Das Fehlen jeglicher Raumanschauung im geometrischen Unterricht der mittleren Klassen der höhern Lehranstalten muss als ein bedenklicher Mangel in der harmonischen Ausbildung der Schüler bezeichnet werden. Die Lehraufgaben von 1891 suchten diese Lücke dadurch auszufüllen, dass sie die Körperberechnung nach Untersekunda verlegten. Durch das Zusammendrängen der ganzen Körperberechnung in das Pensum eines Jahres, in welches ausserdem die Einführung in die logarithmische und trigonometrische Rechnung fiel, wurde der Aufbau der Planimetrie zu stark unterbrochen und dadurch die Bedeutung des geometrischen Unterrichts für die logische Schulung in Frage gestellt. Die Lehraufgaben von 1901 haben die Körperberechnung in Untersekunda wieder gestrichen, sie berücksichtigen die Raumanschauung nur in Quarta bei der Einführung in die Planimetrie. Diese propädeutische Betrachtung einfacher Körper kann als eine hinreichende mathematische Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens, wie sie dem Bildungsgrade eines Tertianers und Sekundaners entspricht, keineswegs angesehen werden. Der Lehrer der Quarta wird sogar in der Regel mit der Körperbetrachtung sich so schnell wie möglich abzufinden suchen, er muss doch das Hauptgewicht darauf legen, dass seine Schüler in der nächsten Klasse dem geometrischen Unterricht folgen können. Dies ist der Fall, wenn sie die Dreieckslehre gründlich beherrschen, die erworbenen stereometrischen Kenntnisse kann der Tertianer nicht verwerten. Was nützt es auch, wenn der Lehrer der Quarta den Schwerpunkt auf die Raumanschauung legt und das Interesse hierfür in erfreulicher Weise fördert! Dieses Interesse muss doch erbarmungslos verkümmern, der geometrische Unterricht geht mehr als 4 volle Jahre hindurch über jede Raumanschauung einfach zur Tagesordnung. Eine derartige Vernachlässigung der Raumanschauung in einem Fache, welches derselben die wissenschaftliche Grundlage geben soll, will mir schon seit 20 Jahren als ein grober Verstoss gegen jede gesunde Methodik, ja geradezu als ein Hohn auf Pestalozzi erscheinen. In dieser Überzeugung habe ich in meiner Abhandlung „die Ausbildung des räumlichen Anschauungsvermögens im mathematischen Unterricht der mittleren Klassen des Gymnasiums“ *) die Verschmelzung der Planimetrie, Stereometrie und Trigonometrie zu einer einheitlichen Raumlehre empfohlen. Wie ich einerseits aus einigen öffentlichen Besprechungen, andererseits besonders aus privaten Mitteilungen ersehe, hat diese Forderung bei meinen Fachkollegen mehr Anklang gefunden, als ich erwartete. Deshalb habe ich mich entschlossen, meinen Reformgedanken vorläufig für den ersten Teil im einzelnen näher darzulegen. Vielleicht gelingt es, noch mehr Anhänger zu gewinnen, vielleicht auch, die Unterrichtsverwaltung zu einem Versuch an Reformanstalten zu bewegen.**)

*) Beilage zum Programm des Kgl. Marien-Gymnasiums, Posen Ostern 1903.

**) Vgl. Norrenberg in der Programmschau der Monatsschrift für höhere Schulen und O. Richter, Neue Jahrbücher für Philosophie u. Pädagogik 1905. Band XVI.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der leichtern Übersicht wegen will ich sofort die Stoffverteilung aufstellen, für welche ich schon in der erwähnten Abhandlung eine kurze Skizze entworfen habe.

I. Kursus.

Die Lehre von den Winkeln und Dreiecken.

II. Kursus.

Die parallelen Linien und Ebenen.

a) Parallele Ebenen zwischen parallelen Ebenen und parallele Geraden zwischen parallelen Geraden.

1. Die Definition paralleler Ebenen, parallele von einer dritten geschnittene Ebenen, die Definition paralleler Geraden und die Lehrsätze über die Parallelen.
2. Die Definition des Parallelflachs, seine Begrenzungen und die ihnen parallelen Schnittfiguren, die Definition des Parallelogramms, die diagonalen Schnittfiguren des Parallelflachs, die Kongruenz der gegenüberliegenden Begrenzungsflächen und der parallelen Schnittfiguren. Die Lehrsätze über das Parallelogramm, die Definitionen von Rhombus und Rhomboeder, Rechteck und Rechtecker, Quadrat und Würfel, die Lehrsätze über diese Figuren und ihre Anwendung auf die Schnittfiguren der genannten Körper. Die Parallele als geometrischer Ort bei Konstruktionen. Die Definition einer Senkrechten über einer Ebene und ein Lehrsatz nach Euklid.
3. Die Berechnung von Rechteck und Rechtecker, Parallelogramm, Dreieck und Trapez. Die Definition des Prismas, seine Begrenzungen und Schnittfiguren, die Kongruenz der Endflächen und der parallelen Schnittfiguren und die Berechnung des Prismas. In Verbindung mit der Berechnung die Gleichheit der Figuren und leichte Verwandlungsaufgaben.
4. Der Pythagoreische Lehrsatz und einige Anwendungen, bei welchen besonders auch die Flächen- und Körperdiagonalen von Würfel und Rechtecker zu berücksichtigen sind.

b) Parallele Linien und Ebenen im Strahlenbüschel.

1. Anschauliche Behandlung der parallelen Geraden und der ähnlichliegenden Figuren im ebenen und räumlichen Strahlenbüschel.
2. Die Proportionalitäts- oder Strahlensätze (ohne Umkehrung) und die Ähnlichkeitssätze.
3. Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks mit Hilfe der Winkel und der Seitenverhältnisse.
4. Konstruktionen vermittels ähnlicher Hilfsfiguren.
5. Das Verhältnis der Flächenräume ähnlicher Dreiecke und Vierecke. Leichte Konstruktionen. Berechnung der Pyramide (event. des Pyramidenstumpfs).

Vielleicht auch noch

6. die Berechnung des Dreiecks mit Hilfe des Sinus- und Cosinussatzes.

Der zweite Teil der Raumlehre wird die Lehre vom Kreise einschliesslich Cylinder, Kegel und Kugel enthalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Im ersten Jahre hat der Schüler sich mit der Handhabung von Längen- und Winkelmass, Lineal und Zirkel vertraut zu machen. Demnach hat der geometrische Unterricht wie der Zeichenunterricht sich im Anfange hauptsächlich mit ebenen Figuren zu beschäftigen, in den ersten Kursus gehört also die Lehre von den Winkeln und Dreiecken. Die Dreieckslehre dürfte auch das beste und am meisten erprobte Material für die ersten Übungen in der geometrischen Beweisführung liefern. Die propädeutische Betrachtung einfacher Körper hat sich auf die Gewinnung der notwendigsten Vorstellungen zu beschränken. Man zeigt, dass das Lineal bei der Verbindung zweier Punkte einer Ebene stets in seiner ganzen Länge die Ebene berührt, dass zwei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, dass zwei Kanten einen Winkel, drei ein Dreieck bilden. Der Schüler lernt einsehen, dass durch zwei Dreiecksseiten sich stets eine Ebene legen lässt, und dass die dritte Seite in diese Ebene fällt.

Schon bei der heute geltenden Stoffverteilung ist es vorteilhaft, die Lehre von den Parallelen möglichst hinter die Dreieckslehre zu verlegen. Diese Verlegung wird erst recht wünschenswert, wenn man die Lehrsätze über die parallelen Linien nicht blos in Verbindung mit dem Parallelogramm, sondern auch in Zusammenhang mit den parallelen Ebenen und dem Parallelflach bringen will. Zum Aufbau der Dreieckslehre bedarf man der Parallelen nur wegen des Satzes über die Winkelsumme im Dreieck. Sicherlich macht man es dem Schüler am leichtesten, wenn man die Winkelsumme vorläufig als Anschauungsaxiom behandelt und sich bei der ersten Durchnahme mit der Messung oder mit einer anschaulichen Erläuterung begnügt. Dieser Weg ist der obigen Stoffverteilung und den folgenden Erörterungen zugrunde gelegt. Ich betone aber ausdrücklich, dass die von mir geforderte Vereinigung von Planimetrie und Stereometrie sich mit jedem Standpunkte vereinbaren lässt, den man in der Beweisführung der planimetrischen Lehrsätze der Parallelen und in der Ableitung der Winkelsumme einnehmen kann.

Die parallelen Linien weisen auf eine eingehendere Beschäftigung mit dem Raume hin. Schon die Euklidische Definition verlangt die Berücksichtigung des Raumes. Der Schüler sieht in seinem Klassenzimmer mehrfach gerade Linien, welche sich auch in ihrer Verlängerung nicht schneiden und doch nicht parallel sind. Zieht der Lehrer diese windschiefen Linien nicht in den Bereich seiner Betrachtung, so unterdrückt er ein berechtigtes Interesse; er gewöhnt den Anfänger daran, dem Unterricht in einem Anschauungsgebiet mit teilweise verbundenen Augen zu folgen. Nach meiner Ansicht liegt es nahe, von den parallelen Ebenen auszugehen, diese im Hinweis auf den Fussboden und die Decke des Zimmers zu definieren und sie durch eine dritte Ebene, eine Wand, schneiden zu lassen. Der Schüler sieht, dass die beiden Schnittkanten in der dritten Ebene liegen; er versteht es auch, dass diese Kanten sich nicht schneiden können, weil sonst die beiden parallelen Ebenen einen gemeinsamen Punkt hätten. Hierdurch ist das volle Verständnis der Definition der parallelen Linien ermöglicht. Der Schüler sieht ein, dass zwei parallele Linien immer in einer Ebene liegen, und dass durch zwei Parallelen sich stets eine Ebene legen lässt. Nimmt man noch eine vierte Ebene (eine zweite Wand des Klassenzimmers) zu Hilfe, so führt die Raumanschauung auf zwei parallele Geraden, die von einer dritten geschnitten werden, und diese Figur, welche jetzt längere Zeit bei der Besprechung der planimetrischen Lehrsätze über die Parallelen die Geistestätigkeit des Schülers in Anspruch nimmt, fristet nicht mehr in seinem Kopfe ein interessenloses Dasein.

Zur Ableitung der Lehrsätze über die Parallelen scheint mir derjenige Weg der geeignetste zu sein, der die Auffassung Euklids mit der modernen in Verbindung bringen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lässt, d. h. den Übergang von sich schneidenden Geraden zu parallelen, vom Dreieck zu der oben bezeichneten Figur ermöglicht. Ich möchte deshalb vom Dreieck ausgehen. Man beweist den Satz vom Aussenwinkel, d. h. man zeigt, dass der eine Aussenwinkel an der Ecke C grösser ist als sein Wechselwinkel α, der andere grösser als sein Wechselwinkel β. Den Nachweis führt man mit Hilfe des ersten Kongruenzsatzes, indem man die Mitteltransversalen BE und AD um sich selbst verlängert und die Endpunkte mit C verbindet. Jetzt ergibt sich der erste Lehrsatz: sind zwei zusammengehörige Wechselwinkel gleich, so können die Geraden sich nicht schneiden. Schnitten sich die Geraden auf der einen oder der andern Seite, so müsste einer der beiden Winkel Aussenwinkel und somit grösser als der andere werden. Denkt man sich nun an die Dreiecksseite CA in C nach aussen einen Winkel gleich α und an CB einen Winkel gleich β angetragen, so kann keiner der beiden Schenkel die Gerade AB schneiden. Da es durch C nur eine Parallele zu AB gibt, so fallen die beiden Schenkel in eine Gerade zusammen, und es folgt $\alpha + \beta + \gamma = 2\,R$. Dieser Gedankengang lässt wohl am besten die gegenseitige Abhängigkeit von dem Euklidischen Parallelenaxiom und dem Satz von der Winkelsumme erkennen und ist eine gute Basis für einen derartigen logischen Excurs in Prima. Andererseits gibt er vielleicht auch am besten demjenigen Lehrer, welcher die Winkelsumme gleich bei der ersten Durchnahme streng ableiten will, die Möglickheit, am Anfange der Dreieckslehre eine langatmige Behandlung der Parallelen zu vermeiden und zeigt, wie er nach dem ersten Kongruenzsatz sich bei den Parallelen auf ein Minimum beschränken kann. Die übrigen Sätze über die Parallelen geben höchstens noch zu der Bemerkung Veranlassung, dass man bei dem indirekten Beweise nicht etwa einen zusammenhängenden Vortrag verlangt. Nach Absolvierung der Lehrsätze würde ich die Drehung und die parallele Verschiebung in den planimetrischen Unterricht einführen. Dreht man die Dreiecksseite CB um die Ecke C entgegen der Drehungsrichtung des Uhrzeigers, so wird der Aussenwinkel kleiner und erhält dabei die Grösse seines Wechselwinkels, d. h. durch Drehung gehen sich schneidende Geraden in parallele über. Dreht man die Parallele um ein Minimum, so geht sie sofort in eine schneidende Linie über. Unter paralleler Verschiebung einer Geraden verstehe ich diejenige Bewegung, bei welcher die Gerade stets mit einer andern einen gleichen Winkel in derselben Ebene bildet, oder anders ausgedrückt, die Verschiebung des Schenkels eines Winkels innerhalb der Winkelebene, so dass der andere Schenkel auf seinem geradlinigen Träger weiter gleitet. Verschiebt man in der Weise eine von zwei Parallelen, so bleibt sie infolge der Gleichheit der Gegenwinkel ihrer ursprünglichen Lage und auch der andern Geraden parallel, oder sie fällt mit der letztern zusammen. Sich schneidende Geraden können bei paralleler Verschiebung nie parallel werden oder in Kongruenz treten.

Aus seinem Klassenzimmer liest der Schüler die Tatsache ab, dass drei Paare paralleler Ebenen einen Raum einschliessen und begreift leicht die Definition eines Parallelflachs als eines Körpers, der von drei Paaren paralleler Ebenen begrenzt wird. Durch Anwendung des schon bewiesenen Satzes: „parallele Ebenen werden von einer dritten in parallelen Kanten geschnitten“ auf die Begrenzungsflächen und die ihnen parallelen Schnittfiguren wird der Schüler auf die Definition des Parallelogramms geführt und die Existenz dieser Figur im Raume nachgewiesen. Aus demselben Satze kann auch die Folgerung gezogen werden, dass die diagonalen Schnittfiguren eines Parallelflachs Parallelogramme sind; jedoch muss die parallele Lage der gegenüberliegenden Seitenkanten zuerst festgestellt werden. Für die Ausbildung des Anschauungsvermögens dürfte es vorteilhaft sein, wenn man hierbei auf die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bewegung einer Geraden im Raume etwas näher eingeht und durch Veranschaulichung klar legt, dass man jeder Geraden durch parallele Verschiebung und Drehung (beides innerhalb einer Ebene) jede gewünschte Lage im Raume geben kann. Man liest aus der Anschauung folgende Beziehungen ab: windschiefe und sich schneidende Geraden gehen bei paralleler Verschiebung in einander über, parallele bleiben parallel oder fallen zusammen; windschiefe und sich schneidende Geraden können nur durch Drehung in die parallele Lage oder zur Deckung gebracht werden, parallele werden durch Drehung windschief oder erhalten einen Schnittpunkt. In unserm Falle brauchen wir den Satz: windschiefe und sich schneidende Linien können nicht durch parallele Verschiebung zur Kongruenz gebracht werden. Dieser Satz lässt sich wohl auf folgende Weise anschaulich erläutern. Wir verbinden einen beliebigen Punkt der einen windschiefen Geraden mit einem beliebigen Punkte der andern. Hierdurch erhalten wir zwei Winkel, die in zwei verschiedenen Ebenen liegen. Verschieben wir nun eine der windschiefen Linien in der Ebene des zugehörigen Winkels parallel, so kann sie dabei nicht in die Ebene des andern Winkels zu liegen kommen, also auch nicht mit der andern Geraden zusammenfallen, sondern sie muss mit ihr einen Schnittpunkt bilden. Dass zwei sich schneidende Geraden nicht durch parallele Verschiebung zur Kongruenz gebracht werden können, haben wir schon an einer früheren Stelle gesehen. Nun lassen sich die gegenüberliegenden Kanten eines Parallelflachs durch parallele Verschiebung mit einer dritten Seitenkante zur Deckung bringen, also können sie nicht windschief sein, auch nicht sich schneiden, sie sind also parallel. Will man die Veranschaulichung vorläufiger, d. h. aus methodischen Rücksichten eingeführter, Axiome vermeiden, so betrachtet man in dieser Stelle den Satz: „sind zwei Geraden einer dritten parallel, so sind sie unter einander parallel“ als etwas Selbstverständliches. Dieser Weg ist sicherlich der bequemere, jedoch kommt dabei die Ausbildung des Anschauungsvermögens etwas zu kurz.

Hat man in dieser Weise die mehrfache Existenz des Parallelogramms am Parallelflach nachgewiesen und dadurch das Interesse des Schülers für diese Figur geweckt, so kann man getrost etwas längere Zeit bei den Lehrsätzen über das Parallelogramm und den Konstruktionen mit Hilfe der Parallelen verweilen. Die schon erworbenen Kenntnisse aus der Raumanschauung gehen dabei nicht verloren, gibt doch die Lehre vom Parallelogramm Gelegenheit genug, auf dieselben zurückzukommen und sie zu erweitern. Schon der Lehrsatz über die Gleichheit der gegenüberliegenden Seiten des Parallelogramms fordert uns zu einer Erweiterung auf. Wenden wir diesen Satz auf die Parallelogramme ABB′A′, BCC′B′ und CAA′C′ des Parallelflachs ABCDA′B′C′D′ an, so wird die Kongruenz der Dreiecke ABC und A′B′C′ und somit die Gleichheit der Dreieckswinkel B und B′ ersichtlich. Ebenso erweist man die Gleichheit der übrigen Winkel in den Parallelogrammen ABCD und A′B′C′D′ und dadurch die Kongruenz der gegenüberliegenden Seitenflächen und der diesen parallelen Schnittfiguren. Die Definitionen des Rhombus, Rechtecks und Quadrats regen uns zu entsprechenden Definitionen des Rhomboeders, Rechteckers und Würfels an. Fasst man den Rhombus als gleichseitiges, das Rechteck als rechtwinkliges Parallelogramm auf, so erklärt man das Rhomboeder als gleichkantiges den Rechtecker als rechtwinkliges Parallelflach. Hat man aus der Gleichheit zweier zusammenstossenden Seiten eines Parallelogramms die Gleichheit sämtlicher Seiten erwiesen, so zieht man aus diesem Satz sofort die Folgerung, dass alle Kanten eines Parallelflachs gleich sind, wenn man die Gleichheit dreier zusammenstossenden voraussetzt. Ähnlich verhält es sich mit der Übertragung des Satzes, dass alle Winkel eines Parallelogramms rechte sind, falls einer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

90^0 beträgt. Es lässt sich sofort zeigen, dass alle Kanten eines Parallelflachs in den Ecken senkrecht auf einander stehen, wenn die drei Kanten einer Ecke unter rechten Winkeln zusammenstossen. Sind die Winkel bei A rechte, so folgt aus den Parallelogrammen ABCD und ABB'A', dass auch die Winkel ABC und ABB' rechte sind. Lege ich durch die gegenüberliegenden Kanten A'B' und CD, die Ebene, so ergibt sich die Gleichheit der Winkel CBB' und DAA' aus der Kongruenz der gleichbenannten Dreiecke, und somit ist $\measuredangle CBB' = R$. Will man zeigen, dass der Rechtecker ein gerades Parallelflach ist, so definiert man die Senkrechte über einer Ebene und führt den Nachweis, dass eine Gerade auf einer Ebene senkrecht steht, wenn sie mit zwei Geraden dieser Ebene in ihrem Schnittpunkte rechte Winkel bildet. Der Euklidische Beweis ist für den Tertianer gar nicht schwierig, man muss natürlich bei der Ableitung ein Modell verwenden und nicht etwa dieselbe an einer Zeichnung versuchen. Ich will an dieser Stelle betonen, dass bei allen Erörterungen aus der Raumlehre eine eingehende Verwertung von Modellen die selbstverständliche Voraussetzung bildet. So sind z. B. bei der Besprechung des Parallelflachs die Schnittfiguren am zerlegbaren Modell, die Kanten am Körpernetz zu zeigen. Eine Zeichnung des Körpernetzes ist anfänglich zu unterlassen und erst dann einzuführen, wenn das Auge durch Betrachtung des räumlichen Körpernetzes hinlänglich geübt ist. Die Zeichnungen werden jetzt in der Parallelprojektion entworfen, doch wird vorläufig jede Erläuterung der Projektion vermieden; diese erfolgt viel später, wenn die Schüler sich in die Körperzeichnungen vollständig hineingelesen haben. Eine Zeichnung von ungeschlossenen Räumen findet auf der Mittelstufe überhaupt nicht statt, alle Erörterungen an denselben werden mit einem Modell in der Hand vorgenommen.

Das Interesse am geometrischen Unterricht wird erheblich gefördert, wenn man so bald als möglich zur Flächen- bezw. Körperberechnung übergeht. Auch für den Fall, dass die Ergebnisse dem Schüler zum Teil aus dem Elementarunterricht bekannt sind, macht es ihm doch Freude, die bewiesenen Lehrsätze zur Begründung der Berechnung verwertet zu sehen. An die Zerlegung des Rechtecks in kongruente Quadrate reiht sich ganz natürlich die Zerschneidung des Rechteckers in kongruente Würfel an. Allerdings ist die Kongruenz der Würfel mit gleicher Kante nicht ganz so leicht einzusehen wie die Kongruenz der Quadrate mit gleicher Seite. Man muss hier zunächst nachweisen, dass sich in einem Punkte einer Ebene nur ein Lot errichten lässt. Der Beweis dieses Satzes lässt sich aber bei Anwendung eines Modelles ohne jede Schwierigkeit auf den entsprechenden der Planimetrie zurückführen, zumal die Definition der Senkrechten über einer Ebene schon bekannt ist. Bei der ersten Durchnahme wird man sowohl beim Rechteck wie beim Rechtecker sich auf ganze Masszahlen der Seiten bezw. Kanten beschränken und die Erweiterung auf Brüche einer Wiederholung überlassen. Die Ableitung für inkommensurabele Kanten bezw. Seiten gehört in die Prima. In der Flächenberechnung leitet man jetzt die Gleichheit der Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und Höhe ab und gewinnt die Inhaltsformel für das Parallelogramm aus der Vergleichung von Parallelogramm und Rechteck mit gleicher Grundlinie und Höhe. Analog verfährt man bei der Körperberechnung, nur nimmt man statt des Parallelflachs das allgemeinere Prisma, welches man als einen Körper mit parallelen Grundflächen und parallelen Seitenkanten definiert. Es ist eine willkommene Gelegenheit zur Wiederholung schon bekannter Schlussfolgerungen, wenn man den Nachweis führt, dass die Seitenflächen des Prismas und sämtliche diagonalen Schnittfiguren Parallelogramme sind, und dass die Grundflächen und ihre parallelen Schnittfiguren kongruent sind. Um die Gleichheit der entsprechenden Winkel in den parallelen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endflächen bezw. Schnittfiguren zu beweisen, legt man Ebenen durch je zwei Seitenkanten, welche durch eine einzige von einander getrennt sind und erhält so kongruente Dreiecke. Jetzt kann man mit Anwendung des Prinzips von Cavalieri die Gleichheit zweier Prismen bezw. eines Prismas und eines Rechteckers von gleicher Grundfläche und Höhe nachweisen und die Inhaltsformel für das Prisma aufstellen. Die weitere Behandlung der Flächengleichheit interessiert uns hier weiter nicht, auch erscheint es überflüssig, über die Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes auf Würfel und Rechtecker ein Wort zu verlieren.

Wie das Paralleltrapez an das Parallelogramm, so schliessen sich die Parallelen im Strahlenbüschel an die Parallelen zwischen Parallelen an, d. h. auf die Lehre vom Parallelogramm folgt naturgemäss die Ähnlichkeitslehre. Letztere wird gewöhnlich mit den Proportionalitätssätzen am Dreieck begonnen. Dieser Weg ist natürlich gangbar und auch vielfach erprobt; trotzdem möchte ich einen andern der Beachtung empfehlen. Ich glaube, dass das Interesse des Schülers in höherm Grade geweckt wird, wenn man der Ähnlichkeitslehre einen propädeutischen Anschauungsunterricht vorausschickt. Sicherlich wird in dieser Weise die Ausbildung des Anschauungsvermögens besser gefördert. Man zeichne in ein ebenes Strahlenbüschel Dreiecke, Vierecke etc. mit parallelen Seiten, so dass die entsprechenden Ecken auf demselben Strahl liegen. Der Schüler wird aus der Anschauung schliessen, dass er Figuren von derselben Gestalt, oder dieselbe Figur in verschiedenem Massstabe, vor sich hat, und er sieht auch ein, dass die Grösse und Gestalt von der Lage im Strahlenbüschel abhängt, und er versteht so leicht die Definition ähnlichliegender Figuren. Man kann auch sofort das räumliche Strahlenbüschel einführen, durch je zwei benachbarte Strahlen die Ebene legen und die Pyramide definieren. Der Schüler erkennt schon die ähnliche Lage paralleler Schnittfiguren der Pyramide; er sieht, dass die entsprechenden Ecken auf demselben Strahle liegen, und er kann auch schon die parallele Lage der entsprechenden Seiten nachweisen. Von der allgemeinen Ähnlichkeitslage geht man jetzt zur besondern über, bei welcher der Strahlenmittelpunkt in einer Ecke des Dreiecks bezw. Vierecks etc. liegt. Hat man früher von paralleler Verschiebung gesprochen, so ist es für den Schüler nichts Neues, zwei zusammenfallende Seiten der Vielecke als parallele anzusehen. Den Schüler wird es nicht befremden, wenn man jetzt behufs genauerer Untersuchung ähnlichliegender Vielecke sich auf das einfachste Strahlenbüschel, nämlich auf ein Büschel mit zwei Strahlen beschränkt d. h. das Dreieck näher ins Auge fasst; er hat ja schon in der Lehre vom Parallelogramm gesehen, dass man immer wieder auf das Dreieck zurückgreift.

Man trägt auf einem Strahl vom Mittelpunkt aus gleiche Strecken ab, legt parallele Linien durch die Teilungspunkte und beweist, dass diese auch auf einem zweiten Strahl gleiche Stücke abschneiden. Der Übergang von der Gleichheit zur Verhältnisgleichheit also zum ersten Proportionalitäts- oder Strahlensatz verursacht keine neue Schwierigkeit; es kommt hauptsächlich auf die klare Erfassung des gemeinschaftlichen Masses an, und dieses ist schon bekannt, nämlich aus der Berechnung des Rechtecks und Rechteckers für den Fall, dass die Masszahlen Brüche sind, so wie aus der anschaulichen Behandlung der Division durch einen Bruch. Nach Ableitung des zweiten Strahlensatzes über das Verhältnis der Parallelen und der Strahlenlängen und nach gründlicher Einübung der beiden Strahlensätze an mehreren Parallelen in einem Strahlenbüschel mit mehreren Strahlen mit Einschluss der Umformungen, z. B. Vertauschung der mittleren und äusseren Glieder etc. führt man die Definition der Ähnlichkeit ein und beweist für das ebene Strahlenbüschel den Satz: ähnlichliegende Figuren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind immer ähnlich. Die Beweise für die Ähnlichkeitssätze werden in der Weise geführt, dass man die Dreiecke stets in eine ähnliche Lage bringt; hierbei wählt man natürlich eine Dreiecksecke zum Strahlenmittelpunkt. In die ähnliche Lage bringt man die Dreiecke stets durch Ziehen der Parallelen, so dass die Umkehrung des ersten Strahlensatzes nicht erforderlich wird; diese Umkehrung, deren Beweis dem Schüler sicherlich Schwierigkeiten bereitet, bleibt einer spätern Zeit vorbehalten.

Auch kann die Ähnlichkeit paralleler Schnittfiguren in einer Pyramide bei der ersten Durchnahme übergegangen werden. Der Beweis für die Gleichheit der Seitenverhältnisse ergibt sich leicht; etwas länger hält aber der Nachweis für die Gleichheit der Winkel auf, wenn er auch für diese Stufe nicht zu schwer ist. Ist ABCD . . die Grundfläche der Pyramide, $A'B'C'D'$ . . die parallele Schnittfigur, so ziehe man $A'A'' \parallel B'B$ in der Ebene $ABB'A'$ und $C'C'' \parallel B'B$ in der Ebene $BCC'B'$. $A'A''$ und $C'C''$ können durch parallele Verschiebung in den genannten Ebenen zur Deckung mit $B'B$ gebracht werden, sind also parallel. Legt man jetzt durch die beiden Parallelen $A'A''$ und $C'C''$ die Ebene, so erhält man zwei Dreiecke $A'B'C'$ und $A''BC''$, welche nach III kongruent sind, also ist $\measuredangle B = \measuredangle B'$. Diese Beweisführung lehnt sich an die entsprechende beim Prisma an und gibt eine erwünschte Gelegenheit zur Wiederholung und selbsttätigen Erweiterung des schon verstandenen Gedankenganges.

Als die erste Anwendung der Ähnlichkeitssätze muss die Berechnung des rechtwinkeligen Dreiecks mit Hilfe der Winkel und der Seitenverhältnisse angesehen werden. Es muss immer wieder hervorgehoben werden, dass nichts geeigneter ist, das Interesse des Schülers für geometrische Betrachtungen zu gewinnen, als wenn man ihm zeigt, wie diese zur Lösung von Aufgaben verwertet werden, deren praktische Bedeutung ihm einleuchtend ist. Jeder Lehrer wird die Freude in den Augen seiner Schüler gesehen haben, wenn er ihnen zeigt, wie man aus dem Schatten eines Turmes mit Hilfe eines Stabes und seines Schattens die Höhe des Turmes, wie man die Breite eines Stromes durch Absteckung einer Strecke an einer Uferseite und durch Messung eines Winkels bestimmen kann usw. Von einer Schwierigkeit auf dieser Stufe kann keine Rede sein. Der Schüler zieht aus dem zweiten Ähnlichkeitssatz die Folgerung, dass zwei rechtwinkelige Dreiecke mit einem Winkel von 30^0 ähnlich sind, also in ihren Seitenverhältnissen übereinstimmen und berechnet auch leicht diese Verhältnisse. Setzt man bei einem dritten Dreieck voraus, dass eine Kathete gleich der Hälfte der Hypotenuse ist, so schliesst er, dass dieses Dreieck nach dem vierten Ähnlichkeitssatze den beiden ersten ähnlich ist, dass also der gegenüberliegende Winkel 30^0 beträgt. Der Schüler berechnet also in diesem Falle aus dem spitzen Winkel die Seitenverhältnisse und aus dem Verhältnis der Seiten den spitzen Winkel. Ebenso verfährt man beim gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck und wendet die in beiden Fällen gewonnenen Ergebnisse auf alle spitzen Winkel an. Diesen logischen Sprung, für den nur der Autoritätsglaube die Brücke bildet, machen wohl im Anfange des trigonometrischen Unterrichts auch viele Theoretiker unter den Schulmännern mit, die sonst die strenge Logik der Schulmathematik nicht genug betonen können. Dieser Gedankengang wird vom Schüler sicherlich viel leichter erfasst als einige Sätze und Folgerungen aus der Kreislehre, die Sache wird ja nur künstlich erschwert durch die gelehrt klingenden Ausdrücke sinus, cosinus etc. Selbstverständlich sind auf dieser Stufe nur die trigonometrischen Funktionen zu gebrauchen, nicht ihre Logarithmen. Wenn es auf mich ankäme, wären die trigonometrischen Logarithmen schon längst aus der Schule, wenigstens

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus dem Gymnasium, verschwunden. Die trigonometrischen Logarithmen verdunkeln dem Anfänger die Einsicht in die Abhängigkeit von Winkel und Winkelfunktion und tragen zur logischen Schulung und zur Ausbildung des Anschauungsvermögens nichts bei, sie haben andererseits den bedauerlichen Erfolg, dass die Schüler der obern Klassen die Übung und Sicherheit in der Multiplikation und Division verlernen. Bei allen Rechnungen, die das Gymnasium verlangen kann, kommt man mit der Funktionentafel sehr gut durch, der Gang der Berechnung wird viel natürlicher. Bei etwas weitläufigen Rechnungen z. B. bei der Multiplikation von drei Funktionen kann man ja die Multiplikation der Dezimalbrüche stark abkürzen. Für den Schüler kommt es auf die Genauigkeit des Ergebnisses garnicht an; es ist hinreichend, wenn er die Rechnung in denjenigen Grenzen richtig durchführt, welche der Lehrer ihm vorschreibt. Eine Rücksichtnahme auf die Schüler, welche die trigonometrischen Logarithmen im spätern Leben brauchen, ist nicht angebracht; man könnte mit viel grösserem Recht von jedem Gymnasiasten das kaufmännische Rechnen verlangen.

Auch der Sinus- und Cosinussatz, der erste mit Hilfe der Höhe, können auf dieser Stufe abgeleitet und zur Berechnung von Dreiecken und Vierecken verwertet werden. Man wird dies jedoch nicht sofort tun, weil dann die Rechnungen einen zu grossen Zeitraum beanspruchen und den Zusammenhang der Ähnlichkeitslehre gefährden. Man wird nach der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks zuerst leichte Konstruktionen vermittels ähnlicher Hilfsfiguren vornehmen. Diese Aufgaben bieten eine günstige Gelegenheit, die Sicherheit in den früher gründlich geübten Konstruktionen noch zu erhöhen. In den Kreis dieser Aufgaben wird man auch solche mit mehreren Mitteltransversalen ziehen und an dieser Stelle die betreffenden Lehrsätze ableiten. Hierbei kann man auch die Eindeutigkeit der innern Teilung einer Strecke AB ins Auge fassen und die Umkehrung des ersten Strahlensatzes beweisen.

Als letztes Kapitel der Ähnlichkeitslehre dieser Stufe sind leichte Aufgaben über das Verhältnis der Flächenräume ähnlicher Dreiecke und Vierecke und die entsprechenden Lehrsätze anzusehen. Den Beschluss dieses Teiles wird die Gleichheit der Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe bilden, sowie die Ableitung der Formel für den Inhalt der Pyramide ev. auch des Pyramidenstumpfs. Alle übrigen Sätze der Ähnlichkeitslehre sind in den zweiten Teil zu verweisen.

Bevor ich meine Erörterungen beschliesse, will ich noch mit einigen Worten auf die Einführung von Axiomen und vorläufigen Axiomen in den geometrischen Unterricht und auf ihre Veranschaulichung bezw. anschauliche Erläuterung etwas näher eingehen. Es ist ohne weiteres klar, dass sich in Untertertia die Stereometrie nicht auf streng wissenschaftlicher Grundlage aufbauen lässt. Man muss einige Sätze aus der Anschauung ablesen, wenn man dieselben auch nicht bis zur Reifeprüfung als etwas Selbstverständliches hinnehmen will, d. h. man muss einige Lehrsätze (Folgerungen aus Axiomen) vorläufig als Axiome ansehen. Dagegen lässt sich nicht viel einwenden, wie will man sonst auch heute nach den Forderungen der amtlichen Lehraufgaben die Stereometrie in Unterprima anfangs propädeutisch behandeln! Mir will es scheinen, dass die neuesten Untersuchungen über die Anschauungsgrundsätze dem propädeutischen Unterricht in der Geometrie noch einen grössern Spielraum einräumen werden; man sieht ja immer mehr ein, dass man unmöglich dem geometrischen Unterrichte eine streng wissenschaftliche Grundlage geben kann. Es trennen sich die Wege der Systematik und der Methodik. Die Systematik will ein Gebäude auf sicherem Fundament errichten, die Methodik will im Schüler das Streben wachrufen, der Wahrheit immer näher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und näher zu kommen, sie immer tiefer und tiefer zu erfassen. Etwas anders steht es wohl mit der Beantwortung der Frage, ob es gestattet ist, Axiome oder vorläufige Axiome anschaulich zu erläutern bezw. durch Veranschaulichung der Fassungskraft der Schüler näher zu bringen. Diese Frage wird von einigen Fachkollegen verneint, von andern bejaht werden. Deshalb habe ich für beide Ansichten die Bahn freigelassen, die beabsichtigte Vereinigung von Planimetrie und Stereometrie lässt sich auch bei Verneinung dieser Frage durchführen. Ich kann es mir jedoch nicht versagen, die Aufmerksamkeit der strengen Kritiker, welche derartige Veranschaulichungen scharf verurteilen, auf den Beweis des ersten Kongruenzsatzes zu lenken. Nach dem heutigen Standpunkt der Wissenschaft ist der erste Kongruenzsatz eine Folgerung aus den Axiomen III_6, III_5 und III_4 nach Hilbert,*) der allgemein gebräuchliche Beweis ist in seinem wesentlichsten Bestandteile eine anschauliche Begründung des Axioms III_6. So lange man noch den ersten Kongruenzsatz beweist, hat man, meine ich, kein Recht, über die Veranschaulichung eines Axioms oder vorläufigen Axioms den Stab zu brechen. Die Schulmathematik hat nach meiner Ansicht die Veranschaulichungen von solchen Beweisen zu unterscheiden, die sich den Anschein einer strengen Deduktion geben und es doch nicht sind. Diese Scheinbeweise muss auch der Methodiker verwerfen.

Die Entscheidung über die von mir gewünschte Reform wird wesentlich davon abhängen, ob man sich von ihr eine Erleichterung des geometrischen Unterrichts verspricht oder sogar von ihr eine Erschwerung befürchtet. Wer zur letzteren Ansicht neigt, wird sich schwerlich durch Worte überzeugen lassen; man mache einen praktischen Versuch, vernachlässige dabei aber nicht die Anschauungsmittel. In den methodischen Bemerkungen zu den mathematischen Lehraufgaben findet man mit Beharrlichkeit konstatiert, dass die Schwierigkeit des mathematischen Unterrichts in den obern Klassen fast ausnahmslos auf Lücken aus dem früheren Unterricht beruht. Damit ist doch ziemlich nackt zugegeben: der mathematische Unterricht enthält für den Obersekundaner und Primaner keine Schwierigkeit, wohl aber für den Quartaner und Tertianer. Hiermit stimmt überein, was ich vielfach von Nichtmathematikern gehört habe: in Tertia hatte ich kein Interesse für den geometrischen Unterricht, anders wurde es, als Trigonometrie und Stereometrie hinzukamen. Worin liegt nun die Schwierigkeit für den geometrischen Unterricht der mittleren Klassen? Nach meiner Überzeugung darin, dass man der jugendlichen Anschauungsphantasie zu stark die Flügel beschneidet und sie zu sehr in die engen Stiefel der Logik einschnürt. Darum stimme ich in den Ruf Holzmüllers ein: zuerst Pestalozzi und dann Euklid, füge jedoch hinzu: nicht zuerst einige Stunden bezw. Wochen Pestalozzi und dann Jahre hindurch Euklid, sondern stets mit Pestalozzi, aber immer mehr und mehr zu Euklid. Zum Schluss bemerke ich noch ausdrücklich, dass ich auf Einzelheiten meiner Auseinandersetzung kein besonderes Gewicht lege, es kommt mir auf den Hauptgedanken an:

in den mittleren Klassen mehr Anschauung,
in den obern Klassen mehr Raum für die Logik.

*) Hilbert, Grundlagen der Geometrie.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und näher zu kommen, sie [illegible] tiefer und tiefer zu erfassen. Etwas anders steht es wohl
mit der Beantwortung der [illegible] oder vorläufige Axiome an-
schaulich zu erläutern bez[illegible]sungskraft der Schüler näher
zu bringen. Diese Frage w[illegible]t, von andern bejaht werden.
Deshalb habe ich für bei[illegible] die beabsichtigte Vereinigung
von Planimetrie und Stere[illegible]ng dieser Frage durchführen.
Ich kann es mir jedoch [illegible] der strengen Kritiker, welche
derartige Veranschaulichun[illegible]is des ersten Kongruenzsatzes
zu lenken. Nach dem h[illegible] ist der erste Kongruenzsatz
eine Folgerung aus den Axi[illegible]*) der allgemein gebräuchliche
Beweis ist in seinem wese[illegible]e Begründung des Axioms III_6.
So lange man noch den e[illegible]n, meine ich, kein Recht, über
die Veranschaulichung ei[illegible]s den Stab zu brechen. Die
Schulmathematik hat nach [illegible]gen von solchen Beweisen zu
unterscheiden, die sich de[illegible]geben und es doch nicht sind.
Diese Scheinbeweise muss[illegible]

Die Entscheidung [illegible]rm wird wesentlich davon ab-
hängen, ob man sich vo[illegible]trischen Unterrichts verspricht
oder sogar von ihr eine [illegible]zteren Ansicht neigt, wird sich
schwerlich durch Worte ü[illegible] praktischen Versuch, vernach-
lässige dabei aber nicht d[illegible]odischen Bemerkungen zu den
mathematischen Lehraufga[illegible]nstatiert, dass die Schwierigkeit
des mathematischen Unte[illegible]snahmslos auf Lücken aus dem
früheren Unterricht beruh[illegible]zugegeben: der mathematische
Unterricht enthält für der[illegible]e Schwierigkeit, wohl aber für
den Quartaner und Tertia[illegible]ielfach von Nichtmathematikern
gehört habe: in Tertia ha[illegible]ischen Unterricht, anders wurde
es, als Trigonometrie un[illegible] liegt nun die Schwierigkeit für
den geometrischen Unter[illegible]einer Überzeugung darin, dass
man der jugendlichen An[illegible]gel beschneidet und sie zu sehr
in die engen Stiefel der [illegible]h in den Ruf Holzmüllers ein:
zuerst Pestalozzi und da[illegible]cht zuerst einige Stunden bezw.
Wochen Pestalozzi und d[illegible] stets mit Pestalozzi, aber
immer mehr und meh[illegible]ke ich noch ausdrücklich, dass
ich auf Einzelheiten mei[illegible]res Gewicht lege, es kommt mir
auf den Hauptgedanken [illegible]
in den mitt[illegible]g,
in den ober[illegible]ogik.

*) Hilbert, Grundla[illegible]

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf