I. Lösungsmethoden.

Aufgabe: Für welche Winkel x erreichen die Ausdrücke

I. $\sin x \pm \cos x$

II. $\sin x \,.\, \cos(\alpha - x)$

III. $a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x)$

IV. $\cos^2 x + \sin 2x$

ihre gröfsten Werte?

Auflösung: Es ist:

$$\text{I. } \sin x \pm \cos x \equiv \sqrt{[\sin x \pm \cos x]^2}$$
$$\equiv \sqrt{1 \pm \sin 2x}.$$

Das Maximum dieses Ausdrucks: $\sqrt{2}$ erhält man also im ersten Fall, wenn $x = 45^0$, und im zweiten Fall, wenn $x = 135^0$ genommen wird.

$$\text{II. } \sin x \,.\, \cos(\alpha - x) \equiv \tfrac{1}{2}\,[\sin \alpha + \sin(2x - \alpha)]$$

Es mufs also: $x = \left\{45^0 + \frac{\alpha}{2}\right\}$ gesetzt werden,

und das Maximum lautet:

$$\cos^2 \left\{45^0 - \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

$$\text{III. } a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x) \equiv a_1 \sin x - a_2 \cos\alpha \cos x + a_2 \sin\alpha \sin x.$$
$$\equiv [a_1 + a_2 \sin\alpha] \sin x - a_2 \cos\alpha \cos x.$$
$$\equiv a_2 \cos\alpha . \left\{\frac{a_1 + a_2 \sin\alpha}{a_2 \cos\alpha} \sin x - \cos x\right\}.$$

Setzt man nun:

$$\operatorname{cotg} \lambda = \frac{a_1 + a_2 \sin\alpha}{a_2 \cos\alpha},$$

so ist:

$$a_1 \sin x - a_2 \cos(\alpha + x) \equiv a_2 \cos\alpha \,.\, \frac{\sin[x - \lambda]}{\sin\lambda}.$$

Hieraus folgt, dafs der gegebene Ausdruck am gröfsten, nämlich:

$$= \frac{a_2 \cos\alpha}{\sin\lambda}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird, wenn

$$x = 90^0 + \lambda,$$

also:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{a_1 + a_2 \sin \alpha}{a_2 \cos \alpha}$$

genommen wird.

IV. $\cos^2 x + \sin 2x \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x + \sin 2x$, daher zurückführbar auf III.

Aufgabe: Für welches x wird: V. $\frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ möglichst klein?

Auflösung: Bezeichnet man den gegebenen Ausdruck mit M, so ist:

$$M^2 = \frac{1 + \sin 2x}{\sin^2 2x}; \text{ daher:}$$

$$\sin 2x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4M^2}}{2M^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{M^2} + \sqrt{\frac{4}{M^2} + \frac{1}{M^4}}\right\}.$$

Danach wächst sin 2 x, wenn M abnimmt. Wird demnach $\sin 2x = 1$, also $x = 45^0$, so ergiebt sich als Minimum des gegebenen Ausdrucks : $\sqrt{2}$.

Aufgabe: Die Ausdrücke:

VI. $a_1 x - a_2 x^2 + a_3$.

VII. $a_1 x^2 - a_2 x + a_3$.

VIII. $\frac{(x + a)^2}{x}$.

IX$_1$. $x\sqrt{a^2 - x^2} - x^2$

IX$_2$. $2ax + a\sqrt{x(2a - x)}$

in Bezug auf Maximum oder Minimum zu untersuchen, wenn a, a_1, a_2, a_3 positive Zahlen sind.

Auflösung: Es ist:

$$\text{VI. } a_1 x - a_2 x^2 + a_3 \equiv a_3 - a_2\left\{x^2 - \frac{a_1}{a_2} x\right\}$$

$$\equiv a_3 + \frac{a_1^2}{4a_2} - a_2\left\{x - \frac{a_1}{2a_2}\right\}^2.$$

Am gröfsten und zwar:

$$\frac{4a_2 a_3 + a_1^2}{4a_2}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wird also dieser Ausdruck, wenn:

$$x = \frac{a_1}{2\ a_2}.$$

VII. Wie bei VI ergiebt sich:

$$a_1\ x^2 - a_2\ x + a_3 \equiv a_1 \left\{x - \frac{a_2}{2\ a_1}\right\}^2 + \frac{4\ a_1\ a_3 - a_2^2}{4\ a_1}.$$

Das Minimum:

$$\frac{4\ a_1\ a_3 - a_2^2}{4\ a_1}$$

tritt demnach bei diesem Ausdruck ein, wenn

$$x = \frac{a_2}{2\ a_1}$$

wird.

VIII. Sei der gegebene Ausdruck mit M bezeichnet, so ist:

$$M = \frac{(x + a)^2}{x}$$

$$x^2 - (M - 2\ a)\ x = -\ a^2.$$

$$x = \frac{1}{2}\left\{(M - 2\ a) + \sqrt{M\ [M - 4\ a]}\right\}.$$

Soll nun x reell bleiben, so geht aus dieser Gleichung hervor, daſs der kleinste Wert, den M noch annehmen kann, = 4 a ist. Dann ist x = a.

IX_1. Wie in VIII findet man aus:

$$M = x\sqrt{a^2 - x^2} - x^2$$

die Gleichung:

$$x^2 = \frac{1}{4}\left\{(a^2 - 2\ M) + \sqrt{2\ a^4 - (2\ M + a^2)^2}\right\}.$$

Offenbar ist der gröſste Wert, den M annehmen kann, derjenige, für welchen:

$$2\ a^4 = [2\ M + a^2]^2,$$

also:

$$M = \frac{a^2}{2}\left\{\sqrt{2} - 1\right\}.$$

Dann ist:

$$x^2 = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}\left\{\sqrt{2} - 1\right\}.$$

Eine einfachere Lösung dieses Falles ergiebt die Substitution

$$x = a\ \cos\varphi,$$

wodurch die Aufgabe auf I zurückgeführt wird.

IX_2 kann ähnlich wie IX_1 gelöst werden; einfacher ist die Lösung, wenn $x = 2\ a\ \cos^2\varphi$ substituiert wird, wodurch dieser Fall auf III zurückgeführt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe: Hinsichtlich des Maximums oder des Minimums sind die Ausdrücke:

X. $$\frac{a\ x^3}{x - a}$$

XI. $$3\ a\ x^2 - x^3\sqrt{2}$$

zu untersuchen.

Auflösung: Sei jeder dieser Ausdrücke mit M bezeichnet, so ist:

X. $$M \equiv \frac{a\ x^3}{x - a}, \text{ daher:}$$

$$x^3 - \frac{M}{a}\ x + M \equiv 0.$$

Nach den Lehren der Trigonometrie ist aber:

$$[\lambda \cos \varphi]^3 - \frac{3}{4}\ \lambda^2\ (\lambda \cos \varphi) - \frac{1}{4}\ \lambda^3 \cos^3 \varphi \equiv 0.$$

Es ist somit: $x = \lambda \cos \varphi,$

sobald: 1. $$\frac{3}{4}\ \lambda^2 = \frac{M}{a},$$

also: $$\lambda = \sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}}$$

und 2. $$\frac{1}{4}\ \lambda^3 \cos 3\ \varphi = -\ M,$$

also:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4\ M}{3\ a} \cdot \sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}} \cdot \cos\ [180 - 3\ \varphi] = M$$

$$\sqrt{\frac{4\ M}{3\ a}} = \frac{3\ a}{\cos\ (180 - 3\ \varphi)}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt aber, dafs M am kleinsten, nämlich $= \frac{27}{4}\ a^3$, wird, wenn man $\varphi = 60^0$ nimmt. Dann ist: $\lambda = 3\ a$ und $x = \frac{3\ a}{2}$.

XI. $$M \equiv 3\ a\ x^2 - x^3\ \sqrt{2};$$

$$x^3 - \frac{3\ a}{\sqrt{2}}\ x^2 + \frac{M}{\sqrt{2}} \equiv 0.$$

Reduziert man diese Gleichung durch die Substitution

$$x = y + \frac{a}{\sqrt{2}},$$

so ergiebt sich:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$y^3 - \frac{3\,a^2}{2}\,y - \frac{a^3 - M}{\sqrt{2}} = 0.$$

Dadurch ist dieser Fall auf X zurückgeführt. Man findet durch dieselbe Rechnung, wie in X

$$M = a^3\,(1 - \cos 3\,\varphi).$$

Am gröfsten, nämlich $= 2\,a^3$, wird somit M, wenn

$$\varphi = 60^0.$$

Dann ist:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

und

$$x = a\sqrt{2}.$$

II. Aufgaben.*)

1.—4. Aufgabe: Eine Strecke a ist in zwei Teile so zu zerlegen, dafs, wenn man über dem einen Teile ein gleichseitiges Dreieck errichtet, während man den anderen Teil

a) zur Hypotenuse eines rechtwinkelig-gleichschenkligen Dreiecks,

b) zum Durchmesser eines Kreises

nimmt, beide Figuren bei der Rotation um a Körper von der kleinsten Summe der

1. Oberflächen,
2. Volumina

beschreiben. VII. XI.

Auflösung: Sei x die Seite des gleichseitigen Dreiecks, so ist

a) 1. die Gesamtoberfläche $= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left\{2\,x^2 + (a - x)^2\right\}$.

---

*) Den Aufgaben: 25, 35, 36, 51, 52, 69—71, 100, 102, 103, 111, 113—116, 128, 140, 141, 1 2. dieser Sammlung begegnet man zwar bereits teils in „Martus, mathematische Aufgaben", teils in „Lieber, stereometrische Aufgaben", teils in der mathematisch naturwissenschaftlichen Zeitschrift von Hoffmann; dieselben wurden trotzdem hier aufgenommen, weil sie fast durchweg einer Erweiterung fähig waren.

Die übrigen Aufgaben dürften neu sein und führen in der Regel zu ganz einfachen Resultaten.

Bei den Rotationsaufgaben ist die Guldinsche Regel mit Absicht nicht vorausgesetzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf