Wissenschaftliche Beilage zum 40. Jahresbericht des Realgymnasiums in Papenburg.

Die Erzeugung der Kurven konstanten Gauß'schen Krümmungsmaßes auf Flächen zweiten Grades durch elliptische Zylinder.

Analytisch geometrisch dargestellt

von

E. Brenken
Oberlehrer.

Prgr.-Nr. 462.

Papenburg (Ems).
Gedruckt bei J. J. Lauscher.
1914.

9pa
4 (1914)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5 Figuren im Text, schem.-vermittelnd;
Anmerkungen am Ende.

Landes- u. Stadt-Bibl.
Düsseldorf

44 g 304

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Untersuchung der Kurven konstanten Krümmungsmaßes auf Flächen zweiten Grades lehrt, daß dieselben als Raumkurven vierter Ordnung darstellbar sind durch Schnitte der gegebenen Fläche zweiten Grades mit einer Schar ähnlicher und ähnlich liegender ellyptischer Zylinder. Für die zentralen Flächen des Ellipsoids und der beiden Hyperboloide ergibt sich außerdem eine Darstellung durch Schnitte mit je einer Schar ähnlicher Ellipsoide sowie die stereometrisch am Modell leicht ausführbare bekannte Konstruktion mittels Einhüllung durch Tangentialebenen gleichen Abstandes vom Koordinatenanfangspunkt.

Es sind im folgenden die Gleichungen der erzeugenden Zylinderscharen analytisch aus dem Gaußschen Krümmungsmaß von 1827 abgeleitet.[1]) Dieselben gestatten, für jeden innerhalb der Grenzen beliebig vorgeschriebenen Krümmungswert einen Zylinder zu konstruieren, welcher mit der Fläche zweiten Grades — Ellipsoid, Hyperboloid oder Paraboloid — die zugehörige Kurve konstanten Krümmungsmaßes als Durchdringungskurve liefert.[2])

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A. Das dreiachsige Ellipsoid.

Es sei

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = o$ die Gleichung des dreiachsigen Ellipsoids, $c < a < b$; in Parameterdarstellung $x = u$, $y = v$, $z = c \cdot w^{\frac{1}{2}}$, $w = 1 - \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)$;

$K = \frac{1}{R_1 \; R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$ das Gauß'sche Krümmungsmaß eines Flächenpunktes mit den Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 und den Fundamentalgrößen [5] erster — E, F, G — und zweiter — L, N, M — Ordnung. Es wird dann in Anwendung auf die Ellipsoidfläche

1) $E = \sum \left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)^2 = 1 + \frac{c^2 \; u^2}{a^4 \; w}$,

2) $G = \sum \left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)^2 = 1 + \frac{c^2 \; v^2}{b^4 \; w}$,

3) $F = \sum \frac{\delta x}{\delta u} \frac{\delta x}{\delta v} = \frac{c^2 \; u \; v}{a^2 \; b^2 \; w}$. Da für den Fall des Ellipsoids in jeder der drei Determinanten für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$L = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 x}{\delta u^2} & \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 y}{\delta u^2} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} & \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 x}{\delta u \, \delta v} & \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 y}{\delta u \, \delta v} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta u \, \delta v} & \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{vmatrix}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$N = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\delta^2 x}{\delta v^2} & \frac{\delta x}{\delta u} & \frac{\delta x}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 y}{\delta v^2} & \frac{\delta y}{\delta u} & \frac{\delta y}{\delta v} \\ \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} & \frac{\delta z}{\delta u} & \frac{\delta z}{\delta v} \end{vmatrix}$$

die Glieder der ersten Kolonne bis auf das letzte verschwinden, die diesem zugeordnete Unterdaterminante aber gleich 1 ist, so wird

$$4)\quad L = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{a^2 c w + c u^2}{a^4 w^{3/2}},$$

$$5)\quad M = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta u \, \delta v} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{c u v}{a^2 b^2 w^{3/2}},$$

$$6)\quad N = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} \cdot = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{b^2 c w + c v^2}{b^4 w^{3/2}},$$

wobei $\Delta = EG - F^2 = 1 + \frac{c^2}{w}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)$ zu setzen ist. Aus 1) bis 6) folgt somit

$$7)\quad K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{a^2 b^2 c^2 w + c^2 (a^2 v^2 + b^2 u^2)}{\left[1 + \frac{c^2}{w}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]^2 \cdot a^4 b^4 w^2}$$

als Wert des Krümmungsmaßes für jeden Flächenpunkt x, y, z des dreiachsigen Ellipsoids mit den Halbachsen $c < a < b$ [4] und der Parameterdarstellung $x = u$, $y = v$, $z = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right)} = c \cdot \sqrt{w}$.

So erhält man z. B. für die Achsenendpunkte durch Einsetzen ihrer u v — Koordinaten in 7) die Werte

$$K_c = \frac{c^2}{a^2 b^2}, \quad K_a = \frac{a^2}{b^2 c^2}, \quad K_b = \frac{b^2}{a^2 c^2}.$$

Durch Wiedereinführung der x y-Werte für u, v und w in Gleichung 7) folgt nun für jeden Wert $K =$ constans zwischen den Grenzen K_c (Minimum) und K_b (Maximum) zunächst folgende weitläufige Funktion vierten Grades als Projektion einer Kurve konstanten Krümmungsmaßes auf die x y-Ebene:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$8)\quad K a^4 b^4 \left\{ \left[1 - 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \right] + 2\, c^2 \,.\right.$$

$$\left.\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) . \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right] + c^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right)^2 \right\} -$$

$$c^2 \left\{ a^2 b^2 \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right] + a^2 y^2 + b^2 x^2 \right\} = o,$$

welche indes auf den zweiten Grad reduzierbar ist.

Zur Abkürzung sei

$$K a^4 b^4 = r,\ a^2 y^2 + b^2 x^2 = s,$$

$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = p$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = q$, $1 - q = d$; dann wird nach 8)

$$r \left\{ 1 - 2q + q^2 + 2\, c^2 p (1 - q) + c^4 p^2 \right\} - c^2 \left\{ a^2 b^2 (1 - q) + s \right\} = o,$$

$$r \left\{ (1 - q)^2 + 2 c^2 p (1 - q) + c^4 p^2 \right\} - c^2 \left\{ a^2 b^2 (1 - q) + s \right\} = o,$$

$r\, d^2 + 2\, c^2\, p\, d\, r + c^4\, p^2\, r - c^2\, a^2\, b^2\, d - c^2\, s = o$; nun ist $s = q \,.\, a^2 b^2 = (1 - d) \,.\, a^2 b^2$, folglich $r\, d^2 + 2\, c^2 p\, d\, r + c^4 p^2 r - c^2 a^2 b^2 d - c^2 (1 - d)\, a^2 b^2 = o$, $r\, d^2 + 2\, c^2\, p\, d\, r + c^4\, p^2\, r - a^2\, b^2\, c^2 = o$, $r\, (d^2 + 2\, c^2\, d\, p + c^4\, p^2) = a^2\, b^2\, c^2$; nun war $r = K\, a^4\, b^4$; daher wird

$$K\, (d^2 + 2\, c^2\, d\, p + c^4\, p^2) = \frac{c^2}{a^2 b^2},$$

$$K\, (d + c^2\, p)^2 = \frac{c^2}{a^2\, b^2} \text{ oder}$$

$d + c^2\, p = \frac{c}{ab \sqrt{K}}$. Setzt man noch für d und p ihre Werte ein, so folgt als Projektionsgleichung der Kurven konstanten Krümmungsmaßes für die xy-Ebene:

$$1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = \frac{c}{ab \sqrt{K}},^{5)}$$

$$\frac{c^2 - a^2}{a^4}\, x^2 + \frac{c^2 - b^2}{b^4}\, y^2 = \frac{c}{ab \sqrt{K}} - 1 \text{, oder}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$8^{a)} \quad \frac{x^2}{\frac{a^4\,\varepsilon^2}{a^2-c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4\,\varepsilon^2}{b^2-c^2}} = 1, \text{ wofern}$$

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{c}{ab\sqrt{K}} \geqq 0 \text{ gesetzt wird.}$$

Somit folgt:

I. „Die Kurven konstanten Gauß'schen Krümmungsmaßes des dreiachsigen Ellipsoids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $c < a < b$ sind in die xy-Ebene projizierbar durch eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender elliptischer Zylinder mit dem variabelen positiven Parameter $\varepsilon^2 = 1 - \frac{c}{ab\sqrt{K}} \gtreqless 0$, d. i. $K \gtreqless \frac{c^2}{a^2\,b^2}$.

Die Gleichung dieser Zylinderschar ist

$$\frac{x^2}{\frac{a^4\,\varepsilon^2}{a^2-c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4\,\varepsilon^2}{b^2-c^2}} = 1, \text{ maximaler Krümmungswert } K = \frac{b^2}{a^2\,c^2}\text{“}.$$

Aus $8^{a)}$ entstehen durch zyklische Vertauschung die Projektionen der gesuchten Kurven auf die beiden anderen Koordinatenebenen:

$$8^{b)} \quad \frac{y^2}{\frac{b^4\,\varepsilon^2}{b^2-a^2}} - \frac{z^2}{\frac{c^4\,\varepsilon^2}{a^2-c^2}} = 1;\ \varepsilon^2 = 1 - \frac{a}{bc\sqrt{K}} \lesseqgtr 0$$

und

$$8^{c)} \quad \frac{z^2}{\frac{c^4\,\varepsilon^2}{c^2-b^2}} + \frac{x^2}{\frac{a^4\,\varepsilon^2}{a^2-b^2}} = 1;\ \varepsilon^2 = 1 - \frac{b}{ac\sqrt{K}} \lesseqgtr 0,$$

welche im Falle $8^{b)}$ eine Schar hyperbolischer Zylinder darstellen mit gemeinsamen Asymptoten für $\varepsilon^2 = 0$ oder $K = \frac{a^2}{b^2c^2}$, dem Krümmungswert der durch die Endpunkte der Mittelachse — x-Achse — gehenden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in zwei Ellipsen zerfallenden Kurve konstanten Krümmungsmaßes. (Fig. 1)

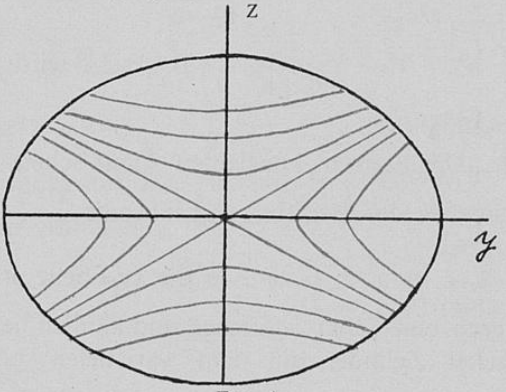

Fig. 1.

B. Die Hyperboloide.

Für die Hyperboloide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ und $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $c < a < b$ gelten die Ergebnisse des vorigen Abschnittes, sofern nur überall c durch $-c^2$ bezw. b^2 und c^2 durch $-b^2$ und $-c^2$ ersetzt wird und umgekehrt.

a) Einschaliges Hyperboloid:

Aus Gleichung 7) folgt das negative Krümmungsmaß dieser Fläche in der Form

$$K = -\frac{a^2\, b^2\, c^2\, w + c^2\,(a^2\, v^2 + b^2\, u^2)}{\left[1 - \frac{c^2}{w}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]^2 \cdot a^4\, b^4\, w^2};$$

Krümmungswerte in den reellen Achsenendpunkten der x- und y-Achse sind

$K_a = -\frac{a^2}{b^2 c^2}$ und $K_b = \frac{-b^2}{a^2\, c^2}$ und Gleichung 8a) liefert als projektive Beziehung zur xy-Ebene die Gleichung

$$9^{a)} \quad \frac{x^2}{\frac{a^4\, \varepsilon^2}{a^2 + c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4\, \varepsilon^2}{b^2 + c^2}} = 1, \text{ wofern}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\varepsilon^2 = 1 \pm \frac{c}{ab\sqrt{(K)}} > 0$ und (K) gleich dem absoluten Wert des negativen Krümmungsmaßes der Fläche gesetzt wird.

II. „Die Kurven konstanten negativen Krümmungsmaßes im Bereiche $0 > K > -\frac{b^2}{a^2 c^2}$ des einschaligen Hyperboloids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $c < a < b$ sind durch ähnliche elliptische Zylinder auf die xy-Ebene projizierbar. Die Gleichung dieser Zylinderschar lautet

$$\frac{x^2}{\frac{a^4 \varepsilon^2}{a^2 + c^2}} + \frac{y^2}{\frac{b^4 \varepsilon^2}{b^2 + c^2}} = 1, \text{ wobei}$$

$\varepsilon^2 = 1 \pm \frac{c}{ab\sqrt{(K)}} > 0$ und (K) gleich dem absoluten Werte des negativen Krümmungsmaßes dieser Fläche ist."

Für die beiden anderen Koordinatenebenen gelten vermöge 8b) und 8c) als projizierende Gleichungen

9b) $$\frac{y^2}{\frac{b^4 \varepsilon^2}{b^2 - a^2}} - \frac{z^2}{\frac{c^4 \varepsilon^2}{a^2 + c^2}} = 1; \; \varepsilon^2 = 1 - \frac{a}{bc\sqrt{(K)}} \gtreqless 0$$

mit gemeinsamem Asymptotenpaar für $\varepsilon^2 = 0$ oder $(K) = \frac{a^2}{b^2 c^2}$ und

9c) $$-\frac{x^2}{\frac{a^4 \varepsilon^2}{b^2 - a^2}} - \frac{z^2}{\frac{c^4 \varepsilon^2}{b^2 + c^2}} = 1$$ mit dem negativen Parameter $\varepsilon^2 = 1 - \frac{b}{ac\sqrt{(K)}} \lesseqgtr 0.$

(Fig. 2 zu 9b).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

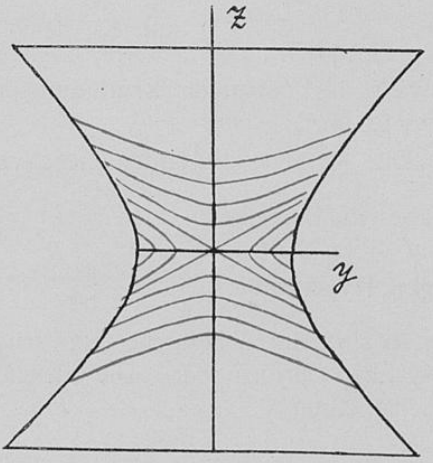

Fig. 2

b) Zweischaliges Hyperboloid:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $c < a < b$. Durch Zeichenwechsel von b^2 und c^2 folgt aus 7):

$$K = \frac{a^2\, b^2\, c^2\, w - c^2\, (a^2\, v^2 - b^2\, u^2)}{\left[1 - \frac{c^2}{w}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]^2 \cdot a^4\, b^4\, w^2}$$

als Krümmungsmaß des zweischaligen Hyperboloids, wofern $w = 1 - \left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right)$ gesetzt wird. Maximaler Krümmungswert im Scheitelpunkte der x-Achse ist $K_a = \frac{a^2}{b^2\, c^2}$; Projektion der Kurven konstanten Krümmungsmaßes auf die yz-Ebene nach 8[b]):

$$10^{a)} \quad \frac{y^2}{\frac{b^4\, \varepsilon^2}{b^2 + a^2}} - \frac{z^2}{\frac{c^4\, \varepsilon^2}{c^2 + a^2}} = 1; \; \varepsilon^2 = 1 - \frac{a}{bc\sqrt{K}} \lesseqgtr 0.$$

Daraus folgt

III. „Die Projektion der Kurven konstanten Krümmungsmaßes des zweischaligen Hyperboloids $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, $c < a < b$ auf diejenige der drei Koordinatenebenen, welche keinen reellen Punkt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit der Fläche gemeinsam hat, geschieht durch elliptische Zylinder mit der Gleichung

$$\frac{y^2}{\frac{b^4\,(\varepsilon^2)}{b^2+a^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^4\,(\varepsilon^2)}{c^2+a^2}} = 1,$$ wo (ε^2) gleich dem absoluten Werte des i. a. negativen Parameters

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{a}{bc\sqrt{K}} \gtreqless 0$$ ist."

Die Gleichungen 8a) und 8c) ergeben für die beiden anderen Koordinatenebenen die Projektionsbilder

$$10^{b)}\quad \frac{x^2}{\frac{a^4\,\varepsilon^2}{a^2+c^2}} - \frac{y^2}{\frac{b^4\,\varepsilon^2}{b^2-c^2}} = 1;\ \varepsilon^2 = 1 + \frac{c}{ab\sqrt{K}} > 0$$

mit gemeinsamem Asymptotenpaar für $\varepsilon^2 = 0$ oder $\sqrt{K} = -\frac{c}{ab}$ und

$$10^{c)}\quad \frac{x^2}{\frac{a^4\,\varepsilon^2}{a^2+b^2}} + \frac{z^2}{\frac{c^4\,\varepsilon^2}{b^2-c^2}} = 1;\ \varepsilon^2 = 1 + \frac{b}{ac\sqrt{K}} > 0,$$

mit dem Grenzfall $K = \frac{a^2}{b^2\ c^2}$ oder $\varepsilon^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$ für welchen 10c) eine Berührung des projizierenden Zylinders in den reellen Scheitelpunkten der x-Achse des zweischaligen Hyperboloids darstellt. (Fig. 3 zu 10b)

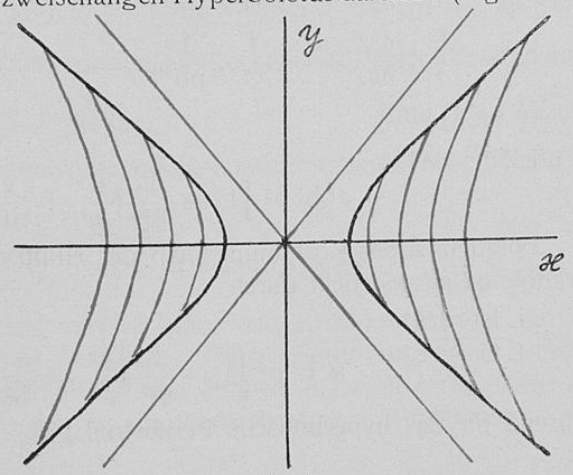

Fig. 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C. Die Paraboloide

Das elliptische und das hyperbolische Paraboloid haben absolut genommen in jedem Flächenpunkte gleiches Krümmungsmaß. Ist das erstere gegeben durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2\,p\,z = 0$, $b > a$ oder in Parameterdarstellung durch

$$x = u;\ y = v;\ z = -\frac{1}{2p} \cdot \left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right), \text{ so wird}$$

$$\frac{\delta x}{\delta u} = \frac{\delta y}{\delta v} = 1;\ \frac{\delta z}{\delta u} = -\frac{u}{p\,a^2};\ \frac{\delta z}{\delta v} = -\frac{v}{p\,b^2};$$

$$\frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = -\frac{1}{b^2 p};\ \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} = -\frac{1}{a^2 p}, \text{ somit}$$

$$E = \Sigma \left(\frac{\delta x}{\delta u}\right)^2 = 1 + \frac{u^2}{a^4 p^2},$$

$$F = \Sigma \frac{\delta x}{\delta u}\frac{\delta x}{\delta v} = \frac{u \cdot v}{a^2 b^2 p^2},$$

$$G = \Sigma \left(\frac{\delta x}{\delta v}\right)^2 = 1 + \frac{v^2}{b^4 p^2},$$

$$\Delta^2 = E\,G - F^2 = 1 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right),$$

$$L = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta u^2} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{p\,a^2},$$

$$N = \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{\delta^2 z}{\delta v^2} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \frac{1}{p\,b^2},$$

$$M = 0 \text{ und}$$

$$L\,N - M^2 = \frac{1}{a^2 b^2 p^2 \left[1 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]}.$$

Folglich ist das Krümmungsmaß des elliptischen Paraboloids ausgedrückt durch

$$K = \frac{L\,N - M^2}{E\,G - F^2} = \frac{+1}{a^2 b^2 p^2 \left[1 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]^2},$$

während für das hyperbolische Paraboloid gilt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$K = \frac{-1}{a^2 b^2 p^2 \left[1 + \frac{1}{p^2}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^4}\right)\right]^2},$$ wo b^2 durch $-b^2$ ersetzt ist. Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{u^2}{a^4} + \frac{v^2}{b^4} = m, \text{ so folgt}$$

$$K \cdot a^2 b^2 \left[p^2 + 2m + \frac{m^2}{p^2}\right] = 1 \text{ oder}$$

$$m^2 + 2mp^2 + p^4 = \frac{p^2}{K a^2 b^2},$$

$$m = -p^2 \pm \frac{p}{ab\sqrt{K}} \text{ oder bei Wahl}$$

des oberen Zeichens und Einsetzung der xy-Werte

$$11^{a)} \quad \frac{x^2}{a^4 \varepsilon^2} + \frac{y^2}{b^4 \varepsilon^2} = 1, \ \varepsilon^2 = -p^2 + \frac{p}{ab\sqrt{K}} \gtreqless 0,$$

eine Ellipsenschar, welche für das hyperbolische Paraboloid übergeht in

$$11^{b)} \quad \frac{x^2}{a^4 \varepsilon^2} + \frac{y^2}{b^4 \varepsilon^2} = 1, \ \varepsilon^2 = -p^2 + \frac{p}{ab\sqrt{(K)}},$$

wo (K) den absoluten Wert bedeutet. Dies ergibt die beiden Sätze:

IV. „Die elliptischen Zylinder, durch welche die Kurven konstanter Flächenkrümmung des elliptischen Paraboloids $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 2pz = 0$ auf die xy-Ebene projiziert werden, sind dargestellt durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^4 \varepsilon^2} + \frac{y^2}{b^4 \varepsilon^2} = 1, \ \varepsilon^2 = -p^2 + \frac{p}{ab\sqrt{K}} \gtreqless 0;$$

Maximalwert von K im Scheitelpunkt der Fläche ist $K_o = \frac{1}{a^2 b^2 p^2}$".

V. „Das hyperbolische Paraboloid $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 2pz = 0$ hat bei absolut gleichem Krümmungsmaß für die Kurven konstanter Flächenkrümmung auch dieselbe Schar ähnlicher und ähnlich liegender erzeugender Zylinder wie das elliptische Paraboloid, in der Form

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{x^2}{a^4\,\varepsilon^2} + \frac{y^2}{b^4\,\varepsilon^2} = 1,\ \varepsilon^2 = -p^2 + \frac{p}{ab\,\sqrt{(K)}} \gtreqless 0,$$

wo (K) den absoluten Wert des negativen Krümmungsmaßes bedeutet in den Grenzen

$$0 > K \gtreqless -\frac{1}{a^2 b^2 p^2}\,.$$

Die Projektionsbilder der Kurven auf die beiden anderen Koordinatenebenen der Paraboloide sind kongruente Parabeln gleicher Achsenrichtung wie sich durch Elimination von x bezw. y aus der gegebenen Paraboloidfläche u. einer der beiden Gleichungen 11[a)] u. 11[b)] ergibt. (Fig. 4 und Fig. 5, letztere perspektivisch den Verlauf der Kurven in einem Quadranten der Sattelfläche anzeigend.)

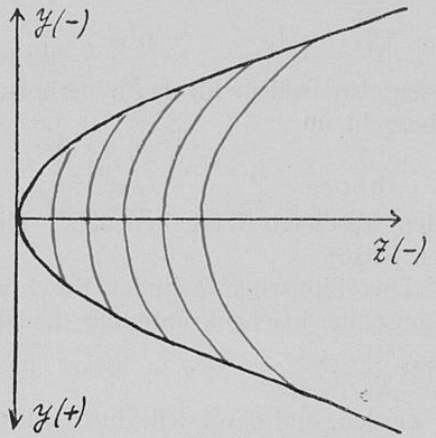

Fig. 4.

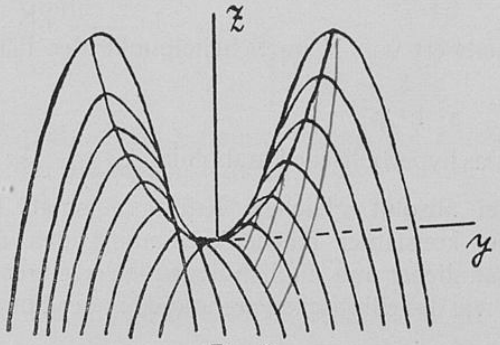

Fig 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Sätze I. bis V. reichen unter Benutzung bestimmter Zahlenwerte für a, b, c hin, um für Flächen zweiten Grades [6] Kurven konstanter, innerhalb der Grenzen beliebig vorgeschriebener Flächenkrümmung nicht nur in Grund- und Aufriß als Durchdringungskurven festzulegen, sondern auch am Körpermodell durch Fadenkonstruktion der erzeugenden Zylinder zur direkten Anschauung zu bringen. Der Poinsotsche Ausdruck „Polhodieen" für diese Linien, deren Charakter als Kurven konstanter Flächenkrümmung ihm selbst noch unbekannt war, erscheint hiernach insofern berechtigt, als jede der fünf Flächen zweiten Grades — Ellipsoid, zwei Hyperboloide, zwei Paraboloide — wenigstens zwei Pole besitzt, deren Verbindungslinie als Achse einer die Kurven konstanten Krümmungsmaßes erzeugenden Zylinderschar angesehen werden kann [7].

Die folgende Übersicht faßt das Ergebnis kurz zusammen.

	Fläche($c<a<b$)	Erz. Zylinderschar	ε^2	Grenzen für K
I.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{\frac{a^4\varepsilon^2}{a^2-c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^4\varepsilon^2}{b^2-c^2}}=1$	$1-\frac{c}{ab\sqrt{K}}\gtreqless 0$	$\frac{c^2}{a^2b^2}\lesseqgtr K\lesseqgtr\frac{b^2}{a^2c^2}$
II.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{x^2}{\frac{a^4\varepsilon^2}{a^2+c^2}}+\frac{y^2}{\frac{b^4\varepsilon^2}{b^2+c^2}}=1$	$1\pm\frac{c}{ab\sqrt{(K)}}>0$	$0>K>-\frac{b^2}{a^2c^2}$
III.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	$\frac{y^2}{\frac{b^4(\varepsilon^2)}{b^2+a^2}}+\frac{z^2}{\frac{c^4(\varepsilon^2)}{c^2+a^2}}=1$	$1-\frac{a}{bc\sqrt{K}}\leqq 0$	$0<K\lesseqgtr\frac{a^2}{b^2c^2}$
IV.	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+2pz=0$	$\frac{x^2}{a^4\varepsilon^2}+\frac{y^2}{b^4\varepsilon^2}=1$	$\frac{p}{ab\sqrt{K}}-p^2\gtreqless 0$	$0<K\lesseqgtr\frac{1}{a^2b^2p^2}$
V.	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+2pz=0$	$\frac{x^2}{a^4\varepsilon^2}+\frac{y^2}{b^4\varepsilon^2}=1$	$\frac{p}{ab\sqrt{(K)}}-p^2\gtreqless 0$	$0>K\gtreqless-\frac{1}{a^2b^2p^2}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieselbe zeigt, daß für $a = b$, bezw. $b = c$ im Falle III., die fünf Flächen in Rotationsflächen übergehen, während gleichzeitig die erzeugenden elliptischen Zylinder zu Kreiszylindern werden, wie es sein muß. Die Erde ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, ihre Achse zugleich Achse einer Zylinderschar, durch welche die Breitenkreise als Kurven konstanter Flächenkrümmung erzeugt werden. Bekanntlich ist es auf keine Weise möglich, das Bild der Erdoberfläche kongruent d. h. zugleich winkel- und flächentreu als ebene Landkarte darzustellen. Alle Landkarten sind entweder nur winkeltreu (Merkatorprojektion) oder nur flächentreu (Bonne'sche Kegelprojektion) oder keines von beiden. (Plattkarten). Der Grund dafür liegt darin, daß Ebene und Kugel in allen Punkten verschiedenes Krümmungsmaß haben, während nach einem Fundamentalsatz der Flächentheorie nur solche Flächen auf einander abwickelbar sind, welche in allen entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmaß d. i. dieselben Kurven konstanter Flächenkrümmung besitzen.

Anmerkungen.

1) C. F. Gauß „Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1827.

2) Die erste geometrische Konstruktion einer Kurve konstanter Flächenkrümmung auf einer F_2 wurde von de la Gournerie gegeben, während die Kurven selbst schon Poinsot unter dem Namen „Polhodieen" bekannt waren. Ausführliche Literatur unter A. Schönflies in „Enzyklopädie der Elementarmathematik mit Einschluß ihrer Anwendungen" IV, 3, Seite 230 ff. Teubner, Leipzig.

3) Kommerell „Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen" 2. Teil, Sammlung Schubert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4) Setzt man zur Probe $a = b = c = 1$, $u^2 + v^2 = q$, so wird $K = \frac{w + q}{(w + q)^2} = \frac{1}{w + q}$ oder wegen $w = 1 - q$ auch $K = 1$ als Krümmungsmaß der Einheitskugel, wie es sein muß.

5) Für $a = b = c = 1$ folgt $K = 1$ wie unter 4).

6) Zylinder und Kegel als abwickelbare Regelflächen kommen hier nicht in Betracht.

7) Über Identität von „Polhodie" und Kurve konstanter Gauß'scher Flächenkrümmung vergl. O. Böklen „Anal. Geometrie" Stuttgart 1861 pag. 82; über mathem. Modellkonstruktionen: W. Dyck „Katalog mathem. und physik. Modelle, Apparate, Instrumente etc." München 1892/93, Selbstverlag der „Deutschen Mathematikervereinigung" und H. Wiener und P. Treutlein „Verzeichnis mathem. Modelle", Leipzig (Teubner) 1912. Eine für Durchdringungen besonders geeignete, am Ellipsoid erläuterte Darstellungsweise der Flächen zweiten Grades in Grund-, Auf- und Seitenriß mittels Niveaukurven findet sich in Behrendsen und Götting „Lehrbuch" der Mathematik nach modernen Grundsätzen, Oberstufe B, Teubner 1912 S. 457 58.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

u^2 … $b = c = 1,$

… $\frac{1}{\ }^2 = \frac{1}{w + q}$

ode … 1 als Krüm-
mu … in muß.

… $K = 1$ wie

unte …

… elbare Regel-

fläc …

… und Kurve
kons … g vergl. O.
Bökl … 61 pag. 82;
über … Dyck „Kata-
log … arate, Instru-
men … g der „Deut-
sche … Wiener und
P. T … le", Leipzig
(Teu … n besonders
geeig … ellungsweise
der … Auf- und
Seite … Behrendsen
und … nach mo-
derne … bner 1912
S. 45 …

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN® Gray Scale
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19
R G B W G K C Y M

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf