Consequenz und System der Mathematik.

Die Zahl der mathematischen Lehrbücher wächst von Jahr zu Jahr. Indem nicht vorausgesetzt werden darf, dass die Verfasser irgend ein anderer Beweggrund zur Herausgabe eines neuen Buches als die Ueberzeugung bestimmte, wie sie eine bisher nicht bekannt gewordene Ansicht gewonnen haben und dieser eine allgemeinere Geltung zu verschaffen sich bemühen müssen: so kann jenes Factum freudig begrüsst und als Belag dafür erkannt werden, dass die Lehrer ein grösserer Eifer beseelt für die weitere Verbreitung und Begründung der Wissenschaft zu arbeiten und durch Wort und Schrift nach Kräften zu wirken. Jeder wird beim Gebrauche eines fremden Lehrbuches etwas Wesentliches vermisst haben, auf irgend ein seiner Meinung nach nothwendiges Erforderniss gestossen sein, und zur Veröffentlichung seiner abweichenden Ansicht desto mehr sich gedrungen gefühlt haben, je wichtiger und durchgreifender diese ihm erschienen ist. Er tritt gegen die anderen Darstellungen der Wissenschaft in eine gewisse Opposition, und hat vor allen Dingen die Pflicht, selbst die möglichste Klarheit über die eigene wissenschaftliche Stellung zu gewinnen, und seinen Standpunkt mit der grössten Bestimmtheit zu bezeichnen.

Im Allgemeinen stimmen nun die mathematischen Lehrbücher in der Form überein, in welcher die mathematischen Wahrheiten vorgetragen werden, in der mathematischen Methode, welche überall wiederkehrt. Von einem ursprünglich einem jeden einleuchtenden und unzweifelhaften Satze, von einem Grundsatze, oder auch von einer gewissen Erklärung ausgehend, zieht man daraus möglichst viele Folgerungen, welche entweder als Zusätze oder Lehrsätze hingestellt werden, je nachdem ihre Abhängigkeit von dem vorhergegangenen Satze unmittelbar in die Augen fällt, oder durch einen anderweitig vorhergegangenen Satz vermittelt und hierin begründet und bewiesen werden muss. Und je mehr solche Folgesätze sich an einen Grundsatz oder eine Erklärung anlehnen lassen, desto besser, desto wichtiger und bedeutender erscheinen diese. Somit tritt jede Behauptung entweder unmittelbar für sich selbst als richtig auf, oder seine Wahrheit ergiebt sich erst vermittelst eines schon vorher erörterten Gesetzes. Darin nun, dass der begründende

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dem begründeten Satze immer voraufgeht, darin besteht die Consequenz. Ferner werden wir in jedem Lehrbuche mehrere Gruppen von zusammen gehörenden, an einen und denselben Hauptsatz sich anlehnenden Sätzen unterscheiden können, und auch zwischen den ganzen Gruppen das Gesetz der Consequenz beobachtet finden, welches sich überhaupt als der Kern der mathematischen Methode herausstellt.

In dieser Darstellungsweise der Mathematik selbst liegt ein Grund zu der Abweichung der Lehrbücher von einander. Zunächst ist vielleicht in der That diese oder jene von den Behauptungen keiner anderen subordinirt: ihre Einordnung in die Reihe aller Gruppen findet daher wegen des zwischen ihnen bestehenden coordinirten Verhältnisses an keiner Stelle mit Nothwendigkeit Statt, und bleibt es den verschiedenen Verfassern überlassen, irgend welchen Nebenrücksichten und namentlich praktischen Interessen und Erfahrungen bei der ganzen Anordnung zu folgen. Der Beweis einer Thesis, der Nachweis nämlich, wie die Behauptung von ihrer Voraussetzung abhängt, lässt sich oft bald auf diesen bald auf jenen früheren Satz stützen, und darf man daher diese Thesis bald hier bald dort vortragen und in diese oder jene Gruppe einschalten. Die Consequenz wird dabei nirgends gefährdet, die ganze Darstellung aber gewinnt dennoch ein mitunter sehr verändertes Ansehen. — Niemandem entgeht, dass ausser diesen Unterschieden unter den Lehrbüchern auch noch andere aufzuführen sind: nicht in jedem Buche findet sich jeder Satz; aus dem vorliegenden weitschichtigen Material hat der Eine diese, der Andere jene Auswahl zum Theil bestimmten Zwecken gemäss getroffen: die Beweise werden entweder strenge vollständig durchgeführt oder nur durch Bezeichnung der vermittelnden Sätze angedeutet u. s. w. Bleiben wir indessen bei der Uebereinstimmung und Verschiedenheit stehen, wie solche aus der beschriebenen mathematischen Methode selbst hervorgingen.

Da wird denn von vorneherein gerne zugestanden, dass die Consequenz auch im Allgemeinen erreicht sei. Nur isolirt dürfte hier oder da einmal ein Verstoss dagegen vorkommen. In der Geometrie z. B. pflegt man sogleich als Objecte dieser Wissenschaft den Punkt, die Linie, die Ebene und den Körper aufzuführen, und diese Gegenstände nach den Dimensionen zu unterscheiden, indem man dem Punkte gar keine Dimension, der Linie nur eine (die Länge), der Ebene aber zwei (die Länge und Breite), und dem Körper endlich drei Dimensionen (die Länge, Breite und Höhe) zuschreibt. Der Schüler sagt zu dieser Erklärung ohne zu zweifeln „ja“; denn wie lang eine Linie, wie breit eine Ebene, wie hoch ein Körper sei, das sind Redensarten und Fragen, welche er seit seinen jüngsten Jahren oft gehört hat, die ihm — man mögte sagen erfahrungsmässig — vollständig geläufig geworden sind und klar vorkommen, er hat sie ja selbst wohl oft genug gebraucht und gar eigenhändig messend ausgeführt. Aber auf die Frage, was ist denn nun die Dimension

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selbst, erfolgt doch in den Lehrbüchern eigentlich keine oder wenigstens erst dann eine stillschweigende Antwort, wenn von rechten Winkeln und Perpendikeln gesprochen wird; denn dass im Begriffe der Dimension immer die senkrechte Lage zugleich gedacht werde, wird wohl nicht bestritten. — Doch abgesehen von solchen Einzelnheiten, im Allgemeinen wird den Lehrbüchern, wie gesagt, die Consequenz gerne eingeräumt. Dies will inzwischen noch nicht viel sagen. Die Consequenz bezieht sich lediglich auf den Causalnexus; der Grund muss aber der Wirkung vorhergehen; der begründende Satz muss dem Folgesatze voraufgehen. Diese Forderung hat man an jede Darstellung, an jedes Denken — das praktische nicht minder als das theoretische — zu stellen, und kann die Erfüllung dieser Forderung nicht der Mathematik besonders angerechnet werden: nicht die Mathematik allein, jede Wissenschaft muss in ihrer Darstellung den Gesetzen der Logik genügen.

Bei solcher bloss consequenten Darstellung sind die einzelnen Sätze und Behauptungen wie zu einer langen Kette aneinader gereiht, in welcher die gegenseitigen Anknüpfungspunkte lose und leicht verschiebbar sind, so dass die einzelnen Glieder an verschiedenen Stellen mit gleichem Rechte eingefügt werden können und die ganze Kette doch nicht als solche unterbrechen und stören. Das Ganze entbehrt der wahren Ueber sichtlichkeit, es schliesst sich ein Satz oder eine Gruppe von Sätzen dem Vorhergegangenen unter einer mitunter wie zufällig klingenden Bemerkung gleich einer Beobachtung an, welche sich etwa bei einer genaueren Betrachtung eines früheren Satzes als erspriesslich ergab. Es fehlt somit die innere Nothwendigkeit, die wahre wissenschaftliche Einheit.

Es darf diese consequente Darstellung nicht mit der systematischen verwechselt werden.

Jedes System verlangt eine leitende, durch die gesammte Darstellung sich hindurchziehende, in jedem Besonderen wiederkehrende, alles Einzelne nothwendig miteinander verknüpfende und zu einem organisch gegliederten Ganzen verbindende Idee. Sie ist die Seele, welche die ganze Untersuchung beherrscht, der Mittelpunkt, von welchem heraus und zu welchem hin und um welchen herum, nach dem Umfange der Idee selbst peripherisch begrenzt, alle einzelne Betrachtungen sich allseitig erstrecken. In ihrer höchsten Allgemeinheit ausgesprochen wird sie das Princip und stellt sich als der einzige Grundsatz an die Spitze der Wissenschaft, deren einzelne Theile in diesem obersten Begriffe und Satze bereits eingeschlossen erscheinen und durch seine allseitige Entwickelung nur als nähere Bestimmungen, als Determinationen desselben hervorgehen. Und wenn zuzugeben ist, dass bei jeder speciellen Entdeckung auch auf wissenschaftlichem Boden der Zufall und ein glückliches Ohngefähr mehr oder weniger immer im Spiele ist, so wird doch die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wissenschaftliche Einordnung des Entdeckten nöthig und bei der systematischen Darstellung auch dadurch möglich, dass dasselbe in seiner Ableitung und Entwickelung aus der Grundidee der Wissenschaft seine nothwendige Berechtigung in dieser erkennen lässt. Solche systematische Darstellung liefert in der Zurückbeziehung alles Einzelnen auf das Eine, auf das Princip, das Bild der wahren wissenschaftlichen Einheit. Das ist ja das Charakteristische der Wissenschaft, dass sie von diesem oder jenem vorausgesteckten Ziele, von dieser oder jener noch so erhabenen und bedeutsamen Anwendung gänzlich absieht, und lediglich in ihrer Einheit ergriffen sein will. Die Wissenschaft verlangt ein Herausarbeiten ihres Materials aus dem Einen, und zurück ein Hineinarbeiten in das Eine, und gewinnt in solchem Kreislaufe ihren wahren einheitlichen Abschluss. Auf solche Weise gewinnt man den rechten Ueberblick über das ganze Gefüge und die innere Structur der Wissenschaft, welche wie aus einem Punkte heraus krystallisirt erscheinen muss.

Diese systematische Darstellung wird nun in den mathematischen Lehrbüchern zu vermissen sein. Von vorneherein erregen schon die Grundsätze Bedenken, welche in bald grösserer bald geringerer Anzahl hingestellt werden. Man wird sich wundern müssen, dass Sätze, welche von dem Einen als Grundsätze aufgeführt sind und daher an sich schon für richtig und unzweifelhaft wahr gelten sollen, von dem Andern noch mit einem Beweise ausgestattet sind. Darin offenbart sich ein Schwanken, ob der Satz wirklich auf die Würde eines Grundsatzes Anspruch machen kann oder nicht, und es scheint fast die Beurtheilung der Frage zu einer Gefühlssache zu werden. Man wird leicht versucht zu glauben, dass die Grundsätze vielmehr ihres Zweckes, ihrer Anwendung wegen bei späteren Beweisen, als ihrer inneren Nothwendigkeit wegen aufgenommen wurden: weshalb dieser diesen Satz, den er nicht glaubt zu gebrauchen, aus der Reihe seiner Grundsätze streicht, jenen Satz dagegen für sich verlangt, den jener wieder entbehren will. Ueberdies ist die Fassungskraft nicht bei allen Lernenden gleich stark, und die Zweifelsucht bei Verschiedenen verschieden, so dass ein Satz, welcher für manchen unmittelbar klar und wahr ist, für einen Andern erst bewiesen werden muss. Die Stelle des Princips aber einzunehmen und die bindende Einheit der Wissenschaft zu bilden, sind jene Grundsätze nun vollends nicht geschickt. Ohne weitere Ableitung, wie sie neben einander auftreten, erscheinen sie ja alle in gleicher Berechtigung coordinirt. Daher stellt sich das ganze Gebäude nur als consequentes Aggregat von mehr oder weniger Sätzen so oder anders geordnet dar. Damit kann der Wissenschaft um so weniger gedient sein, als eine absolute Vollständigkeit in Aufstellung aller möglichen Sätze an eine Unmöglichkeit grenzt. Es muss hier noch erwähnt werden, wie die Parallelentheorie von je her den Mathematikern die grösste Schwierigkeit hinsichtlich der Begründung dieser Lehre dargeboten und wohl zu der Ansicht geführt hat, als müsse noch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ein für dieselbe passender Grundsatz entdeckt werden. Dies dürfte ein für ein System missliches Zugeständniss sein: es ist hiermit eigentlich sofort eingeräumt, dass ein System in der That nicht erreicht sei. Denn in dem Systeme müsste doch auch der Parallelismus bereits durch das Princip seine Begründung so wie auch seine nothwendige Stellung erhalten haben. Mit einer grösseren oder geringeren Anzahl von Grundsätzen, denen sich die Definitionen als vermittelnde Uebergangsmomente anschliessen, ist es also nicht gethan, wenn ein System erzielt wird.

Das System wird aber unerreicht bleiben, sobald die Grundbegriffe nicht sorgfältiger discutirt werden, als dies meistens geschehen sein dürfte. Als eine Folge davon ist sogleich zu bezeichnen, dass die Frage, was ist denn nun die Mathematik, eine ungenügende, weil unzureichende Beantwortung findet. Sie wird erklärt als Grössenlehre, die Grösse aber als das definirt, was vergrössert oder vermindert werden kann. Dabei ist freilich nicht recht abzusehen, wie das Wesen eines Dinges statt nach dem, was es wircklich ist, vielmehr nach dem bestimmt sein und in dem erfasst werden soll, was erst zu werden es fähig sein mag — wie hier es mit der Grösse geschieht. Indessen jene Erklärung der Mathematik zugestanden, so soll doch die Grösse das Object der Wissenschaft sein, und diese muss sich demnach mit der Eigenschaft ihres Objectes, also mit der Vermehrung und Verminderung beschäftigen. Dies passt freilich auf alles Geometrische und Arithmetische ganz gut, aber gar nicht auf einen ganzen Theil der Wissenschaft, den sich gleichwohl die Mathematiker nicht rauben lassen dürfen, auf die Combinationslehre, welche nirgends von einer Vermehrung oder Verminderung, sondern lediglich von einer Versetzung der Elemente handelt. — Hätten ferner die Lehrbücher ein wahres System erreicht, so müsste das aufgestellte Princip, der oberste Grundsatz zugleich auch den Eintheilungsgrund der ganzen Wissenschaft enthalten. Mit der üblichen Eintheilung der Mathematik sieht es aber gleichfalls nicht zum Besten aus. Zuvörderst findet man die elementare Mathematik von der höheren geschieden, ohne recht zu erfahren, worauf diese Eintheilung beruht, ja ohne über die Grenzen beider Theile genau unterrichtet zu werden. Fast will der Argwohn uns beschleichen, als seien vorzüglich die Kräfte derjenigen, welche allmählich vom Leichteren zum Schwereren fortschreitend sich an der Wissenschaft emporarbeiten sollen, bei jener Eintheilung in Anschlag gebracht, und habe die Wissenschaft selbst nichts damit zu schaffen. Es wäre diese Eintheilung überhaupt dann ziemlich überflüssig, und es liesse sich erklären, warum an eine begriffliche Abgrenzung beider Sphären nicht zu denken sei. Daneben wird die Mathematik weiter in Geometrie und Arithmetik gesondert. Diese Eintheilung wird entweder stillschweigend gemacht und als eine fertige überliefert, oder durch die Theilung der Grössen in stetige und diskrete begründet, indem alles Stetige

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Geometrie und alles Diskrete der Arithmetik vindicirt wird. Die Begriffe des Stetigen und Diskreten jedoch schreiben eine solche Trennung keinesweges vor; und wenn im Verlaufe der Arithmetik von den Functionen gehandelt wird, so findet in der That gerade die Stetigkeit eine besondere Berücksichtigung, wodurch man auch dem arithmetischen Elemente offenbar die Berechtigung einräumt, stetig sein zu dürfen, welches man sonst doch nur der Raumgrösse vorbehalten wollte. Damit hängt weiter der merkwürdige Umstand zusammen, dass man die einen Grössen ganz anders entstehen lässt als die andern: die Raumgrössen nämlich aus einem Einfachen, die Zahlgrössen dagegen aus einer Einheit. Denn man ist längst gewohnt, den Punkt in der Geometrie als das allen Raumgebilden zu Grunde liegende Einfache anzusehen, welches im Gegensatze zu den Raumgrössen weiter kein Prädicat hat als das negative, ein gewisses Anderes (hier nämlich ein Ausgedehntes) nicht zu sein. Etwas Aehnliches hat man aber für die Zahlenbildung nicht nöthig zu haben geglaubt, wodurch freilich die Zahl von vorne herein als diskret erscheinen musste.

Noch manches Andere könnte hier zur Sprache gebracht werden, z. B. die Stellung der Trigonometrie und der Algebra, die oft verneinte Frage, ob das Logarithmiren eine besondere Operation zu nennen sei oder nicht (worüber sich namentlich gewisse Recensionen ergehen), das wahre Wesen des Verhältnisses in seiner allgemeinen Auffassung u. s. w. Doch genug: die Absicht dürfte erreicht sein, die Forderung, welche an ein systematisches Lehrbuch der Mathematik gemacht werden muss, aufgestellt zu haben, dass eine gründliche Erörterung der Begriffe und vor allen Dingen die klare und bestimmte Entwickelung des einen Grundsatzes, des Princips Noth thut. Zwar wer könnte es leugnen, dass auf dem bisherigen Wege in der Mathematik Grosses und Erstaunenswerthes geleistet ist; ja man wird zugeben, dass der geforderte systematische Weg schwerlich zu einem in der Praxis noch strahlenderen Resultate führen werde. Indessen, dem sei wie ihm wolle, die Wissenschaft verlangt das System, und diesem Verlangen müssen sich alle anderen Rücksichten beugen. Und nur so kann die Mathematik wirklich eine Vorschule der Philosophie heissen, wie man sie anzusehen das Recht hat.

Es thut wohl, wenn man auch Andere unabhängig zu ähnlichen Schlüssen gelangen sieht: die eigene Ueberzeugung wird dadurch um so mehr befestigt. In dem vortrefflichen Lehrbuche der Differentialrechnung vom Prof. Schlömilch (Greifswald. Otte 1847) finde ich hinsichtlich der Begriffe des Stetigen und Diskreten und der darauf ruhenden Eintheilung der Mathematik in niedere und höhere ähnliche Resultate, wie ich in meinem Lehrbuche der Arithmetik (Stralsund. Hingst 1844) sie gewonnen habe.

Dr. Brehmer.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf