Das mathematische Lehrpensum

der

Unter-Sekunda.

I. Teil.

Vom

Prof. Dr. F. Katter.

Beilage zum Jahresbericht des Kgl. Pädagogiums zu Putbus für 1896/97.

1897. Progr.-No. 145.

Druck von Aug. Dose in Putbus.
1897.

Opu
1 (1897)

1456

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Arithmetik.

A. Repetition.

§ 1.

Multiplication.

Man multipliciert ein Polynom mit einer Zahl, indem man jedes Glied einzeln mit ihr multipliciert.

Beispiel. $(2a - 3b + 5c) \,.\, 6x = 12ax - 18bx + 30cx.$

Man multipliciert ein Polynom mit einem Polynom, indem man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen multipliciert.

Beispiel. $(2a + 4b - 7c)\,(2a - 4b + 7c)$

$$= \left\{ \begin{array}{llll} 4a^2 + 8ab - 14ac & & & \\ \quad - 8ab & - 16b^2 & + 28bc & \\ \qquad\quad + 14ac & & + 28bc & - 49c^2 \end{array} \right.$$

$$= 4a^2 \qquad - 16b^2 + 56bc - 49c^2.$$

Man multipliciert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man seinen Zähler mit ihr multipliciert.

Beispiel. $\frac{a}{b} \cdot x = \frac{ax}{b}, \qquad \frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{15}{4} = 3^3/_4.$

Man multipliciert Brüche mit einander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert.

Beispiel. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2\,.\,3}{3\,.\,4} = \frac{1}{2}.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2.
Division.

Man dividiert ein Polynom durch eine Zahl, indem man jedes Glied einzeln durch sie dividiert.

Beispiel.
$$(ax + by - cz) : 2u = \frac{ax}{2u} + \frac{by}{2u} - \frac{cz}{2u}.$$
$$(12x - 20y + 28z) : 4 = 3x - 5y + 7z.$$

Man dividiert ein Produkt, indem man einen Factor desselben dividiert.

Beispiele.
$$14ax : 7 = 2ax.$$
$$20ab : a = 20b.$$

Man dividiert durch einen Bruch, indem man ihn umkehrt und dann mit ihm multipliciert.

Beispiel.
$$a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$
$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man seinen Nenner mit ihr multipliciert.

Beispiel. $\frac{a}{b} : x = \frac{a}{bx}$; $\quad \frac{3}{4} : 5 = \frac{3}{20}$.

Man dividiert ein Polynom durch ein Polynom, indem man mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Dividenden dividiert, mit dem daraus hervorgehenden Quotienten den ganzen Divisor multipliciert und das Produkt vom Dividenden subtrahiert. Darauf dividiert man wiederum mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Restes, multipliciert mit dem Quotienten den Divisor und subtrahirt das Produkt vom Rest, u. s. f.

Beispiel.

$$(12x^2 - 51xy - 24xz + 54y^2 + 48yz) : (4x - 9y - 8z) = 3x - 6y$$
$$\underline{\mp 12x^2 \pm 27xy \pm 24xz}$$
$$\begin{array}{ll} -24xy & +54y^2 + 48yz \\ \underline{\pm 24xy} & \underline{\mp 54y^2 \mp 48yz.} \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zusatz. Man subtrahiert eine Zahl oder ein Polynom, indem man im Subtrahenden die Vorzeichen umkehrt und dann denselben addiert.

B. Potenzen.

§ 3.

Eine Potenz ist ein Produkt von lauter gleichen Faktoren: aaaaa.

Man schreibt sie in vereinfachter Form, indem man den Faktor einmal setzt und die Zahl der gleichen Faktoren oben angiebt:

$$aaaaa = a^5,$$

und liest dies, a hoch 5 oder a zur fünften (Potenz).

Dabei nennt man a die Basis der Potenz, 5 den Exponenten. a^2 liest man a-Quadrat, a^3 entweder a-Kubus oder a zur dritten.

Eine Potenz heisst gerade oder ungerade, je nachdem ihr Exponent gerade oder ungerade ist.

§ 4.

1. **Lehrsatz.** Man multipliciert Potenzen von gleicher Basis, indem man ihre Exponenten addiert.

Beweis. $a^3 \,.\, a^4 = aaa \,.\, aaaa = a^7.$

$$a^m \,.\, a^n = aaaa \,.\,.\,.\,.\, (^{m\ mal}) \,.\, aaaa \,.\,.\,.\,.\, (^{n\ mal}) = a^{m+n}.$$

2. **Lehrsatz.** Man dividiert Potenzen von gleicher Basis, indem man den Exponenten des Divisors von dem des Dividenden subtrahiert.

Beweis. $$a^7 : a^4 = \frac{aaaaaaa}{aaaa} = a^{7-4} = a^3.$$

$$a^m : a^n = \frac{aaaa \,.\,.\,.\, (^{m\ mal})}{aaa \,.\,.\,.\, (^{n\ mal})} = a^{m-n}.$$

Zusatz. Ist $n > m$, so heben sich sämmtliche a des Zählers gegen m des Nenners auf, und es bleiben nur eine Anzahl Faktoren $(n - m)$ im Nenner.

$$a^2 : a^5 = \frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa} = \frac{1}{a^3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach Lehrsatz 2 ist $a^2 : a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$,

also ist $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

Darnach ist $a^{-m} \cdot b^{-n} \cdot c^{-p} = \frac{1}{a^m\, b^n\, c^p}$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \qquad \frac{1}{a^{-m}} = a^m, \qquad \frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}.$$

3. **Lehrsatz.** Jede Potenz mit dem Exponenten Null ist gleich 1.

Beweis. $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$.

Nun ist aber $a^m : a^m = 1$, mithin $a^0 = 1$.

Ebenso $(a + b - x)^0 = 1$, u. s. w.

4. Alle Potenzen von Null sind Null.

$$0^m = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \ldots \text{ (m mal)} = 0.$$

5. Alle Potenzen von $+ 1$ sind 1.

$$1^m = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots = 1.$$

6. Die geraden Potenzen von $- 1$ sind $+ 1$, die ungeraden $- 1$.

$$(-1)^{2n} = +1; \quad (-1)^{2n+1} = -1.$$

Es ist $2n$ stets eine gerade Zahl, da jede mit 2 multiplicierte Zahl gerade ist; folglich sind sowohl $2n + 1$ wie $2n - 1$ ungerade Zahlen.

§ 5.

Kehrt man Lehrs. 1, § 4 um, so kann man Potenzen in Faktoren von gleicher Basis zerlegen, deren Summe der Exponenten gleich dem Exponenten der gegebenen Potenz ist.

$$a^{m+n+p} = a^m \cdot a^n \cdot a^p.$$

$$a^7 = a^2 \cdot a^5 = a^3\, a^4 = a^6 \cdot a.$$

$$a^{10} + a^7 - a^4 + a^3 = a^3\,(a^7 + a^4 - a + 1).$$

Desgleichen ist nach § 4 Lehrs. 2

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$$

$$a^3 = \frac{a^7}{a^4} = \frac{a^5}{a^2} = \frac{a^4}{a} = \ldots\ldots$$

$$a^4 + a^2 + 1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^4}\,(a^8 + a^6 + a^4 + a^2 + 1).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Formeln.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$

$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$

$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$

$(a - b + c - d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab + 2ac - 2ad - 2bc + 2bd - 2cd.$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^3).$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3).$

$a^4 + b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3).$

Zu beweisen:

Wenn $x + y = u$, $xy = v$, so ist

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v.$$
$$x^2 - y^2 = u^2 + 2v.$$
$$x^3 + y^3 = u^3 - 3uv.$$
$$x^3 - y^3 = u^3 + 3uv.$$
$$x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

§ 6.

7. **Lehrsatz.** Man potenziert ein Produkt, indem man jeden Faktor desselben potenziert.

$$(ab)^m = a^m b^m.$$

Beweis. Nach dem Satze: Man kann in beliebiger Reihenfolge multiplicieren, ist

$$(ab)^m = ab \,.\, ab \,.\, ab \ldots (^{m\ mal}) = aaaa \ldots (^{m\ mal}) \,.\, bbbb \ldots (^{m\ mal}) = a^m b^m.$$

Zusatz. Da $-a = (-1)a$ ist, so ist

$$(-a)^m = (-1)^m a^m.$$

Ist m gerade, so ist also $(-a)^m = a^m$,

m ungerade, $(-a)^m = -a^m$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. **Lehrsatz.** Man potenziert einen Bruch, indem man den Zähler und den Nenner desselben potenziert.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Beweis. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots (\text{m mal}) = \frac{a^m}{b^m},$

nach dem Satze: Man multipliciert Brüche mit einander, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert.

Zusatz. Nach Obigem und nach § 4, 5 ist demnach

$$\left(\frac{1}{b}\right)^m = \frac{1}{b^m}.$$

9. **Lehrsatz.** Man potenziert eine Potenz, indem man ihren Exponenten multipliciert.

$$(a^b)^c = a^{bc}; \quad (a^c)^b = a^{bc}.$$

Beweis. Nach der Erklärung der Potenz und nach Lehrs. 1 § 4 ist

$$(a^b)^c = a^b \cdot a^b \cdot a^b \cdot a^b \ldots (^{c\ \text{mal}}) = a^{bc},$$

$$\text{da } b + b + b + \ldots (^{c\ \text{mal}}) = bc.$$

Zusatz. Man kann in beliebiger Reihenfolge potenzieren.

$$(a^b)^c = (a^c)^b.$$

Kehrt man letzteren Satz um, so ist

$$a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b.$$

$$a^{10} = (a^2)^5 = (a^5)^2.$$

Desgleichen $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ umgekehrt giebt

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m; \qquad \frac{20^4}{5^4} = \left(\frac{20}{5}\right)^4 = 4^4 = 256.$$

Somit rechnet man:

$$\frac{25^3 \cdot 72^2}{9^3 \cdot 20^4} = \frac{(5 \cdot 5)^3 \cdot (9 \cdot 4 \cdot 2)^2}{9^3 \cdot (5 \cdot 4)^4} = \frac{5^3 \cdot 5^3 \cdot 9^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2}{9^3 \cdot 5^4 \cdot 4^4}$$

$$= \frac{5^2 \cdot 2^2}{9 \cdot 4^2} = \frac{25}{36}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C. Wurzeln.

§ 7.

Erklärung. Unter der n^{ten} Wurzel einer Zahl a versteht man die Zahl, welche mit n potenziert die gegebene Zahl a giebt.

$$\text{Wenn } \sqrt[n]{a} = x \text{ ist, so ist } x^n = a.$$

$$\sqrt[3]{125} = 5, \text{ weil } 5^3 = 125.$$

Man nennt dabei n den Wurzelexponenten, a den Radicandus und x die Wurzel (radix). Das Zeichen $\sqrt{}$ rührt von r (radix) her.

Die Rechnungsart, die Wurzel einer Zahl zu finden, nennt man radizieren.

Der Wurzelexponent wird über dem Wurzelzeichen geschrieben; den Wurzelexponenten 2 schreibt man indessen nicht.

Die zweite Wurzel heisst Quadratwurzel, die dritte Cubikwurzel.

§ 8.

Ausziehen der Quadratwurzel.

$$\text{Da } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \text{ so ist umgekehrt}$$

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b.$$

Hierauf beruht das Ausziehen der Quadratwurzeln.

Die Quadrate der Zahlen 1 bis 9 haben nie mehr als 2 Ziffern. Um die Quadratwurzel aus einer Zahl zu ziehen, theilen wir diese deshalb von rechts nach links in je 2 Stellen ab. Soviel solcher Stellen die Quadratzahl hat (links kann auch nur 1 Stelle übrig bleiben), soviel Ziffern hat die Quadratwurzel.

$$\begin{aligned} \text{Beispiel. } 36^2 &= (30 + 6)^2 = 30^2 + 2 \,.\, 30 \,.\, 6 + 6^2 \\ &= 900 + 360 + 36 \\ &= 1296. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist also

$$\sqrt{\overset{a^2}{900} + \overset{2ab}{360} + \overset{b^2}{36}} = \overset{a}{30} + \overset{b}{6} = 36.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In verkürzter Form

$$\begin{array}{rl} & \quad\;\; a\;\; b \\ \sqrt{12 \mid 96} = & 3\;\; 6 \\ a^2 = & 9 \\ \hline 2a = 6 & 39 \\ 2ab = & 36 \\ \hline & 36 \\ b^2 = & 36 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & \quad\;\; \overset{a_1}{\overbrace{a \quad b}} \quad b_1 \\ \sqrt{9 \mid 85 \mid 96} = & 3\;\; 1\;\; 4 \\ a^2 = & 9 \\ \hline 2a = 6 & 8 \\ 2ab = & 6 \\ \hline & 25 \\ b^2 = & 1 \\ \hline 2a_1 = 62 & 249 \\ & 248 \\ \hline & 16 \\ b^2_1 = & 16 \end{array}$$

Die Quadratwurzel aus einem Polynom wird gleichfalls nach der Formel $a^2 + 2ab + b^2$ gezogen.

Beispiel.

$$\begin{array}{lrl} & & \overset{a}{\overbrace{a \quad b}} \quad b \\ 2a = 2x & \sqrt{x^2 + 4xy + 6xz + 4y^2 + 12yz + 9z^2} = & x + 2y + 3z \\ b^2 = 4y^2 & x^2 + 4xy \qquad + 4y^2 & \\ \hline 2a = 2x + 4y & 6xz \qquad + 12yz + 9z^2 & \\ & 2ab + b^2 = \; 6xz \qquad + 12yz + 9z^2 & \\ \hline \end{array}$$

§ 9.

Wenn $\sqrt{a} = x$, so ist $x^2 = a$, es ist aber $x^2 = \sqrt{a}\,\sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^2$, also

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Wenn $\sqrt[3]{b} = y$, so ist $y^3 = b$, aber $y^3 = \sqrt[3]{b}\;\sqrt[3]{b}\;\sqrt[3]{b} = \left(\sqrt[3]{b}\right)^3$,

$$\text{also } \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = b.$$

Allgemein wenn $\sqrt[n]{c} = z$, so ist $z^n = c$,

$$z^n = \sqrt[n]{c}\;\sqrt[n]{c}\;\sqrt[n]{c}\;\ldots\ldots = \left(\sqrt[n]{c}\right)^n,$$

$$\text{also } \left(\sqrt[n]{c}\right)^n = c.$$

1. **Lehrsatz.** Potenzieren und Radizieren mit gleichen Exponenten heben einander auf.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. **Lehrsatz.** Anstatt ein Produkt zu radizieren, kann man die einzelnen Faktoren radizieren.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}.$$

Beweis. Nach vorigem Lehrsatz ist

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab;$$

$$\text{nach § 6, 7 ist } \left(\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab,$$

$$\text{mithin } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ .\ \sqrt[n]{b}.$$

Diesen Satz wendet man zur bequemeren Wurzelberechnung bei Zahlausdrücken an, z. B.:

$$\sqrt{1764} = \sqrt{4\ .\ 9\ .\ 49} = \sqrt{4}\ .\ \sqrt{9}\ .\ \sqrt{49} = 2\ .\ 3\ .\ 7 = 42,$$

$$\text{oder } \sqrt{12a^3\ b^4\ x^5} = \sqrt{4\ .\ 3\ .\ a^2\,a\ .\ b^4\ .\ x^4\ .\ x} = \sqrt{4\ .\ a^2\,b^4\,x^4}\ \sqrt{3ax}$$

$$= 2ab^2\ x^2\ \sqrt{3ax}.$$

---

3. **Lehrsatz.** Anstatt einen Quotienten zu radizieren, kann man den Dividenden und den Divisor radizieren.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Beweis. Nach § 9, 1 ist

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b}, \text{ nach § 6, 8 } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}.$$

$$\text{mithin } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Aus den Beweisen der beiden letzten Lehrsätze geht hervor, dass man dieselben auch umkehren kann. Sie heissen dann:

4. **Lehrsatz.** Anstatt jeden einzelnen Faktor mit demselben Exponenten zu radizieren, kann man ihr Produkt radizieren.

$$\sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}.$$

Zahlenbeispiel. $\sqrt{6}\ \sqrt{24} = \sqrt{144} = 12.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. **Lehrsatz.** Anstatt den Divisor und Dividenden einzeln mit demselben Exponenten zu radizieren, kann man ihren Quotienten radizieren.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Zahlenbeispiel. $\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{108}{3}} = \sqrt{36} = 6.$

Allgemeine Regel: Man kann unter demselben Wurzelzeichen multiplicieren und dividieren.

6. **Lehrsatz.** Man kann in beliebiger Reihenfolge potenzieren und radizieren.

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$$

Beweis. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} \,.\, \sqrt[m]{a} \,.\,.\,.\,.\,. = \sqrt[m]{a^n}$ nach § 9, 4.

Zahlenbeispiel. $\sqrt{64^3} = \left(\sqrt{64}\right)^3 = 8^3 = 512.$

7. **Lehrsatz.** Man kann in beliebiger Reihenfolge potenzieren.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}.$$

Beweis. Nach § 9, 1 ist $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m = \sqrt[n]{a},$

ebenso $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn}$, § 6, 9.

Desgleichen ist $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n = \sqrt[m]{a}$, und

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^m = a = \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m = \left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{mn},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{folglich } \sqrt[n]{\sqrt[u]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

Daraus folgt der Satz:

8. **Lehrsatz.** Anstatt durch ein Produkt zu radizieren, kann man durch seine Faktoren nacheinander radizieren.

Zahlenbeispiele.

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{81}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[3]{3}.$$

$$\sqrt[4]{36} = \sqrt{\sqrt{36}} = \sqrt{6}.$$

$$\sqrt[9]{8x^6} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8x^6}} = \sqrt[3]{2x^2}.$$

Nach diesem Satze zieht man die 4te Wurzel aus einer Zahl, indem man 2 mal die Quadratwurzel zieht: $\sqrt[4]{a} = \sqrt{\sqrt{a}}$; die 6te Wurzel, indem man nacheinander die 2te und 3te zieht: $\sqrt[6]{a} = \sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[3]{\sqrt{a}}$; die 8te, indem man 3 mal die Quadratwurzel zieht: $\sqrt[8]{a} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$; u.s.w.

9. **Lehrsatz.** Man kann den Wurzelexponenten und den Potenzexponenten mit derselben Zahl multiplicieren, ohne dass der Werth der Wurzel geändert wird.

$$\sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{mp}}.$$

Beweis. Nach § 9, 1 ist $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^p}}\right)^m = \sqrt[n]{x^p}$,

nach § 9, 7 u. § 6, 9 ist aber $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{x^p}}\right)^m = \left(\sqrt[mn]{x^p}\right)^m = \sqrt[mn]{x^{mp}}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{mithin } \sqrt[n]{x^p} = \sqrt[mn]{x^{mp}}.$$

Zahlenbeispiel.

$$\sqrt{a\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{a}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^4}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

§ 10.

Ausziehen von Kubikwurzeln.

Da $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, so ist

$$\sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b.$$

Nach dieser Formel werden die Kubikwurzeln ausgezogen.

Da die Kubikzahlen der Zahlen 1 bis 9 nicht über 3 Ziffern haben, so theilt man die Zahl, deren Kubikwurzel gezogen werden soll, von rechts nach links in je 3 Stellen ab und zieht dann nach obiger Formel die Wurzel nach dem Beispiele der Quadratwurzeln.

Beispiel. $\sqrt[3]{32\,|\,768} = \overset{a\,b}{32}$

$a^3 =$	27	$a = 3$, da $a^3 = 27$.
$3a^2 = 27$	57	$a^2 = 9$, $3a^2 = 27$, $\frac{57}{27} = 2, \ldots$, also $b = 2$.
$3a^2b$	54	
	36	$b^2 = 4$, $3ab^2 = 3 \,.\, 3 \,.\, 4 = 36$.
$3ab^2$	36	$b^3 = 8$.
	8	
$b^3 =$	8	

D. Logarithmen.

§ 11.

Der Logarithmus ist ein Exponent.

Der Logarithmus der Zahl a in Bezug auf die Basis b ist der Exponent, mit dem b potenziert werden muss, um a zu geben.

Wenn $b^e = a$, so ist ${}^b\log a = e$.

Zu einem Logarithmensystem benutzt man ein und dieselbe Basis, für die gewöhnlichen oder gemeinen Logarithmen die Basis 10.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da

$$
\begin{array}{llll}
10^0 = 1 & \text{ist, so ist} & \log 1 & = 0, \\
10^1 = 10 & \text{- - -} & \log 10 & = 1, \\
10^2 = 100 & \text{- - -} & \log 100 & = 2, \\
10^3 = 1000 & \text{- - -} & \log 1000 & = 3, \\
10^4 = 10000 & \text{- - -} & \log 10000 & = 4, \\
\text{u. s. w.} & & &
\end{array}
$$

sämmtliche Logarithmen in Bezug auf die Basis 10.

Die Logarithmen von 2 bis 9 liegen also zwischen 0 und 1, die von 11 bis 99 zwischen 1 und 2, von 100 bis 999 zwischen 2 und 3 u. s. w. So ist (Basis 10)

$$
\begin{array}{llll}
\log 3 & = 0{,}47\,712, & \text{d. h.} & 3 = 10^{0{,}47\,712}, \\
\log 30 & = 1{,}47\,712, & \text{-} & 30 = 10^{1{,}47\,712}, \\
\log 3000 & = 3{,}47\,712, & \text{-} & 3000 = 10^{3{,}47\,712}.
\end{array}
$$

In einem Logarithmus heisst die Zahl vor dem Komma die Kennziffer oder Charakteristik, die Stellen hinter dem Komma die Mantisse. In 1,47 712 ist also 1 die Kennziffer, 47 712 die Mantisse.

Die Kennziffer bestimmt die Anzahl der Stellen einer zu logarithmierenden Zahl. (Die Zahl hat $n + 1$ Stellen, wenn die Kennziffer ihres Logarithmus n ist.)

§ 12.

Da man Potenzen multipliciert, dividiert, potenziert und radiziert, indem man ihre Exponenten addiert, subtrahiert, multipliciert und dividiert, so vereinfacht sich die Rechnung mit grossen Zahlen, wenn man alle Zahlen als Potenzen derselben Basis schreibt, z. B. als Potenzen von 10.

Die Logarithmen wurden von Neper (Lord John Napier) im Jahre 1614 erfunden und für Sinus und Tangenten berechnet. Er legte die Basis 2,71 828 . . . zu Grunde. Seine Logarithmen werden die natürlichen oder Neperschen Logarithmen genannt.

Daraus entwickelte Briggs im Jahre 1618 ein neues Logarithmensystem, dem er die Basis 10 zu Grunde legte. Seine Logarithmen heissen gemeine oder Briggs'sche. Unabhängig von beiden erfand Bürg ein Logarithmensystem mit der Basis 1,0001, das er 1620 in Prag veröffentlichte. Das Briggs'sche System wird allgemein in der Praxis gebraucht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für ein Logarithmensystem mit der Basis 2 wäre

$$^{2}\log 8 = 3, \text{ da } 2^3 = 8,$$
$$^{2}\log 64 = 6, \text{ da } 2^6 = 64;$$

für die Basis 3

$$^{3}\log 27 = 3, \text{ da } 3^3 = 27,$$
$$^{3}\log 81 = 4, \text{ da } 3^4 = 81 \text{ u. s. w.}$$

§ 13.

1. **Lehrsatz.** Der Logarithmus eines Produkts ist gleich der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren.

$$\log (ab) = \log a + \log b.$$

Beweis. Ist $\log a = x$, d. h. $a = 10^x$
$\log b = y$, - $b = 10^y$,

so ist $x + y = \log a + \log b$, und $ab = 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y} = 10^{\log a + \log b}$,

also $\log (ab) = \log a + \log b$.

2. **Lehrsatz.** Der Logarithmus eines Bruches ist gleich dem Logarithmus des Zählers minus dem Logarithmus des Nenners.

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

Beweis. Ist $\log a = x$, also $a = 10^x$,
$\log b = y$, - $b = 10^y$,

so ist $x - y = \log a - \log b$ und $\frac{a}{b} = \frac{10^x}{10^y} = 10^{x-y} = 10^{\log a - \log b}$,

also $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Folgerung. Aus vorstehendem Lehrsatze ergeben sich folgende Berechnungen:

$$\log 0{,}1 = \log \frac{1}{10} = \log 1 - \log 10 = 0 - 1 = -1.$$

$$\log 0{,}01 = \log \frac{1}{100} = \log 1 - \log 100 = -2.$$

$$\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1000} = \log 1 - \log 1000 = -3.$$

. . . . . .

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir haben also

$\log\ 0{,}1 = -1$	$\log\ 0{,}0001 = -4$
$\log\ 0{,}01 = -2$	$\log\ 0{,}00001 = -5$
$\log\ 0{,}001 = -3$	u. s. w.

Die Logarithmen echter Brüche sind negative Zahlen.

Beispiel. $\log 2 = 0{,}30\,103$

$\log 3 = 0{,}47\,712$

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3 = -0{,}17\,609.$$

Man berechnet indessen $\log \frac{2}{3}$, um keine negativen Logarithmen zu haben, indem man zu $\log 2$ vorn $+1$ und hinten -1, also $+1-1=0$, addiert:

$$\begin{array}{l} \log 2 = 1{,}30\,103 - 1 \\ \underline{\log 3 = 0{,}47\,712} \\ \log \frac{2}{3} = 0{,}82\,391 - 1 \end{array}$$

Da $0{,}0435 = \frac{435}{10\,000}$, so ist

$$\log 0{,}0435 = \log 435 - \log 10\,000 = 2{,}63\,849 - 4 = 0{,}63\,849 - 2.$$

3. **Lehrsatz.** Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Logarithmus der Basis multipliciert mit dem Exponenten.

$$\log a^n = n \log a.$$

Beweis. Ist $\log a = x$, also $a = 10^x$,

so ist $n \log a = nx$, $a^n = 10^{nx}$,

$$\log a^n = nx,$$

also $\log a^n = n \log a$.

4. **Lehrsatz.** Der Logarithmus einer Wurzel ist gleich dem Logarithmus des Radicanden dividirt durch den Wurzelexponenten.

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log a = \frac{\log a}{n}.$$

Beweis. Wenn $\log a = x$, $a = 10^x$,

so ist $\frac{\log a}{n} = \frac{x}{n}$, $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{10^x} = 10^{\frac{x}{n}}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\log \sqrt[n]{a} = \frac{x}{n},$$

$$\text{also } \log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n} = \frac{1}{n} \log a.$$

Beispiele.

1) $\log 7a^3b \sqrt[7]{cd} = \log 7 + 3 \log a + \log b + \frac{1}{7} (\log c + \log d).$

2) $\log 25x (y - 3z)^6 \sqrt[5]{u^2} = \log 25 + \log x + 6 \log (y - 3z) + \frac{2}{5} \log u.$

3) $\log \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} = \log (a^2 + b^2) - \log (c^2 + d^2).$

Gleichungen.

§ 14.

Allgemeines.

Eine identische Gleichung ist eine Gleichung, deren beide Seiten für alle beliebigen Werthe, die man den unbestimmten Zahlen geben mag, gleich sind.

$$a + b - c = b - c + a;$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Bestimmungsgleichung nennt man eine Gleichung, in der eine darin vorkommende Unbestimmte, die Unbekannte, einen bestimmten Werth haben muss, um beide Seiten gleich zu machen.

$$6x - 12 = 30$$

ist nicht mehr für jeden beliebigen Werth von x richtig, sondern nur für $x = 7$.

Der Werth der Unbekannten, in diesem Beispiel 7, heisst die Wurzel der Gleichung.

Zur Lösung von Gleichungen bedarf man der Sätze:

a. Gleiches zu Gleichem addiert giebt Gleiches.
b. Gleiches von Gleichem subtrahiert giebt Gleiches.
c. Gleiches mit Gleichem multipliciert giebt Gleiches.
d. Gleiches durch Gleiches dividiert giebt Gleiches.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beispiel.

$$23x + 17 = 79 - 8x \qquad \text{(auf beiden Seiten 8x addiert.)}$$
$$8x \qquad = \qquad + 8x$$
$$31x + 17 = 79 \qquad \text{(auf beiden Seiten 17 subtrahiert.)}$$
$$- 17 = - 17$$
$$31x \qquad = 62 \qquad \text{(auf beiden Seiten durch 31 dividiert.)}$$
$$\frac{31x}{31} = \frac{62}{31}$$
$$x = 2.$$

Ist dieser Werth für x richtig, so muss die gegebene Gleichung durch ihn erfüllt, d. h. identisch werden.

Probe.
$$23 \,.\, 2 + 17 = 79 - 8 \,.\, 2$$
$$46 + 17 = 79 - 16$$
$$63 = 63.$$

Zu obigen Sätzen tritt noch für höhere Gleichungen als ersten Grades und für Exponentialgleichungen der Satz:

Man kann jede Seite der Gleichung mit derselben Zahl potenzieren, dieselbe Wurzel und denselben Logarithmus von jeder Seite nehmen.

Beispiel. 1) $\sqrt{x + 5} = x - 1$
$$x + 5 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

2) $9x^2 + 4x^2 = 325$
$$13x^2 = 325$$
$$x^2 = \frac{325}{13} = 25$$
$$x = \sqrt{25} = \pm 5.$$

3) $a^{x+5} = a^{12}$
$$(x + 5) \log a = 12 \log a$$
$$x + 5 = 12$$
$$x = 7.$$

Zusatz. Man kann die Vorzeichen sämmtlicher Glieder einer Gleichung umkehren.

Beweis. Multipliciert man die Gleichung
$$- ax = - b + c$$
mit $- 1$, so erhält man
$$+ ax = + b - c.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 15.

Will man eine Gleichung auflösen, so muss man sie vorher ordnen. Dies geschieht in folgender Weise:

1. Alle Unbekannten werden auf die eine Seite, alle Bekannten auf die andere Seite der Gleichung gebracht.

$$7x - 6 = 8x - 9 - 4x + 5$$
$$3x = 2$$
$$x = \frac{2}{3}.$$

2. Kommt die Unbekannte in einer Klammer vor, so ist diese Klammer aufzulösen.

$$4\,(10 - 2x) - 3\,(x - 5) = 0.$$
$$40 - 8x - 3x + 15 = 0.$$
$$11x = 55$$
$$x = 5.$$

3. Kommen in der Gleichung Brüche vor, so sucht man den Hauptnenner, multipliciert mit ihm die ganze Gleichung und entfernt dadurch die Nenner.

$$2x - \frac{3}{5}x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}x + 2 \quad \text{(Hauptnenner 10.)}$$
$$20x - 6x = 15x - 5 - 4x + 20$$
$$3x = 15$$
$$x = 5.$$

4. Kommt die Unbekannte unter einem Wurzelzeichen vor, so muss man diese Wurzel auf eine Seite allein bringen und durch Potenzieren der Gleichung fortschaffen.

$$5 + \sqrt[3]{x} = 8$$
$$\sqrt[3]{x} = 3$$
$$x = 3^3 = 27.$$

Eine geordnete Gleichung, in welcher die Unbekannte nur in der ersten Potenz vorkommt, heisst eine Gleichung ersten Grades. Kommt die Unbekannte in der zweiten Potenz oder kommen 2 Unbekannte als Produkt in der geordneten Gleichung vor, so heisst sie quadratische Gleichung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Allgemein heisst die Gleichung vom n^{ten} Grade, wenn die Unbekannte als höchsten Exponenten n hat. Gleichungen dritten Grades nennt man kubische, vierten Grades biquadratische.

Die Gleichung

$$(1 + 6x)^2 + (2 + 8x)^2 = (1 + 10x)^2$$

ist nur ersten Grades, da alle x^2 bei der Ordnung verschwinden.

Eine Gleichung heisst rein, wenn sie geordnet die Unbekannte nur in einer Potenz enthält; gemischt, wenn die Unbekannte auch in niederen Potenzen vorkommt.

$5x^2 = 80$ ist eine rein quadratische Gleichung,
$x^2 - 12x + 35 = 0$ eine gemischt quadratische.

§ 16.

Eine rein quadratische Gleichung löst man auf, indem man auf beiden Seiten die Quadratwurzel auszieht.

Beispiel.

$$9x^2 + 4x^2 = 325$$
$$13x^2 = 325$$
$$x^2 = \frac{325}{13} = 25$$
$$x = \sqrt{25} = \pm 5.$$

Die quadratische Gleichung hat 2 Wurzeln, da sowohl $(+5)^2 = 25$ wie $(-5)^2 = 25$ ist. Diese beiden Wurzeln bezeichnen wir durch x_1 und x_2.

Die allgemeine Gleichung

$$mx^2 + n = o$$

kann man nach § 14 auf die Form

$$x^2 = a$$

bringen, wo $-\frac{m}{n} = a$ ist. Dann ist $x = \pm\sqrt{a}$.

Haben wir eine gemischt quadratische Gleichung von der Form

$$mx^2 + nx + p = o,$$

so bringen wir sie durch Division von m auf die Form

$$x^2 + ax + b = o,$$

wo $\frac{n}{m} = a$, $\frac{p}{m} = b$ ist und versetzen b auf die rechte Seite, also

$$x^2 + ax = -b.$$

Nun aber ist $x^2 + ax$ kein vollständiges Quadrat, wir müssen es also erst zu einem solchen ergänzen, wenn wir die Wurzel auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beiden Seiten der Gleichung ausziehen wollen. Vergleichen wir die linke Seite von

$$x^2 + ax = x^2 + 2\frac{a}{2}x = -b$$

mit $a^2 + 2ab + b^2$, so sehen wir, dass das Glied b^2 der letzteren fehlt, es ist in dieser Gleichung $\left(\frac{a}{2}\right)^2$. Wir addieren dies auf beiden Seiten und erhalten

$$x^2 + 2\frac{a}{2}x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b = \frac{a^2 - 4b}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

$\left(\frac{a}{2}\right)^2$ heisst die quadratische Ergänzung.

Zahlenbeispiel.

$$3x^2 - 22x + 35 = 0$$

$$x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{35}{3} = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{11}{3}x = -\frac{35}{3}.$$

Die quadratische Ergänzung ist also $\left(\frac{11}{3}\right)^2$, auf beiden Seiten diese addiert giebt

$$x^2 - 2\frac{11}{3}x + \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{121}{9} - \frac{35}{3} = \frac{121}{9} - \frac{105}{9}$$

$$\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

$$x - \frac{11}{3} = \pm \frac{4}{3}$$

$$x_1 = \frac{11}{3} + \frac{4}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$x_2 = \frac{11}{3} - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2^1/_3.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 17.

Addiert man die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax + b = 0$,

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$x_2 = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2},$$

so erhält man $$x_1 + x_2 = -a.$$

Die Summe der beiden Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem negativen Coefficienten von x (in der geordneten Form).

Multipliciert man beide Wurzeln mit einander

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)\left(-\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right),$$

so erhält man $$x_1 x_2 = b.$$

Das Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem bekannten Gliede derselben.

Diese beiden Sätze liefern die Probe für die Richtigkeit der Lösung einer quadratischen Gleichung. So ist in der Gleichung § 16 $3x^2 - 22x + 35 = 0$, nachdem wir sie auf die geordnete Form $x^2 - \frac{22}{3}x - \frac{35}{3} = 0$ gebracht haben,

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{3} + \frac{7}{3} = \frac{22}{3}, \qquad x_1 x_2 = \frac{35}{3}.$$

§ 18.

Hat man eine quadratische Gleichung in der Form von Produkten, zum Beispiel $$(x - 9)(x - 7) = 0,$$
so muss entweder einer der beiden Faktoren gleich Null sein oder beide, also entweder

$$x - 9 = 0 \qquad \text{oder } x - 7 = 0$$

oder beide. Daraus ergiebt sich

$$x_1 = 9$$
$$x_2 = 7,$$

beide als Wurzeln der Gleichung, welche ausmultipliciert

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

giebt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Probe. $x_1 + x_2 = 9 + 7 = 16, \quad x_1 x_2 = 9 \,.\, 7 = 63.$

Kann man umgekehrt in der Gleichung

$$x^2 + ax + b = 0$$

zwei Zahlen x_1 und x_2 finden, so dass

$$x_1 + x_2 = -a, \qquad x_1 x_2 = b$$

ist, so sind diese beiden die Wurzeln der Gleichung.

Beispiel. $\quad x^2 - 19x + 88 = 0$

giebt in Faktoren zerlegt

$$(x - 11)(x - 8) = 0,$$

also sind die Wurzeln $x_1 = 11$ und $x_2 = 8$.

Probe. $\quad x_1 + x_2 = 19, \qquad x_1 x_2 = 88.$

Um die obige Gleichung in Faktoren zu zerlegen, addiert und subtrahiert man auf der linken Seite die quadratische Ergänzung, also $\left(\frac{19}{2}\right)^2 - \left(\frac{19}{2}\right)^2 = 0$, und erhält somit

$$x^2 - 19x + \left(\frac{19}{2}\right)^2 - \left(\frac{19}{2}\right)^2 + 88 = 0$$

$$\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{19}{2}\right)^2 - 88\right] = 0$$

$$\left(x - \frac{19}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{19}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left[x - \frac{19}{2} + \frac{3}{2}\right]\left[x - \frac{19}{2} - \frac{3}{2}\right] = 0$$

$$(x - 8)(x - 11) = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Trigonometrie.

§ 19.

Die Planimetrie lehrt die Construktion ebener Figuren, die Trigonometrie die Berechnung derselben, speciell der Dreiecke.

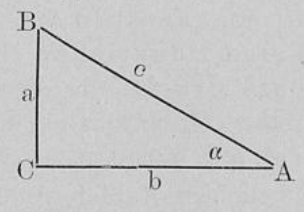
Ein Dreieck ist nach den 4 Congruenzsätzen bestimmt:

a) durch 3 Seiten,
b) durch 2 Seiten und den eingeschlossenen Winkel,
c) durch 1 Seite und 2 Winkel,
d) durch 2 Seiten und den der grösseren gegenüberliegenden Winkel.

Sind 3 solcher Bestimmungsstücke gegeben, so sind auch die übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks dadurch bestimmt.

(Vergleich zwischen einem Dreieck und einem Viereck aus beweglichen Drahtseiten).

Die Seiten und Winkel eines Dreiecks sind demnach von einander abhängig, man kann die einen durch die andern bestimmen. Zu dieser Bestimmung wählen wir das rechtwinklige Dreieck, das Verhältniss der Katheten zur Hypotenuse oder der Katheten zu einander und bestimmen folgendes:



1. Der Sinus eines Winkels ist gleich der gegenüberliegenden Kathete dividiert durch die Hypotenuse.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Der Cosinus eines Winkels ist gleich der anliegenden Kathete dividiert durch die Hypotenuse.

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}.$$

3. Die Tangente eines Winkels ist gleich der gegenüberliegenden Kathete dividiert durch die anliegende.

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad \textit{(tg lies tangens).}$$

4. Die Cotangente eines Winkels ist gleich der anliegenden Kathete dividiert durch die gegenüberliegende.

$$cotg\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \textit{(cotg lies cotangens).}$$

(Sinus ist die lateinische Uebersetzung eines bei den arabischen Astronomen gebrauchten terminus technicus; Cosinus ist verkürzt aus complementi sinus, weil der Sinus eines Winkels gleich dem Cosinus seines Complementwinkels ist. Die Tangente hat ihren Namen von ihrer geometrischen Construktion, und Cotangente ist gleichfalls verkürzt aus complementi tangens.)

Aus den Formeln 3 und 4 ergiebt sich

$$tg\ \alpha = \frac{1}{cotg\ \alpha}, \qquad cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha},$$

$$tg\ \alpha\ .\ cotg\ \alpha = 1.$$

Man bezeichnet in einem Dreieck den Winkel bei A mit α, bei B mit β, bei C mit γ; die A gegenüberliegende Seite mit a, die B gegenüberliegende mit b, C mit c.

Erklärung. Eine Funktion f(x) einer Zahl x ist eine Grösse, deren Wert sich zugleich mit x ändert.

Ist $y = 2x^2$, so erhält y je nach dem wechselnden Werte von x einen andern Wert, es ist eine Funktion von x.

sin, cos, tg und *cotg* sind Funktionen ihres Winkels.

sin und *cos* sind echte Brüche, da die Hypotenuse grösser ist als jede der Katheten. Ihre Grenzwerthe, d. h. ihre höchsten und ihre niedrigsten Werthe sind 1 und 0.

tg und *cotg* können beliebige Zahlen von 0 bis ∞ sein.

Beispiel. In dem rechtwinkligen Dreieck mit den Seiten

$$a = 3,\ b = 4,\ c = 5 \qquad (3^2 + 4^2 = 5^2) \text{ ist}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}, \qquad \cos \alpha = \frac{4}{5}, \qquad tg\ \alpha = \frac{3}{4}, \qquad cotg\ \alpha = \frac{4}{3}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. *sin, cos, tg* und *cotg* für den Winkel $\alpha = 45^0$ zu berechnen.

Auflösung. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck der eine spitze Winkel $= 45^0$, so ist es auch der andere, mithin ist das Dreieck rechtwinklig-gleichschenklig und $a = b$. Darnach ist

$$c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2, \qquad c = a\sqrt{2}$$

und

$$\sin 45^0 = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos 45^0 = \frac{b}{a\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$tg\, 45 = \frac{a}{b} = 1, \qquad cotg\, 45^0 = \frac{b}{a} = 1.$$

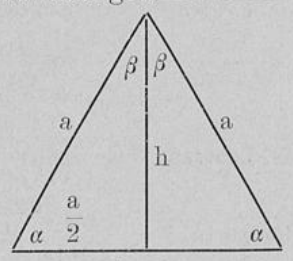
Aufgabe. *sin, cos, tg* und *cotg* für den Winkel $\alpha = 60^0$ zu berechnen.

Auflösung. Im gleichseitigen Dreieck ist jeder der Winkel $= 60^0$, die Senkrechte von der Spitze auf die Basis halbiert die Basis und den Winkel an der Spitze. Ist im rechtwinkligen Dreieck also $\angle\, \alpha = 60^0$, so ist $\angle\, \beta = 30^0$,

und

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2,$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$



$$\sin 60^0 = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a}{a} = \frac{1}{2}$$

$$tg\, 60^0 = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{3}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{3}, \qquad cotg\, 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§ 20.

Nach § 19, 1—4 ist in Bezug auf das rechtwinklige $\triangle$ ABC

$$\sin\beta = \frac{b}{c}, \cos\beta = \frac{a}{c}, \quad tg\,\beta = \frac{b}{a}, cotg\,\beta = \frac{a}{b}.$$

Nun war aber

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \sin\alpha = \frac{a}{c}, cotg\,\alpha = \frac{b}{a}, \quad tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$

also ist

$$\sin\beta = \cos\alpha = \cos(90^0 - \beta).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Cosinus seines Complementwinkels.

$$\cos\beta = \sin\alpha = \sin(90^0 - \beta).$$

Der Cosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Complementwinkels.

$$tg\,\beta = cotg\,\alpha = cotg\,(90^0 - \beta).$$

Die Tangente eines Winkels ist gleich der Cotangente seines Complementwinkels.

$$cotg\,\beta = tg\,\alpha = tg\,(90^0 - \beta).$$

Die Cotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Complementwinkels.

§ 21.

1. **Lehrsatz.** Es ist $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha.$

Beweis. Nach der Erklärung ist $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$,

mithin $$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b} = tg\,\alpha.$$

2. **Lehrsatz.** Es ist $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\,\alpha.$

Beweis. $$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{b}{c} : \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = cotg\,\alpha.$$

3. **Lehrsatz.** $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Beweis. Nach dem Pythagoreischen Lehrsatze ist

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

also $$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1, \text{ d. i. } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

mithin $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Anmerkung. $\sin^2\alpha$ ist die einfachere Schreibart für $(\sin\alpha)^2$. Dasselbe gilt für die andern Funktionen. $\sin\alpha^2$ bedeutet den $\sin$ des Winkels α^2. Für $\alpha = 60^0$ ist also

$$\sin^2\alpha = \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 = \frac{3}{4},\ \sin\alpha^2 = \sin 3600^0 = \sin 40\,R = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 22.

Nach § 21, 3 kann man die übrigen Funktionen eines Winkels bestimmen, wenn eine derselben gegeben ist. Sei z. B.

1. Gegeben $sin\ x$.

Es ist $\quad cos^2 x = 1 - sin^2 x, \qquad cos\ x = \sqrt{1 - sin^2 x},$

$$tg\ x = \frac{sin\ x}{\sqrt{1 - sin^2 x}}, \qquad cotg\ x = \frac{\sqrt{1 - sin^2 x}}{sin\ x}.$$

2. Gegeben $cos\ x$.

$$sin\ x = \sqrt{1 - cos^2 x}, \qquad tg\ x = \frac{\sqrt{1 - cos^2 x}}{cos\ x}, \qquad cotg\ x = \frac{cos\ x}{\sqrt{1 - cos^2 x}}.$$

3. Gegeben $tg\ x$.

$$1 + tg^2 x = 1 + \frac{sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{cos^2 x + sin^2 x}{cos^2 x} = \frac{1}{cos^2 x}$$

$$cos\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 x}}, \qquad sin\ x = \frac{tg\ x}{\sqrt{1 + tg^2 x}}, \qquad cotg\ x = \frac{1}{tg\ x}.$$

4. Gegeben $cotg\ x$.

$$1 + cotg^2 x = 1 + \frac{cos^2 x}{sin^2 x} = \frac{sin^2 + cos^2 x}{sin^2 x} = \frac{1}{sin^2 x}$$

$$sin\ x = \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 x}}, \qquad cos\ x = \frac{cotg\ x}{\sqrt{1 + cotg^2 x}}, \qquad tg\ x = \frac{1}{cotg\ x}.$$

Zahlenbeispiel. Gegeben $sin\ x = 0{,}8$.

$$cos\ x = \sqrt{1 - 0{,}8^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$$

$$tg\ x = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ \ldots$$

$$cotg\ x = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Zu verwandeln: $\quad \dfrac{cos\ y}{\sqrt{1 - cos^2 y}} + \dfrac{\sqrt{1 - sin^2 y}\ .\ tg\ y}{1 - cos^2 y}\ .\ cos\ y.$

Die obigen Worte eingesetzt erhalten wir

$$\frac{cos\ y}{sin\ y} + \frac{cos\ y\ .\ tg\ y\ .\ cos\ y}{sin^2 y} = \frac{cos\ y}{sin\ y} + \frac{sin\ y\ cos\ y}{sin^2 y} = 2\ cotg\ y.$$

Ebenso ist $\quad \sqrt{(1 + cos\ \beta)\ (1 - cos\ \beta)} = sin\ \beta$

und $\quad \sqrt{(1 - sin^2 \beta) : (1 - cos^2 \beta)} = cotg\ \beta.$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 23.

Theilt man (Fig. 1) den Kreis um M durch 2 aufeinander senkrechte Durchmesser AD und EF in 4 Quadranten und zieht einen Radius MB, $\angle$ AMB $= \alpha$, so nennt man AD den festen oder Haupt-Durchmesser, EF den Nebendurchmesser und MB den beweglichen Radius.

Nun ist $sin\ \alpha = \frac{BC}{MB}$. Wird der Winkel α grösser, so wird auch die Kathete BC grösser, und da MB denselben Wert behält, auch $sin\ \alpha$. Ist $\alpha = 0^0$, so fällt B auf A, und es ist die Kathete BC $= 0$, also — wenn wir MB $=$ r setzen —

$$sin\ 0^0 = \frac{0}{r} = 0.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so fällt BC auf EM, und es ist $sin\ 90^0 = \frac{r}{r}$, also

$$sin\ 90^0 = 1.$$

Der Sinus wächst von 0^0 bis 90^0 von 0 bis 1.

Geht der bewegliche Radius in den zweiten Quadranten über bis B_1, so dass $\angle$ $AMB_1 = \alpha_1$ ist, so ist $sin\ \alpha_1 = \frac{B_1 C_1}{MB_1} = \frac{B_1 C_1}{r}$. Da $B_1 C_1 < r$ ist, so ist $sin\ \alpha_1 < 1$, und wenn B_1 in D fällt, $\alpha_1 = 180^0$ ist, so ist $sin\ \alpha = \frac{0}{r}$, d. h. $sin\ 180^0 = 0$.

Der Sinus nimmt von 90^0 bis 180^0 ab von 1 bis 0.

Die Sinuskathete über dem Hauptdurchmesser ist positiv, unter ihm negativ.

Geht der bewegliche Radius in den dritten Quadranten über bis B_2, also $AMB_2 = \alpha_2$, so ist $sin\ \alpha_2 = \frac{B_2 C_2}{MB_2} = \frac{B_2 C_2}{r}$. Da nun $B_2 C_2$ negativ ist, während r positiv bleibt, so ist der Sinus im dritten Quadranten negativ.

Fällt B_2 auf F, $\alpha_2 = 270^0$, so ist $sin\ \alpha_2 = \frac{-r}{r} = -1$, also

$$sin\ 270^0 = -1.$$

Der Sinus nimmt von 180^0 bis 270^0 von 0 bis -1 ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Geht der bewegliche Radius in den vierten Quadranten bis B_3, $\angle \alpha_3 = AMB_3$, so ist $\sin \alpha_3 = \frac{B_3 C_3}{r}$. Da $B_3 C_3$ negativ ist, während r positiv bleibt, so ist der Sinus im vierten Quadranten negativ.

Fällt MB_3 auf MA, $\alpha_3 = 360^0$, so ist $B_3 C_3 = 0$, also

$$\sin 360^0 = 0.$$

Der Sinus wächst von 270^0 bis 360^0 von -1 bis 0.

Im ersten Quadranten ist $\cos \alpha = \frac{CM}{BM} = \frac{CM}{r}$. Nähert sich der bewegliche Radius BM dem festen Durchmesser AM, d. h. wird α kleiner, so rückt C immer weiter nach A und für $\alpha = 0^0$ fällt es mit A zusammen.

Dann ist $\cos \alpha = \frac{AM}{AM} = 1$, also $\cos 0^0 = 1$.

Wächst der Winkel α, so wird CM kleiner, also nimmt $\cos \alpha$ ab, und für $\alpha = 90^0$ fällt B auf E, C auf M, d. h. $CM = 0$,

mithin ist $\cos 90^0 = 0$.

Der Cosinus nimmt von 0^0 bis 90^0 ab von 1 bis 0.

Die Cosinus-Kathete ist links vom Nebendurchmesser positiv, rechts von demselben negativ.

Geht der bewegliche Radius in den zweiten Quadranten über, so ist $\cos \alpha_1 = \frac{MC_1}{r}$ negativ, da MC_1 negativ ist. Für $\alpha_1 = 180^0$ fällt B_1 und C_1 in D zusammen, also $MC_1 = MD = r$, und mithin

$$\cos \alpha_1 = \frac{-r}{r}, \qquad \cos 180^0 = -1.$$

Der Cosinus nimmt von 90^0 bis 180^0 Grad ab von 0 bis -1.

Im dritten Quadranten ist *cos* negativ, da MC_2 negativ ist; für $\alpha = 270^0$ fällt B_2 auf F und C_2 in M, also ist die Cosinuskathete $= 0$,

mithin $\cos 270^0 = 0$.

Der Cosinus wächst von 180^0 bis 270^0 von -1 bis 0.

Im vierten Quadranten ist MC_3 positiv, also auch *cos*. Für $\alpha = 360^0$ ist $MC_3 = AM = r$, also

$$\cos 360^0 = 1.$$

Der Cosinus wächst von 270^0 bis 360^0 von 0 bis 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Errichten wir (Fig. 2) auf dem Hauptdurchmesser in A eine Tangente an den Kreis und verlängern den beweglichen Radius MB, bis er diese in T schneidet, so ist $tg\,\alpha = \frac{AT}{AM} = \frac{AT}{r}$, d. h. das von der Tangente in A abgeschnittene Stück dividiert durch den Radius.

Die Tangentenlinie AT ist positiv über, negativ unter dem festen Durchmesser.

Für $\alpha = 0$ fällt T in A, also $AT = 0$, $tg\,\alpha = \frac{0}{r} = 0$,

mithin $$tg\,0^0 = 0.$$

Wächst α, so wächst auch AT, mithin $tg\,\alpha$.

Für $\alpha = 90^0$ fällt MB auf ME, ME $\parallel$ AT, die beiden Geraden schneiden sich nicht oder erst im Unendlichen.

$$tg\,90^0 = \infty.$$

Die Tangente wächst von 0^0 bis 90^0 von 0 bis ∞.

Im zweiten Quadranten schneidet der bewegliche Radius die Tangentenlinie nur, wenn er rückwärts verlängert wird und zwar nach unten MT_1, tg ist also negativ. Sowie α 90^0 überschreitet, springt die Tangente von $+\infty$ nach $-\infty$.

Für $\alpha = 180^0$ fällt die Verlängerung von MB_1 auf MA, es ist also $AT_1 = 0$. $$tg\,180^0 = 0.$$

Die Tangente wächst von 90^0 bis 180^0 von $-\infty$ bis 0.

Im dritten Quadranten schneidet der bewegliche Radius rückwärts verlängert den positiven Theil der Tangentenlinie, tg ist also positiv. Für $\alpha = 270^0$ ist diese Verlängerung der Tangentenlinie parallel, also

$$tg\,270^0 = \infty.$$

Die Tangente wächst von 180^0 bis 270^0 von 0 bis $+\infty$.

Sowie der Winkel α 270^0 überschreitet, springt die Tangente von $+\infty$ nach $-\infty$ und geht für $\alpha = 360^0$ in 0 über; sie ist negativ.

Die Tangente wächst von 270^0 bis 360^0 von $-\infty$ bis 0.

Errichtet man auf dem Nebendurchmesser im Punkte E eine Tangente (Fig. 3) und lässt den beweglichen Schenkel diese in R schneiden, so ist $\triangle$ AMR = MRE = α, also

$$cotg\,\alpha = \frac{RE}{EM} = \frac{RE}{r}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Cotangentenlinie ist links vom Nebendurchmesser positiv, rechts negativ.

Entsprechend der Construktion von *tg* findet man also

$$cotg\ 0^0 = \infty, \qquad cotg\ 90^0 = 0,$$
$$cotg\ 180^0 = -\infty, \qquad cotg\ 270^0 = 0,$$
$$cotg\ 360^0 = \infty.$$

Wir haben demnach folgende Tabellen:

	0^0	90^0	180^0	270^0	360^0
sin	0	1	0	— 1	0
cos	1	0	— 1	0	1
tg	0	∞	0	$-\infty$	0
cotg	∞	0	$-\infty$	0	∞

Quadr.	I	II	III	IV
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
cotg	+	—	+	—

§ 24.

Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen.

Da die Dreiecksberechnungen zum grössten Theile mit Hülfe der Logarithmen ausgeführt werden, so hat man nicht die Funktionen selber, sondern ihre Logarithmen zum bequemeren Gebrauche in Tafeln zusammengestellt. Da nun aber *sin* und *cos* echte Brüche, ihre Logarithmen also negativ sind, so hat man die Hypotenuse (oder den Radius des Kreises, in welchem man den Winkel wachsen lässt) nicht = 1, sondern = 10 000 000 000 gesetzt, um gleichmässige Kennziffern zu erzielen. Es ist mithin

$$\log sin\ \alpha = \log \frac{a}{c} = \log a - \log c = \log a - 10, \text{ da } c = 10000000000.$$

Die Logarithmen der Grade und Minuten der trigonometrischen Funktionen sind in den Tabellen angegeben. Da aber $sin\,\alpha = cos\,(90^0 - \alpha)$, $tg\ \alpha = cotg\ (90^0 - \alpha)$ und umgekehrt, so sind nur die Logarithmen von 0^0 bis 44^0 berechnet, und die untere Bezeichnung gilt für diejenigen von 45^0—90^0. Wir finden

$$\log sin\ 35^0\ 44' = 9{,}76\,642 - 10$$
$$\log cos\ 54^0\ 16' = 9{,}76\,642 - 10$$

Beide Winkel ergänzen sich zu 90^0.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Sekunden sind in den Tabellen nicht angegeben, sie müssen berechnet werden; sei gesucht

$$\log \sin 29^0\ 15'\ 46''.$$

Dieser log liegt zwischen log *sin* $29^0\ 15'$ und log *sin* $29^0\ 16'$, und ist kleiner als der letztere, da der *sin* von 0 bis 90^0 wächst. Wir suchen also die Differenz für 1 Minute. Es ist

$$\begin{array}{l} \log \sin 29^0\ 16' = 9{,}68\,920 - 10 \\ \log \sin 29^0\ 15' = 9{,}68\,897 - 10 \\ \hline 1'\ \text{Differenz} \quad = 0{,}00\,023 \end{array}$$

oder 23 Proportionaltheile.

Auf 1 Minute = 60 Sekunden kommen 23, mithin auf 1 Sekunde $\frac{23}{60}$ Proportionaltheile, und auf $46''$ $\frac{23\ .\ 46}{60} = 17{,}63$. Diese — 18 statt 17,63 gesetzt — haben wir zu dem log *sin* $29^0\ 15'$ zu addieren, also

$$\begin{array}{r} \log \sin 29^0\ 15' = 9{,}68\,897 - 10 \\ + 46'' = 0{,}00\,018 \\ \hline \log \sin 29^0\ 15'\ 46'' = 9{,}68\,915 - 10. \end{array}$$

Da *cos* von 0^0 bis 90^0 abnimmt, so haben wir bei log *cos* die Sekunden zu subtrahieren. Beispiel: log *cos* $54^0\ 31'\ 25''$.

$$\begin{array}{l} \log \cos 54^0\ 31' = 9{,}76\,378 - 10 \\ \log \cos 54^0\ 32 \ = 9{,}76\,360 - 10 \\ \hline 1'\ \text{Differenz} = 18\ \text{Prop.-Theile.} \end{array}$$

$$1'' = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}, \qquad 25'' = \frac{25\ .\ 3}{10} = 7{,}5$$

Mithin

$$\begin{array}{rl} \log \cos 54^0\ 31' & = 9{,}76\,378 - 10 \\ - 25'' & = \quad 7{,}5 \\ \hline \log \cos 54^0\ 31'\ 25'' & = 9{,}76\,373 - 10, \end{array}$$

indem wir den Bruch 0,5 vernachlässigen.

Da *sin* und *tg* von 0^0 bis 90^0 wachsen, so werden die Proportionaltheile der Sekunden bei ihnen addiert; da *cos* und *cotg* von 0^0 bis 90^0 abnehmen, so werden die Proportionaltheile der Sekunden bei ihnen subtrahiert.

Ist umgekehrt der log einer trigonometrischen Funktion gegeben und soll der Winkel gesucht werden, so haben wir, falls der log nicht gerade in der Tafel steht,
bei *sin* und *tg* von dem nächst niederen log,
bei *cos* und *cotg* von dem nächst höheren auszugehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für $\log tg\, x = 9{,}84\,845 - 10$
ergiebt sich unmittelbar aus der Tafel $x = 35^0\, 12'$

Ist $\log tg\, x = 9{,}90\,116 - 10$
gegeben, so finden wir als nächst niedrigen log

$$\log tg\, 38^0\, 32' = 9{,}90\,112 - 10.$$

Differenz zwischen $32'$ und $33' = 26$ pp.

Auf 1 Sekunde also $\frac{26}{60} = \frac{13}{30}$ pp., mithin für 4 pp. $4 : \frac{13}{30} = \frac{4 \,.\, 30}{13}$ $= 9{,}23''$,

folglich $x = 38^0\, 32'\, 9{,}23''$.

Für $\log cotg\, x = 9{,}43\,459 - 10$ finden wir den nächst höheren Werth $\log cotg\, 74^0\, 46' = 9{,}43\,508 - 10$.

Differenz zwischen $46'$ und $47' = 50$ pp, also für 1 Sekunde $= 0{,}83$ pp., und somit geben $\frac{508 - 459}{0{,}83} = \frac{49}{0{,}83} = 59''$,

mithin $x = 74^0\, 46'\, 59''$.

§ 25.

Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

Das rechtwinklige Dreieck ist durch 2 Seiten oder durch 1 Seite und einen spitzen Winkel bestimmt, mithin durch:

1) a und c; 2) α und c; 3) a und b; 4) a und α oder β.

1. Gegeben: a und c. Gesucht: α, β und b.

Es ist $\sin \alpha = \frac{a}{c}$, $\log \sin \alpha = \log a - \log c$;

$$\beta = 90^0 - \alpha, \qquad \frac{b}{c} = \cos \alpha, \qquad b = c \,.\, \cos \alpha,$$

$$\log b = \log c + \log \cos \alpha.$$

Auch kann man b berechnen aus

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c + a)\,(c - a),$$

$$b = \sqrt{(c + a)\,(c - a)}, \qquad \log b = \frac{1}{2}[\log (c + a) + \log (c - a)].$$

2. Gegeben: α und c. Gesucht: a, b, β.

$$\beta = 90^0 - \alpha, \qquad \sin \alpha = \frac{a}{c}, \qquad a = c \log \sin \alpha,$$

$$\log a = \log c + \log \sin \alpha.$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha, \qquad b = c \,.\, \cos \alpha, \qquad \log b = \log c + \log \cos \alpha.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Gegeben: a und b. Gesucht: α, β, c.

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \log tg\,\alpha = \log a - \log b.$$

$$\beta = 90^0 - \alpha.$$

$$\frac{a}{c} = sin\,\alpha, \qquad c = \frac{a}{sin\,\alpha}, \qquad \log c = \log a - \log sin\,\alpha.$$

Für bequeme Zahlen auch $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

4. Gegeben: a und α. Gesucht: β, b, c.

$$\beta = 90^0 - \alpha, \qquad \frac{b}{a} = cotg\,\alpha, \qquad b = a\,cotg\,\alpha,$$

$$\log b = \log a + \log cotg\,\alpha.$$

Oder $\frac{a}{b} = tg\,\alpha, \qquad b = \frac{a}{tg\,\alpha}, \qquad \log b = \log a - \log tg\,\alpha.$

$$\frac{a}{c} = sin\,\alpha, \qquad c = \frac{a}{sin\,\alpha}, \qquad \log c = \log a - \log sin\,\alpha.$$

Der Inhalt des rechtwinkligen Dreieckes ist

$$J = \frac{ab}{2} = \frac{ac\,cos\,\alpha}{2} = \frac{bc\,sin\,\alpha}{2}.$$

Zahlenbeispiel. Gegeben: a = 75 m, c = 135 m. Gesucht: b, α, β, Inhalt.

$$sin\,\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\log sin\,\alpha = \log a - \log c$$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}87\,506 = 11{,}87\,506 - 10 \\ \log c &= 2{,}13\,033 = 2{,}13\,033 \\ \hline \log sin\,\alpha &= 9{,}74\,473 - 10 \\ \log sin\,\alpha = \log sin\,33^0\,44' &= 9{,}74\,455 - 10 \\ \hline & \qquad\qquad 18 \text{ pp.} \end{aligned}$$

Differenz 19, $\frac{18\,.\,60}{19} = 57''$ abgerundet.

Also $\alpha = 33^0\,44'\,57''$

$\beta = 90^0 - \alpha = 56\,15'\,3''$

$$b = c\,cos\,\alpha$$

$$\log b = \log c + \log cos\,\alpha$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2{,}13\,033 \\ \log cos\,\alpha &= 9{,}91\,985 - 10 \\ \hline \log b &= 12{,}05\,018 - 10 = 2{,}05\,018. \end{aligned}$$

$b = 112{,}3$

$$b = \sqrt{(c - a)\,(c + a)}$$

$$b = \sqrt{60\,.\,210} = \sqrt{12\,600}$$

$$\log b = \frac{1}{2} \log 12\,600 = \frac{4{,}10\,037}{2}$$

$= 2{,}05\,018$ wie oben.

$$J = \frac{ab}{2}$$

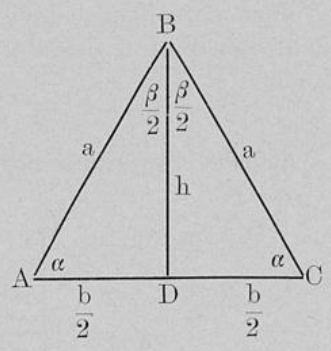
$$J = \frac{75\,.\,112{,}3}{2} = 4215 \text{ qm}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 26.

Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

Um das gleichschenklige Dreieck ABC zu berechnen, zerlegen wir es durch die von der Spitze B auf die Basis b gefällte Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Seiten a, $\frac{b}{2}$ und h und deren spitze Winkel α und $\frac{\beta}{2}$ sind. Beide Dreiecke sind congruent, also brauchen wir nur das eine derselben zu berechnen.



1. Gegeben: a, b. Gesucht: α, β, J.

Es ist
$$\frac{\frac{b}{2}}{a} = \frac{b}{2a} = \cos\alpha, \quad \frac{\beta}{2} = R - \alpha.$$
$$\frac{h}{a} = \sin\alpha, \qquad h = a \sin\alpha$$
$$J = \frac{bh}{2} = \frac{ab \sin\alpha}{2}.$$

2. Gegeben: a, α. Gesucht: b, β, J.

$$\frac{h}{a} = \sin\alpha, \qquad h = a \sin\alpha, \qquad \frac{\beta}{2} = R - \alpha.$$
$$\frac{b}{2a} = \cos\alpha, \qquad b = 2a \cos\alpha.$$
$$J = \frac{bh}{2} = a^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

3. Gegeben: h. a. Gesucht: α, β, b, J.

$$\sin\alpha = \frac{h}{a}, \qquad \frac{\beta}{2} = R - \alpha.$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{2a}, \qquad b = 2a \cos\alpha. \qquad J = \frac{bh}{2} = ah \cos\alpha.$$

Aus den vorstehenden 3 Fällen ergeben sich die Lösungen der übrigen Aufgaben, in denen a und β, b und β, b und h, h und α oder β gegeben sind, den angeführten entsprechend.

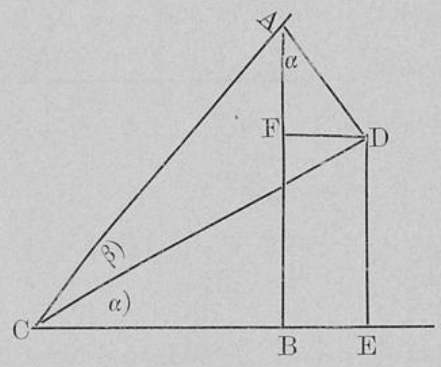
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das gleichseitige Dreieck wird als gleichschenkliges behandelt, in dem a = b und $\alpha = \beta$ ist.

Ein reguläres Polygon wird in gleichschenklige Dreiecke zerlegt und eines derselben berechnet. Der Inhalt dieses Dreiecks mit der Anzahl der Seiten des Polygons multipliciert giebt den Inhalt des Polygons.

§ 27.

Aufgabe. Den Sinus der Summe der Winkel α und β zu berechnen.



Auflösung. Sei in der Fig. $\angle$ DCE $= \alpha$, $\angle$ ACD $= \beta$, AD $\perp$ CD, DE $\perp$ BC, AB $\perp$ BC, so ist

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AB}{AC},$$

$$\sin\alpha = \frac{DE}{DC}, \qquad \sin\beta = \frac{AD}{AC}.$$

Um $\sin(\alpha + \beta)$ zu berechnen, zerlegen wir AB durch die Parallele FD zu BE in AF + FB, und haben dann

a) $$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AF}{AC} + \frac{FB}{AC}.$$

Nun ist $\angle$ DAF $= \alpha$, da seine Schenkel auf DC und EC senkrecht stehen, $\cos\alpha = \frac{AF}{AD}$, also

$$AF = AD \,.\, \cos\alpha.$$

Es ist ferner FB = DE, $\sin\alpha = \frac{DE}{DC}$, DE = DC $\sin\alpha$,

also $$FB = DC \,.\, \sin\alpha.$$

Diese beiden Werthe in Gleichung a) eingesetzt geben

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AD \,.\, \cos\alpha}{AC} + \frac{DC \,.\, \sin\alpha}{AC}.$$

Nun ist $\frac{AD}{AC} = \sin\beta$, $\frac{DC}{AC} = \cos\beta$, also

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha,$$

oder anders geordnet

1) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Den Cosinus der Summe der Winkel α und β zu berechnen.

Auflösung. Es ist $\cos(\alpha + \beta) = \frac{BC}{AC}$. Setzen wir $BC = EC - BE$, so haben wir

b) $$\cos(\alpha + \beta) = \frac{EC}{AC} - \frac{BE}{AC}.$$

Nun ist $\frac{EC}{DC} = \cos\alpha$, $\quad EC = CD \cos\alpha$,

$BE = DF$, $\quad \frac{DF}{AD} = \sin\alpha$, $\quad DF = AD \sin\alpha$.

Diese Werthe in b) eingesetzt geben

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{DC \,.\, \cos\alpha}{AC} - \frac{AD \sin\alpha}{AC}.$$

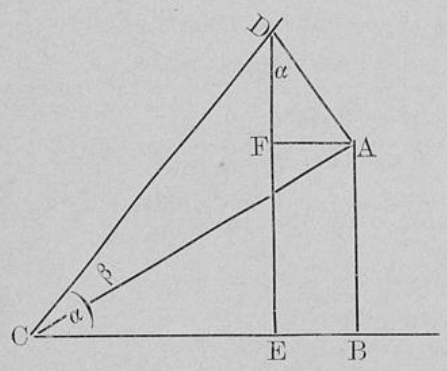
Es ist $\frac{DC}{AC} = \cos\beta$, $\quad \frac{AD}{AC} = \sin\beta$, eingesetzt giebt

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\beta \cos\alpha - \sin\beta \sin\alpha$$

oder

2) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Aufgabe. Den Sinus der Differenz der Winkel α und β zu berechnen.



Auflösung. Sei (Fig.) $\angle DCB = \alpha$, $\angle DCA = \beta$, also $\angle ACB = \alpha - \beta$, $AD \perp CD$, $AB \perp BC$, so ist

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{AB}{AC} = \frac{DE - DF}{AC}$$
$$= \frac{DE}{AC} - \frac{DF}{AC}.$$

Es ist

$\frac{DE}{DC} = \sin\alpha$, $\quad DE = DC \sin\alpha$,

$\frac{DF}{AD} = \cos\alpha$, $\quad DF = AD \,.\, \cos\alpha$,

also $$\sin(\alpha - \beta) = \frac{DC \,.\, \sin\alpha}{AC} - \frac{AD \,.\, \cos\alpha}{AC}$$
$$= \cos\beta \sin\alpha - \sin\beta \cos\alpha$$

oder

3) $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgabe. Den Cosinus der Differenz der Winkel α und β zu berechnen.

Auflösung. Nach der Bezeichnung der vorigen Aufgabe (Fig.) ist $\cos(\alpha - \beta) = \frac{BC}{AC} = \frac{EC + EB}{AC} = \frac{EC + FA}{AC} = \frac{EC}{AC} + \frac{FA}{AC}$.

Es ist $EC = CD \cos\alpha$, $FA = AD \sin\alpha$, also

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{CD \cos\alpha}{AC} + \frac{AD \sin\alpha}{AC} = \cos\beta \cos\alpha + \sin\beta \sin\alpha,$$

oder

4) $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta.$$

§ 28.

Setzen wir in Formel 1 § 27 α für β, so erhalten wir

$\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha$, d. i.

5) $$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Dasselbe in Formel 2 § 27 giebt

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha,$$

6) $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Nun ist $$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,$$

also

7) $$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2\alpha$$

8) $$\cos 2\alpha = 2 \cos^2\alpha - 1.$$

Setzen wir in diesen Formeln α für 2α, also $\frac{\alpha}{2}$ für α, so erhalten wir

9) $$\sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$$

10) $$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

11) $$\cos\alpha = 1 - 2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

12) $$\cos\alpha = 2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - 1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus 11 und 12 ergiebt sich

13) $$2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$$

14) $$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$$

15) $$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

16) $$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}.$$

§ 29.

Durch Addition von $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$, Formel 1 u. 3 § 27 erhalten wir

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta.$$

Setzen wir $\alpha + \beta = x$, $\alpha - \beta = y$, also $\alpha = \frac{x + y}{2}$, $\beta = \frac{x - y}{2}$, so erhalten wir

17) $$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}.$$

Durch Subtraktion von $\sin(\alpha + \beta)$ und $\sin(\alpha - \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta,$$

eingesetzt

18) $$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Durch Addition und Subtraktion von $\cos(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha - \beta)$ und Einsetzung der obigen Werthe

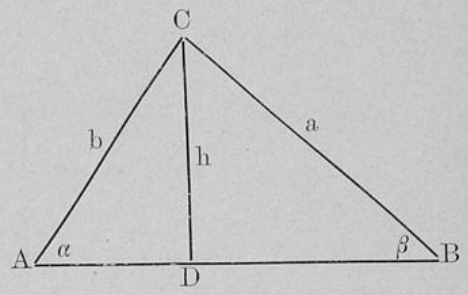
19) $$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$$

20) $$\cos x - \cos y = - 2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 30.

Der Sinussatz.



Fällt man in dem schiefwinklig - ungleichseitigen Dreieck ABC die Höhe CD = h, so ist

$$\frac{h}{b} = \sin\alpha, \qquad h = b \sin\alpha,$$

$$\frac{h}{a} = \sin\beta, \qquad h = a \sin\beta$$

$a \sin\beta = b \sin\alpha$, d. i. als Proportion geschrieben:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta.$$

In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten zu einander wie die Sinus der ihnen gegenüberliegenden Winkel.

Durch Fällung einer zweiten Höhe auf a erhalten wir

$$b : c = \sin\beta : \sin\gamma,$$

woraus allgemein

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

Mit Hülfe des Sinussatzes lässt sich ein Dreieck berechnen, wenn 2 Seiten und einer der ihnen gegenüberliegenden Winkel oder 2 Winkel und 1 Seite gegeben sind.

Beispiel. Gegeben: a, α, β. Gesucht: γ, b, c, J.

Aus $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ ergiebt sich

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \gamma = 2R - (\alpha + \beta).$$

Aus $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

$$c = \frac{a \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$J = \frac{ch}{2} = \frac{c\,a \sin\beta}{2}.$$

Kreisberechnung.

§ 31.

Alle Kreise sind ähnliche Figuren.

In ähnlichen Figuren sind die homologen Linien proportional.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sind also $P, P_1, P_2, \ldots$ die Umfänge von Kreisen und ihre entsprechenden Radien $r, r_1, r_2 \ldots\ldots$, so verhält sich $P : P_1 : P_2 = 2r : 2r_1 : 2r_2$, oder in anderer Umstellung

$$\frac{P}{2r} = \frac{P_1}{2r_1} = \frac{P_2}{2r_2} = \pi,$$

wo π eine gewisse, bis jetzt noch unbestimmte Zahl ist, welche angiebt, wieviel mal grösser die Peripherie eines Kreises ist als sein Durchmesser.

Die Zahl π berechnen wir näherungsweise. Ein dem Kreise einbeschriebenes reguläres Sechseck ist kleiner als seine Peripherie, ein demselben umschriebenes reguläres Sechseck grösser als dieselbe.

Da nun die Seite des einbeschriebenen regulären Sechsecks gleich dem Radius r des Kreises ist, so beträgt der Umfang 6r und mithin ist für das Sechseck

$$\pi_6 = \frac{6r}{2r} = 3.$$

Für die Peripherie des Kreises ist also $\pi > 3$.

Das ein- und umbeschriebene Zwölfeck nähern sich der Kreisperipherie mehr als das Sechseck und ergeben demnach genauere Werthe für π als dieses. Das ein- und umbeschriebene 24-eck treten dem Kreise näher als das 12-eck, und indem wir fortschreitend die Seitenzahl verdoppeln, können wir die ein- und umgeschriebenen Polygone dem Kreise beliebig nahe bringen und dadurch π beliebig genau bestimmen.

Wir gebrauchen zu dieser Berechnung die beiden folgenden Sätze.

§ 32.

Aufgabe. Aus der Seite s des inneren n-ecks die Seite s_1 des inneren 2n-ecks zu berechnen.

Auflösung. Sei (Fig. 4) $AB = s$ die Seite des einbeschriebenen n-ecks, O der Mittelpunkt des Kreises, und $OE \perp AB$ treffe verlängert den Kreis in F, so ist $AF = s_1$ die Seite des einbeschriebenen 2n-ecks.

Nun ist $AE = \frac{1}{2} s$, also $s_1^2 = \frac{1}{4} s^2 + EF^2 = \frac{1}{4} s^2 + (OF - OE)^2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist $OF = r$, $OE^2 = OA^2 - AE^2$, d. i.

$$OE^2 = r^2 - \frac{1}{4} s^2,$$

$$(OF - OE)^2 = \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}\right)^2$$

$$= r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2} + r^2 - \frac{1}{4} s^2$$

$$= 2r^2 - \frac{1}{4} s^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$$

Also ist $s_1^2 = \frac{1}{4} s^2 + 2r^2 - \frac{1}{4} s^2 - 2r\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$

$$s_1 = \sqrt{2r\left(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}\right)}$$

oder $s_1 = \sqrt{r\,(2r - \sqrt{4r^2 - s^2})}$.

§ 33.

Aufgabe. Aus der Seite s des inneren n-ecks die Seite S des äusseren n-ecks zu berechnen.

Auflösung. Ziehen wir in Fig. 4 durch F eine Parallele zu AB und verlängern die Radien OA und OB, bis sie dieselbe in C und D schneiden, so ist $CD = S$, $CF = \frac{1}{2} S$.

Nun verhält sich

$$CF : FO = AE : EO,$$

d. i. $\frac{1}{2} S : r = \frac{1}{2} s : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}$,

$$S : s = r : \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2},$$

$$S = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}} = \frac{2rs}{\sqrt{4r^2 - s^2}}.$$

Berechnet man auf diese Weise aus dem regulären Sechseck das innere und äussere 12-eck, 24-eck, 48-eck, 96-eck u. s. w., so erhält man π_6 und Π_6 für inneres und äusseres π gesetzt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\pi_6 = 3, \qquad \Pi_6 = 3{,}4641$$
$$\pi_{12} = 3{,}1058 \qquad \Pi_{12} = 3{,}2154$$
$$\pi_{24} = 3{,}1326 \qquad \Pi_{24} = 3{,}15966$$
$$\pi_{48} = 3{,}13935 \qquad \Pi_{48} = 3{,}146086$$
$$\pi_{96} = 3{,}14153 \qquad \Pi_{96} = 3{,}14271$$

u. s. w.

Aus dem regulären 96-eck berechnete Archimedes die Zahl π und fand $\pi = 3^1/_7 = \frac{22}{7} = 3{,}142$. Adrian Metius fand Ende des 16. Jahrhunderts die genauere Zahl $\pi = \frac{355}{113}$, und Ludolph von Ceullen (1596) ging in seiner Genauigkeit noch über diese hinaus. (Ludolph'sche Zahl). Bis auf 15 Dezimalstellen genau ist

$$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793 \ldots\ldots$$

Im regulären innern Sechseck ist $r = s$, also die Seite des innern Zwölfecks

$$s_{12} = \sqrt{r\,(2r - r\sqrt{3})} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}},$$

oder wenn wir den Radius $r = 1$ setzen,

$$s_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Hieraus ist S_{12} zu berechnen.

Da $\frac{P}{2r} = \pi$ war, so ist die Peripherie des Kreises

$$P = 2r\pi.$$

§ 34.

Aufgabe. Den Inhalt des Kreises zu berechnen.

Auflösung. Wir zerlegen den Kreis mit dem Radius r vom Mittelpunkte aus in unendlich viele unendlich kleine Dreiecke mit der Basis δ und der Höhe $h = r$. Dann ist der Inhalt eines solchen Dreiecks $\frac{\delta r}{2}$, und der Inhalt aller, d. h. des Kreises

$$\frac{\delta r}{2} + \frac{\delta r}{2} + \frac{\delta r}{2} + \ldots\ldots = \frac{r}{2}\,(\delta + \delta + \delta + \ldots\ldots).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe aller δ ist aber gleich der Peripherie des Kreises, also $= 2r\pi$, mithin der Inhalt des Kreises

$$J = \frac{r}{2} \cdot 2r\pi, \text{ d. i. } J = r^2\pi.$$

§ 35.

Aufgabe. Den Kreisbogen zum Centriwinkel ϱ im Kreise mit dem Radius r zu berechnen.

Auflösung. Der Bogen (arc ϱ) ist der sovielste Theil der Peripherie, wie ϱ von 360^0. Es ist demnach

$$\text{arc } \varrho : 2r\pi = \varrho : 360^0,$$

$$\text{arc } \varrho = \frac{r\varrho\pi}{180^0}.$$

Aufgabe. Den Inhalt des Sektors zum Centriwinkel ϱ im Kreise mit dem Radius r zu berechnen.

Auflösung. Es verhält sich der Sektor zum Kreise wie $\varrho : 360^0$, also

$$\text{sect } \varrho : r^2\pi = \varrho : 360^0,$$

$$\text{sect } \varrho = \frac{r^2\varrho\pi}{360^0}.$$

Druckfehler und Berichtigungen.

Auf Seite 5 ist die Formel $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ statt ^{3}.

- - - $x^2 - y^2 = u \sqrt{u^2 - 4v}$

- - - $x^3 - y^3 = (u^2 - v) \sqrt{u^2 - 4v}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summ ipherie des Kreises, also $= 2r\pi$, m

Aufgabe. ϱ im Kreise mit dem Radius r zu be

Auflösung. Theil der Peripherie, wie ϱ von 360^0.

Aufgabe. iwinkel ϱ im Kreise mit dem Radiu

Auflösung. Kreise wie $\varrho : 360^0$, also

en.

Auf Seite 5 $ab + b^2$) statt ^{3}.

- - -

- - -

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf