Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie.

Einleitung.

Die Aufgabe, die Außenwelt zu verstehen und zu beherrschen, eine Aufgabe, die sich die Menschheit von Alters her gestellt hat, führte sehr bald zur Ausbildung der Wissenschaft, die für beides eine Grundlage ist, zur Ausbildung der Wissenschaft von Raum und Zahl, der Mathematik. Mit mathematischen Spekulationen suchten die alten Philosophen die Gestalt und Größe unseres Wohnorts, der Erde, die Erscheinungen des gestirnten Himmels über uns, das Wesen aller Dinge zu ergründen, mit mathematischen Messungen und Rechnungen bestimmte man Länge von Tag, Monat und Jahr, die Größe und Gestalt der Ländereien, schlichtete man Grenzstreitigkeiten, die in den Anfängen der Kultur nicht weniger häufig waren als in unserer Zeit. Das mathematische Wissen gehörte neben anderem bei den alten Völkern zum Geheimwissen der Kaste der Priester und trug wesentlich dazu bei, das Ansehen derselben zu erhöhen.

In der Gegenwart ist die Mathematik nicht mehr wie im Altertum die Wissenschaft an und für sich, neben der Mathematik arbeiten andere Wissenschaften mit nicht geringerem Erfolge an der eingangs erwähnten Aufgabe. Aber immer noch ist sie nach beiden Seiten, für die Philosophie und für die Technik, von grundlegender Bedeutung.

Indes übt die Mathematik nicht nur auf Philosophie und Technik Einfluß, sie erfährt auch dauernd von beiden Beeinflussung, bis auf den heutigen Tag, und dieser Einfluß erstreckt sich bis auf die Anfänge der Wissenschaft, die Elemente.

Auf den Fernerstehenden macht die Mathematik, namentlich die Elementarmathematik, leicht den Eindruck des Fertigen, Starren. Nach einer Meinung, die man oft hören kann, ist die Mathematik die Wissenschaft, in der alles bewiesen wird; Zweifel und Meinungsverschiedenheiten scheinen da vollständig ausgeschlossen.

Thatsächlich stammt ja auch der mathematische Lehrstoff, den die höheren Lehranstalten ihren Zöglingen übermitteln, schon aus dem grauen Altertum. Ebenso weicht die Gestalt, in welcher der Lehrstoff den Schülern zugeführt wird, von der aus dem Altertum überkommenen verhältnißmäßig wenig ab; der Laie sieht zwischen den Elementen Euklids und den heutigen geometrischen Schulbüchern keinen wesentlichen Unterschied, er gewinnt den Eindruck, als ob es sich in der Elementar-Geometrie um Fragen handelt, an denen sich seit Jahrtausenden nichts mehr ändert.

Wer aber in und mit der Wissenschaft der Geometrie lebt, für den schwindet sehr bald der Eindruck des Starren, er kann zeitweise zu der Anschauung gelangen, daß selbst für eine scheinbar so fest gefügte Wissenschaft noch heute das *πάντα ῥεῖ* des griechischen Philosophen Geltung hat.

Nicht nur ist in ihr wie in jeder Wissenschaft der Stoff für neue Forschungen unbegrenzt, nicht nur tauchen in ihr wie auf anderen Gebieten geistiger Thätigkeit immer neue Probleme auf, entstehen neue Richtungen und Zweige der Wissenschaft, sondern auch die Anfänge der Wissenschaft,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die scheinbar so sicher begründeten Elemente, erhalten infolge der Fortschritte der Wissenschaft eine ganz neue Beleuchtung. Die Anschauungen der Wissenschaft über die Grundlagen des ganzen stolzen Gebäudes, die Einsicht in den inneren Zusammenhang der einzelnen geometrischen Wahrheiten, die Bedeutung einzelner Zweige für das praktische Leben, alle diese Dinge haben im Laufe der letzten Jahrzehnte wesentliche Aenderungen erfahren.

Gegenüber dieser Umgestaltung der wissenschaftlichen Ansichten über die Elementar-Geometrie erhebt sich nun immer dringender die Frage: Kann oder muß die Schule den Fortschritt der Wissenschaft dauernd unberücksichtigt lassen? Wird diese Frage verneint, so entsteht die weitere, in welchem Umfange kann die Schule ihre Zöglinge an den neuen Erkenntnissen teilnehmen lassen, ohne die Schüler geistig mehr zu belasten als bisher? Soll ein völlig neuer Bau der Elemente der Geometrie aufgeführt werden?

Neben der wissenschaftlichen Arbeit, die Elemente der Geometrie tiefer zu erfassen und sorgfältiger zu begründen, geht eine kaum minder lebhafte Arbeit auf dem Gebiete der mathematischen Unterrichtsmethodik einher. Fast in jedem Jahre sind mehr oder minder umfassende Vorschläge zur Änderung der methodischen Behandlung des Stoffes, des Lehrbetriebs, zu verzeichnen. Es liegt die Gefahr nahe, daß durch die Fülle der methodischen Vorschläge der Fortschritt gehemmt, statt gefördert wird, daß das Wertvolle durch die Menge des Wertlosen unterdrückt wird. Es ist schon der Vorschlag gemacht worden, einen besonderen Ausschuß von Sachverständigen einzusetzen mit der Aufgabe, die immer neu auftauchenden Vorschläge zu prüfen, die Spreu vom Weizen zu trennen. Es kann fraglich sein, ob eine solche Kommission schließlich mehr schaden als nützen würde; auch die hervorragendsten Geister sind von Einseitigkeiten nicht frei und laufen Gefahr, in ihrem Ideenkreise zu erstarren.

Auf alle Fälle jedoch darf die Frage nach der Gestalt, die der Elementar-Geometrie für den Unterricht zu geben ist, nicht für eine erledigte angesehen werden.

Das Folgende soll einen kleinen Beitrag zur Klärung dieser Frage liefern. Es sollen die hauptsächlichsten Vorschläge, die sich einerseits auf eine bessere Grundlegung der Geometrie, andererseits auf eine die Ergebnisse der projektiven Geometrie berücksichtigende Umgestaltung des Lehrgangs beziehen, einer näheren Erörterung unterzogen werden, um dann zu untersuchen, was von den Neuerungen im Unterricht verwendet werden darf.

Die Grundlagen der Geometrie.

a. Das 5. Postulat Euklids.

Von den Ergebnissen, mit denen die geometrische Forschung des letzten Jahrhunderts uns in so reichem Maße beschenkt hat, sind für die Schule von besonderer Wichtigkeit diejenigen, die uns über die Grundlagen der Geometrie Aufklärung verschafft haben.

Bis zum Anfang des neunzehnten Jahrhunderts galten die Elemente Euklids in jeder Beziehung als ein mustergiltiges Beispiel für strenge wissenschaftliche Entwicklung, die Geometrie als Vorbild der Wissenschaften, die nicht einer gleich sicheren Grundlage sich erfreuten. Um die eigenen Wissenschaften ebenso sicher zu begründen, wählten die Forscher auf den verschiedensten Gebieten, namentlich Philosophen, gern für die Darstellung ihrer Forschungen die von Euklid überkommene Form des geometrischen Beweises, so z. B. Spinoza in seiner Ethik, ebenso Christian Wolf in seinen philosophischen Schriften.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kant allerdings war sich schon darüber klar, daß die äußerliche mathematische Form der Darstellung allein einer Wissenschaft nicht Sicherheit der Begründung verleihen kann. Doch sind auch noch bei Kant mathematische Ideeen, seine Ansichten über die Natur des mathematischen Wissens, die Grundlage seines ganzen philosophischen Systems, wie er es in der „Kritik der reinen Vernunft" entwickelt; diese dem System Kants zu Grunde liegenden mathematischen Ansichten sind durch die neueren mathematischen Forschungen als unrichtig erwiesen worden.

Kant unterscheidet bekanntlich zwischen Erkenntnissen aus der Erfahrung, den Kenntnissen a posteriori, und den Erkenntnissen, die von der Erfahrung unabhängig sind, den Erkenntnissen a priori. Er ist der Ueberzeugung, daß wir es in der Mathematik, in der Arithmetik und Geometrie, mit einem Wissen zu thun haben, das von aller Erfahrung unabhängig ist, das allein durch die Natur unseres Geistes bedingt ist. Unsere Anschauung vom Raume entwickele sich nicht aus der Erfahrung, sondern sei ebenso wie die Zeit und die Causalität Vorbedingung jeder Erfahrung. Aus der Natur unseres Geistes ergebe sich die Art unserer Raumanschauung, und auf dieser sei das ganze Gebäude der Geometrie aufgebaut.

Die Philosophie Kant's hat lange Zeit die Geister beherrscht und beherrscht sie teilweise heute noch. Bei der großen Autorität, der sich das Werk Euklids erfreute, wagte man, obgleich die Elemente Euklids durchaus nicht die Anschauungen Kant's bedingen, an der Grundlage, der Thatsache, daß in der Mathematik synthetische Urteile a priori vorliegen, nicht zu zweifeln. Der erste, der einen Zweifel hieran aussprach, war der größte Mathematiker Deutschlands, Gauß*).

Die Entwicklung der Frage**) knüpft sich an die Versuche, das s. g. XI. Axiom oder, wie es wohl richtiger genannt wird, das 5. Postulat Euklids zu beweisen. Dasselbe lautet bekanntlich: „Werden zwei gerade Linien von einer dritten so geschnitten, daß die beiden inneren auf einerlei Seite (der schneidenden Linie) liegenden Winkel zusammen kleiner als zwei rechte sind, so treffen diese beiden Linien genugsam verlängert an eben dieser Seite zusammen."

Diesem Satz wollten die Mathematiker lange Zeit nicht den Charakter eines Grundsatzes zuerkennen. Gleichbedeutend mit diesem Postulat ist der Satz, daß es durch einen Punkt zu einer geraden Linie nur eine Parallele giebt, oder der Satz, daß die Winkel eines Dreiecks zusammen zwei rechte Winkel bilden. Einen dieser Sätze suchte man als eine Folgerung der übrigen Grundsätze Euklids nachzuweisen. Namentlich war es der bekannte französische Mathematiker Legendre, der wieder und wieder dies Problem zu erledigen suchte; er glaubte mehrfach, einen lückenlosen Beweis dieses Satzes liefern zu können. Alle diese und andere zahllose Beweisversuche haben sich als fehlerhaft erwiesen.

Da war es Gauß, der mit besonderem Nachdruck darauf hinwies, daß diese Versuche überhaupt aussichtslos seien, daß man auch eine Geometrie aufbauen könne, für welche in dem streitigen Punkte eine andere Annahme gemacht wird, in welcher der Satz von der Summe der Dreieckswinkel nicht gilt.

Damit erschienen aber die geometrischen Wahrheiten in einem neuen Lichte, sie verloren den Charakter des Zwingenden, der für Kant der Ausgangspunkt seiner Ueberlegungen war. Wenn es — rein logisch betrachtet — Sache der Willkür ist, welche Annahme man über das Parallelenaxiom

*) Neuere Forschungen haben gelehrt, daß Gauß in einem italienischen Mathematiker, Saccheri, einen Vorläufer hat.

**) Vergl. Schur, die Parallelenfrage im Lichte der modernen Geometrie. Päd. Archiv. Bd. 34.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

trifft, so können die geometrischen Grundsätze nicht durch die Natur unseres Geistes bedingt sein, die Geometrie ist dann nicht, wie Kant geglaubt hatte, eine aprioristische Wissenschaft.

Die Idee von Gauß, die von diesem selbst nicht näher ausgeführt wurde, verfolgten zwei seiner Schüler weiter, der Ungar Bolyai und der Russe Lobatschefsky. Sie entwickelten ein vollständiges System der Geometrie unter der Voraussetzung, daß das 5. Euklidsche Postulat nicht gilt, unter der Annahme, daß es durch einen Punkt zu einer Geraden nicht bloß eine Parallele giebt. Das System der Geometrie, das sie aufstellten, wich allerdings in vielen Punkten von dem Euklids ab, war aber in sich ebenso widerspruchslos wie dieses.

Einen weiteren Fortschritt in der Frage nach der Natur der geometrischen Grundsätze brachte 1854 Riemanns Schrift: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen." Er zeigte, warum das 5. Postulat aus den übrigen Axiomen Euklids nicht gefolgert werden kann, daß zu seiner Ableitung eine besondere Annahme über die Natur des Raumes notwendig ist. Den Raum kann man sich verschieden denken und diese Verschiedenheit des Raumes durch einen Rechenausdruck charakterisieren, den Riemann das Krümmungsmaß des Raumes nennt. Soll im Raume freie Beweglichkeit starrer Körper möglich sein, so daß die Körper bei der Bewegung die Gestalt nicht ändern, so muß dies Krümmungsmaß für alle Punkte des Raumes einen konstanten Wert haben. Der Wert dieser Konstanten kann verschieden sein, positiv, negativ oder Null. So sind bei freier Beweglichkeit starrer Körper drei verschiedene Geometrieen denkbar, eine Geometrie positiven, eine Geometrie negativen Krümmungsmaßes und eine Geometrie, in der das Krümmungsmaß den Wert 0 hat.

Für alle drei Geometrieen sind die sämtlichen Euklidischen Axiome bis auf das 5. Postulat in gleicher Weise erfüllt. In der ersten, in der nebenbei die Annahme der Unendlichkeit der Länge der Geraden nicht mehr gilt, giebt es zu einer Geraden durch einen beliebigen Punkt keine sie nicht schneidende Gerade, in der zweiten mehr als eine und nur in der dritten stets eine und nur eine. Das 5. Postulat ist also allein die Folge der Annahme, daß in unserem Erfahrungsraum das Krümmungsmaß den Wert Null hat.

Weitere Untersuchungen in der vorliegenden Frage, die von Helmholtz, Beltrami, Clifford, Felix Klein und Lie angestellt wurden, haben das vorstehende Sachverhältnis nach allen Seiten klar gestellt und im Einzelnen weiter ausgeführt.

In dieser Beziehung war von besonderem Werte der Vorschlag von F. Klein, sich von der Rücksichtnahme auf die Parallelensätze am sichersten dadurch zu befreien, daß man zunächst alle geometrischen Konstruktionen auf ein bestimmtes, vorher abgegrenztes, endliches Gebiet beschränkt. Man gelangt dabei allgemein zur Einführung s. g. idealer Punkte, unerreichbarer Punkte (bloßer Gedankendinge); unter diesen Begriff fallen auch die (unendlich fernen) Schnittpunkte paralleler Geraden.

Von Bedeutung war ferner das Ergebnis der Forschungen von Lie, daß bei allen Bewegungen, d. h. bei den kollinearen Transformationen, bei denen jede Figur in eine ihr kongruente übergeführt wird, eine Fläche 2. Grades unverändert bleibt. Bei Voraussetzung des 5. Postulats von Euklid artet diese Fläche in einen imaginären Kegelschnitt aus, in den s. g. unendlich fernen imaginären Kugelkreis. Die metrischen Eigenschaften der Raumgebilde sind Beziehungen der Gebilde zu dieser Fläche 2. Grades bezw. zu dem unendlich fernen imaginären Kugelkreis.

Die neueren Forschungen haben somit gezeigt, daß in der Frage des Parallelenaxioms Euklid seinen Widersachern gegenüber im Recht ist; sie zeigen aber auch, daß die Natur des geometrischen Wissens an und für sich kein Anlaß ist, für die Wissenschaft der Geometrie eine Sonderstellung zu

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beanspruchen. Allerdings ist für den Mathematiker als solchen die rein philosophische Frage nach der Herkunft der geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze ohne weitere Bedeutung. Aus der Natur des mathematischen Wissens kann man aber nicht die Folgerung ziehen, die Kant zieht, daß wir es in der Mathematik mit synthetischen Urteilen a priori zu thun haben. Die Mathematik erscheint hiernach vielmehr als ein Zweig der Naturwissenschaften. Die Grundthatsachen der Geometrie stützen sich auf Beobachtungen, die der Mensch zu jeder Zeit zu machen gezwungen ist, die er deswegen klarer erfaßt hat als irgend welche andere.

In außerordentlich klarer Weise ist das richtige Sachverhältnis von F. Klein im 50. Bd. der Math. Annalen („Zur ersten Vertheilung des Lobatschefsky-Preises") dargelegt worden. Es sei gestattet, hier einzelne besonders wichtige Äußerungen des berühmten Forschers abzudrucken.

„Woher stammen die Axiome? Ein Mathematiker, der die nicht-euklidischen Theorieen kennt, wird kaum noch die Meinung früherer Zeiten festhalten wollen, als seien die Axiome nach ihrem konkreten Inhalte Notwendigkeiten der inneren Anschauungen; was dem Laien als solche Notwendigkeit erscheint, erweist sich bei längerer Beschäftigung mit den nicht-euklidischen Problemen als Resultat sehr zusammengesetzter Prozesse, insbesondere auch der Erziehung und Gewöhnung. Stammen die Axiome aus der Erfahrung? Helmholtz ist hierfür bekanntlich in der nachdrücklichsten Weise eingetreten." Aber seine Darlegungen sind unzureichend. Zweifellos hat die Erfahrung an dem Zustandekommen einen großen Anteil. Aber „die Ergebnisse irgend welcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse von Beobachtungen Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit." „In dieser Idealisierung von empirischen Daten liegt meines Erachtens das Wesen der Axiome."*) Unser Ansatz ist dabei in seiner Willkür nur dadurch beschränkt, daß er sich den Erfahrungsthatsachen anschmiegen muß und andererseits keine logischen Widersprüche einführen darf. Es tritt dann als Regulator noch dasjenige hinzu, was Mach „„die Ökonomik des Denkens"" nennt. Niemand wird vernünftigerweise ein komplizierteres Axiomensystem festhalten, sobald er einsieht, daß er mit einem einfacheren Systeme die zur Darstellung der empirischen Daten erforderliche Genauigkeit bereits vollauf erreicht." „Jedermann wird für praktische Zwecke die Formeln der gewöhnlichen Geometrie und nicht etwa diejenigen der Lobatschefsky'schen Geometrie in Anwendung bringen."

b) Die übrigen Grundbegriffe und Grundsätze Euklids.

Im Zusammenhange mit der im Vorstehenden behandelten Frage hat man sodann das ganze System der Grundbegriffe und Grundsätze, die Euklid zur Ableitung der geometrischen Wahrheiten benutzt, einer eingehenden Diskussion unterzogen.

Im Großen und Ganzen bilden jene Sätze auch heute noch eine geeignete Grundlage für die Geometrie. Mit vollem Recht bewundern wir auch jetzt noch den Scharfblick Euklids, der schon vor mehr denn zwei Jahrtausenden aus den geometrischen Anschauungen diejenigen Elemente auszusondern verstand, die zu einem folgerichtigen Aufbau des gesamten Gebäudes notwendig und ausreichend sind.

Es gilt dies allerdings nur im Großen und Ganzen. In Grundlage und Aufbau sind doch Mängel vorhanden, welche die Wissenschaft zu einem Neubau veranlaßt haben.

*) Nicht anders verfährt die Physik bei Aufstellung allgemeiner Gesetze, z. B. des Beharrungsgesetzes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zunächst sucht Euklid, Definitionen der geometrischen Grundbegriffe zu geben. Er sagt: „Ein Punkt ist, was keine Teile hat, die Linie ist Länge ohne Breite, eine gerade Linie ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen Punkten auf einerlei Art liegt, eine Fläche ist, was nur Länge und Breite hat, eine ebene Fläche ist diejenige, welche zwischen allen in ihr befindlichen geraden Linien auf einerlei Art liegt, ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien gegen einander, die in einer Ebene zusammentreffen, ohne in gerader Linie zu liegen."

Da Euklid die Erklärungen seinen Elementen vorausschickt, sollte man annehmen, daß einerseits die Begriffe, um die es sich handelt, in den Definitionen auf einfachere, ursprünglichere zurückgeführt werden, und daß andererseits die ihnen in den Definitionen beigelegten Eigenschaften zum Beweise der in den Elementen abgeleiteten Lehrsätze notwendig und ausreichend seien. Beides ist nicht der Fall. Die den Begriffen beigelegten Eigenschaften sind an und für sich nicht klarer als die Grundbegriffe selbst, und bei den Beweisen greift Euklid auf diese Erklärungen nie zurück.

Neben den Erklärungen der Grundbegriffe finden wir am Anfang der Elemente noch 6 Postulate und 9 Grundsätze. Diese sollen die geometrischen Grundthatsachen enthalten, auf Grund deren sich alle weiteren Konstruktionen ausführen und alle weiteren Sätze durch logische Schlüsse ableiten lassen. Auch das ist nicht der Fall.

Die ersten drei Postulate: „Es sei ein für alle Mal gefordert, 1. von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen, 2. jede begrenzte gerade Linie stetig in gerader Richtung zu verlängern, 3. um jeden Punkt als Mittelpunkt und in jedem Abstand einen Kreis zu beschreiben" bilden eine ausreichende Grundlage für die planimetrischen Konstruktionen, nicht aber für die stereometrischen. Bei diesen ist noch das Postulat notwendig, durch drei beliebige Punkte des Raumes eine Ebene zu legen und in dieser die in den ersten drei Postulaten genannten Konstruktionen vorzunehmen.

Ebenso reichen für die Beweise die Postulate und Grundsätze nicht aus. Euklid muß schon bei dem ersten Satze, bei dem Nachweis der Möglichkeit eines gleichseitigen Dreiecks über einer gegebenen Strecke, außer den schon aus der Anschauung entnommenen Postulaten und Grundsätzen von neuem die Anschauung zu Hilfe nehmen. Der Beweis dafür, daß die mit der Strecke um ihre Endpunkte konstruierten Kreise sich schneiden, läßt sich mit Hilfe der Grundsätze und Postulate Euklids nicht führen.

Auch sonst noch giebt Euklid im Einzelnen zu Ausstellungen Anlaß. Z. B. stellt er im Anfang seiner Stereometrie die Erklärung auf: „Eine gerade Linie ist auf einer Ebene senkrecht, wenn sie mit allen sie treffenden und in der Ebene liegenden geraden Linien rechte Winkel bildet." Ehe diese Erklärung aufgestellt wurde, mußte erst ihre Möglichkeit nachgewiesen werden. Der Erklärung mußte der Satz vorausgehen: „Eine gerade Linie, die auf zwei einander schneidenden geraden Linien einer Ebene in ihrem Schnittpunkte senkrecht steht, steht auf allen durch den Schnittpunkt gehenden und in der Ebene liegenden Geraden senkrecht."

Aus dem Vorstehenden geht wohl zur Genüge hervor, daß trotz der Bewunderung, der Euklid für alle Zeiten gewiß ist, trotz seiner auch heute noch bestehenden großen Vorzüge, der Versuch eines Aufbaues der Geometrie, der die Fehler Euklids vermeidet, ein berechtigter genannt werden muß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Vorlesungen über neuere Geometrie von Prof. Dr. M. Pasch.*)

Die erste zusammenhängende Darstellung der Anfänge der Geometrie auf Grund der neuen Anschauungen verdanken wir M. Pasch. Nach der Ansicht von Pasch ist die Geometrie eine Erfahrungswissenschaft, ein Teil der Naturwissenschaft. Die Brauchbarkeit der Geometrie zur Verwendung in den Naturwissenschaften und im praktischen Leben beruhe allein darauf, daß die geometrischen Begriffe genau den empirischen Objekten entsprechen. Vor anderen Teilen der Naturwissenschaften zeichne sich die Geometrie dadurch aus, daß sie nur eine sehr geringe Anzahl von Begriffen und Gesetzen aus der Erfahrung zu entnehmen braucht. Die ein für alle Mal der Erfahrung entnommenen Grundthatsachen seien in der Wissenschaft zu verarbeiten, ohne daß es von neuem notwendig wird, auf die Sinneswahrnehmung zurückzugehen.

Da das Werk von Pasch nicht in dem Maße bekannt geworden ist, in dem es wünschenswert wäre, soll im Folgenden der Aufbau des Systems bei Pasch eingehender dargelegt werden.**)

Der ganzen Entwickelung zu Grunde gelegt sind gewisse aus der Erfahrung gewonnene Grundbegriffe und Grundsätze. Pasch geht von den nicht weiter zu definierenden Begriffen des Punktes, der begrenzten Linie und Fläche aus. Ebenso ist ein Grundbegriff die zuerst eingehender behandelte begrenzte gerade Strecke. Der Ableitung der Eigenschaften der Geraden werden folgende Grundsätze vorausgeschickt:

1. Zwischen zwei Punkten kann man stets eine gerade Strecke ziehen, und zwar nur eine.
2. Man kann stets einen Punkt angeben, der innerhalb einer gegebenen Strecke liegt.
3. Liegt C innerhalb der Strecke AB, so liegt A außerhalb der Strecke BC.
4. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so sind alle Punkte der Strecke AC zugleich Punkte der Strecke AB.
5. Liegt der Punkt C innerhalb der Strecke AB, so kann ein Punkt, der keiner der Strecken AC und BC angehört, nicht zur Strecke AB gehören.
6. Sind A und B beliebige Punkte, so kann man den Punkt C so wählen, daß B innerhalb der Strecke AC liegt.
7. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecken AC und AD, so liegt entweder der Punkt C innerhalb der Strecke AD oder der Punkt D innerhalb der Strecke AC.
8. Liegt der Punkt B innerhalb der Strecke AC und der Punkt A innerhalb der Strecke BD, und sind CD durch eine gerade Strecke verbunden, so liegt A auch innerhalb der Strecke CD.

Mit Hilfe dieser 8 Grundsätze werden die Eigenschaften der geraden Linie abgeleitet; mit ihrer Hilfe werden 23 Lehrsätze über die gerade Linie wirklich bewiesen. Hier und später wird Wert darauf gelegt, daß die Beweise von der Zeichnung irgend einer Figur unabhängig sind. Dabei wird von allen Beweisgründen Rechenschaft abgelegt, auch von den unscheinbarsten; es wird nirgends mehr die Anschauung bei den Beweisen gebraucht.

*) B. G. Teubner 1882.

**) Z. B. ist das Buch in dem mehrbändigen Werke von Schotten über Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts nicht einmal erwähnt, trotzdem es gerade für die dort behandelten Fragen von grundlegender Bedeutung ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Von der begrenzten Strecke gelangt der Verfasser zu der Geraden, die über die begrenzenden Punkte hinaus geht. Unter den Lehrsätzen finden sich unter anderen die Sätze: „Durch zwei beliebige Punkte kann man stets eine Gerade legen", „Alle Geraden, welche zwei Punkte gemeinsam haben, fallen mit einander zusammen", dann mehrere Lehrsätze über die gegenseitige Lage der Punkte einer Geraden, über das Zwischeneinanderliegen und Getrenntsein der Punkte. Dabei bleibt die Betrachtung auf praktisch erreichbare Punkte der Geraden beschränkt.

Nach Erledigung der grundlegenden Eigenschaften der Geraden wendet sich die Untersuchung der Ebene zu. Auch hier bildet den Ausgangspunkt die aus der Erfahrung bekannte begrenzte Ebene. Die aus der Erfahrung bekannten Eigenschaften der Ebene werden in folgenden vier Grundsätzen ausgesprochen:

1. Durch drei beliebige Punkte kann man eine ebene Fläche legen.
2. Wird durch zwei Punkte einer ebenen Fläche eine gerade Strecke gezogen, so existiert eine ebene Fläche, welche alle Punkte der vorigen und auch die Strecke enthält.
3. Wenn zwei ebene Flächen E, E' einen Punkt gemein haben, so kann man einen andern Punkt angeben, der sowohl mit allen Punkten von E als auch mit allen Punkten von E' je in einer ebenen Fläche enthalten ist.
4. Sind in einer ebenen Fläche drei Punkte A, B, C durch die geraden Strecken AB, AC, BC paarweise verbunden, und ist in derselben ebenen Fläche die gerade Strecke DE durch einen innerhalb der Strecke AB gelegenen Punkt gezogen, so geht die Strecke DE oder eine Verlängerung derselben entweder durch einen Punkt der Strecke AC oder durch einen Punkt der Strecke BC.

Diese Grundsätze geben die Möglichkeit, die begrenzte Ebene auf weitere Punkte auszudehnen und die grundlegenden Lehrsätze über Ebenen abzuleiten, z. B. die Sätze, daß man durch drei Punkte immer eine Ebene legen kann, daß eine Gerade, welche mit einer Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in ihr liegt, daß zwei Ebenen, die einen Punkt gemein haben, sich stets in einer Geraden schneiden.

Im Anschluß hieran werden darauf die Eigenschaften des Strahlenbüschels, des Ebenenbüschels und des Strahlenbündels entwickelt. Irgend zwei Strahlen einer Ebene bestimmen ein Bündel, das Bündel der Strahlen, die durch den Schnittpunkt gehen.

Es läßt sich zeigen, daß die Strahlen des Bündels sich auch konstruieren lassen, wenn der Schnittpunkt der gegebenen ersten beiden Strahlen des Bündels nicht bekannt oder unerreichbar ist. Diese Konstruktion bietet die Möglichkeit, den Begriff des Punktes zu erweitern, ihn durch das Bündel der durch ihn gehenden Strahlen zu ersetzen. Zu unterscheiden sind die ursprünglich aus der Anschauung bekannten eigentlichen Punkte und die erst durch die Konstruktion der zugehörigen Strahlenbündel definierten uneigentlichen Punkte. Es lassen sich die früher für eigentliche Punkte abgeleiteten Sätze bis zu einem gewissen Grade auf die uneigentlichen Punkte übertragen.

In ähnlicher Weise behandelt Pasch das durch zwei beliebige Ebenen bestimmte Ebenenbüschel, die Konstruktion der Elemente dieses Büschels unabhängig davon, ob die Schnittlinie bekannt ist oder nicht, und gelangt vermittelst dieser Konstruktion dazu, neben den eigentlichen (erreichbaren) Geraden durch die Anschauung nicht gegebene, nur durch zwei Ebenen definierte (unerreichbare, uneigentliche) Geraden einzuführen und schließlich auch eben solche uneigentliche (unerreichbare) Ebenen.

Durch eine derartige Erweiterung des Gebrauchs der Worte Punkt, Gerade, Ebene erhalten die Sätze über die Beziehungen dieser Gebilde zu einander eine für alle Fälle gleichmäßige Fassung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

„Zwei Geraden in einer Ebene, ebenso eine Gerade und eine Ebene, haben dann stets einen Punkt zwei Ebenen stets eine Gerade, drei Ebenen stets einen Punkt oder eine Gerade gemein." Um die Lagenbeziehungen der geometrischen Gebilde in allen Fällen, auch für die uneigentlichen Gebilde, gleichmäßig aussprechen zu können, erweitert Pasch auch den Anwendungsbereich des Wortes „zwischen".

Unter Benutzung dieser erweiterten Begriffsfassungen behandelt er dann in der Weise der Geometrie der Lage perspektivische Figuren, harmonische Gebilde und die Lehre von der Reciprocität.

Darauf wendet sich die Untersuchung der Lehre von den kongruenten Figuren zu; die Figuren (es werden zunächst nur Figuren aus eigentlichen Punkten in Betracht gezogen) werden als an festen Körpern befindlich und diese Körper als beweglich gedacht. Die Untersuchung stützt sich auf folgende 10 Grundsätze:

1. Die Figuren a b und b a (wo mit a und b eigentliche Punkte bezeichnet werden) sind kongruent.
2. Zur Figur a b c kann man einen und nur einen eigentlichen Punkt b' derart hinzufügen, daß a b und a b' kongruente Figuren werden und b' in der geraden Strecke a c oder c in der geraden Strecke a b' liegt.
3. Liegt der Punkt c innerhalb der geraden Strecke a b und sind a b c und a'b'c' kongruent, so liegt der Punkt c' innerhalb der Strecke a'b'.
4. Liegt der Punkt c' innerhalb der geraden Strecke a b' und verlängert man die Strecke $a c_1$ um die kongruente Strecke $c_1 c_2$, diese um die kongruente Strecke $c_2 c_3$ u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke $c_m c_{m+1}$, welche den Punkt b enthält.
5. Wenn in der Figur a b c die Strecken a c und b c kongruent sind, so sind die Figuren a b c und b a c kongruent.
6. Wenn zwei Figuren kongruent sind, so sind auch ihre homologen Teile kongruent.
7. Wenn zwei Figuren einer Dritten kongruent sind, so sind sie einander kongruent.
8. Wird von zwei kongruenten Figuren die eine um einen eigentlichen Punkt erweitert, so kann man die andere um einen eigentlichen Punkt so erweitern, daß die erweiterten Figuren wieder kongruent sind.
9. Sind zwei Figuren a b und f g h gegeben, f g h nicht in einer geraden Strecke enthalten, a b und f g kongruent, und wird durch a und b eine ebene Fläche gelegt, so kann man in dieser oder in ihrer Erweiterung genau zwei Punkte c und d so angeben, daß die Figuren a b c und a b d der Figur f g h kongruent sind, und zwar hat die Strecke c d mit der Strecke a b oder deren Verlängerung einen Punkt gemein.
10. Zwei Figuren a b c d und a b c e, deren Punkte nicht in ebenen Flächen liegen, sind nicht kongruent.

Die in den vorstehenden Grundsätzen niedergelegten Eigenschaften der aus eigentlichen Elementen bestehenden kongruenten Figuren lassen sich auf Figuren, die aus beliebigen, auch uneigentlichen Elementen bestehen, ausdehnen. Zu jedem Punkt, jeder Geraden, jeder Ebenen, die einer von zwei kongruenten Figuren zugefügt wird, läßt sich bei der anderen Figur das entsprechende Gebilde finden.

Weiterhin läßt sich die Lehre von den kongruenten Figuren benutzen, um die Stammsätze der projektiven Geometrie, die Lehre von den einförmigen projektiven Gebilden (Punktreihen, Strahlenbüscheln, Ebenenbüscheln), die Lehre von den kollinearen und reciproken Figuren zu vervollständigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die erneute Untersuchung der Eigenschaften kongruenter Figuren derselben Ebene führt dann unter Benutzung der bisher abgeleiteten geometrischen Sätze zur Aufklärung über die Frage der Parallelen. Aus den Eigenschaften projektiver Punktreihen derselben Geraden folgt für kongruente Punktreihen derselben Geraden, daß zu jedem eigentlichen Punkte der Geraden ein mit ihm verknüpfter uneigentlicher Punkt gehört.

Dabei sind rein logisch zwei Fälle denkbar. Entweder gehört zu sämtlichen eigentlichen Punkten der Geraden derselbe uneigentliche Punkt, der s. g. absolute Punkt, oder es bilden die eigentlichen Punkte der Geraden mit den zu ihnen gehörigen uneigentlichen Punkten eine Involution, die s. g. absolute Involution. Der erste Fall ist der der Euklidischen Geometrie, der zweite der der Nichteuklidischen. Die absolute Involution kann eine hyperbolische sein, die zwei Doppelelemente besitzt, oder eine elliptische, die solche Elemente nicht besitzt. Welcher von den möglichen Fällen der Wirklichkeit entspricht, läßt sich rein logisch nicht entscheiden. Wenn eine Gerade der Ebene einen absoluten Punkt bezw. eine absolute Involution besitzt, so gilt dies, wie weiter gezeigt wird, von jeder Geraden der Ebene, so daß die Geraden der Ebene in dieser Beziehung gleichartig sind.

Jeder Geraden der Ebene gehört ferner, wie die Untersuchung symmetrischer kongruenter Figuren zeigt, noch ein außerhalb von ihr, in der zu ihr senkrechten Richtung gelegener uneigentlicher Punkt zu, ihr absoluter Pol, jedem Punkte die absolute Involution der Paare senkrechter Strahlen und eine uneigentliche Gerade, die absolute Polare (senkrecht heißen zwei Geraden, wenn jede durch den absoluten Pol der anderen geht). Im Raume gehört ebenso jedem Punkte eine absolute Polarebene und jeder Ebene ein absoluter Pol zu.

Diese eigentümliche Zuordnung der uneigentlichen absoluten Ebenen, Geraden und Punkte zu den eigentlichen Punkten, Geraden und Ebenen hat den Charakter eines Polarsystems. In der Ebene kann dies Polarsystem ein spezielles sein, ein solches, das sich auf ein Polarsystem in einer einzigen absoluten Geraden beschränkt; dann haben wir den Fall der Euklidischen (parabolischen) Geometrie. Die absolute Gerade ist die unendlich ferne Gerade der Ebene, das Polarsystem ist dasjenige, welches die beiden imaginären Kreispunkte im Unendlichen bestimmt, die Involution ist diejenige, die von einer beliebigen Involution senkrechter Geradenpaare auf der unendlich fernen Geraden ausgeschnitten wird.

Ist das Polarsystem kein spezielles, sondern ein allgemeines, so sind wieder noch zwei Fälle denkbar. Entweder hat das absolute Polarsystem reelle Ordnungselemente, stellt also gewissermaßen einen reellen Kegelschnitt vor, oder es enthält keine solchen reellen Punkte. Im ersten Falle hat man die hyperbolische, Gaußische Geometrie, im zweiten die elliptische, Riemannsche.

In der parabolischen Geometrie giebt es durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele, die Verbindungslinie des Punktes mit dem absoluten Punkt der Geraden, in der hyperbolischen Geometrie giebt es zwei Parallelen, die Verbindungslinien des Punktes mit den Doppelelementen der absoluten Involution der Geraden, in der elliptischen Geometrie giebt es zu einer Geraden keine Parallele.

Die Summe der Winkel eines Dreiecks beträgt, wie Pasch beweist, in der parabolischen Geometrie zwei Rechte, in der hyperbolischen weniger, in der elliptischen mehr als zwei Rechte. Die Länge der Geraden ist in allen drei Fällen unbegrenzt, aber nur in der parabolischen und hyperbolischen Geometrie unendlich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Im Vorstehenden ist der Gedankengang des Werkes von Pasch so ausführlich dargelegt worden, weil das Werk in den Kreisen der höheren Schulen noch lange nicht die Würdigung gefunden hat, die es verdient. Viele Veröffentlichungen, auch aus der neueren Zeit, die sich mit den Grundlagen der Geometrie, mit der Definition der geometrischen Grundbegriffe, mit dem Parallelenaxiom beschäftigen, beweisen, daß die Grundgedanken der betreffenden wissenschaftlichen Forschungen, z. B. die wichtige Thatsache, daß die projektive Geometrie unabhängig vom Parallelenaxiom begründet werden kann, in den Kreisen, die sie in erster Linie angehen, immer noch nicht genügend klar erfaßt ist. Von all den Werken, die sich wissenschaftlich mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigen, ist das Werk von Pasch dasjenige, dessen Verständnis am leichtesten zu gewinnen ist, da es nur geringe Vorkenntnisse voraussetzt. Dabei kann es jedem ein klares Bewußtsein davon geben, was zu einer lückenlosen Begründung der Geometrie erforderlich ist, daß man nicht das Recht hat, mit halbklaren Worten über Schwierigkeiten hinwegzugehen. Pasch legt mit Recht Wert darauf, daß seine Beweise rein logische, nicht anschauliche sind, daß es sich in seinen Entwickelungen nur um eine logische Verknüpfung des in den Grundsätzen und Grundbegriffen gegebenen Gedankeninhalts handelt; ein Beweis gilt ihm nur als streng, wenn er Schritt für Schritt auch ohne Rücksicht auf eine zufällig gezeichnete Figur Geltung behält.

Daß im einzelnen auch an der Darstellung von Pasch Verbesserungen möglich sind, soll nicht bestritten werden. Von Bedeutung sind nach dieser Richtung zwei Arbeiten von F. Schur.

Die eine dieser Arbeiten*) behandelt die Einführung der sogenannten idealen (uneigentlichen) Elemente in die projektive Geometrie. Schur geht auch von der Betrachtung erreichbarer Punkte aus, die innerhalb eines irgendwie abgegrenzten geschlossenen Raumes liegen. Seiner Untersuchung legt er folgende drei Axiome zu Grunde:

1. Durch je zwei erreichbare Punkte ist eine erreichbare Gerade bestimmt.
2. Durch je drei erreichbare Punkte ist eine erreichbare Ebene bestimmt, in welcher jede Gerade enthalten ist, welche zwei erreichbare Punkte mit ihr gemein hat.
3. Jede erreichbare Ebene teilt den erreichbaren Raum in zwei Teile derart, daß jede Gerade, welche einen erreichbaren Punkt des einen Teils mit einem erreichbaren Punkte des andern Teils verbindet, die Ebene in einem zwischen diesen beiden Punkten gelegenen erreichbaren Punkte trifft.

Von diesen Grundsätzen aus entwickelt Schur zuerst die Lehre von den harmonischen Elementen; dann giebt er mit Hilfe der perspektiven Beziehung zweier Strahlenbündel die Konstruktion des Bündels von Strahlen, die durch einen nicht erreichbaren (idealen) Punkt gehen, des Büschels von Ebenen, die durch zwei ideale Punkte gehen, und die Konstruktion der idealen Punkte der Verbindungslinie, wenn diese selbst unerreichbar ist, und schließlich die Konstruktion idealer Ebenen.

Schur gelangt zu den für ein Verständnis der Parallelenfrage so wichtigen idealen Elementen des Raumes auf einem wesentlich einfacheren Wege als Pasch.

Eine andere Vereinfachung der von Pasch gegebenen Entwickelungen liefert eine spätere Arbeit von Schur: „Ueber den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.“**)

Pasch hatte in der Lehre von den kongruenten Figuren, wie oben (S. 11) angegeben, eine größere Zahl von Axiomen zu Grunde gelegt. Das vierte Axiom, das seiner Natur nach mit dem

*) Math. Annal. Bd. 39.
**) Math. Annal. Bd. 51.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

s. g. Archimedischem Postulat übereinstimmt, war: Liegt der Punkt c_1 innerhalb der Strecke ab und verlängert man die Strecke ac_1 um die kongruente Strecke $c_1 c_2$, diese um die kongruente Strecke $c_2 c_3$ u. s. f., so gelangt man stets zu einer Strecke $c_n c_{n+1}$, welche den Punkt b enthält." Dieser Grundsatz ist, wie Schur zeigt, für die Begründung der projektiven Geometrie entbehrlich; es lassen sich alle zur Begründung hinreichenden Sätze aus den ersten drei Kongruenzaxiomen (ohne das Postulat des Archimedes) herleiten. Pasch benutzt das Postulat des Archimedes nur beim Beweise des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie: „Eine projektive Beziehung zwischen zwei Geraden g_1 und g_2 einer Ebene ist dadurch eindeutig bestimmt, daß drei Punkten A_1 B_1 C_1 von g_1 drei Punkte A_2 B_2 C_2 von g_2 als entsprechend zugewiesen sind." Schur beweist diesen Satz mit Hilfe des Spezialfalls des Paskalschen Satzes, in dem die Ecken des Sechsecks auf zwei geraden Linien liegen, nachdem zuvor dieser Satz in einfacher Weise hergeleitet ist.

Die Vereinfachungen, die Schur an dem Lehrgange von Pasch vornimmt, machen das Werk von Pasch nicht wertlos, sondern erhöhen seinen Wert noch. Mit diesen Vereinfachungen bietet es immer noch den bequemsten Weg, sich über die Parallelenfrage Klarheit zu schaffen.

Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene von Rausenberger.

Das Buch von Pasch giebt uns über die Grundlagen der Geometrie wertvolle Aufklärungen. Naturgemäß ist das nur so weit der Fall, als das Werk reicht. Die Arbeit von Pasch befaßt sich nur mit den projektiven Eigenschaften der Figuren; dabei beschränkt sie sich auf Punkt, Gerade und Ebene. Alle Infinitesimalbetrachtungen bleiben von der Untersuchung ausgeschlossen; selbst eine Definition des viel umstrittenen Begriffs des Winkels findet sich bei Pasch nicht.

Ein Werk, das ebenfalls eine strenge Begründung der Elementargeometrie anstrebt, das sich im Stoff ebenso wie das Buch von Pasch auf die Betrachtung der Grundelemente des Punktes, der Geraden und der Ebene beschränkt, dabei aber in dem so umgrenzten Stoffgebiet die Eigenschaften der aus diesen Elementen gebildeten geometrischen Figuren in viel weiterem Umfange abzuleiten sucht, ist das Werk von Rausenberger, „Die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene."*)

Rausenberger verzichtet gleich Pasch auf eine Definition des Punktes, der Linie, der Fläche, des Körpers, der Geraden, der Ebene, der Dimension eines geometrischen Gebildes. Die Grundeigenschaften der geometrischen Gebilde werden ebenfalls in Axiomen (Grundsätzen) festgelegt; diese enthalten Wahrheiten, die sich nach der Ansicht des Verfassers nicht durch Verstandesschlüsse auf einfachere zurückführen lassen.

Rausenberger hält sich aber im Gegensatz zu Pasch von vorn herein für berechtigt, die Gerade als unendlich zu betrachten, obgleich er selbst zugestehen muß, daß die Unendlichkeit der Geraden keine logische Folge ihrer Entstehungsweise (als Rotationsachse eines in zwei Punkten festgehaltenen starren Körpers) ist.

*) B. G. Teubner. 1887.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In dem planimetrischen Teile des eigentlichen Lehrgangs behandelt Rausenberger die begrenzte Gerade, das Rechnen mit Strecken, bei dem er auch entgegen von Pasch bald im Anfange unendliche Prozesse einführt, den Winkel, nach seiner Erklärung ein aus zwei von einem Punkte ausgehenden Halbgeraden zusammengesetztes Gebilde, insofern es durch eine Drehung bestimmter Art erzeugt ist, die Lehre vom Dreieck und Dreiseit, die Kongruenzsätze, parallele Gerade, das Parallelenaxiom, die unendlich fernen Punkte, die unendlich ferne Gerade, Vierseit und Viereck, Vielseit und Vieleck, das Parallelogramm, das Paralleltrapez, die Aehnlichkeit, die Sätze von Menelaus, Pythagoras, die metrischen Relationen beim Viereck (Satz des Ceva), Flächeninhalt, Flächenverwandlung, Flächenmessung, die Trigonometrie, die Doppelverhältnisse, die harmonische Teilung, die Grundgebilde der Geometrie der Lage, die Kollineation, die Reziprozität und das Prinzip der Dualität.

In ganz ähnlicher Weise behandelt Rausenberger die Stereometrie. Nach einer Erörterung der Lagenverhältnisse von Punkten, Geraden und Ebene, der Schnittlinien von drei und mehreren Ebenen betrachtet der Verfasser senkrechte Geraden und Ebenen, Neigungswinkel von Ebenen, Geraden und Ebenen, das Parallelenaxiom im Raume, die unendlich ferne Ebene, das Strahlenbündel, die dreiseitige Ecke, metrische Relationen bei der dreiseitigen Ecke (sphärische Trigonometrie), den Inhalt der Ecken, vier und mehr Ebenen oder Strahlen im Strahlenbündel, vier Ebenen und Punkte, die Pyramide, fünf sich schneidende Ebenen und fünf Punkte, die Polyeder (Satz des Euler), den Rauminhalt, die räumliche Geometrie der Lage, die Kollineation räumlicher Systeme, die Reziprozität räumlicher Systeme, das Prinzip der Dualität.

Wie diese Inhaltsübersicht schon zeigt, dringt Rausenberger viel weiter in die Lehren der eigentlichen Elementargeometrie ein als Pasch. Hier finden wir eine Definition des Winkels, die hergebrachten Kongruenzsätze für Dreiecke und dreiseitige Ecken, die Sätze über Winkel an Parallelen, über die Größe von Winkeln und Seiten bei Dreiecken und Vielecken, die Lehren von der Proportionalität und Aehnlichkeit, die ebene und sphärische Trigonometrie.

Auch der ganze Charakter der Entwicklungen und der Darstellung nähert sich bei weitem mehr als bei Pasch der herkömmlichen.

Sehen wir aber auf Strenge der Begründung, so reicht Rausenberger nicht entfernt an Pasch heran.

Zunächst sind die Voraussetzungen, auf denen die Entwicklungen beruhen, nicht so klar herausgeschält wie bei Pasch. Sodann hält es Rausenberger nicht für notwendig, zunächst für die uns erreichbaren Teile des Raumes die Lehren der Geometrie aufzustellen. Er hält sich für berechtigt, ohne weitere Begründung die Gerade als unendlich anzusehen, er erklärt überhaupt den Begriff des Unendlichen, über jede Grenze Ausgedehnten, ohne weiteres für anschaulich gegeben, mit dem man, soweit es sich um Lagen-, nicht um Größenverhältnisse handelt, ohne Bedenken operieren kann.

Daneben enthält das Buch von Rausenberger eine größere Zahl teils irreführender, teils geradezu falscher Behauptungen.

Rausenberger erklärt es für falsch, daß man die Geometrie der Lage in einen Gegensatz zur Geometrie des Maßes gebracht hat, da es nur eine einzige Geometrie geben könne. Trotzdem gerade diese Behauptung vielfach Zustimmung gefunden hat, so bleibt doch richtig, daß die Lehren der Geometrie in zwei Teile zerfallen, von denen der eine, die projektive Geometrie, unabhängig vom Parallelenaxiom begründet werden kann, während der andere, der sich auf das Parallelenaxiom stützt, damit etwas Neues in die Untersuchung einführt, also komplizierter ist. Da erstere es mit den Lagebeziehungen, letztere mit den der Messung zu Grunde liegenden Begriffen der Entfernung und des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkels zu thun hat, so kann man die erste sehr wohl Geometrie der Lage und die zweite Geometrie des Maßes nennen. Methodisch und logisch ist es aber zweckmäßig, das Verhältnis von Grund und Folge möglichst durchsichtig zu gestalten, erkennen zu lassen, in welcher Weise die einzelnen Voraussetzungen, die der geometrischen Forschung zu Grunde liegen, auf die Gestaltung der einzelnen Ergebnisse Einfluß haben. Wenn irgendwo, so gilt in der Mathematik das „Divide et impera."

Zu berechtigtem Zweifel Anlaß giebt die bald zu Anfang aufgestellte Behauptung, daß bei Aufhebung des „Axioms der Kongruenz", der Möglichkeit, einen Körper ohne wesentliche Änderung zu verschieben, die ganze Geometrie unmöglich wird. Die Begründung der projektiven Geometrie ist auch ohne Heranziehung des Kongruenzbegriffes denkbar, worauf F. Klein neuerdings wieder besonders hingewiesen hat.*) Es ist für die Aufdeckung des Zusammenhangs der geometrischen Eigenschaften gerade wertvoll, zu wissen, was von dem Kongruenzaxiom abhängt, was nicht. Im nächsten Abschnitt dieser Abhandlung werden wir ein System der Elementar-Geometrie kennen lernen, das ohne dies Axiom aufgebaut ist.

Falsch ist auch der Standpunkt Rausenbergers der nicht-euklidischen Geometrie gegenüber. Er behauptet, daß in der elliptischen Geometrie, in der die Gerade als endliche, in sich zurücklaufende Linie angesehen wird, zwei Geraden sich nicht mehr nur in einem Punkte schneiden (S. 39). Nun ist aber durchaus nicht eins die Folge vom andern, wie z. B. die Geometrie des Strahlenbündels im Euklidischen Raume beweist.

Nicht richtig ist auch die Behauptung (S. 54), daß noch kein zwingender Beweis dafür vorhanden sei, daß das Parallelenaxiom keine Folge der übrigen Axiome ist. Die Forschungen von Beltrami über die geodätischen Linien auf Flächen konstanter negativer Krümmung zeigen in voller Schärfe, daß eine in sich widerspruchsfreie Geometrie möglich ist, für welche alle geometrischen Axiome gelten, nur das Parallelenaxiom nicht, daß also das Parallelenaxiom nicht eine Folge der übrigen Axiome sein kann.

Auch die Behauptung (S. 23), daß man mit geometrischen Strecken als stetigen Größen nicht rechnen kann, läßt sich nicht aufrecht erhalten. Das Rechnen mit Strecken läßt sich ohne den Begriff der irrationalen Zahl absolut streng begründen, wie das z. B. Schur in seiner analytischen Geometrie gezeigt hat.**)

Prinzipiell ausgeschlossen von der Untersuchung sind bei Rausenberger ebenso wie bei Pasch die krummlinigen und krummflächigen Gebilde, also Kreis, Cylinder, Kegel, Kugel. Daß dies auch Schwierigkeiten mit sich bringt, zeigt sich z. B. in § 14 des Buches bei der Betrachtung der möglichen Konstruktionen von Dreiecken. Es muß hier das durchaus nicht einfache Axiom vorausgesetzt werden, daß bei Wachstum eines Winkels im Dreieck, wenn die einschließenden Seiten unverändert bleiben, die dritte Seite stetig alle Werte von der Differenz bis zur Summe dieser Seite annimmt.

Können wir nach all dem Gesagten nicht zugeben, daß wir in dem Werke Rausenbergers eine Darstellung der Geometrie finden, die uns überall richtig Grund und Folge erkennen läßt, so bleibt es doch ein beachtenswerter Beitrag zur Umgestaltung der Elementargeometrie, ausgezeichnet durch die allgemeinen Gesichtspunkte, die der Betrachtung zu Grunde gelegt werden, durch systematischen Aufbau der Lehren, durch Scheidung der Lehren von grundlegender Bedeutung von den mehr nebensächlichen Spezialitäten, die man sonst in der Elementar-Geometrie findet.

*) F. Klein, Zur ersten Verteilung des Lobatschefsky-Preises. Math. Ann. Bd. 50.

**) Leipzig, 1898.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Elementi di Geometria di G. Veronese.*)

Das erste und bisher einzige Lehrbuch der Elementar-Geometrie, das gleichzeitig den Bedürfnissen der Schule und den heutigen Anforderungen an Strenge der Begründung zu genügen sucht, verdanken wir dem bekannten italienischen Geometer Veronese.

Veronese hat sich seit längerer Zeit mit den Fragen der wissenschaftlichen Begründung der Geometrie beschäftigt und hat über diese Fragen schon vor einigen Jahren ein umfangreiches Werk: „Fondamenti di geometria a piu dimensioni" veröffentlicht. Die Elementar-Geometrie, die uns hier beschäftigt, stammt aus dem Jahre 1897.

Das Stoffgebiet, das die Elemente der Geometrie von Veronese umfassen, unterscheidet sich nicht wesentlich von dem anderer elementarer Lehrbücher der Geometrie. An Strenge der Begründung der geometrischen Lehren überragt das Werk Veronese's die landläufigen Schulbücher bei weitem, auch die Elemente Euklids. Es stellt in dieser Beziehung einen wirklichen Fortschritt über Euklid hinaus dar, während unsere heutigen Schulbücher in dieser Beziehung an Euklid meist nicht heranreichen.

Auf dem im Vorhergehenden angegebenen Stoffgebiet sucht Veronese zu leisten, was Pasch auf beschränkterem Gebiet geleistet hat, eine lückenlose Begründung der Lehren; gleichzeitig aber will er die Form des Elementarunterrichts wahren.

Wie Pasch sieht Veronese die Grundlage der Geometrie in der Erfahrung. Die Resultate der empirischen Beobachtungen werden in gleicher Weise in Gestalt von Postulaten (Grundsätzen) festgelegt; aus diesen Postulaten sucht der Verfasser lückenlos die Lehren der Geometrie zu entwickeln.

Das System der Postulate ist aber ein ganz anderes als bei Pasch, ebenso der Gang der Entwickelung. Veronese braucht für das ganze System nur 16 Postulate. Von diesen 16 Postulaten sind auch nur 9 wirklich notwendige. Fünf Postulate sind nur aus didaktischen Gründen in das Werk aufgenommen, sie werden in einem dem Werke beigegebenen Anhang als Folgerungen der übrigen Postulate nachgewiesen. Zwei der Postulate werden als praktische Postulate bezeichnet; von diesen beschränkt das eine die Betrachtung auf drei Dimensionen, das andere ermöglicht die Anwendung der rein logisch abgeleiteten Lehren auf das praktische Leben.

In dem eigentlichen Aufbau des Lehrgebäudes geht Veronese wie Pasch von dem ersten Postulat aus, daß es Punkte giebt. Aber schon die Behandlung der Geraden weicht durchaus von der bei Pasch ab.

Neben dem Begriff des Punktes bildet bei Veronese der Begriff der Gruppe (Zusammenfassung) mehrerer Gedankendinge den Ausgangspunkt der Untersuchung. Eine Gruppe von Punkten, über deren Zahl und Anordnung zunächst nichts bestimmt ist, nennt man eine Figur. Die Geometrie ist die Wissenschaft, welche sich mit den Figuren beschäftigt. Ein lineares System von Punkten ist eine Gruppe von Punkten, in der die Punkte mit zweierlei Ordnung versehen sind, von denen die eine der anderen entgegengesetzt ist.

Der Behandlung der Geraden liegt das Postulat II zu Grunde: „Es giebt ein lineares System von Punkten (Gerade genannt), das durch folgende Eigenschaften definiert ist: Sind a und b zwei Segmente des Systems (in einem gewissen Sinne betrachtet), so ist entweder b gleich a oder b ist nicht gleich a. Wenn b gleich a ist, so giebt es zwischen b und a eine eindeutige Beziehung der Art, daß

*) Verona—Padova (Fratelli Drucker), 1897.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch die Teile von b den Teilen von a gleich sind. Jedes Segment ist sich selbst gleich. Kein Segment ist gleichzeitig gleich und ungleich einem andern. Wenn a = b ist, ist auch b = a; wenn a = b und b = c ist, so ist auch a = c. Ein Segment ist nicht gleich einem seiner Teile. Ein beliebiges Segment AB ist gleich dem Segment BA. Ist auf der Geraden ein Punkt A und ein beliebiges Segment XY gegeben, so giebt es zwei Segmente AB und AC, welche gleich XY sind."

Veronese erklärt zwei Dinge für gleich, wenn sie in uns dieselbe Vorstellung hervorrufen, so daß man in jedem Urteil das eine für das andere setzen kann. Seine Definition der Gleichheit benutzt nur die logische Ersetzbarkeit der Merkmale, nicht den Begriff der Kongruenz und der Bewegung.

Aus den ersten beiden Grundsätzen leitet Veronese eine Reihe von Sätzen über die Gerade und ihre Segmente ab.

Das Postulat III setzt voraus, daß jedes geradlinige Segment in zwei gleiche Teile zerlegt werden kann, Postulat IV, daß es Punkte außerhalb der Geraden giebt, und daß es eine einzige Gerade giebt, welche zwei Punkte enthält.

Dann folgt die Definition gleicher geradliniger Figuren als solcher, zwischen deren Punkten sich eine derartige eindeutige Beziehung herstellen läßt, daß den Segmenten der einen gleiche in der anderen entsprechen.

Das Postulat V setzt voraus, daß es in jeder Geraden ein Segment giebt, das einem beliebigen Segment gleich ist, und das Postulat VI, daß das Strahlenpaar (a, b) mit dem Scheitel O dem umgekehrten Strahlenpaar (b, a) gleich ist. Auf Grund dieser Postulate wird eine Reihe von Sätzen über Gleichheit der Figuren bewiesen, z. B. auch der Satz, daß zwei Geraden gleich sind.

Die Betrachtung der Figuren, die in Bezug auf einen Punkt (symmetrisch) gegenüberliegend sind, derart daß OA' = OA, OB' = OB u. s. w., führt zur Erklärung paralleler Geraden als solcher, die in Bezug auf einen Punkt gegenüberliegend sind. Der Begriff der Parallelen ist hierbei unabhängig vom Begriff der Ebene, vom Begriff der Richtung und vom Begriff des Unendlichen.

Der Ableitung der weiteren Eigenschaften der Parallelen liegt das Postulat VII zu Grunde: „Zwei parallele Geraden sind in Bezug auf die Mitte jedes beide schneidenden Segments gegenüberliegend (symmetrisch)." Daraus folgen die Sätze: Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden nur eine Parallele, und zwei Parallelen haben keinen Punkt mit einander gemeinsam. Dann folgt das Postulat VIII „Wenn man von einem beliebigen inneren (äußeren) Punkte einer Seite eines Dreiecks zu einer zweiten die Parallele zieht, so trifft sie die dritte Seite auch in einem inneren (äußeren) Punkte"; daran schließen sich noch Folgerungen über Größen- und Lagenbeziehungen von Segmenten.

Jetzt erst, nach Erledigung der Eigenschaften der Geraden, führt Veronese den Begriff der Ebene ein. Man erhält nach ihm die Punkte einer Ebene, wenn man durch einen Punkt alle Strahlen zieht, welche eine gerade Linie treffen, und den Strahl, der ihr parallel ist. Aus dieser Definition werden bei Veronese die Eigenschaften der Ebene (z. B. daß eine Gerade, welche mit der Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in ihr liegt, daß eine Ebene durch drei Punkte bestimmt ist) wirklich abgeleitet, nicht, wie es bei Euklid geschieht, einfach vorausgesetzt.

Dann folgt die Definition des Winkels als des von zwei Strahlen begrenzten Teils eines Strahlenbüschels, darauf die Sätze über Winkel an demselben Scheitel, an Parallelen, im gleichschenkligen Dreieck, sodann die Bezeichnung Abstand zweier Punkte, die Sätze über Summe und Differenz der Seiten eines Dreiecks und die Lehre von der Übereinstimmung zweier Dreiecke, die den Kongruenzsätzen entsprechen, unabhängig von der Beweglichkeit der Figuren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Behandlung des Kreises, die dann folgt, liegt das Postulat IX zu Grunde: „Wenn die Entfernungen eines Punktes P von den Enden A und B eines geradlinigen Segments oder eines Kreisbogens (AB) a und b sind und $a < b$ ist, so giebt es in (AB) wenigstens einen Punkt X derart daß PX einem gegebenen Segment c, das der Größe nach zwischen a und b liegt, gleich ist." An die Kreislehre schließen sich die planimetrischen Fundamentalaufgaben.

Darauf wendet sich die Untersuchung den grundlegenden Eigenschaften der Gebilde von drei Dimensionen zu. Voraussetzung der Untersuchung ist das Postulat X: „Es giebt Punkte außerhalb der Ebene" und das erste praktische Postulat, durch das die Betrachtung auf drei Dimensionen beschränkt wird: „Jede Gerade, die durch einen Punkt außerhalb einer Ebene geht, trifft entweder die Ebene in einem Punkte oder ist einer Geraden der Ebene parallel." Daran schließen sich dann die Lageneigenschaften von Geraden, Ebenen, Flächenwinkel, Ecken, Polyeder, Kegel, Cylinder, Kugel. Der Stoff ist sorgfältig gesichtet; die Behandlung des Stoffes läßt die Analogieen zwischen den Elementen der Geraden, des Kreisbogens, des Strahlen-, Parallelen- und Ebenenbüschels einerseits, der Ebene und des Strahlenbündels andererseits klar hervortreten. Die Beweise gewinnen dadurch an Einfachheit und durchsichtigkeit.

In einem weiteren Abschnitt des Buches wird dargelegt, was man bei den verschiedenen geometrischen Figuren unter dem Sinn der Figur zu denken hat, wann sie denselben oder entgegengesetzten Sinn haben, und dann folgen die Lehren von der Kongruenz und Symmetrie in der hergebrachten Bedeutung. Unter Benutzung des zweiten praktischen Postulats: „Eine Figur kann sich frei in der Geraden, in der Ebene und im Raume bewegen und dabei sich selbst kongruent bleiben, auch wenn einige Punkte von ihr fest bleiben", wird die Bewegung von linearen, ebenen und räumlichen Figuren behandelt. Veronese führt also erst an dieser Stelle das Axiom von der Kongruenz in die Geometrie ein, während Rausenberger dasselbe als die Grundlage jeder Geometrie an die Spitze der ganzen Wissenschaft stellt.

Weitere vier Postulate benutzt Veronese für die Behandlung der Aquivalenz (Flächen- und Volumengleichheit) der Figuren: „Wenn ein beliebiges Segment XX' einer Geraden in entgegengesetztem Sinne bewegliche Endpunkte besitzt, so enthält es wenigstens einen von den Endpunkten verschiedenen Punkt", „Sind zwei verschiedene Segmente einer Geraden gegeben, so giebt es immer ein Vielfaches des kleineren, welches größer ist als das größere" (Postulat des Archimedes), „Es ist nicht möglich, ein Polygon (Polyeder) so in Teile zu zerlegen, daß nach Weglassung einzelner die übrigen Teile, anders zusammengesetzt, eine äquivalente (gleiche) Figur bilden." Unter Benutzung der beiden ersten Postulate, der Begriffe unendlich kleiner und unendlich großer Segmente, wird der Begriff der Stetigkeit der Geraden abgeleitet. Dann folgen die Begriffe: geometrische Größe, Summe zweier Polygone, der Begriff: intensive Größe einer Figur im Gegensatz zur Gestalt derselben, die Begriffe: Abstand, Winkel, Fläche, Volumen als intensive Größen. Äquivalent heißen zwei Figuren, wenn sie Summen gleicher Teile sind. Auf Grund dieser Begriffsbildungen werden die Sätze über Flächen- und Volumengleichheit abgeleitet. Unsere Schulbücher stützen sich bei diesen Sätzen ohne weitere Rechtfertigung dafür, ob sie hier anwendbar sind, auf die allgemeinen Größensätze („Gleiches von Gleichem abgezogen, giebt Gleiches u. s. w.), hier finden wir wirkliche Beweise.

Der nächste Abschnitt von Veronese's Elementen enthält die Lehren von der Proportionalität und Ähnlichkeit. Um zum Begriff der Proportion zu gelangen, führt Veronese den Begriff des homogonen, stetigen, linearen Systems von Größen ein. Ein lineares, homogenes, stetiges System von

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Größen ist eine Gruppe von Größen, die eindeutig auf die Segmente einer Geraden bezogen werden können. Von zwei homogenen Größen läßt sich die eine, wie bewiesen wird, aus der anderen durch eine endliche oder unendliche Zahl geometrischer Teilungen und Vervielfachungen ableiten. „Wenn vier Größen A und B, C und D so beschaffen sind, daß sich die erste aus der zweiten durch dieselbe Operation (dieselben Teilungen und Vervielfachungen) ableiten läßt wie die dritte aus der vierten, so sagt man, daß sich die erste zur zweiten verhält wie die dritte zur vierten." Auf Grund dieser Erklärung werden die Sätze über Proportionalität und Ähnlichkeit ebener und räumlicher Figuren bewiesen.

Weitere Abschnitte des Buches geben die Konstruktion regulärer Polygone und Polyeder, (unter Benutzung des Begriffs des Unendlichkleinen und des Grenzbegriffs) die Sätze über die Verhältnisse von Umfang und Inhalt des Kreises, von Oberfläche und Inhalt des Cylinders, des Kegels und der Kugel, schließlich die Ausrechnung des Flächen- und Rauminhalts der geometrischen Figuren und die Anwendung der Algebra auf die Geometrie.

Einzig und allein bei der wirklichen Berechnung der Figuren macht Veronese von den Lehren der Algebra Gebrauch, alle übrigen Erörterungen sind von algebraischen Begriffsbildungen unabhängig; Rausenberger überträgt bald im Anfang seiner Entwickelungen die arithmetischen Gesetze auf die Geometrie.

Wie die im Vorstehenden gegebene ausführliche Inhaltsübersicht zeigt, umfaßt das Buch von Veronese denselben Lehrstoff, den auch andere Lehrbücher der Elementargeometrie enthalten. Die Grundlage seiner Entwickelungen bilden die angeführten 16 Postulate und die sich anschließenden Begriffsbildungen. Daß oder wieweit die Entwickelungen Veronese's den Anforderungen strenger Logik genügen, davon kann sich jeder überzeugen, der sein Buch einer näheren Kenntnisnahme würdigt.

Die fünf Postulate, die Folgerungen der übrigen sind und, wie oben angegeben, nur aus didaktischen Gründen zugelassen wurden, sind die Postulate III, VIII, IX, XIII, XIV. Der Wortlaut dieser Postulate ist in der obigen Inhaltsübersicht enthalten, ihre Beweise finden sich in dem den Elementen Veronese's beigegebenen Anhang. Die übrig bleibenden 11 Postulate stellen also nach Veronese das Erfahrungsmaterial vor, das unseren geometrischen Entwickelungen zu Grunde liegt; aus diesem kann durch rein logische Schlüsse das gesamte umfangreiche Gebiet geometrischer Wahrheiten abgeleitet werden.

Daß die Postulate Veronese's nicht durchweg mit den Grundsätzen von Pasch nach Zahl und Art übereinstimmen, spricht nicht gegen den einen oder anderen Verfasser. Einerseits ist das Gebiet, das Veronese bearbeitet, viel umfassender als das von Pasch, andererseits ist eine gewisse Willkür in der Auswahl der Grundthatsachen der Erfahrung, die man der logischen Bearbeitung zu Grunde legen will, durch die Natur der Sache bedingt. Verschiedene Komplexe von Postulaten können in Summa denselben Inhalt umfassen.

Als Ganzes wie im einzelnen stellt jedenfalls die Arbeit Veronese's seinen Vorgängern gegenüber einen wesentlichen Fortschritt dar; ich verweise z. B. auf die eben schon hervorgehobene Thatsache, daß Veronese der erste ist, der die Eigenschaften der Ebene aus ihrer Definition heraus logisch entwickelt.

Nach Fertigstellung der vorliegenden Abhandlung geht dem Verf. noch die Ausgabe der Elementi di Geometria zu, welche die Herren Veronese und Gazzaniga in diesem Jahre für Gymnasien veranstaltet haben. In dieser neuen Ausgabe schließen sie sich dem hergebrachten Lehrgange noch mehr an als in der auch für die Realanstalten berechneten ersten Ausgabe, ohne doch das Ziel der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

strengen Begründung der Geometrie aus dem Auge zu verlieren. In der neuen Gestalt dürfte sich das Werk noch mehr für den Schulunterricht eignen als in der früheren.

Außerdem bin ich von Prof. Schur noch auf ein italienisches Unterrichtsbuch hingewiesen worden, das auf Grund der Forschungen von Peano und Veronese eine logisch strenge Entwickelung der Lehren der Elementargeometrie giebt und nach einzelnen Richtungen Vorzüge vor den Elementen Veronese's besitzt; es ist dies das 1899 erschienene Werk von G. Ingrami, Elementi di Geometria per le scuole secondarie superiori.

Grundlagen der Geometrie von D. Hilbert.

Von ganz hervorragender Bedeutung für die in den vorangehenden Abschnitten behandelten Fragen ist eine Schrift, die im Jahre 1899 zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen herausgegeben ist, die Schrift: „Grundlagen der Geometrie von Prof. D. Hilbert.*) Hilbert teilt die Axiome der Geometrie (die Grundthatsachen, die zum folgerichtigen Aufbau der Geometrie erforderlich sind) in fünf Gruppen. Die Axiome der Gruppe I, die Axiome der Verknüpfung, erstrecken sich auf die Beziehungen der Punkte, Geraden und Ebenen, welche mit dem Worte „liegen" bezeichnet werden. Zu dieser Gruppe gehören sieben Axiome; die ersten vier beziehen sich auf die Bestimmung der Geraden und der Ebene durch ihre Punkte, das fünfte sagt aus, daß eine Gerade, die mit einer Ebene 2 Punkte gemeinsam hat, ganz in ihr liegt, das sechste beschränkt die Untersuchung auf drei Dimensionen durch die Voraussetzung, daß zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, wenigstens noch einen weiteren Punkt gemeinsam haben, das siebente setzt voraus, daß es im Raum mindestens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte giebt.

Die Axiome der zweiten Gruppe heißen Axiome der Anordnung; sie definieren den Begriff „zwischen". Diese Gruppe besteht aus fünf Axiomen. Die vier ersten beziehen sich auf drei und vier Punkte derselben Geraden. Von Wichtigkeit ist hier namentlich das dritte Axiom: „Unter irgend drei Punkten einer Geraden giebt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt"; durch dies Axiom wird die elliptische Geometrie von der Untersuchung ausgeschlossen. Das fünfte Axiom rührt von Pasch her; es ist oben S. 10 unter 4 erwähnt worden.

Die dritte Axiomengruppe enthält nur ein Axiom, das Axiom der Parallelen (Euklidisches Axiom). Hilbert benutzt es in der Fassung: „In einer Ebene a läßt sich durch einen Punkt A außerhalb einer Geraden a stets eine und nur eine Gerade ziehen, welche jene Gerade nicht schneidet; dieselbe heißt die Parallele zu a durch A.

Die Axiome der vierten Gruppe führen die Bezeichnung Axiome der Kongruenz; sie definieren zugleich den Begriff der Bewegung.

Zu dieser Gruppe gehören 6 Axiome. Die ersten drei derselben betreffen die Kongruenz von geraden Strecken, das vierte und fünfte die von Winkeln, das sechste die Kongruenz zweier Dreiecke aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Die fünfte Axiomengruppe enthält wieder nur ein Axiom, das Axiom der Stetigkeit, nämlich das Archimedische Axiom.

---

*) Leipzig, B. G. Teubner.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Brauchbarkeit seiner Axiome beweist Hilbert durch Ableitung der geometrischen Lehrsätze, die für den weiteren Ausbau der Elementargeometrie die Grundlage bilden. Dann zeigt er die Widerspruchslosigkeit der Axiome dadurch, daß er vermittelst Rechenoperationen eine Geometrie herstellt, bei der man auf Grund der Herstellungsweise übersehen kann, daß jeder Widerspruch zwischen den Axiomen sich mit einem Widerspruch in der Arithmetik decken müßte, der nicht vorhanden ist.

Weitere Untersuchungen betreffen die gegenseitige Unabhängigkeit der Axiome. Bezüglich des Parallelenaxioms weist Hilbert auf die nicht-euklidische Geometrie hin. Bezüglich der Kongruenzaxiome zeigt er, daß der erste Kongruenzsatz für Dreiecke aus allen übrigen Axiomen nicht gefolgert werden kann; zum Beweise konstruiert er durch eine andere Definition des Streckenabtragens eine Geometrie, in der alle Axiome gelten, nur nicht dieser Kongruenzsatz. Auch die Unabhängigkeit des Archimedischen Axioms beweist er durch Herstellung einer Geometrie, in der alle Axiome mit Ausnahme dieses einzigen Giltigkeit haben. Damit ist der Beweis geliefert, daß die Axiome von Hilbert sämtlich (oder ein gleichwertiges System von Axiomen) zum Aufbau der Geometrie unentbehrlich sind.

Hilbert leistet für die Axiome der Geometrie das, was Hermite und Lindemann für die Quadratur des Kreises geleistet haben. Viel Zeit und Kraft ist die Jahrhunderte durch an das Problem der Quadratur des Kreises verschwendet worden. Dieser Kraftverschwendung ist durch den Nachweis von Lindemann, daß π nicht Wurzel einer Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist, der Boden abgegraben worden.

Ebenso hat man sich die Jahrhunderte hindurch bemüht, die Zahl der geometrischen Grundsätze zu vermindern, einen oder mehrere Grundsätze des Euklid als Folgerungen der übrigen nachzuweisen oder gar die ganze Geometrie ohne Grundsätze rein logisch zu entwickeln. Hilbert zeigt, daß diese Bestrebungen in allen Hauptpunkten keinen Erfolg haben können, er zeigt die Möglichkeit ganz verschiedener geometrischer Systeme je nach der Art und Zahl der vorausgesetzten Axiome. Alle diese geometrischen Systeme, die von einander in wesentlichen Stücken abweichen, sind in sich völlig widerspruchslos, wie sich aus den entsprechenden arithmetischen Eigenschaften zweifellos ergiebt.

Weitere Untersuchungen Hilbert's beschäftigen sich mit der Lehre von den Proportionen und von den Flächeninhalten in der Ebene. Eine strenge Begründung der Lehre von den Proportionen bereitet im Unterricht immer besondere Schwierigkeiten; man hatte sich seit Legendre gewöhnt, zur strengen Begründung der Lehren auf den schwierigen Begriff der irrationalen Zahl zurückzugehen.

Daß dies überflüssig ist, zeigte schon Schur*) 1898 in seiner analytischen Geometrie. Er wies die Möglichkeit nach, mit Strecken zu rechnen, ohne den Zahlbegriff zu benutzen. Er stützt sich hier der Einfachheit wegen noch auf das Archimedische Postulat, bemerkt dabei aber bald, daß man für den Aufbau der Elementargeometrie auch dies Postulat entbehren kann; er verweist dabei auf seinen oben (S. 13) erwähnten Aufsatz „Ueber den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie" und auf den dort benutzten Spezialfall des Paskalschen Satzes, in dem der Kegelschnitt in zwei Geraden zerfällt.

Bei Hilbert finden wir eine glänzende Durchführung der von Schur angedeuteten Idee. Hilbert giebt zwei einfache Beweise des speziellen Paskalschen Satzes ohne Benutzung des Archimedischen Postulats, leitet auf Grund des Satzes eine natürlich auch vom Zahlbegriff unabhängige Streckenrechnung ab und beweist mit Hilfe derselben den grundlegenden Lehrsatz von den Proportionen.

*) Schur, Analytische Geometrie, S. 6 u. f.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso wie die Lehre von den Proportionen leitet Hilbert die Sätze von der Flächengleichheit und Inhaltsgleichheit unabhängig von dem Archimedischen Postulat ab.

Die gebräuchliche Behandlung der Lehre von der Flächengleichheit genügt strengeren Anforderungen an die Beweisführung in keiner Weise. Es werden auf die Flächengrößen ohne weiteres die allgemeinen Größenaxiome angewandt, ohne vorher zu untersuchen, ob diese Größen den Bedingungen der Anwendbarkeit jener Axiome genügen. Die Vorbedingung für die Anwendbarkeit dieser Axiome ist die Meßbarkeit dieser Größen durch Strecken. Den Nachweis dieser Meßbarkeit hat zuerst Schur*) in einem Vortrag geliefert, den er 1892 in der Dorpater Naturforschergesellschaft hielt. Schur stützte sich in seinem Vortrage auf das Archimedische Postulat. Hilbert gelingt es in seiner Festschrift, mit Hilfe seiner Streckenrechnung, unter Einführung des Produkts aus Grundlinie und Höhe eines Dreiecks als Flächenmaß desselben, die Lehren von der Inhaltsgleichheit der Figuren unabhängig vom Archimedischem Postulat abzuleiten. Sein Beweis betrifft allerdings nur die Inhaltsgleichheit der Figuren, nicht die Flächengleichheit. Hilbert scheidet nämlich scharf zwischen den beiden Begriffen; er nennt zwei Polygone flächengleich, wenn sie in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise einander kongruent sind, dagegen inhaltsgleich, wenn es möglich ist, zu denselben flächengleiche Polygone hinzuzufügen, so daß die beiden zusammengesetzten Polygone flächengleich sind. Zum Nachweise, daß inhaltsgleiche Figuren auch flächengleich sind, ist, wie das auch Hilbert betont, die Geltung des von Schur benutzten Archimedischen Axioms notwendige Voraussetzung; Hilbert stellt eine Geometrie her, für welche das Archimedische Axiom nicht gilt, und zeigt, daß in dieser Geometrie sich Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe angeben lassen, die zwar inhaltsgleich, aber nicht flächengleich sind.

Weitere Untersuchungen Hilberts über die gegenseitige Abhängigkeit der Axiome schließen sich an die Frage nach den Axiomen, die für den Beweis des oben genannten Paskalschen Satzes und für den Beweis des Satzes von Desargues notwendige Voraussetzung sind. Der Satz von Desargues hat den Wortlaut: „Wenn zwei Dreiecke in einer Ebene so gelegen sind, daß je zwei entsprechende Seiten einander parallel sind, so laufen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken durch ein und denselben Punkt oder sind einander parallel.“ Hilbert zeigt durch Konstruktion einer besonderen Geometrie, in welcher der Satz von Desargues nicht gilt, daß zum Beweise desselben entweder die sämtlichen Kongruenzaxiome oder die auf drei Dimensionen bezüglichen Axiome notwendig sind. Vom Paskalschen Satze zeigt Hilbert, daß er entweder unter Benutzung der Kongruenzaxiome oder ohne dieselben mit Benutzung des Archimedischen Axioms bewiesen werden kann, aber nicht unter Ausschließung beider.

Die Bedeutung der beiden Sätze von Desargues und Paskal und der vorstehend skizzierten Untersuchungen erhellt daraus, daß jeder in der Geometrie geltende Schnittpunktsatz durch Konstruktion geeigneter Hilfspunkte und Hilfsgeraden sich als eine Kombination dieser beiden Sätze nachweisen läßt.

Wichtig sind auch Hilberts Untersuchungen über die geometrischen Konstruktionen, die auf Grund seines Systems von Axiomen möglich sind. Bezüglich dieser Untersuchungen sei auf die hochbedeutsame Schrift selbst verwiesen.

---

*) Sitzungsberichte der Dorpater Naturf. Ges. 1892.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Strenge Begründung der Elementargeometrie und der Unterricht der höheren Schulen.

Wir haben im Vorhergehenden mehrere wissenschaftliche Strenge anstrebende Darstellungen der Elemente der Geometrie kennen gelernt. Wir haben gesehen, daß die Axiome, die Euklid zur Begründung der Elemente benutzt, allein nicht ausreichend sind; ein Axiom, das Axiom, daß alle rechten Winkel einander gleich sind, erweist sich nebenbei auch als überflüssig, es wird von Hilbert als Folge der Kongruenzaxiome nachgewiesen.

Wer den Maßstab, den z. B. Pasch in seinem Buche für logisch strenge Entwicklungen als notwendig hinstellt, an unsere landläufigen Schulbücher anlegt, wird bald finden, daß sie seinen strengen Forderungen noch viel weniger genügen als Euklid. Da wird die Gerade als kürzeste Entfernung zweier Punkte definiert, ohne zu untersuchen, ob man die Entfernung ohne den Begriff der Geraden definieren kann; der Winkel erscheint als Richtungsunterschied ohne nähere Erläuterung, ohne daß man weiß, wie man Richtungsunterschiede, die ja keine Differenzen im Sinne der Arithmetik sind, als Größen betrachten kann, was das Operieren mit der neuen Größenart für eine Bedeutung hat, ob auf sie die allgemeinen Größenaxiome anwendbar sind; ebenso werden Schnittpunkte von Linien gewöhnlich ohne nähere Begründung aus der ungefähren Anschauung heraus als vorhanden angenommen, ohne zu untersuchen, ob nicht etwa der Augenschein trügt. Ähnliche Fehler macht man bei der Behandlung der Flächensätze, wie schon oben hervorgehoben wurde. Noch weniger korrekt pflegt man mit dem Begriff des Irrationalen, mit dem auch in der Elementargeometrie unvermeidlichen Grenzbegriff, mit den auch hier unvermeidlichen Begriffen des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen umzugehen.

Gelegentlich der Landtagsverhandlungen des vorigen Jahres wurde von bedeutsamer Seite über zunehmenden Mangel an logischer Schulung bei den jetzigen Studenten geklagt. Bei dieser Gelegenheit wurde mit Recht dem mathematischen Unterricht der höheren Schulen zum wesentlichen Teile die Aufgabe zugewiesen, der Jugend die für das Studium notwendige logische Schulung zu geben, die Schüler zu scharfem logischen Denken zu erziehen.

Geht nun aber die Mathematik nicht der Fähigkeit, zum richtigen Denken anzuleiten, verlustig, wenn sie selbst in der Begründung ihrer Sätze nicht immer streng logisch verfährt, wenn sie Scheinbeweise zuläßt? Müssen wir mit Rücksicht auf die notwendige logische Schulung der Jugend Werke wie die von Pasch, Veronese, Hilbert dem Elementarunterricht zu Grunde legen, müssen nicht mit Rücksicht auf die geforderte Strenge der Beweisführung alle Schulbücher, denen Mängel in der logischen Begründung nachgewiesen werden können, ohne weiteres aus den höheren Unterrichtsanstalten entfernt werden?

Die Folgerungen, die aus der vorhandenen Sachlage für den Unterricht zu ziehen sind, werden andere sein müssen.

Pasch, Rausenberger und Hilbert haben ihre Werke nicht für Anfänger geschrieben. Es ist ganz ausgeschlossen, daß jemand, der noch nichts von Geometrie weiß, diese Werke verstehen sollte, abgesehen davon, daß Rausenberger auch nicht einmal überall den Forderungen logischer Strenge genügt.

Möglich würde es allenfalls sein, die Elemente der Geometrie von Veronese dem Unterricht zu Grunde zu legen. Professor Gazzaniga in Padua, der Mitarbeiter von Veronese an den besprochenen Elementi, war schon in der Lage, mit diesen Elementen im Schulunterricht einen praktischen Versuch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

anzustellen, und dieser Versuch soll günstig ausgefallen sein. Für ganz unmöglich kann man es also wohl nicht erklären, dem ersten Unterricht ein logisch streng begründetes System der Geometrie zu Grunde zu legen. Auf alle Fälle aber wird ein solcher Unterricht für Anfänger außerordentlich schwer verständlich sein. Namentlich die ersten Definitionen und Beweise Veronese's stellen an die Abstraktionsfähigkeit Anforderungen, deren Erfüllung wir vom Durchschnittsschüler nicht verlangen können.

Sind nun die neueren Bestrebungen, die Elementargeometrie strenger als früher zu begründen, für den Unterricht ohne Wert? Das keineswegs.

Zunächst ist es notwendig, daß jeder Lehrer der Mathematik sich mit einer logisch strengen Begründung der Geometrie bekannt macht; es ist das um so mehr erforderlich, als in Deutschland die Geometrie an den Universitäten vielfach über Gebühr vernachlässigt wird. Wenn wir nun auch nicht alle einschlägigen Arbeiten von Gauß, Bolyai, Lobatschefsky, Riemann, Helmholtz, Cayley, Beltrami, F. Klein, S. Lie, Clifford, Peano, Killing, Veronese, Schur u. a. studieren können, so ist es doch sehr wohl möglich, von den in den vorhergehenden Abschnitten ausführlich besprochenen Werken von Pasch, Veronese und Hilbert eingehend Kenntnis zu nehmen. Es ist das möglich und notwendig.

Selbst wenn wir in dem Anfangsunterricht nicht immer absolut streng verfahren können, so muß doch wenigstens der Lehrer einen Scheinbeweis von einem strengen unterscheiden können; die Scheinbeweise soll er möglichst meiden, um nicht das Gefühl für strenge Logik bei den Schülern einzuschläfern.

Eine Kenntnis des strengen Aufbaues der Wissenschaft ist schon vorteilhaft für den Lehrer der Unterstufe, unerläßlich aber für den Lehrer der Oberstufe. Ohne eine solche Kenntnis wird er allerdings nicht im stande sein, seine Zöglinge zu demjenigen Grade logischer Schulung emporzuführen, der von den führenden Schichten des Volkes unbedingt verlangt werden muß.

Die Erziehung zum logischen Denken ist sicher nicht nur die Aufgabe des mathematischen Unterrichts der Oberstufe. Schon in der geometrischen Propädeutik, im geometrischen Anschauungsunterricht wird es eine Hauptaufgabe des Lehrers sein, in den Schülern mit der Zeit ein Bedürfniß nach Aufklärung der geometrischen Thatsachen, nach Aufdeckung des logischen Zusammenhangs derselben zu wecken.

Die gesamte weitere mathematische Unterrichtsarbeit ist dauernde logische Schulung. Zunächst ist es wichtig, daß der Schüler in der Mathematik die Grundelemente der Logik, Anschauungen, Begriffe, Urteile, Schlüsse, kennen lernt. Er lernt Begriffe definieren, richtige und falsche Definitionen unterscheiden, lernt praktisch die Erfordernisse einer richtigen Definition. Ebenso lernt er im mathematischen Stoffgebiet urteilen und schließen; er lernt beim Schlusse Obersatz, Untersatz und Folgerung und ihr gegenseitiges Verhältnis kennen.

Wichtiger aber als das ist die dauernde logische Arbeit, die der Schüler in der Mathematik zu leisten hat.

Da ist vor allem von Bedeutung, daß ihm das leere Wortemachen abgewöhnt wird. Der Schüler kann die sogenannten Wortgleichungen nicht lösen, so lange er sich noch nicht gewöhnt hat, hinter den Worten die Begriffe zu suchen, in dem Gelesenen den Inhalt des Gelesenen zu erfassen, und zwar so klar und bestimmt zu erfassen, daß er den Gedanken in die unzweideutige mathematische Form bringen kann. Hat der Schüler eine arithmetische Umformungsaufgabe, so löst er sie nur, wenn er sich schrittweise logisch klar macht, was der ganze vorgelegte Rechenausdruck, was die Teile vorstellen, für welche Regel die Voraussetzungen der Anwendbarkeit erfüllt sind, und wie die Regel im Einzelfalle zur Anwendung gelangt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso muß der Schüler in der Geometrie jedes Mal, wenn er einen Begriff oder einen Lehrsatz verwenden will, sich des Inhalts des Begriffs, der Bedeutung des Lehrsatzes völlig klar werden, auch hier sich stets fragen, ob die Bedingungen, die Voraussetzungen für Verwendung des Begriffs oder des Satzes erfüllt sind.

Dies gilt für die Unterrichtsarbeit jeder Stufe, aber auf der Oberstufe ist noch mehr notwendig.

Die ganze Schularbeit ist eine propädeutische. Auf jeder Stufe der Ausbildung des jugendlichen Geistes kann man immer nur bis zu einem gewissen Grade in die Tiefe dringen, nur bis zu einem gewissen Grade das Bedürfnis und Verständnis für logische Untersuchungen schaffen. Allerdings soll man auch auf der Unterstufe nicht mit logischen Fehlern arbeiten, man soll dem Schüler nicht beweisen, was sich nicht beweisen läßt, daß es zu einer Geraden durch einen Punkt nur eine Parallele giebt, daß $(-a)(-b) = +ab$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ist, u. s. w. Für gewisse logische Erörterungen jedoch ist der Schüler der Unterstufe noch nicht reif, sie müssen für den Schüler der Oberstufe bleiben. Hier müssen sie aber auch vorgenommen werden, wenn in der logischen Durchbildung der Schüler nicht Mängel bleiben sollen. Das gilt sowohl für die Algebra wie für die Geometrie.

In der Algebra bieten die Lehrpläne an zwei Stellen Gelegenheit, auf logische Fragen einzugehen, in der Obersekunda bei der Lehre von den Potenzen, Wurzeln und Logarithmen, in der Prima bei der Lehre von den imaginären Größen. Auf der Unterstufe werden jetzt wohl überall die Regeln der Algebra mehr empirisch abgeleitet, die Beweise jedenfalls als etwas Nebensächliches behandelt. In Obersekunda ist der Zeitpunkt gekommen, das Versäumte nachzuholen. Hier lernt der Schüler, daß sich die Regeln der Algebra ebenso systematisch und streng beweisen lassen, wie die Lehrsätze der Geometrie. Hier lernt er in einem einfachen, leicht übersichtlichen Falle kennen, wie ein Begriffssystem sich allmählich fortbildet, wie der Fortschritt von einer Rechnungsart zur andern, der noch wichtigere Fortschritt von einer Zahlengattung zur andern erfolgt, von den natürlichen ganzen Zahlen zu den Brüchen, zu den negativen und irrationalen Zahlen. Die Frage, ob es zwischen 0 und 1 Zahlen geben kann, die nicht Brüche sind, zeigt den Schülern zu ihrer eigenen freudigen Ueberraschung, wie leicht der ungeschulte Geist sich irrt. Bei dieser Gelegenheit mahnt der Stoff in ganz besonderer Weise zur Vorsicht in Analogieschlüssen. Der Schüler muß lernen, daß es für jeden Begriff, für jedes Gesetz ein Geltungsbereich giebt, daß man Begriff und Gesetz über dieses Geltungsbereich hinaus nicht verwenden darf. Man darf nicht ohne Weiteres von einem Produkt sprechen, dessen Multiplikator eine negative, gebrochene oder irrationale Zahl ist, von einer Potenz, mit deren Exponenten das der Fall ist. Man darf nicht die Gesetze einer Zahlengattung ohne nähere Untersuchung der Berechtigung auf eine andere übertragen. Alle diese Dinge sind in der Prima bei der Lehre von den imaginären Größen noch einmal zu besprechen; die Wichtigkeit und Schwierigkeit dieser Fragen erfordern es.

Auf die Grundlagen der Geometrie einzugehen, dazu bietet sich in der Prima bei der Behandlung der Stereometrie Gelegenheit. Hier wird den Schülern zum Bewußtsein zu bringen sein, daß wir es in der Geometrie in viel geringerem Maße mit einer reinen Begriffswissenschaft zu thun haben als in der Algebra, daß in der Geometrie nicht alles bewiesen wird.

Bald der Eingang in die Stereometrie führt zur Frage der geometrischen Grundbegriffe. Die Definition abgeleiteter Begriffe ist eine verhältnismäßig einfache Sache. Es sind für diesen Fall die Erfordernisse (Angabe von Gattungs- und Artmerkmalen) einer richtigen Definition sehr leicht zum Verständnis zu bringen. Ein beliebiges Beispiel wie die Erklärung des Parallelogramms als eines Vierecks mit parallelen Gegenseiten ist dazu geeignet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ganz anders steht es mit der Definition von Grundbegriffen. Die gebräuchlichen Definitionen der geometrischen Grundbegriffe haben sich als falsch erwiesen. Man definiert die Fläche als Grenze von Körpern, die Linie als Grenze von Flächen. Die neuere Analysis hat aber gezeigt, daß es Flächen giebt, die keinen Körper begrenzen, und Linien, die keine Fläche begrenzen.*) Jene Definitionen von Fläche und Linie sind also unbrauchbar. Euklid sagt: „Die Linie ist eine Länge ohne Breite." Es giebt aber Linien, die gar keine Länge haben. Die Gerade definiert man wohl als eine Linie, die überall dieselbe Richtung hat. Es giebt aber Linien die gar keine Richtung haben, abgesehen von der Frage, ob der Begriff Richtung ohne den der Geraden verständlich ist.

Die Begriffe: Punkt, Gerade, Ebene sind Resultate der geistigen Bearbeitung von Erfahrungsthatsachen, sind postulierte Gedankendinge, der Wirklichkeit angepaßte Ideeen.**) Punkt und Gerade sind Begriffe, die sich nicht auf einfachere zurückführen lassen; der Begriff der Geraden muß umgekehrt dazu dienen, den Begriff der allgemeinen Linie zu definieren. Dementsprechend sind auch im Unterricht Punkt und Gerade als Grundbegriffe anzusehen, die wohl an Beobachtungsthatsachen erläutert, aber nicht definiert werden können. Die Begriffe Richtung und Abstand sind auf den der Geraden zu stützen.

Die Frage, wie man mit nicht definierten Begriffen in der Wissenschaft arbeiten kann, führt auf die Frage nach der Bedeutung und der Stellung der geometrischen Grundsätze. Während ein abgeleiteter Begriff durch Angabe der Gattungs- und Artmerkmale Inhalt erhält, erhalten die Grundbegriffe ihre nähere Bedeutung durch Angabe der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen, und diese Angaben werden in Gestalt von Grundsätzen gemacht.

Bei dieser Gelegenheit können die Axiomensysteme von Pasch und Hilbert in der einen oder anderen Form berührt werden, um den Schülern zu zeigen, was zu einem streng logischen Aufbau der Wissenschaft gehört, welche Schwierigkeiten in der Elementar-Geometrie enthalten sind; ein tieferes Eingehen auf diese Fragen wird im Allgemeinen nicht möglich sein.

Wer die Gerade als Grundbegriff nicht gelten lassen und ein Uebriges thun will, kann auf die Auffassung Veronese's, die Erklärung der Geraden als eines homogenen linearen Systems von Punkten hinweisen; daneben sind dann auch die Postulate, die einer rein logischen Begründung der Geometrie der Geraden zu Grunde liegen, anzugeben.

Etwas anders als mit dem Begriff der Geraden steht es mit dem Begriff der Ebene.

Die Ebene kann man sich entstanden denken durch Drehung eines rechten Winkels um einen Schenkel oder durch Bewegung eines Strahls, der durch einen Punkt geht und eine gegebene Gerade schneidet oder ihr parallel ist. Schwierigkeiten bereitet der Beweis, daß jede Gerade, die mit der Ebene zwei Punkte gemein hat, ganz in ihr liegt. Die Beweise, die man für diesen Satz in den Lehrbüchern findet, stützen sich auf die Kongruenzsätze, setzen also mit dem Begriff der Ebene diese Eigenschaft schon voraus. Den Beweis, den Veronese für den Satz giebt, wird man auch nicht leicht in den Lehrgang der Prima einfügen können. Es müßte sonst der ganze bezügliche Teil des vom Herkömmlichen abweichenden Lehrgangs Veronese's vorgeführt werden. Wohl aber ist an dieser Stelle auf das Vorhandensein einer Lücke in der Entwickelung hinzuweisen, auch darauf, daß diese Lücke ausgefüllt werden kann.

Auch die Frage des Parallelenaxioms ist wieder zu berühren bei der Besprechung der Begriffe paralleler Geraden und Ebenen. Bei dieser Gelegenheit wird es zweckmäßig sein, den Sinn näher

*) Den Hinweis auf diese Thatsache entnehme ich einer Vorlesung von Prof. Schur.

**) Vergl. H. Vogt. Der Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik, Breslau. 1885.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

darzulegen, in dem man von unendlich fernen Punkten einer Geraden, einer Ebene und des Raumes spricht, daß es sich hier nicht um die Frage handelt, ob die Punkte in der Unendlichkeit existieren, ob in Wirklichkeit die unendlich fernen Punkte einer Ebene auf eine Gerade, die unendlich fernen Punkte des Raumes auf eine Ebene beschränkt sind. Es ist darauf hinzuweisen, daß unendlich ferne Punkte, Geraden und Ebene postulierte, rein ideale Elemente sind, mit denen man, ohne auf Widersprüche zu stoßen, operieren kann, die dazu bestimmt sind, den geometrischen Lehren den Charakter größerer Allgemeinheit und Brauchbarkeit zu verleihen. Nach der Euklidischen Auffassung, die allen menschlichen Erfahrungen entspricht und ihnen in der einfachsten Weise genügt, giebt es durch einen Punkt zu einer Geraden nur eine Parallele, hat also die Gerade nur einen idealen Punkt, die Ebene nur eine ideale Gerade, der Raum nur eine ideale Ebene.

Bietet sich, wozu an Realanstalten wohl Zeit ist, Gelegenheit, die Polareigenschaften der Kugel zu behandeln, so ist ein Hinweis auf das Polarsystem, das eine beliebige Kugel in der unendlich fernen Ebene bestimmt, darauf, daß die Beziehung des Senkrechtstehens nichts als Polarbeziehungen für dies Polarsystem sind, durchaus wünschenswert. Die Lehre von den senkrechten Geraden und Ebenen gewinnt dadurch wesentlich an Einfachheit und Uebersichtlichkeit.

Noch eine andere Stelle der Stereometrie hat zur Klärung der Frage des Parallelenaxioms beizutragen. Bei dem Beweise, daß im sphärischen Dreieck (bezw. in der dreiseitigen Ecke) die Summe der Winkel mehr als zwei Rechte beträgt, liegt der Vergleich mit dem ebenen Dreieck nahe. Wie leicht man zu Fehlschlüssen gelangt, wenn man mit einer ungefähr plausibeln Anschauung sich zufrieden giebt, kann man gerade an dieser Stelle sehr gut zeigen. Der bekannte Thibaut'sche Beweis für den Satz, daß die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei Rechte beträgt, gilt für die Kugel genau in derselben Weise wie für die Ebene, führt aber für die Kugel zu einem falschen Ergebnis.

Die Stereometrie bietet auch Anlaß zur Besprechung des Grundsatzes, daß unser Raum ein Raum von drei Dimensionen ist, der Thatsache, daß die Notwendigkeit von nur drei Dimensionen sich nicht beweisen läßt; gleichbedeutend mit dieser Thatsache ist der Satz, der sich auch nicht beweisen läßt, daß zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, sich in einer Geraden schneiden. Da unsere Schüler auch von dem Aberglauben der Spiritisten und von der Erklärung s. g. spiritistischer Experimente durch die Annahme einer vierten Dimension hören, so muß im mathematischen Unterricht darauf hingewiesen werden, daß in der bloßen logischen Möglichkeit kein Anlaß zur Annahme von mehr als drei Dimensionen liegt.

Andere Fragen, die Fragen des Grenzbegriffs in der Elementargeometrie, des Archimedischen Postulats, des Irrationalen, des Rechnens mit Strecken, Flächen und Rauminhalten sind bei der Berechnung der Körper zu behandeln. Eine mustergiltige Besprechung der Fragen, die sich auf den Grenzbegriff in der Elementar-Mathematik beziehen, hat H. Vogt in der schon genannten Programmarbeit geliefert. Die Ausmessung des Parallelepipedons führt zur Erörterung des Irrationalen, der Beweis des Cavalierischen Princips oder die Ableitung der Volumenformel des Tetraeders, der Kugel und der anderen krummflächigen Körper zum Grenzbegriff einer Reihe von unendlich vielen Gliedern, zum Integral. Auch auf die Schwierigkeiten, die im Rechnen mit Flächen und Volumengrößen liegt, auf die dem Rechnen zu Grunde liegenden Postulate, kann gelegentlich unter Berücksichtigung der Arbeiten von Schur, Veronese und Hilbert hingewiesen werden.

So bietet also der mathematische Unterricht der Oberstufe vielfach Anlaß, auf die Fragen einer strengeren Begründung der Elementargeometrie einzugehen. Wenn die Besprechung dieser Fragen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das rechte Maß inne hält, so wird sie für die logische Durchbildung der Schüler unzweifelhaft von Wert sein. Oft wird es zweckmäßig sein, nicht bald beim Beginn des stereometrischen Unterrichts auf alle diese Fragen einzugehen. Gelegentlich einer Wiederholung darf man mehr Interesse und Verständnis für solche tiefer eindringende Untersuchungen erwarten.

Eine Gefahr liegt trotzdem bei diesen Fragen nahe, die Gefahr, daß der Lehrer über die Köpfe der Durchschnittsschüler hinwegspricht. Es ist Aufgabe des Lehrers, das zu verhüten, er hat aber auch die Pflicht, den besseren Köpfen nicht nur Handwerksmäßiges zu bieten. Die Schule muß damit rechnen, daß die Primaner in ein oder zwei Jahren auf der Hochschule philosophische Vorlesungen zu hören haben. Die Bedeutung der Kantischen Philosophie ist in unseren Tagen immer noch eine so große, daß jeder Gebildete sich mit ihr in der einen oder anderen Weise abfinden muß. Die Erfahrung zeigt, wie schwer ein Eindringen in diese Philosophie für denjenigen ist, dessen mathematische Bildung sich auf das beschränkt, was zum Lösen der mathematischen Abiturientenaufgaben gehört, und wie wertvoll hierfür Aufklärungen im oben angedeuteten Sinne sind. Selbst wenn der eine oder der andere Hinweis des Lehrers auf philosophische Fragen von dem einen oder anderen schwächeren Schüler nicht voll verstanden wird, so wird das dadurch kompensiert, daß auch den befähigteren Schülern, die einen weiteren Blick haben, einmal Stoff zugeführt wird, der sie zu fesseln und zu fördern geeignet ist.

Selbstverständlich ist die Mathematik nicht das einzige Fach, das für die logische Durchbildung der Schüler sorgen kann und soll. Abgesehen von den sprachlichen Fächern, die durch grammatische Schulung und Lektüre philosophischer Schriften so wesentlich dazu beitragen, bildet nach dieser Richtung ein besonders wichtiges Glied in dem System der Lehrfächer der physikalisch-chemische Unterricht. Einerseits ist dieser Unterricht gemäß der wissenschaftlichen Natur von Physik und Chemie ganz besonders geeignet, die Schüler im Gebrauch der Methoden der induktiven Logik zu üben, andererseits bietet er in allen seinen Teilen die Möglichkeit, in bescheidenem Maße Erkenntnistheorie zu betreiben, zu erkennen, wie die Erfahrungswissenschaften entstehen, wie unser Wissen von der Außenwelt, der Gehalt der Empfindungen, die in uns unter den Einflüssen der Außenwelt ausgelöst werden, erst durch vielseitige Bearbeitung zu dem wird, was wir Wissenschaft nennen.*)

II.

Der Einfluß der projektiven Geometrie auf die Elementargeometrie.

In den vorhergehenden Abschnitten dieser Arbeit ist auf die Schwierigkeiten hingewiesen worden, die eine exakte Begründung der Elementargeometrie macht, auf die Mängel, die in dieser Beziehung den Elementen Euklids anhaften, und auf die Versuche, die gemacht worden sind, jene Schwierigkeiten zu überwinden, diese Mängel zu beseitigen.

*) Um Mißverständnissen vorzubeugen, will ich doch auch bei dieser Gelegenheit betonen, daß man an den Schülern und an der Mathematik ein Unrecht begeht, wenn man im Unterricht die abstrakt-logische Kraft der Mathematik in den Vordergrund stellt und dem gegenüber ihre praktische Bedeutung vernachlässigt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu geringe Strenge in der Begründung seiner Sätze ist Euklid indes viel weniger vorgeworfen worden, als ein anderer Mangel, der Mangel an systematischer Ordnung. Die Reihenfolge der Sätze Euklids ist allein dadurch bedingt, daß jeder neue Satz durch die vorangehenden bewiesen werden kann; der stoffliche Zusammenhang der Sätze tritt demgegenüber in den Hintergrund. Dann hat die Untersuchung bei Euklid zu sehr den Zug ins Spezielle, es fehlen allgemeine, für umfassende Reihen von Problemen brauchbare Methoden. Nach beiden Richtungen ist die neuere s. g. synthetische bezw. projektive Geometrie der Geometrie Euklids weit überlegen.

Der Charakter der synthetischen Geometrie kann nicht besser geschildert werden als durch die Worte Steiners, des Schöpfers dieser Wissenschaft. In der Vorrede zu seinem berühmten Werke: „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit der Gestalten" lesen wir: „Es giebt eine geringe Zahl von ganz einfachen Fundamentalbeziehungen, worin sich der Schematismus ausspricht, nach welchem sich die übrige Masse von Sätzen folgerecht und ohne alle Schwierigkeit entwickelt. Durch gehörige Aneignung der wenigen Grundbeziehungen macht man sich zum Herrn des ganzen Gegenstandes; es tritt Ordnung in das Chaos ein, und man sieht, wie alle Teile naturgemäß in einander greifen, in schönster Ordnung sich in Reihen stellen und verwandte sich zu wohlbegrenzten Gruppen vereinigen. Man gelangt auf diese Weise gleichsam in den Besitz der Elemente, von welchen die Natur ausgeht, um den Figuren mit möglichster Sparsamkeit und auf die einfachste Weise unzählig viele Eigenschaften verleihen zu können."

Es war naturgemäß, daß die Lehrer der Mathematik ihre Schüler an den Vorzügen einer so wertvollen Methode teilnehmen lassen wollten. Aber der Stoff, den Steiner in seinem Werke behandelt, ist nicht der Stoff der Elementargeometrie, wenn auch zahlreiche Berührungspunkte vorhanden sind. Der Stoff der Elementargeometrie aber mußte, darüber war man sich von vorn herein klar, in der Hauptsache derselbe bleiben; das verlangten schon die Anwendungen der Geometrie im praktischen Leben, in Astronomie, Physik und Technik. Es konnte sich nur um die Gliederung des Stoffes und die Methoden der Ableitung der Sätze handeln.

Das Erste, was die methodische Arbeit der Lehrer der Mathematik schuf, war eine genetische Entwicklung der einzelnen Lehren. Der gesamte Lehrstoff wurde nach seinem Inhalt logisch gegliedert, Verwandtes zusammen behandelt und erledigt, die einzelnen Lehren mit den vorhergehenden und folgenden logisch verknüpft. Ein beliebiges unserer heutigen Lehrbücher z. B. das von Spieker zeigt den Unterschied der Anordnung der Lehren in heutiger Zeit im Gegensatz zu Euklid.

In neuster Zeit allerdings weicht man absichtlich aus pädagogischen Gründen wieder mehrfach von dem systematischen Lehrgange ab. Die genetische Methode verlangt die Behandlung der Eigenschaften zweier Parallelen vor der Dreieckslehre; man erleichtert aber dem Schüler die Arbeit, wenn man bald nach dem Satz von den Scheitelwinkeln die Sätze vom gleichschenkligen Dreieck und die ersten drei Kongruenzsätze mit Ausnahme des zweiten Falls vom zweiten Kongruenzsatz behandelt und dann erst zur Lehre von den Winkeln an Parallelen übergeht.

In der genannten systematisch-genetischen Anordnung des Stoffes haben wir nun allerdings noch keine Beeinflussung der Elementar-Geometrie durch die projektive Geometrie; dazu gehört eine Umgestaltung der Methoden und Resultate der Elementar-Geometrie durch die Methoden der synthetischen Geometrie.

Eine Übernahme der Lehre von den projektiven Punktreihen, Strahlen- und Ebenenbüscheln, die Steiner seinen Untersuchungen zu Grunde legte, war nicht gut angängig; leichter für den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schulunterricht zu verwerten ist eine Thatsache, auf die Moebius mit besonderem Nachdruck hinwies. Die Eigenschaften der Elementar-Geometrie beziehen sich in der Hauptsache auf Kongruenz, Symmetrie, Gleichheit und Ähnlichkeit der Figuren. Alle diese Beziehungen von Figuren zu einander fallen unter einen allgemeineren Begriff, unter den Begriff der projektiven Verwandtschaft. Die Eigenschaften der projektiven Verwandschaft, die ihrer Natur nach nichts ist als die abstrakte Nachbildung des Sehprozesses, lassen sich leicht in übersichtlicher Weise entwickeln. Es lag nahe, diese Methode auf die speziellen Fälle zu übertragen, um so leicht übersichtliche Methoden für die Entwickelung und einen klaren Einblick in den Zusammenhang der geometrischen Lehren zu erhalten.

Von den Werken, die sich die Lösung der im Vorstehenden angegebenen Aufgabe zum Ziel setzen, sind namentlich zwei von Bedeutung, der Leitfaden der ebenen Geometrie und Stereometrie von Hubert Müller und das Lehrbuch der Elementar-Geometrie von Henrici und Treutlein. Da diese verdienstvollen Werke noch vielfach nicht genügend bekannt sind, sei es gestattet, den Gang der Entwickelung, den die Verfasser für die Lehren der Elementar-Geometrie gewählt haben, kurz anzugeben.

Der Leitfaden der ebenen Geometrie und der Stereometrie von Hubert Müller.*)

Den ersten vollständig durchgeführten Lehrgang der Geometrie, der von Anfang an es versucht, die Anschauungsweisen der Geometrie der Lage in den Lehrstoff der Schule einzuflechten, verdanken wir Hubert Müller. Sein Unternehmen fand Ermunterung in der Ansicht seines Lehrers, des berühmten Geometers Clebsch, der eine Umbildung vieler Teile der in der Schule gelehrten Geometrie an der Hand der neueren Geometrie für ein Bedürfnis der Zeit erklärte.

Hubert Müller benutzt die Anschauungen der neueren Geometrie von Grund aus. Schon auf der ersten Seite des ersten (planimetrischen) Teils gelangt das Prinzip der Dualität, das für die Geometrie von solcher Wichtigkeit ist, zum Ausdruck. Punkt und Gerade, Winkel und Strecke, Punktreihe und Strahlenbüschel, treten einander dual gegenüber.

Für die Beweise benutzt er von Anfang an die Lagenbeziehungen der Symmetrie deren volle Bedeutung uns erst durch die neuere Geometrie klar geworden ist, und zwar einerseits die axiale Symmetrie im Anschluß an die Halbierungslinie des Winkels (das Umklappen einer ebenen Figur um eine Gerade) und andererseits die centrische Symmetrie (die halbe Umdrehung einer ebenen Figur um einen festen Punkt). Nach Einführung der Begriffe Nebenwinkel, Scheitelwinkel und der einfachsten Sätze über diese werden die Sätze über axiale Symmetrie und nach Einführung des Begriffs der Parallelen werden unter Benutzung der centralen Symmetrie die Sätze über die Winkel an Parallelen, weitere Sätze über diese Symmetrie und Sätze über beide Symmetrieen zusammen abgeleitet. Um den Anschauungen der neueren Geometrie gerecht zu werden, führt der Verfasser bald nach der Lehre von den Parallelen den Begriff des unendlich fernen Punktes der Geraden ein.

Dann folgen Sätze über Dreieck und Dreiseit, Vierseit und Viereck, einen Kreis, zwei Kreise, geometrische Örter, das gleichschenklige Dreieck, das symmetrische Vierseit, das Parallelogramm, das

*) B. G. Teubner 1875/77/78.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sehnen-, das Tangentenviereck, die regelmäßigen Vielecke. Überall wird, so weit es angeht, von den Prinzipien der Dualität und den Symmetrieverhältnissen Gebrauch gemacht. Die Kongruenzsätze treten in der Darstellung ganz zurück; sie werden für die Ableitung der Lehrsätze vollkommen durch die axiale und centrale Symmetrie ersetzt. Die Thatsache, daß ein Dreieck durch drei Stücke bestimmt ist, wird gelegentlich der Konstruktionen nachgewiesen.

Für die Beweise der Umkehrungen irgend welcher Sätze ist von Bedeutung das von Hubert Müller hier in die Elementar-Geometrie eingeführte Prinzip der eindeutigen Bestimmung irgend welcher Elemente.

In der Lehre von der Fläche der Figuren giebt H. Müller sofort die Berechnung des Inhalts; die Sätze über Flächenvergleichung erscheinen als Folgerungen der Inhaltsformeln. Die Proportionalitätslehre stützt er auf den aus der neueren Geometrie stammenden Begriff ähnlicher Punktreihen, er behandelt ähnliche Punktreihen auf konvergenten und parallelen Trägern. Den Begriff ähnlicher Figuren faßt er bald ganz allgemein. „Zwei Figuren, deren Punkte sich paarweise entsprechen, heißen ähnlich, wenn man sie so in einen Strahlenbüschel legen kann, daß je zwei entsprechende Punkte auf demselben Strahle liegen (perspektivische Lage) und die Abstände solcher Punkte vom Scheitel in einem konstanten Verhältnis stehen." Aus dieser Erklärung heraus werden die Eigenschaften der in solcher Weise mit einander in Verbindung gesetzten beiden Systeme von Punkten abgeleitet. Außer den sonst zu wenig beachteten Lagenbeziehungen ergeben sich auch die Größenbeziehungen, auch der wichtigste (auf die Gleichheit zweier Winkelpaare bezügliche) Ähnlichkeitssatz. Den Schluß des ersten Heftes des planimetrischen Teils bildet die Berechnung des Kreises.

Das zweite Heft erweitert den Stoff um die Lehre von den harmonischen Elementen, dem vollständigen Viereck und Vierseit, den Potenzlinien, Pol und Polare beim Kreise, den ähnlichen Systemen zweier Kreise und den Kegelschnitten.

Schon bei der Behandlung der Vierecke führt der Verfasser die Begriffe eines Durchmessers und konjugierter Durchmesser ein. Die Lehren von den Potenzlinien vervollständigt er durch die Betrachtung des durch zwei Kreise bestimmten ganzen Büschels von Kreisen, der involutorischen Reihe (Involution von Punktepaaren), die auf einer beliebigen Geraden durch ein Kreisbüschel bestimmt wird, und des involutorischen Strahlenbüschels (Strahleninvolution). Diese Begriffe finden dann wieder Verwendung bei der Ableitung der Beziehungen, durch welche Pol und Polare mit einander verknüpft sind. Mit Hilfe der Involutionen führt der Verfasser hier schon die Begriffe imaginärer Punkte und Strahlen ein.

Die Ableitung der Eigenschaften der Kegelschnitte stützt sich auf die Brennpunktdefinitionen.

Viel tiefer in die Lehren der neueren Geometrie führt der zweite Teil der ebenen Geometrie. Hier finden wir auch die von Steiner herrührenden Lehren der projektivischen Punktreihen und Strahlenbüschel. Die Grundeigenschaften dieser Gebilde werden benutzt zur Ableitung der Beziehungen der Elemente involutorischer Punktreihen und Strahlenbüschel, der Beziehungen derselben zum Kreisbüschel, der Sätze über Pol und Polare in Bezug auf den Kreis. Sodann werden die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und in dualer Weise die Gesamtheit ihrer Tangenten als Erzeugnis projektiver Punktreihen betrachtet. Diese Erzeugnisse projektiver Grundgebilde werden schließlich nach ihren Beziehungen zur unendlich fernen Geraden in verschiedene Arten eingeteilt und diese dann mit den schon im ersten Teil behandelten Kegelschnitten, der Ellipse, Hyperbel und Parabel, als identisch nachgewiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein weiterer Abschnitt behandelt die Systeme zweiter Stufe, das ebene System und das Strahlenbündel, die projektive Beziehung zweier ebenen Systeme auf einander mit ihren verschiedenen Unterarten, der Affinität, Ähnlichkeit und Kongruenz. Diese projektiven Beziehungen werden zunächst mit Hilfe von drei Dimensionen für verschiedene Träger (Ebenen) aufgewiesen, dann auch für die Punkte und Geraden desselben Trägers (derselben Ebene) hergestellt.

Denselben Charakter, den Hubert Müller der Planimetrie gegeben, besitzt auch seine Stereometrie. Auch für die Stereometrie waren zwei Teile beabsichtigt, von denen der erste die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen behandelt, während der zweite die Elemente der neueren Geometrie im Raume enthalten sollte; der zweite Teil ist nicht erschienen.

Der 1877 erschienene erste Teil, der die einfacheren stereometrischen Lehren bringt, berührt sich vielfach mit den gebräuchlichen stereometrischen Lehrbüchern. Er berücksichtigt aber wieder im Gegensatz zu diesen von Anfang an die Anschauungen der neueren Geometrie, das Prinzip der Dualität, die unendlich ferne Ebene, die projektive Beziehung der Strahlenbündel und ebenen Systeme auf einander. Ausführlich behandelt werden die Projektionslehre, die zentrische Projektion, die Parallelprojektion, die perspektivische und ähnliche Lage von Polyedern, affine Figuren, die Darstellung von Körperformen, die schiefwinklige Parallelprojektion (das stereometrische Zeichnen) und die darstellende Geometrie (die Darstellung der Körper durch Grundriß und Aufriß).

In allen Abschnitten des Buches sind die rein geometrischen Eigenschaften der räumlichen Figuren in den Vordergrund gestellt, die Stereometrie ist nicht wie bei anderen eine rechnende Wissenschaft. Bei der Lehre von den körperlichen Ecken finden wir die Konstruktion der Ecke aus gegebenen Stücken, im Anschluß daran die grundlegenden Formeln der sphärischen Trigonometrie. Eingehend behandelt sind die Eigenschaften der Kugel und die Eigenschaften der Figuren auf der Kugelfläche. Damit verbunden sind Uebungen über Kartenprojektionen (stereographische, orthographische, zentrische, konische Projektionen, Merkators Projektion).

In dem zweiten Teile der Stereometrie, der leider nicht erschienen ist, beabsichtigte Hubert Müller die Symmetrielehre, ähnliche Systeme, Anwendung der Ähnlichkeitslehre auf die Kugel, die Lehre von Pol und Polare in Bezug auf die Kugel zu behandeln; sogar die fundamentalen Eigenschaften der Regelschaaren und Regelflächen, der Raumkurven 3. O. und der Flächen 2. O. sollte dieser Teil enthalten.

Jeder, der die bisherigen Teile des vorstehend besprochenen Werkes kennt, wird das Nichterscheinen des letzten Teils bedauern. Noch mehr zu bedauern ist, daß das Werk nicht die Verbreitung gewonnen hat, die es verdient, zumal selbst in Fachkreisen die Grundlehren der neueren Geometrie noch immer nicht die ihrer Bedeutung entsprechende Würdigung erfahren haben. Anerkennung und Billigung fanden die Bestrebungen Hubert Müllers auf der 31. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner; die mathematisch-naturwissenschaftliche Sektion der Versammlung begrüßte die von ihm begonnene, im Geiste der neueren Geometrie gehaltene Reform der Euklidischen Geometrie mit großer Freude.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrbuch der Elementar-Geometrie von Henrici und Treutlein.*)

Die Reform der Elementar-Geometrie, die Hubert Müller mit seinem im vorhergehenden Abschnitt besprochenen Leitfaden anstrebte, hatte in erster Linie die Grundanschauungen, den stofflichen Inhalt der neueren Geometrie im Auge. Die Anschauungen der neueren Geometrie werden benutzt, um ein neues, in sich einheitliches Gebäude der Elementar-Geometrie zu errichten, das im Großen und Ganzen inhaltlich sich mit den Elementen Euklids deckt.

In einem anderen Sinne haben Henrici und Treutlein den Umbau der Elementar-Geometrie in Angriff genommen. Während bei Hubert Müller der Stoff in dem Vordergrunde steht, dieser mit neueren Anschauungen durchtränkt und nach neueren Methoden behandelt wird, treten bei Henrici und Treutlein die Methoden selbst in die erste Linie. Die Methoden der Beweisführung sind bei ihnen maßgebend für die Gliederung des Stoffes. Diese Methoden selbst stammen aus der neueren Geometrie, sind im Grunde besondere Fälle der allgemeinen Methoden der Projektivität.

Das Lehrbuch von Henrici-Treutlein besteht aus drei Teilen. Der erste Teil behandelt die Gleichheit der Gebilde in einer Ebene; die Methoden lassen sich dem Begriff der Abbildung ohne Maßänderung (der kongruenten Abbildung) unterordnen.

Der Anfang bringt die Grundgebilde der Geometrie, die gerade Linie und die Ebene, ihre Entstehungsweise, die ersten Eigenschaften der Strecken auf einer Geraden und der Winkel an einem Punkt, der Strecken und Winkel geradliniger Figuren. Die weitere Untersuchung gliedert sich den Beweismethoden entsprechend in drei Kapitel.

Die Beweismethode des ersten Kapitels heißt die Umdrehung (die Drehung einer Figur um 180 Grad). Sie führt zu den Eigenschaften der Figuren mit einem Mittelpunkt, zu den Eigenschaften paralleler Linien, der Strecken und Winkel bei Parallelen, im Dreieck, Trapez und Vieleck. In dem zweiten Kapitel wird die Methode der Umwendung (Umklappung) benutzt. Sie liefert die Eigenschaften der Figuren mit einer Mittellinie, der Mittellinie zweier Geraden, der Mittellinie als Ort der Punkte gleicher Entfernungen von zwei Punkten und zwei Geraden. Daran schließen sich Sätze über gleiche und ungleiche Strecken im Dreieck, besondere Punkte im Dreieck. Im dritten Kapitel kommen die Methoden der Verschiebung und der Drehung zur Anwendung. Behandelt wird die Verschiebung der Figuren längs einer Geraden und die Drehung um einen Winkel. Dabei ergeben sich neben anderen Eigenschaften auch die Bedingungen für die Übereinstimmung zweier Dreiecke und die Beziehungen über Seiten und Winkel teilweise übereinstimmender Dreiecke.

Dann folgt ein Abschnitt über den Kreis, den Kreis als Figur mit Mittelpunkt, den Kreis als Figur mit Mittellinie, die Vergleichung von Strecken und Winkeln am Kreise und die Lösung von Aufgaben durch Gerade und Kreis.

Ein weiterer Abschnitt giebt eine eingehendere Anwendung der früher abgeleiteten Eigenschaften auf das Vieleck und Vielseit. Behandelt werden der Reihe nach das Viereck mit Mittelpunkt (Parallelogramm), das Viereck und Vierseit mit Mittellinie (gleichschenkliges Viereck und gleichgeneigtes Trapez), das Viereck mit Mittelpunkt und Mittellinie (Raute, Rechteck, Quadrat), das Viereck

*) B. G. Teubner. 1882, 83, 91.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

im Kreise und das Vierseit um den Kreis, das Vieleck mit Mittelpunkt und das Vieleck mit Mittellinie, das regelmäßige Vieleck, das Vieleck im Kreise und das Vieleck um den Kreis.

Der Schluß des ersten Teils beschäftigt sich mit dem Flächeninhalt geschlossener Figuren, mit der Inhaltsgleichheit, der Figurenverwandlung, der Figurenteilung und der Inhaltsberechnung.

Der zweite Teil des Werkes behandelt im Gegensatz zu der im ersten Teil erledigten kongruenten Abbildung die perspektivische Abbildung der Figuren und dann ihre Berechnung (Trigonometrie).

Begonnen wird mit der perspektivischen Ähnlichkeit. Nach einer Einleitung, in der die Begriffe Maß, Verhältnis zweier Größen, die Proportion ihre Erklärung finden, werden zwei Figuren perspektivisch genannt, wenn jedem Punkt der einen Figur ein solcher der zweiten Figur je auf einem Strahl durch einen bestimmten Punkt entspricht. Dann wird die Betrachtung auf den Fall beschränkt, daß den Punkten einer Geraden der einen Figur auch in der zweiten die Punkte einer Geraden zugehören. Diese perspektivische Projektion begreift unter sich vier besondere Fälle, die Kongruenz, die Ähnlichkeit, die Affinität und die Kollineation, je nachdem die Projektionsstrahlen (im 1. und 3. Falle) oder die entsprechenden Geraden (im 1. und 2. Falle) parallel sind oder nicht.

Von den vier genannten geometrischen Verwandtschaften ist die erste, die Kongruenz, im ersten Teile des Werkes schon behandelt: hier werden zunächst die Eigenschaften ähnlicher Figuren entwickelt. Die Untersuchung beginnt mit den einfachen Eigenschaften perspektivisch-ähnlicher Punktreihen, die auf zwei Parallelen durch ein Strahlenbüschel oder auf konvergenten Geraden durch ein Büschel von parallelen Strahlen ausgeschnitten werden; daran schließen sich Konstruktionen proportionaler Strecken. Die Untersuchung der Eigenschaften zweier Antiparallelen im Zweistrahl (von Geraden, die zwei sich schneidende Geraden unter gleichen Winkel schneiden, ohne parallel zu sein) liefert Proportionen, die im rechtwinkligen Dreieck und am Kreise Verwendung finden. Dann folgt die Betrachtung perspektivisch ähnlicher Figuren (ähnlicher Figuren in ähnlicher Lage), im Anschluß daran die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen bei drei ähnlich liegenden Figuren, perspektivische Ähnlichkeit bei Kreisen.

Bis hierher bewegen sich die Verfasser im wesentlichen auf dem Gebiet, das auch sonst in der Schule behandelt wird. Das Folgende enthält dagegen Dinge, die bisher nicht in den Unterricht hineingezogen wurden; der nächste Abschnitt bringt die Eigenschaften der Kollineation.

Die Behandlung dieser Verwandtschaft stützt sich auf die Eigenschaften perspektivischer und projektivischer Punktreihen und Strahlenbüschel. Benutzt werden hierbei die Doppelverhältnisse von Strecken und Winkeln; den geometrischen Größen werden im Sinne der neueren Geometrie Vorzeichen beigelegt. Dabei finden die Lehre von den Dreieckstransversalen, die Sätze von Menelaos, Carnot, Pascal, die Lehre von den harmonischen Elementen und ihrem Auftreten im vollständigen Vierseit und Viereck (Pol und Polare) ihre Erledigung. Projektive Punktreihen auf derselben Geraden, projektive Strahlenbüschel mit demselben Scheitel liefern die Involutionen von Punkten und Strahlen.

Dann folgen die Untersuchung perspektivischer Figuren in der Ebene, der Eigenschaften perspektivischer Dreiecke, die Einführung unendlich ferner Punkte und der unendlich fernen Geraden, perspektivische Eigenschaften der Kreise und im Anschluß daran Beziehungen zwischen den Eigenschaften der Polaren, Ähnlichkeitspunkten und Chordalen von Kreisen und die Anwendung dieser Beziehungen auf die Apollonische Berührungsaufgabe.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die zweite Hälfte dieses zweiten Teils des Werkes von Henrici-Treutlein enthält die Berechnung der planimetrischen Größen, insbesondere auch die Goniometrie und Trigonometrie, die graphische Bestimmung von Strecken und Flächen und die Grundaufgaben der praktischen Geometrie.

Der dritte Teil des Werkes behandelt die Lage und Größe der stereometrischen Gebilde, die Abbildung einer Ebene auf eine zweite.

Nach einer Einleitung, in der das Prinzip der Dualität näher erläutert und die Grundbeziehungen von Geraden und Ebenen erörtert werden, schließt sich die weitere Untersuchung wieder an umfassende Methoden an. Behandelt wird die Symmetrie in Bezug auf eine Gerade, im Anschluß daran die Rotationsflächen und die am Rotationskegel erklärten Kegelschnitte, die Symmetrie in Bezug auf eine Ebene und die Symmetrie in Bezug auf einen Punkt; dabei ergeben sich auch die Eigenschaften der dreiseitigen Ecken und der sphärischen Dreiecke. Dann folgt perspektivische Kongruenz und Ähnlichkeit von ebenen und körperlichen Figuren.

Nach einem Abschnitt, der die Bestimmung der Größe räumlicher Gebilde, die Berechnung von Oberfläche und Volumen und die sphärische Trigonometrie enthält, folgt ein weiterer, der wieder weit über das gewöhnlich in den höheren Schulen behandelte Stoffgebiet hinausgeht.

Abbildung der Figuren einer Ebene auf eine zweite ist der Gegenstand der Untersuchung. Die Centralprojektion der Punkte einer Ebene auf eine zweite führt zur Betrachtung der Perspektive von Punkten und Geraden, Punktreihen und Strahlenbüscheln, von Dreiecken, Dreiseiten, Vierecken, Vierseiten, zur Projektion der unendlich fernen Punkte der Ebene und zur Ableitung zahlreicher mit diesen Dingen verknüpfter Eigenschaften. Anwendung gemacht wird von der Abbildung und ihren Eigenschaften in der Projektion eines Kreises in einen Kreis (Grundkreis und Wechselschnitt eines schiefen Kegels) zur Ableitung der Polareigenschaften des Kreises aus seinen bekannten Mittelpunktseigenschaften, zur Ableitung der Eigenschaften des Vierecks, Vierseits, Sechsecks und Sechsseits eines Kreises und auf die perspektivische Lage zweier Kugelschnitte. Die Abbildung des Kreises in einen Kegelschnitt liefert die entsprechenden Eigenschaften der Kegelschnitte, Mittelpunkt, zugeordnete Durchmesser, die Bestimmung der Kegelschnitte aus Punkten und Tangenten, ihre Erzeugung durch projektive Punktreihen und Strahlenbüschel, ihre Achsen, Brennpunkte, Leitgeraden, schließlich auch metrische Eigenschaften der Kegelschnitte und ihre Gleichungen. Den Schluß bildet die Anwendung der Abbildungsmethoden auf die Elementar-Aufgaben der darstellenden Geometrie, axonometrische Darstellung, Kartenprojektion und Malerperspektive.

Bedeutung der Werke von Hubert Müller und Henrici-Treutlein für den Unterricht.

Die im Vorangehenden näher dargelegten Lehrgänge der Geometrie, die wir Hubert Müller einerseits, Henrici und Treutlein andererseits verdanken, zeigen, daß es sehr wohl möglich ist, die elementare Geometrie mit den Gedanken der neueren Geometrie zu durchdringen, sei es, daß man wie Hubert Müller mehr auf den Inhalt oder wie Henrici und Treutlein mehr auf die Methoden Gewicht legt. Es kann auch kein Zweifel sein, daß man in der in diesen Lehrbüchern durchgeführten Form den Unterricht wirklich erteilen kann. Wie einer der Herausgeber des zweiten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werkes dem Verfasser gegenüber nachdrücklich betonte, macht an seiner Anstalt der Unterricht in der neuen Gestalt durchaus keine Schwierigkeiten, es sind vielmehr die Resultate des Unterrichts wesentlich bessere als bei der alten Art des Unterrichts. Daß die Elementar-Geometrie in der neuen Gestalt, wenn sie dem Schüler voll zum Verständnis gelangt, eine tiefere und umfassendere Einsicht in die Eigenschaften der räumlichen Gebilde gewährt als in der althergebrachten Form, steht ganz außer Frage.

Dazu kommt, daß die Bedeutung der synthetischen Geometrie für die Praxis in neuerer Zeit noch zugenommen hat. Die gesamte darstellende Geometrie, die an den Hochschulen vorgetragen wird, ist nach den Grundideeen der synthetischen Geometrie umgestaltet worden; ebenso bildet sie die Grundlage für die graphische Statik und die Kinematik.

Eines steht allerdings der Einführung dieser neuen Methoden im Wege. Die Werke von Hubert Müller und Henrici-Treutlein sind umfangreicher als die gebräuchlichen Schulbücher der Geometrie. Am Gymnasium dürfte die für den Unterricht verfügbare Zeit zur vollen Auswertung des gebotenen Lehrstoffs nicht ausreichen. Anders liegt die Sache an den Realanstalten, so lange an ihnen die Infinitesimalrechnung ausgeschlossen bleibt; an diesen dürfte sich ein solcher Lehrgang sehr wohl durchführen lassen und deshalb zu empfehlen sein.

Indes werden so bedeutende Änderungen, wie sie die Verfasser der neuen Lehrbücher vorschlagen, überhaupt schwer zu erreichen sein. Die Lehrer sind zunächst an die vorgeschriebenen Lehrpläne gebunden, und Experimente in größerem Umfange auf die Gefahr der Schüler macht ein vorsichtiger Lehrer nicht.

Trotzdem bleibt es ein Unrecht, wenn die Schule die wissenschaftlichen Ergebnisse, die den Schulunterricht angehen, dauernd unbeachtet läßt, und in gewisser Weise ist eine Berücksichtigung dieser Ergebnisse wohl möglich, ohne die Schüler mehr als bisher zu belasten.

Der physikalische Unterricht war vor nicht langer Zeit in einer ähnlichen Lage. Die Forschungen von Robert Mayer und Helmholtz hatten gezeigt, daß bei allen Naturvorgängen die lebendige Kraft, die Energie der beteiligten Körper unverändert bleibt, daß die Physik in allen ihren Teilen von diesem umfassenden Prinzip der Erhaltung der Energie beherrscht wird, daß man das Prinzip zur Grundlage der ganzen Naturlehre machen kann. Von dieser grundlegenden Bedeutung des Prinzips aus wurde der Vorschlag gemacht, dasselbe an die Spitze des gesamten physikalischen Unterrichts zu stellen und alle Einzelerscheinungen aus ihm abzuleiten. Der praktische Unterricht ist darauf nicht eingegangen, läßt aber die große Bedeutung des Prinzips doch zur Geltung kommen. Das Prinzip ist zum Schlußstein der ganzen Physik gemacht worden. Die neueren physikalischen Lehrbücher schließen mit einer Erörterung über die Aufgabe, die Grundbegriffe und Methoden der Naturwissenschaften, über die verschiedenen Arten der Energie, die Verwandlungen der Energie, die Bedeutung dieser Verwandlungen für die Natur im allgemeinen und das Leben der Erde im besonderen.

In analoger Weise kann man im geometrischen Schlußunterricht die Lehren von der Projektivität fruchtbar machen. Lassen wir die Schüler in hergebrachter Weise zunächst an Einzelfragen, Einzelsätzen und Einzelaufgaben, die natürlich in sich Zusammenhang haben müssen, ihre Kraft üben, geometrische Anschauungen, geometrisches Denken und Wissen gewinnen. Der kindliche Verstand wendet sich zuerst dem Einzelnen zu, die Kraft zur Abstraktion, zur Gewinnung allgemeiner Gesichtspunkte kann erst mit der Zeit erwachsen. Auf der Oberstufe aber wird es dem Schüler eine Freude

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sein, zu sehen, daß Kongruenz, Symmetrie, Flächengleichheit, Ähnlichkeit, Parallelprojektion und Centralprojektion sich alle einem allgemeinen Begriffe unterordnen, dem Begriffe der Projektivität oder Kollineation. Die Gelegenheit zu dieser Unterordnung des Einzelnen unter den allgemeinen Begriff findet sich im stereometischen Unterricht und zwar bei der Besprechung der Projektionen. Die Behandlung der Projektionen ist schon an und für sich notwendig, weil die neuen Lehrpläne es dem Lehrer zur besonderen Pflicht machen, den stereometrischen Unterricht so zu erteilen, daß er den Zeichenunterricht mit zu stützen geeignet ist.

Der Übergang zu den oben angedeuteten Begriffsbeziehungen ist für jeden, der die neuere Geometrie kennt, von selbst gegeben. Die verschiedenen einzelnen Fälle geometrischer Verwandtschaft erhält man, wenn man teils die Lage der Projektionsebenen, teils die des Projektionscentrums ändert. Kongruenz erhält man, wenn man bei parallelen Projektionsebenen das Centrum im Unendlichen, Symmetrie, wenn man es in der Mitte zwischen den Projektionsebenen wählt, Ähnlichkeit, wenn man bei parallelen Projektionsebenen dem Centrum eine beliebige Lage giebt, Flächengleichheit, wenn die Projektionsebenen sich schneiden, die Projektionsstrahlen einander parallel sind und die Projektionsebenen in Punkten schneiden, die von dem Schnitt der Projektionsebenen gleiche Entfernung haben, die allgemeine Affinität bei allgemeiner Lage der Projektionsebenen und Parallelität der Projektionsstrahlen, die allgemeine Kollineation bei allgemeiner Lage von Ebenen und Centrum. Auch ein Hinweis darauf, daß die Projektionen nachträglich in eine Ebene zusammengelegt werden können, daß solche ebene Abhängigkeiten auch ohne räumliche Vermittelung hergestellt werden können, daß dieselben Beziehungen auch für Gebilde von drei Dimensionen gelten, ist gelegentlich möglich und wünschenswert.

Wie weit von den projektiven Methoden Anwendung zu machen ist, etwa zu einem Vorkursus der darstellenden Geometrie (Grundriß und Aufriß sind affine Figuren), zur Ableitung der Polareigenschaften des Kreises, einer Kegelschnittslehre, das wird von den Verhältnissen der einzelnen Anstalten abhängen. Die Realanstalten, denen die Ableitung der wichtigsten Sätze über Kegelschnitte in elementarer synthetischer Behandlung zur Pflicht gemacht ist, werden von diesen Methoden, insbesondere von der Vorarbeit eines Hubert Müller und Henrici-Treutlein, reichen Nutzen ziehen können. Einen Ausblick auf diese Gebiete sollen auch die Gymnasien geben.

Wünschenswert ist, daß auch die Lehrbücher der Mathematik auf den wissenschaftlichen Abschluß des Unterrichts Rücksicht nehmen, ebenso, wie es die Lehrbücher der Physik thun. Das Lehrbuch des Algebra muß zum Schluß einen Überblick über den Aufbau des Zahlensystems, den Hinweis auf das Prinzip der Permanenz der Gesetze und den Zusammenhang der Operationen geben. Das Lehrbuch der Geometrie muß ebenso zum Schluß eine Übersicht über die Grundlagen der Geometrie, die Definition der Grundgebilde und die Möglichkeit strengerer Begründung des früher Gelehrten geben, aber auch auf den Zusammenhang der geometrischen Eigenschaften besonders hinweisen. Der Schüler, der die Schule mit dem Zeugnis der Reife verläßt, muß in der Geometrie nicht eine Menge einzelner zusammenhangsloser Sätze sehen; er muß erkannt haben, daß wir es in der Elementar-Mathematik mit einer Reihe in sich zusammenhängender wichtiger Probleme zu thun haben, deren Lösung zur Klärung unserer Anschauungen und Begriffe, dann aber auch als Grundlage jeder Technik notwendig ist. Daß die höhere Schule im Unterricht gerade auch die praktische Bedeutung der Mathematik berücksichtigen muß, hat der Verfasser dieser Arbeit wiederholt schon betont.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einzelne kleinere Abänderungen der Elementar-Geometrie.

Neben den das Ganze umfassenden Bestrebungen auf Umgestaltung der Elementar-Geometrie geht die nicht minder wichtige Kleinarbeit einher.

Zunächst ist die Menge des Stoffes, den man heute zur Elementar-Geometrie rechnet, größer als zu Euklid's Zeiten. In den Lehrgang aufgenommen sind mehrere bei Euklid fehlende Gebiete: Die Berechnung der Flächen und Körper, die ebene und sphärische Trigonometrie, der Koordinatenbegriff und die Grundlehren der Kegelschnitte. Für die Aufnahme dieser Gebiete sprachen die Bedürfnisse des praktischen Lebens.

Aufnahme verlangt und hat zum Teil gefunden in der einen oder anderen Form die darstellende Geometrie. Der Unterzeichnete hat seit der Herausgabe seiner Sammlung stereometrischer Aufgaben, seit 1883, in Zeitschriften wiederholt diesen für die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens so wichtigen Teil der Geometrie für den Schulunterricht empfohlen. In neuerer Zeit ist er selbst an Gymnasien, z. B. in Frankfurt a. M.*) und in Greifenberg in Pommern**), dem Unterricht der Stereometrie angegliedert worden. In der heutigen Zeit der Technik gewinnt dieses Gebiet täglich mehr an Bedeutung.

Andere Bestrebungen befassen sich mit der Ableitung und Behandlungsweise der geometrischen Lehren im einzelnen. Von Wichtigkeit sind da die Versuche, die indirekten Beweise in der Geometrie zu beseitigen. Die indirekten Beweise haben vielfach den Mangel, daß sie nicht den eigentlichen Sachgrund einer geometrischen Eigenschaft aufdecken, daß sie nur das „daß" und nicht das „warum" geben; sie lassen deshalb in dem Schüler leicht ein Gefühl des Unbefriedigtseins zurück. Der Wunsch, die Zahl der indirekten Beweise auf eine möglichst geringe Zahl zu beschränken, ist deshalb ein durchaus berechtigter. Wertvoll nach dieser Richtung ist namentlich eine Arbeit von Bensemann.***) Der Verfasser erreicht sein Ziel dadurch, daß er jedes geometrische Problem möglichst vollständig erledigt, daß er die negativen Aussagen, von denen die indirekten Beweise Gebrauch machen, durch solche positiven Inhalts ersetzt. Zum Beispiel behandelt er im Anschluß an den Satz vom Tangentenviereck auch die Fälle, in denen die vierte Seite des Vierecks den Kreis schneidet oder außerhalb des Kreises liegt, und sucht die in diesen Fällen zwischen den Seiten des Vierecks bestehenden Beziehungen auf.

Dasselbe Resultat erreicht Hubert Müller durch das von ihm so energisch betonte Prinzip der eindeutigen Bestimmung irgend welcher geometrischen Figuren. Der Hinweis, daß eine Strecke nur eine Mitte, ein Winkel nur eine Halbierungslinie hat, daß es von einem Punkte auf eine Gerade nur eine Senkrechte giebt, u. a., macht zahlreiche Beweise entbehrlich, die sonst den Schülern viel Schwierigkeiten bereiteten, namentlich Beweise für Umkehrungen von Sätzen, z. B. für die Umkehrung des Satzes, daß die Senkrechte im Endpunkte des Radius eines Kreises eine Tangente ist. Durch die kurzen Leitfäden der Geometrie, die Hubert Müller später hat erschienen lassen,†) sind die hierauf gerichteten Bestrebungen in weiteren Kreisen bekannt geworden.

*) C. H. Müller. Projektionslehre für die Prima des Gymnasiums. 1893.
**) Ibrügger. Zeichnungen für den stereometrischen Unterricht. 1897.
***) Lehrbuch der ebenen Geometrie. 1892.
†) Sciba, Metz. 1887.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beachtung gewonnen hat auch der neuerdings wiederholte Versuch, den Begriff des Verhältnisses in der Geometrie zu beseitigen und ihn durch Flächenbetrachtungen zu ersetzen. Der Grundgedanke ist ein alter und sehr naheliegender. In neuerer Zeit hat Dobriner in seinem Lehrbuch*) eine vollständige Durchführung des Gedankens geliefert. Der Verfasser will durch seine Art der Behandlung die Ähnlichkeitslehre von den Schwierigkeiten des Irrationalen frei machen.

Indeß so bestechend der Grundgedanke zunächst scheint, so ist seine Durchführung doch als nicht geglückt zu bezeichnen, er beruht auch auf nicht richtigen Ansichten. Durch die Forschungen von Schur und Hilbert sind wir über diese Fragen weiter aufgeklärt worden, als wir es früher waren. Es ist von Schur in seiner analytischen Geometrie nachgewiesen worden, daß eine Streckenrechnung ohne Messung, also auch ohne den Begriff der irrationalen Zahl möglich ist. Er benutzt dabei noch das Archimedische Postulat, weist aber schon darauf hin, daß man die Streckenrechnung und damit die Grundlage derselben, die Proportionslehre, auch ohne dies Postulat begründen kann. Die Lehre von der Inhaltsgleichheit kann, wie Schur und Hilbert gezeigt haben, das Archimedische Postulat nicht entbehren. Es ist deshalb an und für sich logisch falsch, die Ähnlichkeitslehre auf die Inhaltslehre gründen, das Einfachere auf das Kompliziertere zurückführen zu wollen. Dobriner benutzt außer dem für die Ähnlichkeitslehre entbehrlichen Archimedischen Postulat auch noch die überflüssigen Postulate: „Wenn man von gleichen Flächen gleiche Stücke fortläßt, so sind auch die Reste gleich," „Zwei Flächen, die einer Dritten gleich sind, sind selbst gleich."

Andere Bestrebungen wieder haben sich mit der Anordnung der geometrischen Lehren befaßt. Man hatte der von Euklid herrührenden Anordnung Mangel an System vorgeworfen und seine Anordnung durch eine logisch strenger gegliederte ersetzt. Während Euklid bald mit dem gleichseitigen Dreieck beginnt, behandelte man zunächst eine Gerade, dann zwei sich schneidende Geraden, darauf zwei parallelen Geraden und ging dann erst zu den Eigenschaften der Dreiecke über. Allmählich kommt man wieder auf den Standpunkt von Euklid zurück und zwar aus pädagogischen Gründen. Die Schüler sind leichter zur Untersuchung geschlossener Figuren anzuleiten. Außerdem sind die Beweise der Dreiecksätze anschaulicher und daher für Schüler leichter zu fassen als die rein logischen Ableitungen der Sätze über Winkel an Parallelen. Die ersten drei Kongruenzsätze (mit Ausnahme des zweiten Falls des zweiten Kongruenzsatzes) werden zunächst durch Deckung bewiesen und dann bei dem gleichschenkligen Dreieck und bei den Fundamentalaufgaben benutzt, um die Schüler in den einfachsten logischen Schlüssen zu schulen.

Rein methodische Zwecke verfolgen auch die Lehrbücher von Krumme-Fenkner,**) Heinrich Müller,***) Noack.†) Sie wollen dem für die Mathematik vorgeschriebenen Lehrverfahren der Heuristik eine Stütze und feste Form geben. Vereinfachungen erstreben Schülke††) und der Verfasser durch Einführung vierstelliger Logarithmen und der Dezimalteilung des Winkelgrades in den Unterricht. Schärfere Betonung der praktischen Bedeutung der Mathematik verlangen Richter-Wandsbek†††), Wekwerth*†) und Degenhardt.**†)

*) Leitfaden der Geometrie. Leipzig. 1898.
**) O. Salle. Berlin.
***) J. Springer. Berlin. 1891.
†) J. Springer. Berlin. 1891.
††) Vierstellige Logarithmen-Tafeln. Leipzig. 1895.
†††) Arithmetische und trigonometrische Aufgaben. Leipzig. 1898.
*†) Sammlung von Aufgaben für Baugewerkschulen. Leipzig. 1895.
**†) Praktische Geometrie auf dem Gymnasium. Frankfurt a. M. 1896.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beachtung gewonn Versuch, den Begriff des Verhält-
nisses in der Geometrie zu achtungen zu ersetzen. Der Grund-
gedanke ist ein alter und se t Dobriner in seinem Lehrbuch*)
eine vollständige Durchfüh Verfasser will durch seine Art der
Behandlung die Ähnlichkeit rationalen frei machen.

Indeß so bestechen ist seine Durchführung doch als
nicht geglückt zu bezeichnen, ichten. Durch die Forschungen von
Schur und Hilbert sind n worden, als wir es früher waren.
Es ist von Schur in seiner worden, daß eine Streckenrechnung
ohne Messung, also auch o möglich ist. Er benutzt dabei
noch das Archimedische Po aß man die Streckenrechnung und
damit die Grundlage dersel es Postulat begründen kann. Die
Lehre von der Inhaltsglei gezeigt haben, das Archimedische
Postulat nicht entbehren. falsch, die Ähnlichkeitslehre auf die
Inhaltslehre gründen, das zurückführen zu wollen. Dobriner
benutzt außer dem für die dischen Postulat auch noch die über-
flüssigen Postulate: „Wenn cke fortläßt, so sind auch die Reste
gleich," „Zwei Flächen, die eich."

Andere Bestrebung ng der geometrischen Lehren befaßt.
Man hatte der von Euk an System vorgeworfen und seine
Anordnung durch eine logi Euklid bald mit dem gleichseitigen
Dreieck beginnt, behandelte sich schneidende Geraden, darauf
zwei parallelen Geraden un en der Dreiecke über. Allmählich
kommt man wieder auf de zwar aus pädagogischen Gründen.
Die Schüler sind leichter en anzuleiten. Außerdem sind die
Beweise der Dreiecksätze an ter zu fassen als die rein logischen
Ableitungen der Sätze über rei Kongruenzsätze (mit Ausnahme
des zweiten Falls des zweit urch Deckung bewiesen und dann
bei dem gleichschenkligen D n benutzt, um die Schüler in den
einfachsten logischen Schlüss

Rein methodische Krumme-Fenkner,**) Heinrich
Müller,***) Noack.†) Si vorgeschriebenen Lehrverfahren der
Heuristik eine Stütze und fe ben Schülke††) und der Verfasser
durch Einführung vierstellig des Winkelgrades in den Unterricht.
Schärfere Betonung der pr verlangen Richter-Wandsbek†††),
Wekwerth*†) und Degen

*) Leitfaden der Geom
**) O. Salle. Berlin.
***) J. Springer. Berl
†) J. Springer. Berl
††) Vierstellige Logarith
†††) Arithmetische und tr
*†) Sammlung von Au
**†) Praktische Geometri

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf