anzahl von 9 und $\mathfrak{P}$; daher P eine ganze Anzahl von 9 ist, sobald $\mathfrak{P}$ ein Vielfaches von 9 ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beim Bruche $\frac{52}{63} = \frac{52}{3.3.7}$ aber, weil $\mathfrak{R} = 231$ durch 3 aufgeht, braucht man f nicht $= 9$, sondern nur $= 3$ zu nehmen und erhält $\mathfrak{R} = 231 = 11.(63:3)$

$\mathfrak{P} = 33 = 11.(9:3)$.

Da in einem complementären Paare je 2 Reste zusammen n ausmachen und man π solcher Restepaare hat (wenn die Periode πstellig ist), so ist auch für beide Divisionen eines Paares zusammen $\mathfrak{R} = n.\pi$ und (wenn man in $\frac{9\mathfrak{R}}{n} = \mathfrak{P}$ statt $\mathfrak{R}$ setzt $n.\pi$)

$\mathfrak{P} = 9\,\pi$.

Bei einer vollständigen Periode aber, wo die π Restepaare in einer Division vorkommen, wird, weil π doppelt so groß ist

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2}.\,n\,\pi \text{ und}$$

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{2}.\,9.\pi.$$

Der Fall, daß ein Nenner eines Nebenfactors f wegen in $\mathfrak{R}$ nicht aufgeht, kann daher nur vorkommen bei einer einzelnen complementären Periode, z. B. den einzelnen Divisionen für den Nenner 27. Faßt man sämmtliche mögliche Divisionen, die für einen bestimmten Nenner existiren, zusammen, so findet man — durch Addition der für jede einzelne Division geltenden Relationen (28) —

9 mal Summe aller Reste = n mal Summe aller Periodenziffern

oder $9.\frac{N}{2}n = n.$Summe aller Periodenziffern, also (mit n gehoben):

(31) Summe aller Periodenziffern $= \frac{N}{2}.\,9.$

Gruppen von Periodenziffern und Resten.

§. 27.

Läßt sich die Anzahl der Reste oder Periodenziffern in Gruppen von 2, 3, 4 u. s. w. gleichsam in Binionen (Paare), Ternionen, Quaternionen ꝛc. theilen, so ergeben sich interessante Beziehungen zwischen den Summen einzelner Gruppen von Resten oder Periodenziffern.

Nehmen wir zunächst eine geradstellige Periode, z. B. die für den Nenner 7, so haben wir

in den Resten	1 3 2 6 4 5
„ „ Periodenziffern	1 4 2 8 5 7

3 Paare solcher Zahlen, in jedem Paare einen 1sten und 2ten Rest und ebenso eine 1ste und 2te Periodenziffer;

die ersten Reste sind	1 2 und 4	die zweiten Reste sind	3 6 und 5
„ „ Periodenziff. sind	1 2 „ 5	„ „ Periodenziffern	4 8 „ 7

und wir wollen kurz

die Summe der ersten Reste $\mathfrak{R}_1$, der zweiten Reste $\mathfrak{R}_2$,

die Summe der ersten Periodenziff. $\mathfrak{P}_1$, der zweiten $\mathfrak{P}_2$

nennen.

Stellen wir nun wieder allgemein die aus den Partialdivisionen sich ergebenden Grundgleichungen zusammen, so haben wir

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1)\ 10\,r_1 = n\,p_1 + r_2 \quad \text{und } 2)\ 10\,r_2 = n\,p_2 + r_3$$
$$10\,r_3 = n\,p_3 + r_4 \quad \text{„} \quad 10\,r_4 = n\,p_4 + r_5$$
$$10\,r_5 = n\,p_5 + r_6 \quad \text{„} \quad 10\,r_6 = n\,p_6 + r_1$$

durch deren Addition wir erhalten

$$\circledast \quad 1)\ 10\,\mathfrak{R}_1 = n\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{R}_2 \quad \text{und } 2)\ 10\,\mathfrak{R}_2 = n\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{R}_1$$

Multipliciren wir nun die 2te Gleichung mit 1, die erste Gleichung mit 10, wodurch wir bekommen

$$1)\ 100\,\mathfrak{R}_1 = n.10\,\mathfrak{P}_1 + 10\,\mathfrak{R}_2 \text{ und } 2)\ 10\,\mathfrak{R}_2 = n\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{R}_1$$

und setzen den Werth für $10\,\mathfrak{R}_2$ aus der zweiten Gleichung in die erste, so erhalten wir

$$100\,\mathfrak{R}_1 = n\,(10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2) + \mathfrak{R}_1$$

oder auf beiden Seiten $\mathfrak{R}_1$ abgezogen

$$(32) \quad 1)\ 99\,\mathfrak{R}_1 = n.(10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2)$$

Verwechseln wir aber die beiden Gleichungen ⊛, so ergibt sich auf dieselbe Weise

$$2)\ 99\,\mathfrak{R}_2 = n\,(10\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1)$$

Bedenken wir, wie sich $10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ bildet, indem wir

$$10\,p_1 + p_2$$
$$10\,p_3 + p_4$$
$$10\,p_5 + p_6 \quad \text{u. s. w. addiren, so}$$

können wir $10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ aussprechen als: Summe der in lauter zweiziffrige Zahlen zerspaltenen Periode. So wird z. B. für die Periode aus $\frac{1}{7} = 14 \mid 28 \mid 57$

$$10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 = 14 + 28 + 57$$
$$10\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1 = 42 + 85 + 71.$$

Bezeichnen wir die Summe dieser Perioden-Fragmente — der zweiziffrigen Zahlen --

wenn die ersten Reste voranstehen, also $10\,\mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2$ mit P_1

wenn die zweiten Reste „ „ $10\,\mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_1$ mit P_2

so werden die beiden Gleichungen (32) 1) und 2) sich kurz schreiben lassen

$$1)\ 99\,\mathfrak{R}_1 = n\,P_1$$
$$2)\ 99\,\mathfrak{R}_2 = n\,P_2$$

Man hat für $\frac{1}{7}$ z. B.

$$99.[1 + 2 + 4] = 7\,[14 + 28 + 57]$$
$$99.[3 + 6 + 5] = 7\,[42 + 85 + 71].$$

Für den Bruch aus $\frac{1}{19}$ hat man (s. § 25)

$$\mathfrak{R}_1 = 76 \text{ und } P_1 = [05+26+31+57+89+47+36+84+21] = 396$$
$$\mathfrak{R}_2 = 95 \text{ und } P_2 = [52+63+15+78+94+73+68+42+10] = 495$$

und wie man sieht $99.76 = 19.396$ und $99.95 = 19.495$

d. h. $99.\mathfrak{R}_1 = n.P_1 \qquad 99.\mathfrak{R}_2 = n.P_2$

§. 28.

Hat nun der Nenner n mit 99 keinen Factor gemein, d. h. ist n außer 2- und 5- auch noch 3- und 11frei, so muß wegen

$$\frac{99.\mathfrak{R}_1}{n} = \text{ganzer Zahl} = P_1$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Nenner ganz in $\mathfrak{R}_1$ aufgehn, z. B. die ganze Zahl g geben und wegen

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{n} = g = \frac{P_1}{99}$$ dann auch 99 in P_1 enthalten sein und zwar g mal.

Auf dieselbe Weise findet sich aus (32) 2) wenn etwa $\frac{\mathfrak{R}_2}{n}$ die ganze Zahl h gibt, so muß auch $\frac{P_2}{99}$ eine ganze Zahl und zwar = h sein.

Wir haben also:

(33) So oft der 3- und 11-freie Nenner n in $\mathfrak{R}_1$ (bezwse. in $\mathfrak{R}_2$) enthalten ist; d. h. g mal (bezwse. h mal), so oft enthält die Summe der in 2ziffrige Zahlen zertheilten Periode die Zahl 99 und zwar g mal, wenn die ersten Periodenziffern der Paare, h mal, wenn die zweiten Periodenziffern vorangesetzt werden.

So findet sich für $\frac{1}{19}$ . . .

$$\frac{\mathfrak{R}_1}{19} = 4 \text{ und } \frac{P_1}{99} = 4$$

$$\frac{\mathfrak{R}_2}{19} = 5 \quad \text{„} \quad \frac{P_2}{99} = 5$$

Haben aber 99 und n einen Theiler f, der nicht in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ enthalten ist, so können wir die Gleichung (32) erst damit theilen und dann tritt überall in (33) an die Stelle von n nur $\frac{n}{f}$ und an die Stelle von 99 nur $\frac{99}{f}$, d. h. so oft $\mathfrak{R}_1$ resp. $\mathfrak{R}_2$ den Faktor $\frac{n}{f}$ enthält, so oft P_1 resp. P_2 den Factor $\frac{99}{f}$

So hat der Bruch $\frac{23}{77} = \frac{23}{11.7}$ die Restreihe: 23 76 | 67 54 | 1 10
die Periodenziff. 2 9 | 8 7 | 0 1

und es ist $\mathfrak{R}_1 = 91$ $P_1 = 117$

$\mathfrak{R}_2 = 140$ $P_2 = 180.$

Da nun der Factor 11 des Nenners in $\mathfrak{R}_1$ u. $\mathfrak{R}_2$ nicht aufgeht, so haben wir statt 99 nur 99 : 11 = 9 und statt n nur n : 11 = 7 also $\frac{\mathfrak{R}_1}{7} = 13$ und $\frac{P_1}{9} = 13$

$\frac{\mathfrak{R}_2}{7} = 20$ und $\frac{P_2}{9} = 20.$

§. 29.

Wollen wir aber auch $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ einzeln haben, so brauchen wir, falls n und 99 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, nur in ⊛ statt $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die betreffenden Werthe g.n und h.n zu setzen, um zu erhalten

$$10.n\,g = n\,\mathfrak{P}_1 + h\,n$$

woraus, wenn wir durch n durchweg dividiren und noch auf beiden Seiten h abziehen

(34) $\mathfrak{P}_1 = 10\,g - h$ und ähnlich

$\mathfrak{P}_2 = 10\,h - g$ entsteht

So ist für den Nenner 19 $g = 4$ und $\mathfrak{P}_1 = 10.4 - 5 = 35$

$h = 5$ $\mathfrak{P}_2 = 10.5 - 4 = 46$

Haben aber n und 99 den gemeinschaftlichen Theiler f, der nicht in $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ enthalten ist, so wird, wenn $\mathfrak{R}_1 : \frac{n}{f} = g$; $\mathfrak{R}_2 : \frac{n}{f} = h$ ist:

$$\mathfrak{R}_1 = g\left(\frac{n}{f}\right);\ \mathfrak{R}_2 = h\left(\frac{n}{f}\right) \text{ und damit ⊛ 1)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$10 . \frac{n}{f} g = n \mathfrak{P}_1 + \frac{n}{f} . h,$$ also, mit n dividirt und (h : f) abgezogen,

$$10 . \frac{g}{f} - \frac{h}{f} = \mathfrak{P}_1 \text{ oder}$$

(35) $$\mathfrak{P}_1 = \frac{10 g - h}{f}$$ und ähnlich aus ⊛ 2)

$$\mathfrak{P}_2 = \frac{10 h - g}{f}$$

So wird aus dem Beispiel $\frac{23}{77}$

$$g = 13 \text{ und } \mathfrak{P}_1 = \frac{10 . 13 - 20}{11} = 10$$

$$h = 20 \qquad \mathfrak{P}_2 = \frac{10 . 20 - 13}{11} = 17$$

§ 30.

Läßt sich die Anzahl der Reste und Periodenziffern durch 3 theilen, also in Ternionen zerlegen und nennen wir wieder die Summe des 1sten, 4ten, 7ten ꝛc. Restes, d. h. die Summe der ersten Reste $\mathfrak{R}_1$, die Summe der zweiten Reste $\mathfrak{R}_2$, die Summe der dritten Reste $\mathfrak{R}_3$ und ähnlich die Summe der ersten, zweiten, dritten Periodenziffern $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, so erhalten wir aus den einzelnen Gleichungen der Partialdivisionen:

1) $10 r_1 = n p_1 + r_2$ 2) $10 r_2 = n p_2 + r_3$ 3) $10 r_3 = n p_3 + r_4$

$10 r_4 = n p_4 + r_5$ $10 r_5 = n p_5 + r_6$ $10 r_6 = n p_6 + r_7$

$10 r_7 = n p_7 + r_8$ $10 r_8 = n p_8 + r_9$ $10 r_9 = n p_9 + r_1$

— wenn etwa die Periode 9 Ziffern hätte —

Durch Addition bekommen wir dann

⊛ 1) $10 \mathfrak{R}_1 = n \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{R}_2$ 2) $10 \mathfrak{R}_2 = n \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{R}_3$ 3) $10 \mathfrak{R}_3 = n \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{R}_1$.

Multipliciren wir nun die 3te Gleichung mit 1,
die 2te „ „ 10,
die 1ste „ „ 100, so entsteht

1) $1000 \mathfrak{R}_1 = n 100 \mathfrak{P}_1 + 100 \mathfrak{R}_2$ 2) $100 \mathfrak{R}_2 = n 10 \mathfrak{P}_2 + 10 R_3$ 3) $10 \mathfrak{R}_3 = n \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{R}_1$

Setzen wir nun in die 1ste Gleichung statt $100 \mathfrak{R}_2$ den Werth aus der 2ten, in diese aber statt $10 \mathfrak{R}_3$ den Werth aus der 3ten Gleichung, so ergibt sich

$$1000 \mathfrak{R}_1 = n [100 \mathfrak{P}_1 + 10 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3] + \mathfrak{R}_1$$

oder, wenn wir wieder $[100 \mathfrak{P}_1 + 10 \mathfrak{P}_2 + \mathfrak{P}_3]$ mit P_1 bezeichnen

(36) 1) $999 . \mathfrak{R}_1 = n . P_1$

und ebenso mit vertauschten Ordnungsnummern der 3 Gleichungen

2) $999 \mathfrak{R}_2 = n . P_2$

3) $999 \mathfrak{R}_3 = n . P_3$

wobei wieder P_1 sich als die Summe der in lauter Abtheilungen zu 3 (Ternionem) zertheilten Periode, oder der 3ziffrigen Zahlen $100 p_1 + 10 p_2 + p_3$ ꝛc.

P_2 aber als Summe der Zahlen $100 p_2 + 10 p_3 + p_4$ ꝛc.

P_3 „ „ „ „ „ $100 p_3 + 10 p_4 + p_5$ ꝛc. darstellt.

So hat man für $\frac{1}{31}$ (s. § 25, wo man sich die Restreihen und Periodenziffern in Abtheilungen zu drei theilen kann),

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\mathfrak{R}_1 = 31 \qquad P_1 = [032 + 258 + 064 + 516 + 129] = 999$
$\mathfrak{R}_2 = 62 \qquad P_2 = [322 + 580 + 645 + 161 + 290] = 1998$
$\mathfrak{R}_3 = 93 \qquad P_3 = [225 + 806 + 451 + 612 + 903] = 2997$

§. 31.

Hat nun der Nenner n keinen Factor mit 999 gemein, d. h. ist n außer 2- und 5- auch 3- und 37frei, so schließt man wieder, weil nach (36)
$\frac{999 . \mathfrak{R}_1}{n}$ = einer ganzen Zahl P_1, daß wieder n sowohl in $\mathfrak{R}_1$ als in $\mathfrak{R}_2$ und auch in $\mathfrak{R}_3$ allein ganz enthalten sein müsse und zwar

wenn $\mathfrak{R}_1 : n$ etwa $= g$ ist, daß auch $P_1 = g . 999$
$\mathfrak{R}_2 : n$ „ $= h$ $\qquad P_2 = h . 999$
$\mathfrak{R}_3 : n$ „ $= i$ $\qquad P_3 = i . 999$ sein müsse.

(37) So oft also der 3- und 37freie Nenner in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ enthalten ist, d. h. gmal, hmal, imal, so oft enthält die Summe der in 3ziffrige Zahlen zertheilten Periode P_1, P_2, P_3 die Zahl 999.

Im vorstehenden Beispiel ist $g = 1$ und $P_1 = 999 = 1 . 999$
$h = 2$ „ $P_2 = 1998 = 2 . 999$
$i = 3$ „ $P_3 = 2997 = 3 . 999$

Haben aber 999 und n einen gemeinschaftlichen Theiler f, der nicht in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ enthalten ist, so tritt an die Stelle von 999 und n in den Gleichungen (36) jetzt 999:f und n:f, oder es müssen nicht $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$ durch n, wohl aber durch n:f theilbar sein, ebenso P_1, P_2 und P_3 nicht den Factor 999, sondern nur 999:f enthalten.

§ 32.

Wollen wir nun wieder die Werthe für $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ einzeln haben, so brauchen wir, wenn n keine 3 u. 37 enthält, wieder in die Gleichungen ⊛ nur n.g für $\mathfrak{R}_1$; n.h für $\mathfrak{R}_2$ und n.i für $\mathfrak{R}_3$ einzusetzen, wodurch wir erhalten

$$10 . n . g = n\,\mathfrak{P}_1 + n\,h$$
$$10 . n . h = n\,\mathfrak{P}_2 + n\,i$$
$$10 . n . i = n\,\mathfrak{P}_3 + n\,g$$

oder, alles mit n dividirt und dann das letzte Glied der rechten Seiten beiderseits abgezogen,

(38) $\mathfrak{P}_1 = 10\,g - h$ So gibt die Periode für $\frac{1}{31}$ $\quad \mathfrak{P}_1 = 10 . 1 - 2 = 8$
$\mathfrak{P}_2 = 10\,h - i \qquad \mathfrak{P}_2 = 10 . 2 - 3 = 17$
$\mathfrak{P}_3 = 10\,i - g \qquad \mathfrak{P}_3 = 10 . 3 - 1 = 29$

Hat aber der Nenner einen Factor f, 3 oder 37, mit 999 gemein und geht dieser nicht auf in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, so werden wir damit die Gleichungen (36) erst heben, und ist dann

$$\mathfrak{R}_1 : \frac{n}{f} = g\,, \qquad \mathfrak{R}_2 : \frac{n}{f} = h\,, \qquad \mathfrak{R}_3 : \frac{n}{f} = i$$

so wird ⊛ 1) wenn man statt $\mathfrak{R}_1$ darin setzt: $\frac{n}{f}\,g$

$$10 . \left(\frac{n}{f}\right) g - \left(\frac{n}{f}\right) h = \left(\frac{n}{f}\right) f\,\mathfrak{P}_1$$

und wenn man mit n:f dividirt $\quad 10\,g - h = f\,\mathfrak{P}_1$ also

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(39) $\mathfrak{P}_1 = \frac{10\,g - h}{f}$ und ebenso

$\mathfrak{P}_2 = \frac{10\,h - i}{f}$

$\mathfrak{P}_3 = \frac{10\,i - g}{f}$ entstehen.

So hat z. B. 1) $\frac{201}{239} = \frac{201}{37.7}$

die Restreihe	201	197	157	16	160	46
die Periode	7	7	6	0	6	1

also $\mathfrak{R}_1 = 217$; $\mathfrak{R}_2 = 357$; $\mathfrak{R}_3 = 203$

und da $f = 37$ darin nicht aufgeht $\frac{999}{37} = 27$; $\frac{n}{37} = 7$; also

$\frac{\mathfrak{R}_1}{7} = g = 31$ $P_1 = 837 = 31.27$ und $\mathfrak{P}_1 = \frac{10.31 - 51}{37} = 7$

$\frac{\mathfrak{R}_2}{7} = h = 51$ $P_2 = 1377 = 51.27$ $\mathfrak{P}_2 = \frac{10\ 51 - 29}{37} = 13$

$\frac{\mathfrak{R}_3}{7} = i = 29$ $P_3 = 783 = 29.27$ $\mathfrak{P}_3 = \frac{10.29 - 31}{37} = 7$

2) $\frac{13}{57} = \frac{13}{3.19}$;

Reste	13	16	46	4	40	1	10	43	31	25	22	49	34	55	37	28	52	7
Periodenz.	2	2	8	0	7	0	1	7	5	4	3	8	5	9	6	4	9	1

woraus $\mathfrak{R}_1 = 114$; $\mathfrak{R}_2 = 228$; $\mathfrak{R}_3 = 171$

Obgleich der Nenner hier den Factor 3 hat, so wird dieser doch, da er mit in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ enthalten ist, nicht als f zu betrachten sein, sondern man hat

$\mathfrak{R}_1 : n = g = 2$ damit $P_1 = 1998 = 2.999$ und $\mathfrak{P}_1 = 10.2 - 4 = 16$

$\mathfrak{R}_2 : n = h = 4$ $P_2 = 3996 = 4.999$ $\mathfrak{P}_2 = 10.4 - 3 = 37$

$\mathfrak{R}_3 : n = i = 3$ $P_3 = 2997 = 3.999$ $\mathfrak{P}_3 = 10.3 - 2 = 28.$

§. 33.

Man sieht leicht, wie sich diese Betrachtungen weiter fortsetzen lassen für Perioden und Restreihen, die sich in Quaternionen, Quinionen ꝛc. zertheilen lassen. Für eine 4-, 8-, 12- u. s. w. ziffrige Periode erhält man z. B. da die Wahrheiten:

$$9999\ \mathfrak{R}_1 = n\ [1000\ \mathfrak{P}_1 + 100\ \mathfrak{P}_2 + 10\ \mathfrak{P}_3 + \mathfrak{P}_4] \text{ u. s. w.}$$

d. h. so oft der Nenner — der mit 9999 keinen Factor gemein hat, also 3-, 11-, 101frei ist — in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ aufgeht, so oft enthält die Summe der Quaternionen der Periodenziffern die Zahl 9999 und es ist wieder $\mathfrak{P}_1 = 10\ g - h$ $\mathfrak{P}_2 = 10\ h - i$

$\mathfrak{P}_3 = 10\ i - k$ $\mathfrak{P}_4 = 10\ k - g$

wenn wieder $g = \mathfrak{R}_1 : n$; $h = \mathfrak{R}_2 : n$ u. s. w. ist, wobei man natürlich, wenn der Nenner einen Nebenfactor f besitzt, der nicht in $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ aufgeht, statt n und 9999 nur n:f und 9999:f nehmen darf.

Der Fall, wenn die Periode nur in 2 Binionen, Ternionen, Quaternionen ꝛc. zerfällt, so daß also $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ ꝛc., so wie $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ nur aus 2 Summanden bestehen, ist im §. 22 abgesondert betrachtet worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf