Beiträge zum mathematischen Unterricht.

Im folgenden erlaubt sich der Verfasser dieser Abhandlung den Kollegen und Freunden des mathematischen Unterrichts einige Vorschläge über die Behandlung etlicher Lehrgegenstände der Mathematik in der Schule zu machen, welche nach seinem Ermessen bisher die ihnen gebührende Aufmerksamkeit nicht überall erlangt haben. Auf die bei der Abfassung der vorliegenden Schrift benutzten Hülfsmittel kann ich an dieser Stelle nicht aufmerksam machen, weil sie aus einer grossen Reihe von Werken hervorgegangen sind, welche mir augenblicklich nicht sämtlich im Gedächtniss sind. Ich muss daher dem Urtheile jedes Fachmannes anheimgeben das von mir Gelieferte von früher Gebotenem zu scheiden. Ein grosser Teil des Folgenden ist mir bei der Ertheilung mathematischer Stunden aufgestossen und nachher weiter von mir ausgebildet worden. Ich kann nicht erwarten, dass meine Ansichten von allen Lesern geteilt werden, hoffe aber, dass ich in einigen Punkten wenigstens das Richtige getroffen haben möchte. Nur dann, wenn die Methode des Unterrichtes Fortschritte macht, wird das sonst für so schwer gehaltene Feld der Mathematik einen grösseren Boden gewinnen und seine wesentliche Bildungskraft noch mehr geltend machen können, als es bis jetzt geschehen ist.

Da die Behandlung einzelner Lehrstoffe nach meiner Auffassung manche Verschiedenheiten von den gewöhnlichen Darstellungen aufweisen wird, so wird es nötig, dass der gewöhnliche Gang des Unterrichtes an einigen Stellen abgeändert wird. Es muss hier und da eine Lehre aufgenommen werden, welche sonst erst sehr viel später erscheint. Ich glaube, dass dieses Vorausnehmen keinem Bedenken unterliegt, wenn damit zugleich einer Erweiterung des Wissens Vorschub geleistet wird und zwar auf einer früheren Stufe, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt. Die neuen Lehren sollen dem Schüler in einfachster Art klar gelegt werden, nicht einfach vorausgenommen werden. Man muss wohl unterscheiden zwischen Vorarbeiten und Vorgreifen. Durch das Gewöhnen an neue Begriffe wird der Unterricht auf den höheren Stufen wesentlich erleichtert. Besonders gelingt dieses dann, wenn zwischen der ersten Bekanntschaft mit dem Gegenstande und der vollständigen Durchdringung eine gewisse Frist verstreicht.

Wohlgemeinte Ratschläge oder Mittheilungen besserer Wege für die Durchnahme der unten behandelten Gegenstände werde ich jederzeit mit Dank entgegennehmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Congruenz der Figuren.

Wenn der Begriff der congruenten Figuren den Schülern zur vollkommenen Klarheit gebracht werden soll, so wird es unbedingt nötig sein, dass man zunächst von inhaltsgleichen und dann auch von ähnlichen Figuren spricht. Nun ist dieses nicht so einfach, weil der Schüler die Lehre von den inhaltsgleichen Flächen und von den ähnlichen Gebilden erst auf späterer Stufe kennen lernt. Es wird daher erforderlich sein, dass der Unterricht hier von den später erst zu begründenden Lehren das Wesentliche zur Erläuterung herausgreift und den Schülern das in Rede stehende Verhältnis auseinandersetzt.

Der Lehrer wird sich leicht einen Streifen 3-, 4- oder mehr-eckigen Papiers in der Stunde besorgen können. Wird dieses mit Hülfe einer scharfen Scheere vor den Augen der Kinder sorgfältig in mehrere Teile zerlegt, von welcher aber kein Stückchen verloren werden darf, so kann er diese sämmtlichen Teilstücke auf verschiedene Weisen zu neuen Figuren zusammensetzen, welche alle mit dem ursprünglich benutzten Stück Papier inhaltsgleich sind, aber doch der Form und der Seitenzahl nach von demselben verschieden ausfallen. Wird der Schüler hier noch darauf aufmerksam gemacht, dass er sich das körperliche Papierstückchen ohne Dicke, Stoff, Farbe und Glanz denken muss, um eine mathematische Fläche vor sich zu haben, so wird an diesem Verfahren nichts zu tadeln sein. Ist dieses geschehen, so mag man Figuren zu dem Satze entwerfen lassen, dass zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie zwischen denselben Parallelen gleichen Inhalt haben. Die Dreiecke sind so zu wählen, dass sie möglichst verschieden aussehen und vollständig aussereinander liegen, welchen Bedingungen leicht genügt werden kann. Der Beweis für die Wahrheit des Behaupteten wird hier so geführt, dass der Schüler das eine Dreieck mit der Scheere ausschneidet und dann in solche Stücke zerlegt, welche zur Bedeckung der Teile des andern Dreiecks dienen können. Er wird dann anfangs finden, dass dieses Verfahren nicht genau ist. Nachdem in der Klasse von den Schülern der Versuch gemacht worden ist, mag dann der Lehrer eine selbst verfertigte Figur den Schülern vorlegen, damit sie sehen, mit welchem Grade von Genauigkeit der Satz durch die Anschauung bewiesen werden kann. Bei dem zweiten Versuche wird der Schüler schon ein besseres Resultat erzielen. Hierbei bietet sich Gelegenheit festzustellen, worin die Ungenauigkeit ihren Grund hat. Auf diese Weise findet der Schüler selbst, dass zwei Dreicke von sehr verschiedener Gestalt inhaltsgleich sein können. — Dass es auch verschieden aussehende Vierecke von demselben Inhalte giebt, kann er leicht einsehen, wenn er zwei verschieden gestaltete und getrennt von einander liegende Parallelogramme zeichnet, welche gleiche Grundlinien haben und zwischen denselben Parallelen liegen. Er schneidet dann wieder das eine mit der Scheere aus und belegt mit den hieraus hergestellten Stücken das zweite Viereck. Je aufmerksamer er hierbei verfährt, desto rascher wird er finden, dass die beiden Parallelogramme inhaltsgleich sind. — Dass man auch zu jedem beliebigen Vierecke ein andersgestaltetes und inhaltsgleiches sich verschaffen kann, wird der Lehrer leicht auf folgende Weise ermöglichen können. Der Schüler zieht in dem gegebenen Vierecke eine Diagonale. Durch die Eckpunkte, durch welche die Diagonale nicht geht, werden Parallelen zu der Diagonale gezogen. Dann kann er leicht zu jedem Teildreieck des Vierecks ein inhaltsgleiches erhalten, wenn er einen Punkt der ersten und zweiten Parallele mit den Endpunkten der Diagonale verbindet. Die zwei neuen Dreiecke liefern ebenfalls ein Viereck, welches mit dem gegebenen flächengleich ist. Dass das angedeutete Verfahren auch leicht auf Fünfecke und andere Vielecke ausgedehnt werden kann, wird keinem Zweifel unterliegen.

Grösser sind die Schwierigkeiten, wenn es sich darum handelt zu einer Figur eine ähnliche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auf leichte Art zu finden. Ich glaube, dass man bei Anfängern am besten so vorgeht, dass derselbe ein Dreieck in Papier ausschneidet. Dieses soll er nun mit der Hand in einiger Entfernung von einem unbeschriebenen Blatte des Tagebuches halten und zwar so, dass das in Papier ausgeschnittene Dreieck mit der aufgeschlagenen Seite des Diariums parallel ist. *)

Ist dieses geschehen, so muss er an einem Eckpunkte des ausgeschnittenen Dreiecks vorbeivisieren und sich mit der Bleifeder im Tagebuche den Punkt merken, in welchem die Visierlinie endet. Dieses macht er dann auch an den beiden anderen Eckpunkten. Er erhält nun ein Dreieck auf dem Blatt des Tagebuches, welches durch die drei Visierpunkte angegeben ist. Hat er hierbei die nötige Vorsicht angewendet, so vergleicht er jetzt die gleichliegenden Seiten des ausgeschnittenen und des in dem Tagebuche gezeichneten Dreiecks. Dabei wird er finden, dass jede Seite des gezeichneten Dreiecks (2, 3, 4, n) mal grösser ist wie die gleichliegende Seite des ausgeschnittenen. Untersucht man die Winkel beider Figuren, so wird sich zeigen, dass sie einander gleich sind. Die Resultate werden bei der Wiederholung des angegebenen Verfahrens bessere und bessere werden. Hierbei lässt sich auch ganz schicklich die Bemerkung machen, dass zu einem Dreiecke mehrere ähnliche erhalten werden können, wenn das Tagebuchblatt näher oder entfernter von dem ausgeschnittenen Dreieck gehalten wird. Dass der Lehrer auch hier ein grösseres ausgeschnittenes Dreieck parallel mit der Wandtafel halten kann und durch verschiedene Schüler die Visierpunkte feststellen lassen kann, ist leicht ausführbar. Die Vergleichung der Seiten beider Dreiecke geschieht dann mit dem Metermass. Die Winkel vergleicht man unter Zuhilfenahme eines grösseren Transporteures. Sollten sich hier sehr ungenaue Resultate ergeben, so ist festzustellen, aus welchen Quellen dieselben stammen. Durch dasselbe Verfahren kann man auch mit Leichtigkeit zu einem Viereck, Fünfeck oder beliebigen Vieleck eine ähnliche Figur erhalten. Das Einzige, was an diesem Verfahren vielleicht zu tadeln wäre, dürfte der Umstand sein, dass die Beschaffung der ähnlichen Figur auf die Anwendung stereometrischer Hülfsmittel hinausläuft. Es kann dieses aber als Wiederholung einiger Anfangsgründe aus der Stereometrie, welche in den ersten Stunden in der Quarta besprochen zu werden pflegen, nur dienlich und förderlich sein. —

Auf diese Weise hat nun der Schüler erfahren, dass es zu einer Figur mehrere inhaltsgleiche und auch ähnliche Figuren giebt. Es wird ihm nun erklärt, dass man unter den congruenten Figuren solche versteht, welche in dem Inhalte übereinstimmen und zugleich ähnlich sind. Hat der Schüler das Vorstehende gut aufgefasst, so wird ihm die Aufgabe nicht schwer sein, wie Figuren auf ihre Congruenz zu untersuchen sind.

Behandlung der geometrischen Aufgaben.

Ich glaube, dass es bei der Lösung der ersten Constructionsaufgaben sehr wesentlich ist, wenn der Schüler die Figuren in folgender Weise herstellt. Er zeichnet zunächst ein Dreieck und construiert in demselben die Höhen, Mittellinien und Winkelhalbierenden u. s. w., wie es die Natur der Aufgabe erfordert. Darauf werden nun aus diesem Dreieck die zu der Lösung der vorliegenden Aufgabe nötigen Stücke genommen und mit denselben nun die Construction des Dreiecks vorgenommen. Dann muss, wenn die Lösung fehlerlos ist, ein Dreieck erhalten werden, welches mit dem ursprünglichen congruent ist. Kommen auffällige Ungenauigkeiten vor, so ist nachzuforschen, worin

*) Es wird nicht schwer halten, dass die Schüler ein Verfahren ausfindig machen wie das Dreieck und das Blatt des Tagebuches parallel gehalten werden können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie ihren Grund haben. Ich bin der Ansicht, dass durch dieses Verfahren manche Unklarheiten beseitigt werden und zwar nicht bloss bei den leichteren Uebungen der Anfänger, sondern auch bei den schwierigeren Aufgaben, welche in den höheren Classen behandelt werden müssen. Selbstverständlich kann man nur bei einer geringeren Anzahl von Aufgaben in der umständlichen Weise vorgehen. —

Mir will es scheinen, dass der Schüler in dem geometrischen Unterrichte recht früh zum Abstrahieren gebracht werden muss. Daher ist es nötig, dass in der ersten Zeit solche Aufgaben, wie die folgenden behandelt werden, teils mit, teils ohne Figur:

Wie viel Paare Nebenwinkel (Scheitelwinkel) entstehen, wenn sich n gerade Linien in einem Punkte schneiden? Wie viel Paare Ergänzungswinkel, Wechselwinkel und Gegenwinkel entstehen, wenn n untereinander parallele Linien von m anders gerichteten Parallelen durschnitten werden? Wie viel Dreiecke entstehen, wenn sich n gerade Linien in der höchsten Zahl von Punkten treffen? Wie viel Parallelogramme treten auf, wenn n untereinander parallele Linien von m andersgerichteten Parallelen durchschnitten werden? Sie werden auf der ersten Stufe nur für bestimmte Fälle behandelt und nachher verallgemeinert.

Es ist ausgemacht, dass die Aufgaben, welche das Maximum und Minimum betreffen, anfangs nicht geringe Schwierigkeiten bereiten. Nach meinem Dafürhalten macht man den Schüler am besten mit diesen Aufgaben bekannt, indem man von practischen Aufgaben ausgeht. Sehr geeignet würde z. B. folgende Aufgabe sein. Es sollen drei Ortschaften durch Wege, welche von einem innerhalb derselben liegenden Punkte ausgehen, in Verbindung gesetzt werden. Vorerst wird von den Terrainschwierigkeiten, von dem verschieden hohen Preis der Grundstücke und anderen Umständen abgesehen. Der Lehrer lässt von den Schülern ein Dreieck in das Tagebuch zeichnen. Innerhalb desselben werden mehrere Punkte angenommen und nun festgestellt, wie gross die Summe der drei Entfernungen für jeden innerhalb angenommenen Punkt ist. Hierbei werden sich verschiedene Resultate ergeben. Darauf geht dann der Lehrer an die Erledigung der Aufgabe. Zum Schluss wird nun von jedem Schüler verlangt, dass er an seiner Figur die Richtigkeit des Erlernten nachweist. Auf diese Weise wird sicher erreicht, dass alle Schüler der Klasse mitarbeiten können. Später wird es nicht immer erforderlich sein mit derselben Ausführlichkeit zu Werke zu gehen. Ein kurser Hinweis auf die practische Bedeutung einer vorliegenden Aufgabe wird schon genügen.

Hier rede ich auch von praktischen Vermessungsaufgaben. Der Lehrer sollte es nicht unterlassen mit den Schülern der verschiedenen Classen auch geeignete Uebungen in der freien Natur vorzunehmen. Das Abstecken gerader Linien, Messen von Strassenlängen und -breiten, die Bestimmung von der Breite eines Sumpfes und eines Flusses, das Abstecken von senkrechten und parallelen Linien könnte mit den Quartanern und Tertianern geübt werden. Später mögen auch Flächenausmessungen einfacher Art vorgenommen werden. Ist die Aehnlichkeitslehre durchgesprochen, so können auch Höhenbestimmungen eintreten. Wird die Trigonometrie in der Classe besprochen, so bietet sich eine Fülle neuer Aufgaben dar. Auch die Stereometrie giebt eine Menge von Stoff zu praktisch leicht lösbaren Aufgaben. Der Lehrer wird besonders viel seinen Schülern bieten können, wenn die Schule über einen vollständigen Lehrapparat verfügt. Viele Aufgaben lassen sich mit sehr geringen Mitteln lösen. Wünschenswerth ist es, dass der Lehrer in den Stand gesetzt ist den Schülern zu zeigen, wie dieses und jenes Instrument gebaut wird. Recht viele Aufgaben können mit Hülfe von Pressler's Messknecht gelöst werden. *) Wird derselbe mit Aufmerksamkeit und Sorg-

*) Max R. Pressler, der Jngenieur-Messknecht mit Textbuch zur Erläuterung seiner erzieherischen und landwirthschaftlichen Anwendungen u. s. w. Im Selbstverlage des Verfassers in Tharand und in Commission bei A. G. Liebeskind in Leipzig. Fünfte vervollständigte Auflage, 1876.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

falt gebraucht, so reicht er zur Lösung vieler Aufgaben aus und kostet nicht viel. Er lässt sich zu Zeitbestimmungen benutzen, wenn keine allzu grosse Genauigkeit gefordert wird. Besitzt die Schule einen Theodoliten, so ist es geraten den Schülern zu zeigen, wie die Mittagslinie bestimmt wird, wie genaue Zeitbestimmungen vorgenommen werden, wie die geographische Breite und die geographische Länge eines bestimmten Ortes ermittelt wird.

Modelle für die sphärische Trigonometrie.

Wenn die sphärische Trigonometrie von sämtlichen Schülern einer Classe verstanden werden soll, so sind nach meinen Erfahrungen Hülfsmittel nötig, damit die schwächeren Schüler folgen können. Zunächst muss der Schüler wissen, wie er sich ein sphärisches Dreieck verschafft, dann wird ihm das Erforderliche gegeben, wie er ein rechtwinkliges sphärisches Dreieck erhalten kann. In dieses Modell hat er dann alle die Linien, welche bei der Ableitung der Sätze in der Classe auftreten, einzutragen. Ich lasse von den Schülern auf ein Blatt Papier einen Kreis zeichnen und um den Mittelpunkt die drei Winkel a, b, c nebeneinander zeichnen von der Grösse, welche hier angegeben ist:

a = 35°	86° 12'	108°
b = 70° 20' 12,"5	69° 5'	79° 47' 26,"5
c = 74°	88° 40'	125°

Hieraus wird dann das rechtwinklige sphärische Dreieck erhalten, indem der Kreis ausgeschnitten und das Papier längs des dem Winkel a und Winkel b gemeinschaftlichen Schenkels und längs des dem Winkel b und Winkel c gemeinschaftlichen Schenkels gefalten wird. Der überschüssige Teil der Kreisfläche wird weggeworfen. Darauf hat nun der Schüler alle bei den Ableitungen auftretenden Linien in die Figur einzutragen und ihre Grösse für den Radius r oder 1 auf dem Papier anzugeben. Sind diese Eintragungen gemacht, so werden die freien Schenkel von Winkel a und Winkel c zusammengeklebt. Ich glaube, dass auf diese Weise jedem Schüler die Sätze von dem rechtw. sphärischen Dreieck klar gemacht werden können.

Zwei passend gewählte rechtw. sphärische Dreiecke werden dann leicht ein schiefwinkliges sphärisches Dreieck liefern. Werden auch in die Hülfsgebilde unter der Leitung des Lehrers die nötigen Eintragungen gemacht, so bietet auch das Auftassen der ursprünglichen Formeln für das schiefwinklige sphärische Dreieck keine erheblichen Schwierigkeiten. Zu diesem Zwecke eignen sich folgende Dreieckspaare, welche aus den angegebenen Stücken ebenso construiert werden, wie es oben auseinandergesetzt worden ist:

20° 14' 40"	39° 27' 12"
13° 55' 35"	36° 59' 7"
14° 50' 29"	14° 50' 29"
39° 27' 12"	50° 54' 42"
19° 22' 11"	39° 36' 50"
35° 4' 4"	35° 4' 4"
20° 14' 40"	50° 54' 42"
8° 57' 10"	48° 24' 22"
18° 13' 56"	18° 13' 56"

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man erhält so auf drei verschiedene Arten ein und dasselbe schiefwinklige sphärische Dreieck Die beiden ersten rechtw. sph. Dreiecke sind nebeneinander zu legen, während die beiden anderen Paare rechtw. sphärischer Dreiecke in einander zulegen sind. Weitere Bemerkungen halte ich für unnötig. Damit die Modelle sich nicht von Jahrgang auf Jahrgang vererben, schreibt man genau die Grösse des Radius vor. Hat der Schüler diese Hülfsmittel selbst verfertigt, so wird er auch die Sätze bald in sich aufnehmen.

Verwandlung eines gewöhnlichen Bruches in einen Decimalbruch und eines Decimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch.

Soll ein gewöhnlicher Bruch durch einen Decimalbruch ersetzt werden, so wende ich anfangs nicht das in den Lehrbüchern angegebene Verfahren an. Ich thue dieses aus dem Grunde nicht, weil die Lösung der umgekehrten Aufgabe später dem Schüler viele Mühe macht. Soll $^1/_9$ in einem Decimalbruch verwandelt werden, so wird der gegebene Bruch zunächst mit $^1/_{10}$ verglichen. Um dieses am besten zu ermöglichen, wird es geraten sein den Unterschied von denselben zu bilden $^1/_9 - {}^1/_{10} = {}^1/_{90}$, also $^1/_9 = {}^1/_{10} + {}^1/_{90}$. An Stelle von $^1/_{90}$ setzt man jetzt einen Bruch, welcher zum Nenner eine Potenz von 10 hat. Nun sucht man wieder den Unterschied beider Grössen. Der Schüler wird leicht finden, dass $^1/_{90} - {}^1/_{100} = {}^1/_{900}$, folglich $^1/_{90} = {}^1/_{100} + {}^1/_{900}$. Nun verfährt man mit $^1/_{900}$ ebenso, wie vorher mit $^1/_9$ und $^1/_{90}$ und setzt das Verfahren weiter fort; dann erhält man folgende Beziehungen $^1/_{900} = {}^1/_{1000} + {}^1/_{9000}$; $^1/_{9000} = {}^1/_{10000} + {}^1/_{90000}$ u. s. w. Durch leichte Rechnungen findet man nun, dass $^1/_9 = {}^1/_{10} + {}^1/_{100} + {}^1/_{1000} + {}^1/_{10000} + {}^1/_{90000}$ oder $^1/_9 = 0,1111 + {}^1/_{90000}$.

Auf diesem Wege kann man $^1/_9$ durch einen Decimalbruch von vorgeschriebener Stellenzahl ersetzen und zugleich angeben, wie gross der begangene Fehler ist. Ebenso kann jede ähnliche Aufgabe gelöst werden. Sehr leicht wird man $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_8$ auf diese Weise behandeln können. Umständlicher ist das Verfahren bei $^1/_7$, $^1/_{13}$, $^1/_{17}$, $^1/_{19}$. Damit dem Schüler die Lösung der umgekehrten Aufgabe leicht fällt, ist es zu empfehlen die Brüche $^1/_{99}$, $^1/_{999}$, $^1/_{9999}$ u. s. w. in der angegebenen Weise zu besprechen. So lernt der Schüler ein einfaches Mittel kennen, um einen beliebigen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln. Hierbei kann er dann auch sagen, wie gross der hierbei begangene Fehler ist.

Die Verwandlung eines Decimalbruches in einen gewöhnlichen Bruch wird dem Schüler nach der vorigen Aufgabe keine besondere Mühe machen. Ich habe gefunden, dass das in den Rechenbüchern angegebene allgemeine Verfahren den Schülern zu schwer war. Bei den nicht periodischen Decimalbrüchen bietet sich den Schülern keine Schwierigkeit. Ganz anders liegt die Sache bei den periodischen Decimalbrüchen. Gesetzt, es soll $0,11111. = x$ durch einen gewöhnlichen Bruch ersetzt werden. Durch geeignete Fragen wird bald erkannt werden, das $^1/_{10} < x < {}^2/_{10}$; $^{11}/_{100} < x < {}^{12}/_{100}$; $^{111}/_{1000} < x < {}^{112}/_{1000}$ u. s. w. Hierbei wird der Schüler leicht finden, dass anstatt x der Bruch $^1/_9$ oder $^{11}/_{99}$ oder $^{111}/_{999}$ u. s. w. gesetzt werden kann. Darauf soll zu $0,12\,12\,12\,.\,. = y$ der gleichwertige gewöhnliche Bruch gefunden werden. Hier sind leicht folgende Beziehungen zu finden $^{12}/_{100} < y < {}^{13}/_{100}$ $^{121}/_{1000} < y < {}^{122}/_{1000}$ $^{1212}/_{10000} < y < {}^{1213}/_{10000}$ u. s. w. Der Schüler wird von den früheren Aufgaben her bald erkennen, dass statt y die Brüche $^{12}/_{99}$, $^{1212}/_{9999}$ u. a. gesetzt werden können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso mag noch 0, 123 123 . . . = z behandelt werden. Ich glaube, dass durch dieses Verfahren der Schüler allgemeine Gesetze über die Grösse der Brüche erkennt, welche auf einer späteren Stufe durch einen leichten Beweis nachgewiesen werden können.

Teilbarkeit der Zahlen durch 7, 13, 17 und 19.

Es ist mir aufgefallen, dass in guten Lehrbüchern die Teilbarkeit der Zahlen sich nur auf die Ermittlung der Regeln für die Zahlen 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 11 und deren Producte erstreckt. Selten findet man darüber eine Angabe, dass es auch Mittel und Wege giebt, um eine Zahl auf ihre Teilbarkeit durch 7, 13, 17, 19 u. s. w. zu prüfen. Dabei mögen die Verfasser der Rechenbücher wohl befürchten, dass die Regeln für diese Zahlen von den Schülern nicht leicht aufgefasst werden können. Nach meinem Dafürhalten ist es nicht geraten den Schüler der unteren Classen hiermit bekannt zu machen, doch halte ich es für nötig, dass in der Untertertia diesem Gegenstande einige Aufmerksamkeit zugewandt wird. Natürlich wird es hier gut sein, den Gang so einzurichten, dass für die Ableitung der Teilbarkeitsregeln derselbe Weg eingeschlagen wird. Man lässt von den Schülern feststellen, welche Reste die Zahlen 10^2, 10^4, 10^6, 10^8, 10^{10}, 10^{12}, 10^{14}, 10^{16}, 10^{18}, 10^{20} ergeben, wenn sie durch die Zahl 7, 13, 17, 19 dividiert werden. Das Ergebnis ist in der Tabelle, welche leicht berechnet werden kann, enthalten:

	Rest bei der Division durch 7	Rest bei der Division durch 13	Rest bei der Division durch 17	Rest bei der Division durch 19
10^2	2	9	15	5
10^4	4	3	4	6
10^6	1	1	9	11
10^8	2	9	16	17
10^{10}	4	3	2	9
10^{12}	1	1	13	7
10^{14}	2	9	8	16
10^{16}	4	3	1	4
10^{18}	1	1	15	1
10^{20}	2	9	4	5

Die Tabelle kann beliebig weit fortgesetzt werden.

Nun zeigt man dem Schüler, dass n. 100 in ein ganzes Vielfaches von 7 vermehrt um n. 2 zerlegt werden kann
" " " " " 13 " " n. 9 " " "
" " " " " 17 " " n. 15 " " "
" " " " " 19 " " n. 5 " " "

Dieses ist bei einer grösseren Zahl von Beispielen nachzuweisen.

Hat man m. 10^4, so kann
die Zahl in ein ganzes Vielfaches von 7 vermehrt um den Rest m. 4
" " " " " " " 13 " " " " m. 3
" " " " " " " 17 " " " " m. 4
" " " " " " " 19 " " " " m. 6 zerlegt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man wird nun leicht folgende Regel für die Erkennung der Teilbarkeit einer Zahl durch 7 aussprecheu können: Man teilt die Zahl in Abteilungen von zwei Ziffern und zwar von rechts nach links. Die erste Abteilung schreibt man so hin, die Zahl der zweiten Abteilung wird mit der ersten Zahl, welche in der Tabelle unter 7 angegeben ist, multipliciert, die Zahl der dritten Ableitung wird mit der zweiten Zahl in der Tabelle multipliziert u. s. w. Darauf zählt man diese Producte und die erste Abteilung zusammen und untersucht, ob diese Summe durch 7 ohne Rest teilbar ist. Ist dieses der Fall, dann muss die vorliegende Zahl auch durch 7 ohne Rest teilbar sein. Ähnlich verfährt man bei der Prüfung einer Zahl auf die Teilbarkeit durch 13, 17, 19.

Beispiele:

678223072849 ist auf die Teilbarkeit durch 7 zu untersuchen

```
                 49
28 . 2 =         56
07 . 4 =         28
23 . 1 =         23
82 . 2 =        164
67 . 4 =        268
                588
588 : 7 = 84
  0
```

Die Zahl ist durch 7 ohne Rest teilbar.

7483756784734 ist auf die Teilbarkeit durch 13 zu untersuchen

```
                 34
47 . 9 =        423
78 . 3 =        234
56 . 1 =         56
37 . 9 =        333
48 . 3 =        144
 7 . 1 =          7
               1231
1231 : 13 = 94
   9
```

Die Zahl lässt bei der Teilung durch 13 den Rest 9.

384756783478934756944 auf ihre Teilbarkeit durch 17 zu untersuchen

```
                 44
69 . 15 =       1035
75 .  4 =        300
34 .  9 =        306
89 . 16 =       1424
47 .  2 =         94
83 . 13 =       1079
67 .  8 =        536
75 .  1 =         75
84 . 15 =       1260
 3 .  4 =         12
                6165
6165 : 17 = 362
  11
```

Die Zahl lässt bei der Teilung durch 17 den Rest 11.

843752130754321643 auf ihre Teilbarkeit durch 19 zu untersuchen

```
                 43
16 .  5 =         80
32 .  6 =        192
54 . 11 =        594
07 . 17 =        119
13 .  9 =        117
52 .  7 =        364
37 . 16 =        592
84 .  4 =        336
                2437
2437 : 19 = 128
   5
```

Die Zahl giebt bei der Teilung durch 19 den Rest 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es wird nicht schwer halten den Schülern beizubringen, dass man noch viele andere Wege zu betreten vermag, um neue Regeln für die Prüfung einer Zahl auf ihre Teilbarkeit durch 7, 13, 17 und 19 aufzustellen. Man braucht z. B. nur die Reste von 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15} u. s. w. festzustellen oder von 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{16}, 10^{20} u. s. w. zu bestimmen, um dann in ähnlicher Weise wie oben neue Regeln zu erhalten. Der Schüler hat nicht nötig sich diese Regeln zu merken, sondern er soll nur erfahren, dass er selbst solche Teilbarkeitsuntersuchungen ausführen kann.

In der Obertertia kann der Gegenstand allgemein behandelt werden, wie dies auch in einigen Lehrbüchern angegeben ist.

Regula falsi.

Wesshalb wird den Schülern so selten Einiges über die Auflösung der Gleichungen unter Benutzung der Regula falsi mitgeteilt? Weil sie in vielen Fällen rascher als andere Methoden gestattet die reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu finden, so ist es zu empfehlen dieselbe in der Schule zu besprechen. Nachdem die quadratischen Gleichungen in der Classe behandelt worden sind, mag man von den Schülern bei einem vorher gelösten Beispiel an Stelle der Unbekannten verschiedene Zahlen in die auf Null reducierte Gleichung setzen und die Zahlenwerte der linken Seite ausrechnen lassen. Man wird gut thun anfangs Zahlen zu wählen, welche den bekannten Wurzeln ziemlich nahe liegen. Man kann dann dem Schüler zeigen, dass, wenn die eingesetzten Zahlen wenig von der bekannten Wurzel abweichen, dann auch die ausgerechneten Werte der linken Seite beinahe gleich Null sind. Sind die gewählten Zahlen von dem Wurzelwerte sehr verschieden, so weicht auch das Ergebnis viel von dem Werte Null ab. Die Gleichung $x^2 - 4x + 3 = 0$ hat die Wurzeln $+3$ und $+1$. Ich lasse nun für x die Werte setzen 3,1; 2,9; 3,02; 2,98; 3,008, 2,992; 3,00007; 2,99993; 3,03; 2,96; 2,996; 3,005; 2,991; 3,007. Die zugehörigen Werte, welche dann die Ausrechnung der linken Seite liefert, sind folgende $+0{,}21$; $-0{,}19$; $+0{,}0404$; $-0{,}0396$; $+0{,}016064$; $-0{,}015936$; $+0{,}0001400049$; $-0{,}0001399951$; $+0{,}0609$; $-0{,}0784$; $-0{,}007984$; $+0{,}010025$; $-0{,}017919$; $+0{,}014049$. Ist die angenommene Zahl grösser als 3, so ist der linke Teil positiv; ist sie kleiner als 3, so ist derselbe negativ. Dabei liegt nun der Gedanke nahe zu untersuchen, ob nicht die Differenzen der eingesetzten Zahlen und der bekannten Wurzel in einem gewissen Zusammenhange mit den Werten, welche die linke Seite annimmt, stehen. So hat man bald festgestellt, dass $\frac{3{,}03-3}{2{,}96-3} = \frac{+0{,}03}{-0{,}04} = -0{,}75$ ist, die betreffenden Werte der linken Seite geben durcheinander dividiert $\frac{+0{,}0609}{-0{,}0784} = -0{,}77678$. Hieraus folgt, dass man nahezu $\frac{3{,}03-3}{2{,}96-3}$ dem Ausdrucke $\frac{+0{,}0609}{-0{,}0784}$ gleichsetzen kann. Ähnlich so verfahre man mit den anderen oben angegebenen Wertpaaren. Der Schüler wird dann erkennen, dass die Ausdrücke um so mehr übereinstimmen, je näher beide angenommene Zahlen der wahren Wurzel kommen. Das Gefundene lässt sich so ausdrücken: Die Fehler der Ergebnisse verhalten sich wie die Fehler der Einsetzungen. Hierauf lässt man nun gleich unter steter Leitung der Schüler die Wurzeln einer früher gelösten Aufgabe finden. Sodann folgt die allgemeine Ableitung der Regula falsi für die quadratischen Gleichungen und darauf für die Gleichungen höheren Grades, wie sie in den Werken, welche die Auflösungen der Gleichungen behandeln, besprochen wird. Darauf schreitet man zur Lösung von Gleichungen dritten, vierten und höheren Grades. Die Regula falsi kann gut benutzt werden, um näherungsweise Wurzeln aus gegebenen Zahlen auszuziehen, wenn der Wurzelexponent die Zahl 4 übersteigt. Da sich in den grösseren Aufgabensammlungen eine genügende Anzahl von hierher gehörigen Beispielen auffinden lassen, so unterlasse ich es hier geeigneten Uebungsstoff zu bieten. Sehr gut lässt sich die Regula falsi verwenden, um die trigonometrischen Functionen zu berechnen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berechnung der trigonometrischen Functionen.

Wenn in der Classe die Trigonometrie behandelt wird, muss der Schüler mit den Wegen bekannt gemacht werden, welche die Berechnung der trigonometrischen Functionen ermöglichen. Nach dem Kenntnisstandpunkt der Schüler bieten sich dem Lehrer verschiedene Wege dar. Nach meinem Dafürhalten lässt sich bei der Bestimmung dieser Grössen mit Vorteil die Regula falsi anwenden. Ich setze voraus, dass der Schüler weiss, dass von den trigonometrischen Functionen nur eine berechnet zu werden braucht. Wir wählen hier die Sinus und zwar sin 1^0, sin $1'$, sin $1''$, Sind diese bekannt, so können leicht alle übrigen Sinus berechnet werden. Der Schüler muss ferner gelernt haben, dass die Sinus nur im ersten Quadranten berechnet werden müssen und dass die Sinus im ersten Quadranten mit der Abnahme des Winkels kleiner werden. Ausserdem nehme ich an, dass folgende Formeln bewiesen worden sind:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$$
$$\sin \alpha/2 = 1/2\,(1 + \sin\alpha)^{1/2} - 1/2\,(1 - \sin\alpha)^{1/2} \quad **$$
$$\sin 3\alpha = 3 \sin\alpha - 4 \sin\alpha\, 3$$
$$\cos 3\alpha = 4 \cos\alpha^3 - 3 \cos\alpha$$
$$\sin 5\alpha = 5 \sin\alpha - 20 \sin\alpha^3 + 16 \sin\alpha^5$$

Es soll zunächst $\sin 3^0 = \sin(18^0 - 15^0)$ berechnet werden. Zu dem Ende schlagen wir folgenden Weg ein:

$$\sin 60^0 = \cos(90^0 - 60^0);\ \sin 60^0 = \cos 30^0$$
$$2 \sin 30^0 \cos 30^0 = \cos 30^0;\ 2 \sin 30^0 = 1$$
$$\sin 30^0 = 1/2 = 0{,}5000000$$
$$\sin 15^0 = 1/2\,(1 + \sin 30^0)^{1/2} - 1/2\,(1 - \sin 30^0)^{1/2}$$
$$\sin 15^0 = 0{,}2588190\,*$$
$$\cos 15^0 = (1 - \sin 15^{0\,2})^{1/2} = 0{,}9659258$$

Um sin 18^0 zu ermitteln, empfiehlt sich folgendes Verfahren:

$$\sin 36^0 = \cos(90^0 - 36^0) = \cos 54^0$$
$$\sin 2 \,.\, 18^0 = \cos 3 \,.\, 18^0$$
$$2 \sin 18^0 \cos 18^0 = 4 \cos 18^{0\,3} - 3 \cos 18^0$$
$$2 \sin 18^0 = 4 \cos 18^{0\,2} - 3$$
$$2 \sin 18^0 = 4\,(1 - \sin 18^{0\,2}) - 3$$
$$2 \sin 18^0 = 1 - 4 \sin 18^{0\,2}$$

Diese Gleichung liefert $\sin 18^0 = 1/4\,(5^{1/2} - 1)$

Der andere Wert muss verworfen werden, weil derselbe negativ ausfällt. Man erhält nun leicht $\sin 18^0 = 0{,}3090170$, $\cos 18^0 = (1 - \sin 18^{0\,2})^{1/2} = 0{,}9510565$

Darauf ergiebt sich

$$\sin(18^0 - 15^0) = \sin 18^0 \cos 15^0 - \cos 18^0 \sin 15^0$$

Nach Einsetzung der oben gefundenen Werte folgt

$$\sin 3^0 = 0{,}0523359$$

Die Gleichung $\sin 3^0 = \sin 3 \,.\, 1^0 = 3 \sin 1^0 - 4 \sin 1^{0\,3}$ liefert uns sin 1^0, weil die linke

*) Die Resultate sind grösseren Rechnungen entnommen und auf 7 Decimalstellen abgerundet worden.

**) Die Quadratwurzelzeichen mussten durch Klammern hoch $1/2$ ersetzt worden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite bekannt ist. Hierbei benutzt man die Regula falsi. Wird die Gleichung auf Null gebracht, so ist

$$0{,}0523359 - 3 \sin 1^0 + 4 \sin 1^{0\,3} = 0$$

Es leuchtet sofort ein, dass sin 1^0 kleiner als 0,05 sein muss. Durch leicht ausführbare Überschlagsrechnungen findet man, dass der Wert 0,02, an Stelle von sin 1^0 gesetzt, die linke Seite kleiner als 0 macht.

Setzt man $e_1 = 0{,}01$, so ist der Wert der rechten Seite $f_1 = + 0{,}0223399$
„ „ $e_2 = 0{,}02$, „ „ „ „ „ „ „ $f_2 = - 0{,}007656$

Bezeichnet man kurz sin 1^0 mit x, so ist nach der Regula falsi

$$\frac{0{,}01 - x}{0{,}02 - x} = \frac{+ 0{,}0223399}{- 0{,}007656}$$

mithin $x = 0{,}0174648$. Dieses ist ein Nährungswert für sin 1^0. Um nun sin 1^0 noch genauer zu ermitteln, setzt man

$e_3 = 0{,}017$, dann ist $f_3 = +0{,}0013408$
$e_4 = 0{,}018$, „ „ $f_4 = - 0{,}0016582$

mithin ist $$\frac{0{,}017 - x}{0{,}018 - x} = \frac{+ 0{,}0013408}{- 0{,}0016582}$$

Hieraus ergiebt sich $x = 0{,}01744710$

Durch Vergleichung dieses Wertes mit dem vorigen wird es nahe gelegt

$e_5 = 0{,}01744$ zu setzen, dann folgt $f_5 = + 0{,}0000093$
$e_6 = 0{,}01745$ „ „ „ „ $f_6 = + 0{,}0000018$

dann ist $$\frac{0{,}01744 - x}{0{,}01745 - x} = \frac{+ 0{,}0000093}{+ 0{,}0000018}$$

$$x = 0{,}0174524$$

Dieser Wert genügt der vorliegenden Gleichung. Die anderen Wurzeln findet man gleich $+ 0{,}857167$ und $- 0{,}874619$, sind aber hier nicht brauchbar, weil sin 1^0 kleiner als sin 3^0 sein muss.

Nun berechnet man

$$\sin 30' = \tfrac{1}{2} (1 + \sin 1^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} (1 - \sin 1^0)^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin 30' = 0{,}0087266$$
$$\sin 15' = \tfrac{1}{2} (1 + \sin 30')^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} (1 - \sin 30')^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin 15' = 0{,}0043633$$
$$\sin 15' = \sin 3 \,.\, 5' = 3 \sin 5' - 4 \sin 5'^{\,3}$$

Mit Hülfe der Regula falsi ergiebt sich bald $\sin 5' = 0{,}0014544$

Die anderen Wurzeln der Gleichung sind:

$$+ 0{,}865297 \text{ und } - 0{,}866751$$

Sie sind aber hier nicht brauchbar, weil sin 5' kleiner als sin 15' sein muss.

Aus der Gleichung

$\sin 5' = \sin 5 \,.\, 1' = 5 \sin 1' - 20 \sin 1'^{\,3} + 16 \sin 1'^{\,5}$ liefert die Regula falsi rasch

$$\sin 1' = 0{,}0002909$$

Die anderen Wurzeln dieser Gleichung heissen:

$$+ 0{,}5875496\,;\ + 0{,}951146\,;\ - 0{,}950967\,;\ - 0{,}588020$$

Diese Werte sind aber nicht brauchbar, weil sin 1' kleiner als sin 5' sein muss.

Jetzt findet man

$$\sin 30'' = \tfrac{1}{2} (1 + \sin 1')^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} (1 - \sin')^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin 30'' = 0{,}0001454$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin 15'' = \tfrac{1}{2}(1 + \sin 30'')^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin 30'')^{\frac{1}{2}}$$
$$\sin 15'' = 0{,}0000727$$
$$\sin 15'' = \sin 3 \,.\, 5'' = 3 \sin 5'' - 4 \sin 5''^{\,3}$$

Hier liefert die Regula falsi $\sin 5'' = 0{,}0000242$

Die andern Wurzeln $+ 0{,}866013$, $- 0{,}866037$ sind unbrauchbar, weil $\sin 5''$ kleiner als $\sin 15''$ sein muss. Endlich giebt die Gleichung

$\sin 5'' = \sin 5 \,.\, 1'' = 5 \sin 1'' - 20 \sin 1''^{\,3} + 16 \sin 1''^{\,5}$ unter Anwendung der Regula falsi

$$\sin 1'' = 0{,}0000048$$

Die anderen Wurzeln dieser Gleichung sind $+ 0{,}587781$; $+ 0{,}951058$ $- 0{,}951055$; $- 0{,}587789$.

Man kann auch so vorgehen, dass man zunächst berechnet

$$\sin 30^0 = 0{,}5000000$$

Dann ist $\sin 15^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin 30^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin 30^0)^{\frac{1}{2}}$

$$\sin 15^0 = 0{,}2588190$$

$$\sin \tfrac{15}{2}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin 15^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin 15^0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}1305262$$
$$\sin \tfrac{15}{4}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin \tfrac{15}{2}{}^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin \tfrac{15}{2}{}^0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}0654031$$
$$\sin \tfrac{15}{8}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin \tfrac{15}{4}{}^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin \tfrac{15}{4}{}^0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}0327192$$
$$\sin \tfrac{15}{16}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin \tfrac{15}{8}{}^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin \tfrac{15}{8}{}^0) = 0{,}0162617$$
$$\cos \tfrac{15}{16}{}^0 = (1 - \sin \tfrac{15}{16}{}^{0\,2})^{\frac{1}{2}} = 0{,}9998662$$
$$\sin \tfrac{15}{16}{}^0 = \sin 5 \,.\, \tfrac{3}{16}{}^0 = 5 \sin \tfrac{3}{16}{}^0 - 20 \sin \tfrac{3}{16}{}^{0\,3} + 16 \sin \tfrac{3}{16}{}^{0\,5}$$

Diese Gleichung mit Hülfe der Regula falsi gelöst, liefert $\sin \tfrac{3}{16}{}^0 = 0{,}0032725$

Die anderen Wurzeln der Gleichung lauten:

$$+ 0{,}585135;\ + 0{,}95206\ - 0{,}950040;\ - 0{,}590449$$

Diese Werte sind unbrauchbar, weil $\sin \tfrac{3}{16}{}^0$ kleiner als $\sin \tfrac{15}{16}{}^0$ sein muss

Die Gleichung $\sin \tfrac{3}{16}{}^0 = \sin 3 \,.\, \tfrac{1}{16}{}^0 = 3 \sin \tfrac{1}{16}{}^0 - 4 \sin \tfrac{1}{16}{}^{0\,3}$ liefert unter Benutzung der Regula falsi $\sin \tfrac{1}{16}{}^0 = + 0{,}0010908$.

Die anderen hier nicht brauchbaren Wurzeln lauten $+ 0{,}8654796$, $- 0{,}8665702$

$$\cos \tfrac{1}{16}{}^0 = (1 - \sin \tfrac{1}{16}{}^{0\,2})^{\frac{1}{2}} = 0{,}9999994$$
$$\sin (\tfrac{15}{16}{}^0 + \tfrac{1}{16}{}^0) = \sin \tfrac{15}{16}{}^0 \cos \tfrac{1}{16}{}^0 + \cos \tfrac{15}{16}{}^0 \sin \tfrac{1}{16}{}^0$$

Durch Einsetzung der obigen Werte erhält man $\sin 1^0 = 0{,}0174524$

Die Berechnung von $\sin 1'$ und $\sin 1''$ erfolgt, wie vorhin.

Endlich kann man $\sin 1^0$ noch auf eine einfache Weise erhalten, welche hier folgt. Man berechnet, wie oben $\sin 3^0 = 0{,}0523359$

Hieraus erhält man $\sin \tfrac{3}{2}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin 3^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin 3^0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}0261769$

$$\sin \tfrac{3}{4}{}^0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sin \tfrac{3}{2}{}^0)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(1 - \sin \tfrac{3}{2}{}^0)^{\frac{1}{2}} = 0{,}0130896$$

Die Gleichung $\sin \tfrac{3}{4}{}^0 = \sin 3 \,.\, \tfrac{1}{4}{}^0 = 3 \sin \tfrac{1}{4}{}^0 - 4 \sin \tfrac{1}{4}{}^{0\,3}$

giebt nach der Regula falsi behandelt $\sin \tfrac{1}{4}{}^0 = 0{,}0043633$

Die andern hier nicht brauchbaren Wurzeln heissen $+ 0{,}863836$; $- 0{,}0868199$

$$\cos {}^3{}_4{}^0 = (1 - \sin \tfrac{3}{4}{}^{0\,2})^{\frac{1}{2}} = 0{,}9999143$$
$$\cos \tfrac{1}{4}{}^0 = (1 - \sin \tfrac{1}{4}{}^{0\,2})^{\frac{1}{2}} = 0{,}9999905$$
$$\sin (\tfrac{3}{4}{}^0 + \tfrac{1}{4}{}^0) = \sin \tfrac{3}{4}{}^0 \cos \tfrac{1}{4}{}^0 + \cos \tfrac{3}{4}{}^0 \sin \tfrac{1}{4}{}^0$$

Durch Einsetzung der gefundenen Werte ergiebt $\sin 1^0 = 0{,}0174524$.

Verfahren empfiehlt sich desshalb, weil man gleich $\sin 15' = \sin \tfrac{1}{4}{}^0$ gefunden hat. Die anderen Rechnungen gestalten sich, wie es oben angegeben ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf