Stereometrie,

die Lehre von den Raumgebilden.

§ 36.

Das Prisma. (Die Säule).

1. Erklärung. Ein Körper ist ein von allen Seiten begrenzter Raum.

2. Erkl. Ein Würfel oder Kubus ist ein Körper, welcher von 6 gleichen Quadraten begrenzt wird.

3. E. Ein Quadrat ist eine ebene Fläche (Ebene).

Eine Ebene wird ihrer Lage nach bestimmt:

a) durch 3 Punkte;
b) durch 1 Punkt und 1 Gerade;
c) durch 2 sich schneidende Gerade;
d) durch 2 parallele Gerade.

4. E. Jede Gerade, die 2 Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in ihr.

5. E. Legt man 2 Würfel so aufeinander, dass sich 2 Quadrate decken, so entsteht ein Prisma.

Dies Prisma wird also von 2 Quadraten und 4 Rechtecken begrenzt.

Die beiden Quadrate nennt man die Grundflächen, die 4 Rechtecke die Seitenflächen des Prismas.

Der Würfel ist ein Prisma, bei dem jede Fläche sowohl Seitenfläche wie Grundfläche sein kann.

Die Grundflächen eines Prismas können beliebige Polygone (Drei-, Vier-, Fünfecke etc.) sein, sie sind aber stets congruent, parallel und gleichliegend. Infolgedessen sind die Seitenflächen stets Parallelogramme.

Daraus folgt die Erklärung:

6. E. Ein Prisma ist ein Körper, der von 2 congruenten und parallelen Polygonen als Grundflächen und soviel Parallelogrammen als Seitenflächen begrenzt wird, wie die Polygone Seiten haben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. E. So wie wir jede gerade Linie (nicht Strecke) nach beiden Seiten als unendlich betrachten, sehen wir allgemein auch jede Ebene als nach allen Seiten unendlich an.

2 Ebenen schneiden sich entweder, ihr Durchschnitt ist eine gerade Linie, oder sie sind parallel, d. h. sie treffen sich in keinem Punkte.

8. E. Eine Gerade steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf jeder durch ihren Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht.

Der Fusspunkt ist der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

9. E. Die Durchschnittslinien zweier Seitenflächen eines Prismas nennt man die Seitenkanten, die Durchschnittslinie einer Grundfläche und einer Seitenfläche die Grundkante.

10. E. Man unterscheidet gerade und schiefe Prismen.

Bei den geraden Prismen stehen die Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen, bei den schiefen dagegen bilden sie nicht mit allen durch ihren Fusspunkt gehenden Geraden rechte Winkel.

(Mit wie vielen Geraden ist dies letztere der Fall?)

Der Würfel ist also ein gerades Prisma, desgleichen das aus 2 Würfeln gebildete Prisma.

11. E. Den senkrechten Abstand der beiden Grundflächen eines Prismas nennt man seine Höhe.

Bei den geraden Prismen geben also die Seitenkanten zugleich die Höhe an; die Seitenflächen sind Rechtecke.

12. E. Ein Prisma, dessen Grundflächen Dreiecke sind, nennt man ein dreiseitiges, eines mit Vierecken als Grundflächen ein vierseitiges, u. s. w.; ein gerades Prisma, dessen Grundflächen reguläre Polygone sind (gleichseitiges Dreieck, etc.), ein reguläres Prisma.

13. E. Ein Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind, heisst ein Parallelepipedon.

In einem Parallelepipedon sind also alle begrenzenden Flächen, die Grundflächen sowohl wie die Seitenfläche, Parallelogramme.

14 E. Ein gerades Parallelepipedon, dessen Grundflächen Rechtecke sind, heisst ein rechtwinkliges. (Würfel, Prisma aus 2 Würfeln, Raum eines Zimmers.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 37.

1. Zwei Gerade im Raum können zu einander folgende Lage haben:

a) sie haben einen Punkt gemein, dann schneiden sie sich;

b) sie haben 2 Punkte gemein, dann decken sie sich, d. h. sie fallen ganz zusammen:

c) sie sind parallel, dann liegen sie in einer Ebene;

d) sie sind nicht parallel und liegen nicht in einer Ebene, dann kreuzen sie sich.

2. Eine Gerade kann mit einer Ebene

a) 1 Punkt gemein haben, dann schneidet sie dieselbe in diesem Punkte;

b) keinen Punkt gemein haben, dann ist sie der Ebene parallel.

3. **Lehrsatz.** Wenn eine Gerade auf 2 durch ihren Fusspunkt gehenden Geraden senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf der durch diese bestimmten Ebene.

Voraussetzung. AB $\perp$ BC, AB $\perp$ BD. (Fig. 3.)

Behauptung. AB $\perp$ Ebene CBD.

Beweis. Nach § 36, Erkl. 8 steht eine Gerade senkrecht auf einer Ebene, wenn sie auf jeder durch ihren Fusspunkt in der Ebene gezogenen Geraden senkrecht steht. Um also zu beweisen, dass AB $\perp$ Ebene CBD steht, haben wir nur zu beweisen, dass AB $\perp$ auf der beliebigen Geraden BE in der Ebene CBD steht. Zu dem Zwecke verlängern wir AB um sich selbst über B hinaus, so dass also AB=FB, verbinden C mit D durch 1 Gerade, welche BE in E schneidet, und die 3 Punkte C, D und E mit A und F.

Dann ist

$\triangle$ ABC $\cong$ FBC, also AC = FC,
$\triangle$ ABD $\cong$ FBD, also AD = FD, mithin
$\triangle$ ACD $\cong$ FCD, also $\angle$ ACD = FCD,
$\triangle$ ACE $\cong$ FCE, also AE = FE,
$\triangle$ ABE $\cong$ FBE, also $\angle$ ABC = FBE.

Da diese beiden Winkel Nebenwinkel sind, so sind sie rechte, also AB $\perp$ AE.

§ 38.

1. Nach § 36, 7 sind 2 Ebenen entweder parallel oder sie schneiden sich in einer Geraden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In letzterem Falle bilden sie einen Winkel mit einander, welchen man den Neigungswinkel nennt.

Man construirt diesen Neigungswinkel, indem man in einem beliebigen Punkte auf ihrer Durchschnittskante in jeder Ebene eine Senkrechte errichtet. Der von diesen beiden Senkrechten eingeschlossene Winkel giebt die Grösse des Neigungswinkels an.

2. 3 Ebenen können folgende Lage haben:

a) alle 3 sind parallel;

b) 2 sind parallel und werden von der dritten geschnitten; dies ist der Fall bei den beiden Grundflächen des Prismas und je einer Seitenfläche;

c) alle 3 schneiden sich in derselben Geraden;

d) je 2 schneiden sich in einer Geraden, alle 3 in einem Punkte.

3. In letzterem Falle, d. h. wenn alle 3 Ebenen nur einen Punkt gemeinsam haben, bilden sie eine dreiseitige körperliche Ecke.

Man kann sich diese auch entstanden denken, indem man 3 nicht in 1 Ebene liegende Gerade (Strahlen) von 1 Punkte im Raum ausgehen lässt und durch je 2 derselben 1 Ebene legt.

Auf dieselbe Weise bilden 4 Ebenen eine vierseitige, n Ebenen eine n-seitige körperliche Ecke.

Der gemeinsame Schnittpunkt der Ebenen, d. h. der Ausgangspunkt der Strahlen, heisst der Scheitel, die Geraden die Kanten, die von 2 auf einander folgenden Kanten eingeschlossenen Winkel die Seiten und die Neigungswinkel der Ebenen die Winkel der Ecke.

Sowie durch 2 von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen ausgehende Gerade 2 Winkel gebildet werden, ein concaver und ein convexer, so werden auch durch die sich schneidenden Ebenen 2 Ecken gebildet, 1 concave und 1 convexe. Wenn in Folgendem von einer Ecke die Rede ist, so ist darunter die convexe Ecke verstanden, d. h. diejenige, in welcher alle Seiten und alle Winkel weniger als 2 R betragen.

Lehrsatz. In jeder Ecke beträgt die Summe aller Seiten weniger als 4 R.

Nach der Erklärung wird die Seite durch den Winkel am Scheitel bestimmt. Betrüge die Summe aller dieser Winkel 4 R, so

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

müssten sämtliche Seiten eine Ebene bilden, denn die Summe aller Winkel einer Ebene um 1 Punkt herum ist = 4 R.

Darnach wären die Winkel der Ecke, d. h. die Neigungswinkel der Ebenen = 2 R, was nach der Erklärung unmöglich ist, da sie weniger als 2 R betragen müssen.

Wäre die Summe der Winkel > 4 R, so betrügen die Winkel der Ecke mehr als 2 R, was gleichfalls bei der convexen Ecke unmöglich ist.

Mithin kann die Summe aller Winkel der Ecke nur < 4 R sein.

§ 39.

1. Erkl. Die Gerade, welche die Mitten der beiden Grundflächen eines Prismas verbindet, heisst seine Achse.

2. Erkl. Der Querschnitt oder Normalschnitt eines Prismas ist die Schnittfigur, welche durch eine beliebige den Grundflächen parallele Ebene ausgeschnitten wird. (Fig. 4).

3. Erkl. Jede Ebene, welche durch 2 nicht auf einander folgende Seitenkanten eines Prismas gelegt ist, heisst Diagonal-Ebene. (Fig. 5).

4. Jedes beliebige Prisma lässt sich durch Diagonalebenen in lauter dreiseitige Prismen zerlegen. (Fig. 5).

5. Erkl. Die Diagonale jeder Diagonalebene ist auch eine Diagonale des Prismas.

6. Erkl. Der Mantel des Prismas ist die Summe der Flächeninhalte sämtlicher Seitenflächen.

7. Erkl. Die Oberfläche des Prismas ist die Summe des Mantels und der beiden Grundflächen.

8. Erkl. Unter dem Umfang des Prismas versteht man die Summe der Seiten der Grundfläche.

9. Lehrsatz Jeder Querschnitt eines Prismas ist der Grundfläche congruent.

Beweis. Zerlegt man das Prisma durch Diagonalebenen in dreiseitige Prismen, so sind je zwei dadurch auf der Grundfläche

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und dem Querschnitt gebildete Dreiecke wegen Gleichheit aller 3 Seiten congruent.

10. **Lehrsatz.** Der Mantel des Prismas ist gleich dem Umfang mal der Höhe desselben.

Vorauss. H die Höhe des Prismas, U die Summe der Grundseiten, M der Mantel.

Behauptung. $M = UH$.

Beweis. Der Mantel des Prismas ist gleich der Summe der Seitenflächen, diese letzteren aber sind Parallelogramme. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich Grundlinie mal Höhe, also der Mantel gleich der Summe der Grundseiten des Prismas mal der Höhe.

Formel 1) $\mathbf{M = UH}$.

11. **Lehrsatz.** Die Oberfläche des Prismas ist gleich der Summe aus dem Mantel und den beiden Grundflächen.

Vorauss. M = Mantel, G = Grundfläche, O = Oberfläche.

Beh. $O = M + 2\,G$.

Bew. Nach Erkl. 7 ist die Oberfläche gleich der Summe des Mantels und der beiden Grundflächen, also

Formel 2) $\mathbf{O = M + 2\,G}$.

§ 40.

Erkl. Als Mass für den Kubikinhalt oder das Volumen eines Körpers wird derjenige Würfel angesehen, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist.

Rechnet man nach Centimetern, so ist also das Mass ein Kubikcentimeter, **ccm** oder $\mathbf{cm^3}$; rechnet man nach Metern, so ist das Mass ein Kubikmeter, **cbm** oder $\mathbf{m^3}$, u. s. w.

Will man den Kubikinhalt oder das Volumen eines Körpers berechnen, so hat man also zu untersuchen, wie oft der Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, in ihm enthalten ist.

(Vergleiche Flächeninhalt einer ebenen Figur und Quadrat.)

Lehrsatz. Der Kubikinhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich dem Produkt dreier anstossender Kanten. (Fig. 6.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorauss. Die Grundkanten des rechtwinkligen Parallelepipedons seien **a** und **b**, die Seitenkante (Höhe) **c**; Kubikinhalt = V.

Beh. V = **abc.**

Beweis. Das Rechteck aus **a** und **b** (die Grundfläche) enthält **ab** Quadrate; teilt man diese durch Parallelen ab und legt durch je 2 entsprechende Ebenen, teilt ebenso die Höhe in c Längeneinheiten und legt durch jede zur Grundfläche parallele Ebenen, so erhält man **c** je 1 Längeneinheit starke Platten, von denen jede aus **ab** Würfeln besteht. Alle **c** Platten zusammen enthalten also **abc** Würfel. deren Kante die Längeneinheit ist. Mithin

Formel 3) V = **abc.**

Bemerkung. Bei dem vorstehenden Beweise ist angenommen, dass die Kanten **a**, **b** und **c** ein gemeinschaftliches Mass besitzen (commensurabel sind.) Auf den Fall der Incommensurabilität wird hier nicht eingegangen werden.

§ 41.

Cavalierischer Grundsatz.*)

Zwei Körper, welche zwischen 2 parallelen Ebenen liegen, und welche von einer beliebigen, den ersteren parallelen Ebene geschnitten inhaltsgleiche Querschnitte geben, haben gleichen Kubikinhalt.

Lehrsatz. Jedes schiefwinklige Parallelepipedon lässt sich in ein rechtwinkliges verwandeln, welches mit ihm inhaltsgleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat.

Bew. Verwandelt man das schiefwinklige Parallelogramm, welches die Grundfläche bildet, in ein Rechteck und errichtet über diesem ein senkrechtes Prisma von gleicher Höhe, so schneidet jede zu den Grundflächen der beiden Prismen parallele Ebene gleiche Querschnitte aus, folglich haben nach dem Cavalieri'schen Grundsatze beide Prismen gleiches Volumen.

---

*) Cavalieri, italienischer Mathematiker, Schüler des Galilei, gest. 1647 zu Bologna. Seine „Geometria" erschien 1635.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. **Lehrsatz.** Der Kubikinhalt des Prismas ist gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe.

Voraussetzung. G = Grundfläche, H = Höhe.

Beh. V = GH.

Bew. Jedes beliebige n-seitige Polygon kann man in ein inhaltgleiches Rechteck verwandeln. Verwandelt man also die Grundfläche des gegebenen Prismas in ein solches, errichtet über demselben ein Parallelepipedon von gleicher Höhe, so ist nach dem Cavalierischen Grundsatze dies gleich dem gegebenen Prisma und nach § 40 = GH, also auch das Prisma = GH.

Formel 4) V = **GH.**

4. **Lehrs.** Das Volumen eines Würfels mit der Kante **a** ist = $\mathbf{a}^3$.

Beweis folgt aus dem Vorhergehenden.

5. **Lehrs.** Das Quadrat der Diagonale eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich der Summe der Quadrate dreier anstossender Kanten.

Vorauss. Es seien die Grundkanten **a** und **b**, die Seitenkante **c**, die Diagonale **d**.

Beh. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$,

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Bew. Sei **e** die Gerade, in welcher die Grundfläche von der Diagonalebene geschnitten wird, so ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze

$$e^2 = a^2 + b^2.$$

Nach demselben Satze ist aber auch in der Diagonalebene

$$d^2 = e^2 + c^2;$$

setzen wir in diese Formel den Wert für **e** ein, so folgt

F. 5) $\mathbf{d}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2$.

6. **Erklärung.** Jede Diagonalebene teilt das Parallelepipedon in zwei congruente dreiseitige Prismen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 42

Die Pyramide.

Schneidet man eine n-seitige Ecke durch eine Ebene so, dass sie alle Kanten der Ecke trifft, so bildet der abgeschnittene Körper eine n-seitige Pyramide.

Daraus folgt die

Erklärung: Eine Pyramide ist ein Körper, der von einem ebenen Polygon als Grundfläche und soviel Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird, wie das Polygon Seiten hat.

Der Scheitel der Ecke heisst die Spitze der Pyramide; die von der Spitze auf die Grundfläche gefällte Senkrechte ihre Höhe.

Liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche, so heisst die Pyramide eine gerade, andernfalls ist sie eine schiefe.

Grund- und Seitenflächen, Grund- und Seitenkanten, Mantel und Oberfläche wie beim Prisma.

Eine dreiseitige Pyramide heisst ein Tetraeder; bei ihr kann jede Fläche Grundfläche sein.

Das von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzte Tetraeder heisst ein reguläres Tetraeder.

Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so heisst der zwischen diesen beiden Ebenen liegende untere Teil Pyramidenstumpf, der obere Teil die Ergänzungs-Pyramide. Die Senkrechte zwischen den beiden Ebenen ist die Höhe des Pyramidenstumpfes. Die beiden Grundflächen sind ähnliche Figuren, die ganze Pyramide und die Ergänzungspyramide ähnliche Körper.

§ 43.

Aus dem Cavalierischen Grundsatze folgt der

Lehrsatz 1. Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen.

---

2. Lehrsatz. Eine Pyramide ist der dritte Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorauss. Gegeben das Prisma ABCDEF und die Pyramide D(ABC).

Beh. $D(ABC) = \frac{1}{3}$ ABCDEF.

Bew. (Fig. 7.) Zieht man in dem gegebenen Prisma die beiden Diagonaldreiecke ACD und ADE, so wird es in die drei Pyramiden A(BCD), A(CDE) und A(DEF) zerlegt. Es ist $\triangle BCD = \triangle CDE$, also haben die beiden ersten Pyramiden gleiche Grundflächen und Höhen, mithin nach Lehrs. 1 gleiches Volumen. Ebenso ist $\triangle ACE = \triangle AEF$, mithin

$$D(AEF) = D(ACE) = A(CDE), \text{ letztere identisch,}$$
$$A(BCD) = A(CDE),$$
$$\text{mithin } A(BCD) = D(AEF).$$

Es sind demnach alle 3 Pyramiden gleich, folglich jede das dritte Teil des gegebenen Prismas.

Hieraus folgt die Formel:

$$6)\ \textbf{Pyramide} = \frac{1}{3}\ \textbf{GH},$$

wenn G die Grundfläche, H die Höhe der Pyramide bezeichnet, da man jede Grundfläche in ein inhaltsgleiches Dreieck verwandeln kann.

§ 44.

1. **Hilfssatz.** In jeder Proportion ist das Produkt der äusseren Glieder gleich dem Produkt der inneren.

Vorauss. $a : b = c : d$.

Beh. $ad = bc$.

Bew. Schreibt man die Proportion in der Form ihrer Werte

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und multipliciert auf beiden Seiten mit bd, so folgt

$$\frac{abd}{b} = \frac{cbd}{d}, \text{ d. i. } ad = bc.$$

2. **Hilfssatz.** In jeder Proportion kann man die einzelnen Glieder quadrieren.

Vorauss. $a : b = c : d$.

Beh. $a^2 : b^2 = c^2 : d^2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bew. Die Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mit

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ multipliciert}$$

giebt $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$, d. i.

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2.$$

3. **Hilfssatz.** Man kann 2 Proportionen Glied für Glied mit einander multiplicieren.

V. $a : b = c : d$
$a_1 : b_1 = c_1 : d_1$.

Beh. $aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1$.

Bew. Multipliciert man die Gleichungen

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ und } \frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}$$

miteinander, so erhält man

$$\frac{aa_1}{bb_1} = \frac{cc_1}{dd_1}, \text{ d. i. } aa_1 : bb_1 = cc_1 : dd_1.$$

4. **Hilfssatz.** In 2 ähnlichen Dreiecken verhalten sich 2 Seiten wie ihre zugehörigen Höhen.

Beh. $a : a_1 = h : h_1$.

Lehrsatz. In ähnlichen Pyramiden verhalten sich die Grundflächen wie die Quadrate ihrer Höhen.

Vorauss. Gegeben die Pyramiden $\frac{GH}{3}$ und $\frac{gh}{3}$.

Beh. $G : g = H^2 : h^2$.

Bew. (Fig. 8.) Seien a b c resp. a_1 b_1 c_1 die Grundflächen der ähnlichen Pyramiden, S und s 2 homologe, den Grundkanten a und a_1 anliegende Seitenkanten, H und h die betr. Höhen, x und x_1 die Höhen zu a und a_1, dann verhält sich

$$a : a_1 = S : s,$$
$$S : s = H : h$$

also $a : a_1 = H : h$,

$$a^2 : a_1^2 = H^2 : h^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach Hilfssatz 4 ist, da die Grundflächen ähnlich sind,

$$a : a_1 = x : x_1,$$

multipliciert mit $a : a_1 = a : a_1$

giebt $a^2 : a_1^2 = ax : ax_1 = H^2 : h^2$.

Nun sind die Grundflächen $G = \frac{ax}{2}$, $g = \frac{a_1 x_1}{2}$,

also $G : g = ax : a_1 x_1$, d. i. nach obigem

$$G . g = H^2 : h^2.$$

§ 45.

Lehrsatz. Der Inhalt des Pyramidenstumpfes, dessen Grundflächen G und g und dessen Höhe H ist, ist =

$$\frac{H}{3}(G + \sqrt{Gg} + g).$$

Bew. Sei x die unbekannte Höhe der Ergänzungspyramide, also H + x die Gesamthöhe des zur vollständigen Pyramide ergänzten Stumpfes, so sind beide Pyramiden ähnlich und folglich nach vor. Lehrs.

$$G : g = (H + x)^2 : x^2,$$

$$\sqrt{G} : \sqrt{g} = (H + x) : x$$

und $(\sqrt{G} - \sqrt{g}) : \sqrt{g} = H : x$,

also $x = \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$.

Nun ist der Pyramidenstumpf gleich der ganzen Pyramide minus der Ergänzungspyramide, d. i.

$$\frac{1}{3}G(H + x) - \frac{1}{3}gx = \frac{1}{3}\left[GH + x(G - g)\right].$$

In diese Formel der Wert für x eingesetzt giebt

$$7)\ Py = \frac{1}{3}\left[GH + \frac{H\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}(G - g)\right] = \frac{1}{3}H\left[G + \sqrt{Gg} + g\right],$$

da $\frac{G - g}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} = \sqrt{G} + \sqrt{g}$

und $\sqrt{G} . \sqrt{G} = G$,

$\sqrt{g} . \sqrt{g} = g$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 46.

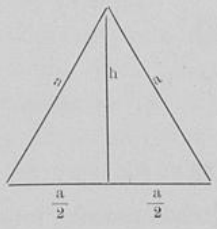
Aufgabe. Den Mantel und die Oberfläche eines regulären Tetraeders mit der Kante a zu berechnen.

Auflösung. Nach der Erklärung sind alle Flächen des regulären Tetraeders gleichseitige Dreiecke.

Den Mantel bilden 3 dieser Dreiecke, die Oberfläche alle 4. Sie sind sämtlich congruent, da sie 3 Seiten gleich haben.

Der Inhalt eines dieser Dreiecke ist $= \frac{ah}{2}$, worin h unbekannt ist. Nun ist

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2,$$



$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \text{ mithin}$$

$$\triangle = \frac{ah}{2} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Der Mantel ist $= 3\triangle = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$,

die Oberfläche $= 4\triangle = a^2\sqrt{3}$.

---

§ 47.

Der Cylinder oder die Walze.

Erkl. Lässt man an 2 gleichen und parallelen Kreisen sich eine Gerade gleichmässig bewegen, so beschreibt sie einen Cylinder.

Die beiden Kreise sind die Grundflächen, ihr senkrechter Abstand die Höhe, die Verbindungslinie der Mittelpunkte der Kreise die Achse und die von der Geraden erzeugte krumme Fläche der Mantel und die erzeugende Gerade die Seite des Cylinders.

Der Cylinder heisst ein gerader, wenn die Achse senkrecht auf beiden Kreisen steht.

Ein gerader Cylinder entsteht, wenn ein Rechteck sich um 1 Seite im Kreise dreht.

Legt man durch die Achse des geraden Cylinders eine Ebene, so ist demnach die Schnittfigur ein Rechteck.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jede zur Grundfläche parallele Ebene schneidet aus dem Cylinder einen Kreis aus.

§ 48.

Aufgabe. Den Mantel des geraden Cylinders zu berechnen.

Auflös. Denkt man sich den Mantel des Cylinders abgewickelt und in eine Ebene gelegt, so bildet er nach der vorstehenden Erklärung ein Rechteck, dessen Grundlinie die Peripherie des Grundkreises und dessen Höhe = der Höhe des Cylinders ist. Nun ist der Kreisumfang = $2r\pi$, wenn r der Radius des Grundkreises ist; h = Höhe des Cylinders, also

8) Mantel des Cylinders = $2r\pi h$.

§ 49.

Aufg. Den Inhalt des geraden Cylinders zu berechnen.

Auflösung Man kann den Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten. Die Grundfläche ist = $r^2\pi$, die Höhe h, also

9) Volumen des Cylinders = $r^2\pi h$.

§ 50.

Der Kegel (Conus).

1. **Erkl.** Lässt man durch einen Punkt im Raum eine Gerade sich längs der Peripherie eines Kreises bewegen, so beschreibt sie einen Kegel. Der betreffende Punkt heisst die Spitze des Kegels.

Liegt die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Grundkreises, so ist der Kegel ein gerader.

Seite, Höhe, Achse wie beim Cylinder.

Die Achse des geraden Kegels steht demnach senkrecht auf dem Grundkreise.

2. **Erkl.** Schneidet man einen Kegel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so heisst der untere abgeschnittene Körper Kegelstumpf, der obere Ergänzungskegel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. **Erkl.** Legt man durch die Achse des geraden Kegels eine Ebene, so schneidet diese ein gleichschenkliges Dreieck aus, dessen Grundlinie = dem Durchmesser des Kreises und dessen Seiten = der Seite des Kegels sind.

§ 51.

Aufgabe. Den Mantel eines geraden Kegels zu berechnen.

Auflösung. Da die Spitze des geraden Kegels von allen Punkten der Peripherie des Grundkreises gleiche Entfernung hat, nämlich = der Seite s, so bildet der in die Ebene abgerollte Mantel einen Kreissektor, dessen Bogen gleich der Peripherie des Grundkreises, also $= 2r\pi$ ist.

Zerlegt man diesen Bogen in unendliche kleine gleiche Teile δ und zieht nach jedem Teilpunkt den Radius, so erhält man unendlich viele gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinie δ und deren Höhe s ist, da wegen der Kleinheit der Grundlinie die Seite = der Höhe gesetzt werden kann. Der Inhalt eines solchen Teildreiecks ist also $= \frac{\delta s}{2}$, und die Summe aller derselben

$$M = \frac{\delta s}{2} + \frac{\delta s}{2} + \frac{\delta s}{2} + \ldots = \frac{s}{2}(\delta + \delta + \delta + \ldots)$$

Die Summe aller δ ist nun gleich dem Bogen des Kreissektors $2r\pi$, also

$$M = \frac{s}{2} \cdot 2r\pi = sr\pi.$$

Der Mantel des geraden Kegels ist demnach

10) $\mathbf{r\ \pi\ s.}$

§ 52.

Aufgabe. Den Inhalt eines geraden Kegels zu berechnen.

Auflösung. Den Kegel kann man als Pyramide mit unendlich vielen unendlich kleinen Seiten betrachten. Da die Grundfläche = $r^2\pi$ ist, so ist nach § 43 der

11) Inhalt des Kegels $= \frac{r^2\pi h}{3}$.

Der Kegel ist demnach der dritte Teil eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 53.

Aufg. Den Inhalt eines geraden Kegelstumpfes zu berechnen, dessen Höhe **h**, Radius des unteren Grundkreises **r**, des oberen ϱ ist.

Auflösung. Der Inhalt des Kegelstumpfs ist gleich dem Inhalt des ganzen Kegels minus dem des Ergänzungskegels. Sei die unbekannte Höhe des Ergänzungskegels $= x$, die Höhe des ganzen Kegels also $= h + x$, so ist der ganze Kegel nach § 52 $= \frac{r^2\pi(h+x)}{3}$, der Ergänzungskegel $= \frac{\varrho^2\pi x}{3}$, mithin der Kegelstumpf $= \frac{r^2\pi(h+x)}{3} - \frac{\varrho^2\pi x}{3}$

$$12) \quad = \frac{\pi}{3}\left\{r^2h + (r^2-\varrho^2)x\right\}.$$

Wie bei ähnlichen Pyramiden verhalten sich auch bei ähnlichen Kegeln, also bei allen geraden Kegeln, die Grundflächen wie die Quadrate der Höhen:

$$r^2\pi : \varrho^2\pi = (h + x)^2 : x^2,$$

d. i. $r : \varrho = (h + x) : x,$

also $(r - \varrho) : \varrho = h : x,$

$$x = \frac{\varrho\, h}{r-\varrho}.$$

Dieser Wert von x in die Formel 12 eingesetzt giebt

$$\frac{\pi}{3}\left\{r^2h + \frac{(r^2-\varrho^2)\,\varrho\, h}{r-\varrho}\right\} = \frac{\pi}{3}\left\{r^2h + (r+\varrho)\varrho\, h\right\}, \text{ also}$$

$$13) \quad \text{Kegelstumpf} = \frac{h\pi}{3}\left\{r^2 + r\varrho + \varrho^2\right\}.$$

§ 54.

Aufgabe. Den Mantel eines geraden Kegelstumpfes zu berechnen.

Auflösung. Der Mantel des geraden Kegelstumpfes ist ein Ringsector, nämlich = dem Mantel des ganzen Kegels minus dem Mantel des Ergänzungskegels. Sei die Seite des Kegelstumpfes $= s$, die Seite des Ergänzungskegels $= z$, so ist also die Seite des ganzen Kegels $= s + z$, und demnach der Mantel des Kegelstumpfs

$$14) \quad = r\pi(s + z) - \varrho\pi z = \pi\left\{rs + (r-\varrho)z\right\}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Legt man durch die Achse des geraden Kegels eine Ebene, so ergiebt sich aus den entstehenden ähnlichen Dreiecken

$$r : \varrho = (s + z) : z,$$

$$\text{also} \quad r - \varrho : \varrho = s : z,$$

$$z = \frac{\varrho s}{r - \varrho}.$$

Dies in Formel 14 eingesetzt giebt

$$\pi \left\{ rs + \varrho s \right\} = \pi s (r + \varrho).$$

Demnach ist der

15) Mantel des geraden Kegelstumpfes $= \pi s (r + \varrho)$.

§ 55

Die Kugel.

Lässt man einen Halbkreis sich um seinen Durchmesser als feste Axe im Kreise bewegen, so entsteht eine Kugel.

Erkl. Die Kugel ist ein Körper, bei dem sämtliche Punkte der Oberfläche von einem Punkte, dem Mittelpunkte, gleich weit entfernt sind.

Durchmesser, Radius oder Halbmesser wie beim Kreise.

1. **Lehrs.** Alle Radien einer Kugel sind einander gleich mithin auch alle Durchmesser.

Beweis folgt aus der Erkl.

2. **Lehrs.** Jede Ebene schneidet die Kugel in einem Kreise. Die vom Mittelpunkte der Kugel auf diesen Kreis gefällte Senkrechte trifft den Mittelpunkt desselben. (Fig. 9.)

Bew. Sei K der Mittelpunkt des Kreises, M der Fusspunkt der auf die Ebene von K ausgefüllten Senkrechten, A und B 2 Schnittpunkte der Kugel mit der Ebene, so ist

$$\triangle KMA \cong KMB,$$

$$\text{da} \quad KA = KB,$$

$$KM = KM \text{ und}$$

$$\angle KMA = \angle KMB = R,$$

also $MA = MB$, d. h. M der Mittelpunkt des Kreises. Dieser Kreis heisst Kugelkreis.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Erkl. Eine Ebene, welche die Kugel nur in 1 Punkte trifft, im übrigen ganz ausserhalb der Kugel liegt, heisst Tangentialebene, ihr Berührungspunkt Tangentialpunkt oder Berührungspunkt.

3. **Lehrs.** Der Kugelradius nach dem Berührungspunkte der Tangentialebene steht senkrecht auf derselben.

Bew. Der Radius nach dem Berührungspunkte ist die kürzeste Gerade, die vom Mittelpunkte der Kugel nach der Tangentialebene gezogen werden kann, also die Senkrechte.

§ 56.

Lehrs. Von 2 Kugelkreisen ist derjenige der grössere, welcher dem Mittelpunkt näher ist.

Vorauss. Seien s_1 und s_2 die Senkrechten vom Mittelpunkt K auf die Kugelkreise und $s_1 < s_2$, A_1 und A_2 je ein Punkt der beiden Kreise, M_1 und M_2 ihre Mittelpunkte.

Bew. $KA_1 = KA_2 = r$, also $M_1 A_1 = \sqrt{r^2 - s_1^2}$, $M_2 A_2 = \sqrt{r_2 - s_2^2}$. Da nun $s_1 < s_2$, also auch $s_1^2 < s_2^2$, so ist $M_1 A_1 > M_2 A_2$.

Erkl. Jeder Kugelkreis, der durch den Mittelpunkt geht, ist ein grösster, jeder andere ein kleiner.

Das durch einen Kugelkreis von einer Kugel abgeschnittene Kugelstück heisst Kugelsegment oder Kugelabschnitt, seine Oberfläche Kalotte.

Zwei parallele Kugelkreise schneiden eine körperliche Kugelzone oder Kugelschicht aus; deren Oberfläche heisst Kugelzone.

Ein Kugelsektor wird von einem Kegel, dessen Spitze im Kugelmittelpunkt liegt, und von dem dazu gehörigen Kugelsegment gebildet.

Parallele Ebenen schneiden aus der Kugel Parallelkreise aus; die vom Mittelpunkte auf diese gefüllte Senkrechte heisst die Achse der Kugel, sie schneidet die Oberfläche in den beiden Polen.

Grösste Kugelkreise, deren Durchmesser die Achse ist, heissen Meridiankreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 57.

Errichtet man über dem grössten Kugelkreise einer Halbkugel als Grundfläche einen geraden Cylinder von gleicher Höhe, so nennt man den über die Halbkugel vorragenden Teil des Cylinders den Restkörper.

Jede zur Grundfläche parallele Ebene schneidet aus dem Restkörper einen Kreisring aus.

Lehrs. Der Restkörper ist gleich dem Inhalt des über der Grundfläche errichteten geraden Kegels.

Bew. (Fig. 10.) Sei K der Mittelpunkt der Grundfläche, KC die Achse, und A und B Schnittpunkte der Meridianebene und des Cylinders, so ist

$$KA = AB = BC = CK = r, \text{ und da } CK \perp KA \text{ ist,}$$

KABC ein Quadrat, dessen Winkel durch die Diagonale KB halbiert werden. Schneiden wir Cylinder und Kugel durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, welche die genannten Geraden in E, D, F und G trifft, so ist der aus dem Restkörper ausgeschnittene Kreisring

$$= (EG^2 - EF^2)\,\pi = EK^2 \,.\, \pi,$$

$$\text{denn } EG^2 = r^2, \qquad EF^2 = r^2 - EK^2;$$

$$\text{die ausgeschnittene Kegelgrundfläche} = ED^2 \,.\, \pi.$$

Nun ist aber ED = EK, also

$$EK^2 . \pi = ED^2 . \pi,$$

d. h. die zur Grundfläche parallele Ebene schneidet aus Restkörper und Kegel gleiche Flächen aus, folglich sind die beiden Körper nach dem Cavalierischen Grundsatze einander gleich.

Der Inhalt des Kegels ist $\frac{1}{3} r^3\pi$, also auch der des Restkörpers.

§ 58.

Aufgabe. Den Inhalt der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vor. § ist der Inhalt der Halbkugel = dem Inhalt des geraden Cylinders über deren Grundfläche und mit der Höhe r minus dem Inhalt des Restkörpers, d. i.

$$\tfrac{1}{2}\,\text{Kugel} = r^3\pi - \frac{1}{3}\, r^3\pi = \frac{2}{3}\, r^3\pi.$$

Es ist mithin der Inhalt der ganzen Kugel

$$\text{(F. 16.)} \quad = \frac{4}{3}\, r^3\pi.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 59.

Aufgabe. Den Quadratinhalt der Oberfläche der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Wir denken uns die Kugeloberfläche in unendlich viele unendlich kleine Dreiecke δ und die Kugel in ebensoviel Pyramiden geteilt, deren Grundfläche δ ist und deren Spitze im Mittelpunkt liegt. Dann ist eine solche Pyramide $= \frac{1}{3}\,\delta r$, und die Summe aller, d. i. die Kugel $= \frac{r}{3}\,(\delta + \delta + \delta + \ldots) = \frac{r}{3}\,O$,

wo O die Oberfläche der Kugel bezeichnet.

Folglich ist nach vor. §

$$\frac{r}{3}\,O = \frac{4}{3}\,r^3\pi,$$

(F. 17.) also $\mathbf{O} = \mathbf{4\,r^2\,\pi}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Der … he der Kugel zu berechnen.

Auflösung. W… he in unendlich viele unendlich k… l in ebensoviel Pyramiden geteilt… deren Spitze im Mittelpunkt liegt. … $= \frac{1}{3}\,\delta r$, und die Summe aller, d. i. … O, wo O die Oberfläc… Folglich ist …

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf