(Beilage zum Programm der Grossh. Realschule zu Oppenheim, März 1894).

Der Ort der Brennpunkte
eines
Büschels von Kegelschnitten,
das von einem
Ebenenbüschel aus einem Kegel II. Ordnung ausgeschnitten wird.

Von

Dr. Peter Dittmar.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Untersuchung beantwortet eine von der mathematischen Wissenschaft aufgestellte Frage, die eine Lösung bis jetzt nicht gefunden hatte, wie aus Aperçu historique (note 4) von Professor Chasles zu ersehen ist, der sich zuletzt mit einem Spezialfall derselben beschäftigt hat. Diese Frage lautet: Wo liegen die Brennpunkte eines Büschels von Kegelschnitten, das von einem Ebenenbüschel aus einem Kegel 2. Ordnung ausgeschnitten wird? Während dieser Ort der Brennpunkte des Kegelschnittbüschels, wie hier gezeigt werden soll, bei beliebiger Lage des Ebenenbüschels gegen den Kegel aus einer Curve doppelter Krümmung (Raumcurve) besteht, deren Projection auf eine Ebene 8. Ordnung ist, wird er bei der speziellsten Lage des Ebenenbüschels zu einer ebenen Curve 3. Ordnung, nämlich im Falle, dass die Gerade des Ebenenbüschels den Kegel berührt, und das Ebenenbüschel zu einem Achsenschnitt des Kegels normal steht, der den Kegel in zwei symmetrische, gleiche Hälften teilt. Ausser dieser Curve 3. Ordnung, die unter dem Namen Fokale in die mathematischen Lehrbücher übergegangen ist, war seither über diesen Gegenstand nichts bekannt.

Quetelet (professeur, directeur de l'Observatoire de Bruxelles, membre de l'Académie des Sciences etc.) untersuchte den Ort der Brennpunkte eines Kegelschnittbüschels, das zu einem Achsenschnitt (Symmetrieebene) des Rotationskegels normal liegt, und dessen Gerade den Kegel berührt. Er fand eine Curve 3. Ordnung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(Fig. 12) und gab ihr den Namen Fokale. (Quetelet, dissertatio de quibusdam locis geometricis necnon de curva focali, Gand 1819). Diese Curve erregte bald durch eine Anzahl merkwürdiger Eigenschaften die Aufmerksamkeit der Mathematiker. (Mémoires de l'Académie de Bruxelles 1822). Van Rees (professeur de mathématiques à l'Université de Liége) untersuchte nun die Fokale beim schiefen Kegel, wenn das Ebenenbüschel normal zu einer Symmetrieebene desselben liegt, und seine Gerade den Kegel berührt. Sie ist auch in diesem Falle eine ebene Curve 3. Ordnung (Fig. 8) in der genannten Symmetrieebene. (Correspondance mathématique et physique publiée par Quetelet, Bruxelles 1829, tome V.) Ed. Külp behandelte die Fokale von Quetelet beim Rotationscylinder (Fig. 20) in einer Inauguraldissertation z. E. d. Doctorwürde (Mannheim 1823). Mit der Fokale von van Rees beschäftigte sich in der nächsten Zeit unter anderen auch Chasles. Er schreibt in einem Brief an Quetelet: „J'ai lu ces jours derniers, dans la sixième livraison du tome Ve de la Correspondance, les intéressans mémoires de M M. Van Rees et Lefrançois, sur les focales; j'en ai pris occassion pour relire, avec un nouveau plaisir, celui de M. Dandelin, sur le même sujet, qui se trouve dans le tome II de l'Académie. Ces courbes, dont la géométrie vous est redevable, jouissent de propriétés caractéristiques vraiment bien curieuses. J'ai compté jusqu'à huit descriptions différentes de la focale dans le cône droit.

Je me suis aperçu, que la focale de M. Van Rees admet une troisième description etc." (Corresp. mathém. et physiques, tome VI.)

Chasles zeigte später (1837) noch, dass auf der Fokale von van Rees nicht alle Brennpunkte des Kegelschnittbüschels liegen, und dass die fehlenden einen Kreis bilden in einer zur Ebene der Fokale normalen Ebene.

Es ist zu verwundern, dass man nun nicht die Fokale für den Fall untersuchte, wo die Gerade des Büschels den Kegel schneidet oder ausserhalb desselben liegt, wenn auch das Büschel selbst zur Symmetrieebene normal bleibt, und dass man nicht schliesslich zum Hauptproblem vorschritt, zu dem Falle, wo das Ebenenbüschel beliebig gelegen ist. Der Grund hierfür dürfte wohl darin zu finden sein, dass der von den genannten Herren eingeschlagene Weg ungeeignet ist zur Lösung des allgemeinen Problems.

Die vorliegende Arbeit giebt nun die Lösung der Aufgabe bei beliebiger Lage des Ebenenbüschels, aus der die Resultate für alle Spezialfälle ohne weiteres hervorgehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1.

1. Ein Kegel 2. Ordnung entsteht, wenn die Punkte der Peripherie eines Kreises K von einem Punkte S aus projiciert werden, der ausserhalb der Kreisebene liegt. Der gemeinsame Punkt S der projicierenden Geraden ist das Centrum des Kegels und die Gerade der Punkte O und S seine Achse, wenn O das Centrum des Kreises bedeutet. Wählen wir diese Achse zur z-Achse eines schiefwinkeligen Koordinatensystems, dessen x- und y-Achse zwei zu einander normale Diameter von K sind, so ist O der Nullpunkt des Koordinatentrieders und die xy-Ebene identisch mit der Kreisebene. Dabei werde die positive Richtung der z-Achse so angenommen, dass für den Punkt S die Koordinaten lauten $x = 0$, $y = 0$, $z = OS = +d$, (wo d ohne Vorzeichen eine positive Zahl ist). Bezeichnet nun r den Radius des Kreises K, so ergiebt sich die Gleichung der Kegelfläche:

$$d^2(x^2 + y^2) - r^2(z - d)^2 = 0$$

oder

$$d^2x^2 + (dy - rz + dr)(dy + rz - dr) = 0.$$

$dy + rz - dr = 0$ und $dy - rz + dr = 0$ sind zwei zur x-Achse parallele Tangentenebenen, die den Kegel in den in der Ebene yz gelegenen Kanten SK_1 und SK_2 berühren (Figur 1). Mithin werden diese Kanten in der Ebene yz durch dieselben Gleichungen dargestellt.

2. Es sei nun die xy-Ebene eine der Ebenen des gegebenen Ebenenbüschels; sie enthält folglich die Gerade g, die allen Ebenen des Büschels gemeinsam angehört. Die y-Achse legen wir jetzt so fest, dass ihre negative Richtung die Gerade g normal schneidet, die x-Achse also zu g parallel ist. Bezeichnet G (Figur 1) den Schnittpunkt von g mit der y-Achse und a die Grösse der Strecke OG ohne Vorzeichen, so hat G die Koordinaten $0 \mid -a \mid 0$, und g ist durch das System bestimmt: $z = 0$, $y + a = 0$. Eine Ebene der Geraden g schneidet die x-Achse im Unendlichen, denn sie ist zu ihr parallel, die y-Achse in einer beliebigen Entfernung, die mit u bezeichnet werden soll. Folglich hat diese Ebene die Gleichung:

$$uy - az + au = 0.$$

Jedem einzelnen Werte von u entspricht eine bestimmte Ebene der Geraden g, allen möglichen Werten von u die ganze Serie Ebenen von g. Unter der Voraussetzung, dass u variabel sei, stellt also die obige Gleichung das Ebenenbüschel der Geraden g dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Büschel von Kegelschnitten, das von diesem Ebenenbüschel aus dem Kegel 2. Ordnung ausgeschnitten wird, ist somit durch das System bestimmt:

$$d^2x^2 + d^2y^2 - r^2z^2 + 2r^2dz - r^2d^2 = 0,$$

$$uy - az + au = 0.$$

3. Das Kegelschnittbüschel zeigt besondere Eigenschaften, wenn der Kegel ein besonderer wird oder wenn g in Bezug auf den Kegel besondere Lagen hat.

Der Kegel wird zum Rotationskegel, wenn Winkel xz und yz $= \frac{\pi}{2}$ sind. Die obige Kegelgleichung stellt daher auch den Rotationskegel dar, wenn sie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen wird. — Wenn $d^2(\cos^2 xz + \cos^2 yz) = r^2$, so wird der Kegel orthogomal etc.

Das Ebenenbüschel, oder was dasselbe bedeutet, die Gerade g ist im allgemeinen zu keinem Achsenschnitt des Kegels normal, denn der zu g normale Achsenschnitt muss den zu g normalen Diameter von K, die y-Achse enthalten, kann also nur die yz-Ebene sein, und diese ist zu g deshalb nicht normal, weil der Winkel xz von einem rechten Winkel verschieden ist. — Wenn aber der Winkel xz $= \frac{\pi}{2}$ ist, dann steht die Ebene yz normal zu x, folglich auch zu ihrer Parallelen g und zur Kreisebene. In diesem Falle ist also die yz-Ebene der sogenannte charakteristische Achsenschnitt des Kegels (Symmetrieebene des Kegels). Also nur bei der Bedingungsgleichung W. xz $= \frac{\pi}{2}$ steht das Ebenenbüschel (g) normal zu einem Achsenschnitt und zwar zum charakteristischen. Wenn Winkel yz $= \frac{\pi}{2}$, so ist das Ebenenbüschel zu diesem Achsenschnitt parallel.

§ 2.

1. Wir werden nun eine Änderung des Koordinatensystems vornehmen und unter Beibehaltung der z-Achse, der yz- und xz-Ebene die Ebene $uy - az + au = 0$ zur xy-Ebene machen. Zu diesem Zwecke drehen wir zunächst die y-Achse (OY, Fig. 2) im Nullpunkt O in der Ebene yz, bis sie zur Spur der Ebene $uy - az + au = 0$ in der yz-Ebene (GO_1) parallel ist. ($OY' \parallel GO_1$) dann ist die Ebene xy′ parallel zu der genannten Ebene des Büschels. Bezeichnet man mit x′, y′, z′ (OG′, $G'O_1'$, $O_1'P$) die Koordinaten eines Punktes P für das Koordinatentrieder mit der Ebene xy′, so ergeben sich aus der Figur zwischen diesen und den früheren Koordinaten x, y, z (OG′, G′O′, O′P) die Beziehungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x = x',$$

$$y = \frac{ay'}{+\sqrt{a^2 + u^2 + 2\,au\cos yz}},$$

$$z = z' + \frac{uy'}{+\sqrt{a^2 + u^2 + 2\,au\cos yz}}.$$

2. Es werde nun noch die Ebene xy' parallel mit sich selbst so verschoben, dass der Nullpunkt O die Strecke u (OO_1) zurücklegt, und dass sie selbst mit $uy + az + au = 0$ zusammenfällt. Die x-Achse verschiebt sich dabei parallel mit sich selbst in der Ebene xz, die y'-Achse parallel mit sich selbst in der Ebene yz. Bezeichnen wir nun ihre neuen Lagen mit x'' und y'', so ist die Ebene $x''y''$ identisch mit $uy - az + au = 0$, die x''-Achse ist somit die Durchschnittslinie von xz mit dieser Ebene des allgemeinen Kegelschnitts des Büschels und die y''-Achse die Schnittlinie der Ebene yz mit ihr. Somit ergeben sich für die Koordinaten x'', y'', z'' eines Punktes die Gleichungen:

$$x = x'',$$

$$Ay = ay'',$$

$$Az = uy'' + A(z'' + u),$$

wo $$A = +\sqrt{a^2 + u^2 + 2\,au\cos yz}.$$

3. Im Koordinatentrieder $x''y''z''$ mit O_1 als Nullpunkt sind sämtliche Winkel von einem rechten Winkel verschieden. In der Figur 3 ist die Ebene OGL normal zu x'', also LO und LG normal zu x'', $OO_1 = u$, Winkel $OO_1L = x''z = xz$, Winkel $x''y'' = GO_1L$. Mithin ergiebt sich aus dem Dreieck O_1GL

$$\cos x''y'' = \frac{u\cos xz}{A}.$$

Bei $u = o$ wird $x''y'' = \frac{\pi}{2}$, wie es beim Kreis K der Fall ist; bei $xz = \frac{\pi}{2}$ wird auch $x''y'' = \frac{\pi}{2}$, d. h. wenn die Grade g zur Symmetrieebene des Kegels normal ist, so ist für alle Ebenen des Büschels $x''y''$ ein rechter Winkel. Ebenso verhält es sich beim Rotationskegel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 3.

1. Transformiert man mittelst der im vorigen Abschnitt gefundenen Formeln das System für das Kegelschnittbüschel, so folgt:

$$z'' = 0,$$

$$d^2A^2x''^2 + (a^2d^2 - r^2u^2)\,y''^2 - 2r^2u\,(u - d)\,Ay''$$

$$- 2r^2uAy''z'' - A^2r^2(z'' + u - d)^2 = 0.$$

Die letzte Gleichung stellt den Kegel dar in Bezug auf die Ebene des allgemeinen Kegelschnittes des Büschels als xy-Ebene. Man erhält hieraus als Gleichung des Kegelschnittes des Büschels (Kegelschnittbüschels) in seiner Ebene:

$$A^2d^2x''^2 + (a^2d^2 - r^2u^2)\,y''^2 - 2A\,r^2u\,(u - d)\,y'' - A^2r^2\,(u - d)^2 = 0.$$

Zufolge dieser Gleichung entspricht jedem Punkt $+x'' \mid y''$ ein Punkt $-x'' \mid y''$, die Gerade y'' halbiert somit die zu x'' parallelen Sehnen, d. h. die conjugierten Diameter der zu g parallelen Sehnen des Kegelschnittbüschels liegen in dem Achsenschnitt, der den zu g normalen Diameter des Kreises K enthält. Wenn Winkel $x''y'' = \frac{\pi}{2}$ wird (§ 2, 3), so ist y'' eine Achse des Kegelschnittes d. B., und die andere ist zu g parallel. Demnach liegt die Hälfte der Achsen des Kegelschnittbüschels im charakteristischen Achsenschnitt, wenn g hierzu normal ist, und wenn der Kegel ein Rotationskegel ist, in dem zu g normalen Achsenschnitt. Giebt es mithin einen zu g normalen Achsenschnitt, so liegt darin die Hälfte der Achsen des Kegelschnittbüschels, während die andere Hälfte der Achsen d. K. dazu normal ist.

2. Aus der obigen Gleichung folgt weiter, dass von $u = -\frac{ad}{r}$ bis $u = +\frac{ad}{r}$ das Büschel aus Ellipsen besteht, die von zwei Parabeln (den einzigen des Büschels) eingeschlossen werden, die den angegebenen Grenzwerten von u entsprechen. Alle über die Parabeln hinausliegenden Kegelschnitte des Büschels sind Hyperbeln. Unter den Ellipsen befinden sich zwei besondere, bei denen der zu x'' parallele Diameter und der Diameter y'' ein conjugiertes Paar bilden. Sie gehören zu $u = 0$ (Kreis K) und

$$u = -\frac{2\,ad^2\cos yz}{d^2 + r^2} \text{ (Ellipse E, } GK_1'K_2' \text{ Figur 1).}$$

Beide fallen in K zusammen, wenn g zum charakteristischen Achsenschnitt parallel ist und beim Rotationskegel. Die zweite wird ebenfalls zu einem Kreis, wenn g zum charakteristischen Achsenschnitt normal ist, so dass sich für diesen Fall

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2 Kreise unter den Ellipsen befinden. Es giebt auch unter den Hyperbeln des Büschels zwei besondere mit conjugierten Diametern der genannten Art. Sie sind nur dann immer real, wenn $d < r$, sie werden gleichseitig, wenn g zum charakt. Achsenschnitt normal liegt, oder wenn der Kegel Rotationskegel ist. Der Punkt S ist ein singulärer Kegelschnitt des Büschels. Beim Cylinder ($d = \infty$) besteht das Kegelschnittbüschel nur aus Ellipsen, die von dem zu g parallelen Achsenschnitt und dem Achsenschnitt yz in Paaren conjugierter Diameter geschnitten werden. Diese werden zu den Achsen der Ellipsen, wenn g zum charakt. Achsenschnitt des Cylinders normal, oder wenn der Cylinder Rotationscylinder ist. Die beiden besonderen Ellipsen gehören zu $u = 0$ und $u = 2a\cos yz$.

3. Da y'' ein Diameter des Kegelschnitts d. B. ist, so erhält man als Koordinaten für dessen Mittelpunkt O_1:

$$x'' = 0, \qquad y'' = \frac{Ar^2u\,(u-d)}{a^2d^2 - r^2u^2}, \qquad z'' = 0,$$

oder im ursprünglichen System

$$x = 0, \qquad y = \frac{u(u-d)ar^2}{a^2d^2 - r^2u^2}, \qquad z = u + \frac{r^2u^2\,(u-d)}{a^2d^2 - r^2u^2}.$$

Wir verschieben nun die Gerade x'' unter Beibehaltung ihrer Richtung in der Ebene $z'' = 0$, bis sie zum conjugierten Durchmesser zu y'' wird, sodass also der neue Koordinatenanfangspunkt in den Mittelpunkt O_2 des Kegelschnitts zu liegen kommt, und die y''-Achse ungeändert bleibt. Zwischen den neuen Koordinaten x_1, y_1 eines Punktes und den alten x, y, oder auch x'', y'', ergeben sich mithin die Beziehungen:

$$x_1 = x'',$$

$$y_1 = y'' - \frac{Ar^2u\,(u-d)}{a^2d^2 - r^2u^2},$$

$$x_1 = x,$$

$$y_1 = \frac{A\big((a^2d^2 - r^2u^2)\,y - ar^2u\,(u-d)\big)}{a\,(a^2d^2 - r^2u^2)}.$$

Transformiert man nun die Gleichung des K. d. B. mittelst der beiden ersten Gleichungen, so erhält man als Gleichung desselben bezogen auf die beiden conjugierten Diameter $x_1 \parallel x''$ und $y_1 = y''$:

$$A^2Pd^2x_1^2 + P^2y_1^2 - A^2a^2d^2r^2\,(u-d)^2 = 0,$$

wo

$$P = a^2d^2 - r^2u^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Aus den Koordinaten y und z des Mittelpunktes d. K. d. B. (1) erhält man mit Benutzung von $uy - az + au = 0$, der Gleichung der Ebene des Kegelschnittes, die von u freie Gleichung:

$$d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz = 0$$

oder

$$d^2(y + a/_2)^2 - r^2(z - d/_2)^2 - \frac{d^2}{4}(a^2 - r^2) = 0,$$

d. h. die Mittelpunkte des Kegelschnittbüschels liegen auf einer Hyperbel in demjenigen Achsenschnitt des Kegels, der den zu g normalen Diameter K_1K_2 des Kreises des Büschels enthält. (Figur 4, 5, 6.) Die Asymptoten der Hyperbel sind zu den Kanten SK_1 und SK_2 parallel und halbieren bezüglich die Strecken GK_1 und GK_2. Die Parallele zum Diameter K_1K_2 durch die Mitte von SO und die Parallele zur Kegelachse durch die Mitte von GO bilden ein Paar conjugierter Diameter der Hyperbel und werden zu ihren Achsen, wenn g zum charakterist. Achsenschnitt parallel, oder wenn der Kegel Rotationskegel ist. Die Hyperbel wird gleichseitig, wenn die Achse OS gleich dem Radius von K wird. Liegt g ausserhalb des Kegels (Figur 4), so schneidet der zum Diameter K_1K_2 parallele Diameter die Hyperbel real, liegt g innerhalb (Figur 6), dagegen der zur Kegelachse parallele Diameter. Diese beiden Lagen der Curve sind conjugiert. Wenn die Gerade g den Kegel berührt zerfällt die Hyperbel in zwei Geraden. (Figur 5). G, O und S sind Punkte der Hyperbel.

§ 4.

1. Wir fanden als Gleichung des Kegelschnitts des Büschels bezogen auf zwei conjugierte Diameter:

$$\sqrt{(a^2 + u^2 + 2au\cos yz)}\,(a^2d^2 - r^2u^2)\,d^2x_1^2 + (a^2d^2 - r^2u^2)^2y_1^2$$
$$- a^2d^2r^2(u - d)^2(a^2 + u^2 + 2au\cos yz) = 0.$$

Eine Tangente, die im Punkte p, q berührt, hat mithin die Gleichung:

$$\sqrt{a^2 + u^2 + 2au\cos yz}\,(a^2d^2 - r^2u^2)\,d^2px_1 + (a^2d^2 - r^2u^2)^2qy_1$$
$$- a^2d^2r^2(u - d)^2(a^2 + u^2 + 2au\cos yz) = 0.$$

Andererseits hat man für die Kreisasymptoten:

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1\cos x_1y_1 = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Tangente ist nun einer Kreisasymptote parallel, wenn

$$\frac{(a^2 + u^2 + 2au \cos yz)\, d^2 p}{(a^2 d^2 - r^2 u^2)\, q} = - \frac{1}{\cos x_1 y_1 \pm i \sin x_1 y_1} = - \frac{1}{e^{\pm i x_1 y_1}}$$

Somit erhält man für die im Punkte p | q berührende, zu den Kreisasymptoten parallele Tangente:

$$\frac{x_1 - \dfrac{ar(u-d)}{\sqrt{(a^2d^2 - r^2u^2) + (a^2 + u^2 + 2au\cos yz)\, d^2 e^{2ix_1y_1}}}}{y_1 - \dfrac{ar(u-d)(a^2 + u^2 + 2au\cos yz)\, e^{\pm i x_1 y_1}}{(a^2d^2 - r^2u^2)\sqrt{(a^2d^2 - r^2u^2) + (a^2 + u^2 + 2au\cos yz)\, d^2 e^{2ix_1y_1}}}} = - e^{\pm i x_1 y_1}$$

oder in anderer Form:

$$P^2 x_1^2 + (2\cos^2 x_1 y_1 - 1)\left(P^2 y_1^2 - a^2A^2d^2r^2(u-d)^2\right) + 2P^2 \sin x_1 y_1 . x_1 y_1 - a^2r^2(u-d)^2 P$$

$$\pm 2i\left[\left(P^2 y_1^2 - a^2A^2d^2r^2(u-d)^2\right)\cos x_1 y_1 \sin x_1 y_1 + P^2 \sin x_1 y_1 . x_1 y_1\right] = 0,$$

wo

$$P = a^2d^2 - r^2u^2,$$

$$A = \sqrt{a^2 + u^2 + 2au\cos yz}\,.$$

Unter den Brennpunkten einer ebenen Curve versteht man nun die realen Punkte der Tangenten, die zu den Kreisasymptoten parallel sind. Folglich ergeben sich die Brennpunkte des Kegelschnitts d. B. als die realen Punkte der vorstehenden Gleichung. Sie sind daher bestimmt durch das System:

$$P^2 x_1^2 + 2(\cos^2 x_1 y_1)\left(P^2 y_1^2 - a^2A^2d^2r^2(u-d)^2\right) + 2P^2 \sin x_1 y_1 . x_1 y_1 - a^2r^2(u-d^2)P = 0$$

$$\left(P^2 y_1^2 - a^2A^2d^2r^2(u-d)^2\right)\cos x_1 y_1 \sin x_1 y_1 + P^2 \sin x_1 y_1 . x_1 y_1 = 0,$$

oder da $\cos x_1 y_1 = \dfrac{u \cos xz}{A}$

$$A^2P^2x_1^2 + (2u^2\cos^2 xz - A^2)\, P^2 y_1^2 + 2AP^2 u \cos xz . x_1 y_1 - a^2A^2Pr^2(u-d)^2$$

$$- (2u^2\cos^2 xz - A^2)\, a^2r^2(u-d)^2 d^2 A^2 = 0,$$

$$P^2 u \cos xz . y_1^2 + AP^2 x_1 y, - a^2r^2u(u-d)^2 d^2 A^2 \cos xz = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gleichungen stellen zwei Hyperbeln dar, die sich in zwei realen Punkten, den Brennpunkten des Kegelschnittes des Büschels, und in zwei imaginären Punkten schneiden.

2. Transformiert man die Gleichung der ersten Hyperbel auf die Koordinaten x, y und eliminiert zwischen ihr und $uy - az + au = 0$ die Grösse u, so erhält man die Gleichung einer Fläche im ursprünglichen Koordinatensystem:

$$\left(d^2(y+a)^2 - r^2z^2\right)x^2 - r^2\left(d(y+a) - az\right)^2 + 2\left(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz\right)\cos xz\,.\,xz$$

$$+\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)\left(2z^2\cos^2 xz - \left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right)\right) = 0.$$

Die gesamten Brennpunktshyperbeln der ersten Art, die dem Kegelschnittbüschel angehören, bilden diese Fläche 4. Ordnung. Jede Ebene des Büschels schneidet sie in einer Hyperbel der I. Art.

Ebenso findet man aus der Gleichung der Hyperbel II. Art die Fläche des Büschels von Hyperbeln der Brennpunkte.

$$\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)\cos xz\,.\,z + \left(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz\right)x = 0.$$

Die Hyperbeln II. Art liegen somit auf einer Fläche 3. Ordnung.

3. Da die Brennpunkte des Kegelschnittbüschels sowohl der Fläche 3. Ordnung als auch der Fläche 4. Ordnung angehören, so ist ihr Ort die Schnittlinie beider Flächen und durch das System bestimmt:

$$\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)\cos xz\,.\,z + \left(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz\right)x = 0,$$

$$\left(d^2(y+a)^2 - r^2z^2\right)x^2 - r^2\left(d(y+a) - az\right)^2 + 2\left(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz\right)\cos xz\,.\,xz$$

$$+\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)\left(2z^2\cos^2 xz - \left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right)\right) = 0$$

oder

$$K(y,z)\cos xz\,.\,z + H(y,z)\,y = 0,$$

$$P(y,z)\,x^2 + 2H(y,z)\cos xz\,.\,xz - r^2S^2(y,z) + 2\cos^2 xz\,K(y,z)\,z^2 - K(y,z)\,A(y,z) = 0,$$

wo

$$\begin{aligned}
K(y,z) &= d^2y^2 - r^2(z-d)^2,\\
H(y,z) &= d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz,\\
P(y,z) &= d^2(y+a)^2 - r^2z^2,\\
S(y,z) &= d(y+a) - az,\\
A(y,z) &= (y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz.
\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$K(y,z) = 0$ ist die Gleichung der Kanten SK_1 und SK_2 des Kegels; $H(y,z) = 0$ bedeutet die Hyperbel der Centren des Büschels; $P(y,z) = 0$ ist die Gleichung der beiden Diameter der beiden Parabeln d. Büschels; $S(y,z) = 0$ stellt die Gerade GS dar; $A(y,z)$ ist der Abstand eines Punktes P von G.

Eliminiert man zwischen beiden Gleichungen d. Syst. x, so erhält man:

$$\cos^2 xz\, P(y,z)\, K^2(y,z)\, z^2 - A(y,z)\, K(y,z)\, H^2(y,z) - r^2 S^2(y,z)\, H^2(y,z) = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Cylinders 8. Ordnung, dessen Kanten zur x-Achse parallel laufen und den Ort der Brennpunkte auf den Achsenschnitt yz projicieren, oder in der yz-Ebene ist es die Gleichung einer Curve 8. Ordnung, die Gleichung der Projektion der Curve der Brennpunkte des Büschels.

4. Da die Brennpunkte des Kegelschnittbüschels auf den Achsen desselben gelegen sind, so werden wir untersuchen, auf welcher Fläche die Achsen liegen.

Es bezeichne M eine constante Grösse, dann hat der zu dem Durchmesser $y_1 = Mx_1$ conjugierte Durchmesser des Kegelschnittes d. B. die Gleichung:

$$y_1 = -\frac{A^2 d^2}{PM} \cdot x_1$$

Diese beiden Diameter sind normal zu einander, d. h. es sind die Achsen des Kegelschnitts, wenn

$$-\frac{MA^2 d^2}{PM} + 1 = \left(\frac{A^2 P^2}{MP} - M\right) \cos x_1 y_1 .$$

Daraus ergeben sich für M zwei Werte, die Richtungskoefficienten der Achsen des Kegelschnittes, deren Gleichungen mithin lauten:

$$2P \cos xz . y_1 - A\Big[\big((d^2 + r^2)\, u \pm 2ad^2 \cos yz\big)$$

$$\pm \sqrt{\big((d^2 + r^2)\, u \pm 2ad^2 \cos yz\big)^2 + 4Pd^2 \cos^2 xz}\Big]\, x_1 = 0$$

oder da $x_1 = x$ und $y_1 = \frac{A}{Pa}\big(Py - ar^2 u\,(u - d)\big)$ für das Trieder xyz:

$$2 \cos xz \big(Py - ar^2 u\,(u - d)\big) - \Big[\big((d^2 + r^2)\, u + 2ad^2 \cos yz\big)$$

$$\pm \sqrt{\big((d^2 + r^2)\, u + 2ad^2 \cos yz\big)^2 + 4Pd^2 \cos^2 xz}\Big]\, ax = 0$$

$$uy - az + au = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Elimination von u erhält man aus diesem System:

$$d^2 \cos^2 xz \left(d^2 (y + a)^2 - r^2 z^2\right) x^2$$

$$+ (d^2 y^2 - r^2 z^2 + a d^2 y + r^2 dz) \left((d^2 + r^2) z + 2 d^2 (y + a) \cos yz\right) x - \cos xz$$

$$(d^2 y^2 - r^2 z^2 + a d^2 y + r^2 dz)^2 = 0$$

oder

$$d^2 \cos xz P(y,z) x^2 + H(y,z) E(y,z) x - \cos xz H^2(y,z) = 0,$$

wo

$$E(y,z) = (d^2 + r^2) z + 2 d^2 (y + a) \cos yz \text{ und } E(y,z) = 0$$

die Gleichung des in der Ebene yz gelegenen Diameters der besonderen Ellipse E des Büschels $(GK'_1K'_2)$, die neben K vorhanden ist, oder im Raume die Ebene dieser Ellipse bedeutet. Mithin bilden die Achsen des Kegelschnittbüschels eine Regelfläche 4. Ordnung. Sie enthält die Hyperbel der Centren des K.-Büschels als Doppellinie; denn für $x = 0$ folgt $H^2(y,z) = 0$. Die Gestalten der Regelfläche, je nachdem g innerhalb oder ausserhalb des Kegels liegt ($a < r$ und $a > r$), könnte man als conjugierte bezeichnen, entsprechend den Gestalten von $H(y,z) = 0$ für beide Lagen von g. Den Übergang beider bildet die reducibele Regelfläche, die dann vorhanden ist, wenn g den Kegel berührt ($a = r$).

Für $a = r$ zerfällt die Regelfläche in

$$dy - rz + dr = 0$$

und

$$d^2 \cos xz (dy + rz + dr) x^2 - (dy + rz) \left((a^2 + r^2) z + 2 d^2 (y + r) \cos yz\right) x$$

$$- \cos xz (dy + rz)^2 (dy - rz + dr) = 0.$$

d. h. in die Tangentenebene durch g und S und in eine Regelfläche 3. Ordnung mit der Doppelgraden $dy + rz = 0$, die zur Kegelkante SK_2 parallel durch O geht, und auf der die Centren des Kegelschnittbüschels liegen.

Wenn g im charakt. Achsenschnitt liegt ($a = 0$, $yz = \frac{\pi}{2}$), so ist die Fläche gegen diesen Achsenschnitt symmetrisch gelegen, denn in der Gleichung lässt sich $+ y$ mit $- y$ vertauschen. Die Symmetrieebene des Kegels ist also auch Symmetrieebene der Fläche der Achsen des Büschels.

Wenn das Büschel normal zum charakt. Achsenschnitte liegt ($xz = \frac{\pi}{2}$), so ist die Regelfläche 4. Ordnung reducibel und besteht aus $x = 0$, der Ebene des genannten Achsenschnittes, aus $H(y,z) = 0$, einem zu g und der Ebene von K parallelen Cylinder, der von $x = 0$ in der Hyperbel d. Centren d. B. geschnitten wird, und aus der Ebene des zweiten Kreises $E(y,z) = 0$, der sich für diesen Fall ausser K unter den Ellipsen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

befindet. Wenn noch speziell g den Kegel berührt ($a = r$), dann zerfällt der genannte Cylinder in zwei Ebenen, in die schon erwähnte Tangentenebene und in eine zu g und SK_2 parallele Ebene durch den Punkt 0. Beim Rotationskegel bezieht sich das hier für den charakt. Achsenschnitt Gesagte auf den zu g normalen Achsenschnitt des Kegels unter Berücksichtigung, dass $yz = \frac{\pi}{2}$ und E, K identisch sind.

Beim Cylinder liegen die Achsen des Ellipsenbüschels auf einer Regelfläche 3. Ordnung, welche die Achse des Cylinders als Doppelgrade enthält:

$$\cos xz\,(y + a)\,(x^2 - y^2) + \big(z + 2\,(y + a)\cos yz\big)\,xy = 0.$$

Wenn das Büschel normal zum charakt. Achsenschnitt liegt, so zerlegt sich diese Fläche in den genannten Achsenschnitt, in den dazu normalen Achsenschnitt und in die Ebene des Kreises $E(y,z) = 0$ etc.

5. Wir wollen nun noch die Gleichung der Projektion der Curve der Brennpunkte des Kegelschnittbüschels auf die Ebene yz auf einem anderen Wege ableiten.

Aus der Gleichung des Kegelschnittes d. B.:

$$PAd^2x_1^2 + P^2 y_1^2 = a^2d^2r^2\,(u - d)^2\,A^2$$

ergiebt sich für die halben Diameter auf x_1 u. y_1, die mit c_1 und c_2 bezeichnet seien:

$$c_1^2 = \frac{a^2d^2r^2(u - d)^2A^2}{P^2},$$

$$c_2^2 = \frac{a^2r^2(u - d)^2}{P}.$$

Da nun die Summe der Quadrate zweier conjugierter Diameter eine constante Grösse ist, und das durch Verbindung der Endpunkte conjugierter Diameter entstehende Dreieck einen constanten Inhalt hat, so ergiebt sich zur Berechnung der Halbachsen a_1 und b_1 das System:

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{a^2r^2(u - d)^2(A^2d^2 + P)}{P^2},$$

$$a_1 . b_1 = \frac{a^2r^2(u - d)^2d\sqrt{A^2 - u^2\cos^2 xz}}{P\sqrt{P}},$$

sodass

$$a_1^2 = \frac{a^2r^2(u - d)^2}{2P^2}\left(A^2d^2 + P + \sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4Pd^2u^2\cos^2 xz}\right)$$

$$b_1^2 = \frac{a^2r^2(u - d)^2}{2P^2}\left(A^2d^2 + P - \sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4Pd^2u^2\cos^2 xz}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Brennpunkte des Kegelschnittes des Büschels liegen nun auf den Achsen des Kegelschnittes im Abstande $+\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, sind mithin bestimmt durch das System aus den Gleichungen der Achsen und dem Kreis mit dem Radius $\sqrt{a_1^2 - b_1^2}$, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Kegelschnittes zusammenfällt:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{\sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4d^2P \,.\, u^2 \cos^2 xz} - (A^2d^2 - P)}{2Ad^2u \,.\, \cos xz}$$

$$x_1^2 + y_1^2 + 2x_1y_1 \cos x_1y_1 = \frac{a^2r^2(u-d)^2\sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4d^2Pu^2 \cos^2 xz}}{P^2}.$$

Man erhält daraus für die Koordinaten der Brennpunkte:

$$x_1^2 = \frac{a^2r^2(u-d)^2\left(\sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4d^2Pu^2\cos^2 xz} - (A^2d^2 - P)\right)^2}{2P^2\left(\sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4d^2Pu^2\cos^2 xz} + 2d^2u^2\cos^2 xz - (A^2d^2 - P)\right)},$$

$$y_1^2 = \frac{2a^2d^4r^2u^2(u-d)^2\cos^2 xz A^2}{P^2\left(\sqrt{(A^2d^2 - P)^2 + 4d^2Pu^2\cos^2 xz} + 2d^2u^2\cos^2 xz - (A^2d^2 - P)\right)}.$$

6. Die Koordinaten oder Brennpunkte des Kegelschnittes d. B. können auch erhalten werden, indem man je eine Gleichung einer Hyperbel der Brennpunkte (S. 10) mit den Gleichungen der Achsen combiniert. Auf diese Weise erhält man die beiden Systeme:

$$\text{I.} \left| \begin{array}{l} P^2u\cos xz y_1^2 + AP^2x_1y_1 - a^2r^2u(u-d)^2d^2A^2\cos xz = 0, \\ 2P\cos xz y_1 - A\Big(\big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz\big) \pm R\Big)x_1 = 0, \end{array} \right|$$

und

$$\text{II.} \left| \begin{array}{c} A^2P^2x_1^2 + (2u^2\cos^2 xz - A^2)P^2y_1^2 + 2AP^2u\cos xz \,.\, x_1y_1 \\ - a^2A^2Pr^2(u-d)^2 - (2u^2\cos^2 xz - A^2)a^2d^2r^2(u-d)^2A^2 = 0, \\ 2P\cos xz \,.\, y_1 - A\Big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz) \pm R\Big)x_1 = 0, \end{array} \right|$$

wo
$$R = \sqrt{\big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz\big)^2 + 4Pd^2\cos^2 xz}.$$

Daraus ergeben sich als Koordinaten der Brennpunkte:

$$x_1^2 = \frac{a^2r^2(u-d)^2\Big(\pm R - \big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz\big)\Big)^2}{2P^2\Big(2d^2u\cos^2 xz \pm R - \big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz\big)\Big)},$$

$$y_1^2 = \frac{2a^2r^2u(u-d)^2d^4\cos^2 xz A}{P^2\Big(2d^2u\cos^2 xz \pm R - \big((d^2+r^2)u + 2ad^2\cos yz\big)\Big)}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hierbei entspricht $+R$ der I. Achse und $-R$ der II. Achse des Kegelschnittes. Es ist von dem Wert von u abhängig, ob bei dem Kegelschnitt die realen Brennpunkte auf der I. oder II. Achse liegen.

Diese Werte der Koordinaten der Brennpunkte gehen aus den im vorigen Abschnitte gefundenen hervor, wenn man für P und A ihre Werte einsetzt und u streicht. Setzt man nun $y_1 = \frac{A}{aP}\left(Py - ar^2u(u-d)\right)$ in der Gleichung für y_1^2, quadriert, damit u nur rational vorkommt und eliminiert dann mittelst der Gleichung $uy - az + au = 0$ diese Grösse, so erhält man eine Gleichung zwischen y und z, die die Projektion der Curven der Brennpunkte auf die Ebene yz darstellt, nämlich

$$H^3(y,z) - d^2\cos^2 xz\, K^2(y,z)\, P(y,z) z^2 + E(y,z)\, H^2(y,z)\, K(y,z)\, z = 0.$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von derjenigen des Abschnitt 1 nur durch die Form.

§ 5.

1. Wir fanden, dass die Brennpunkte des Kegelschnittbüschels auf den drei folgenden Flächen liegen:

1) $\cos xz \,.\, K(y,z)\, z + H(y,z) x = 0,$

2) $P(y,z)x^2 + 2\cos xz\, H(y,z) xz - r^2 S^2(y,z) + 2\cos^2 xz\, K(y,z) z^2 - K(y,z)\, A(y,z) = 0,$

3) $d^2 \cos xz\, P(y,z)\, x^2 + E(y,z)\, H(y,z) x - \cos xz\, H^2(y,z) = 0.$

Der Ort der Brennpunkte des Büschels ist mithin eine Curve doppelter Krümmung, die sich ergiebt als Schnittlinie je zweier dieser Flächen und daher durch je zwei der obigen Gleichungen bestimmt ist. Sie werde im Folgenden kurz als „Fokale" bezeichnet.

Durch Elimination von x aus je zwei der drei Gleichungen erhält man die Projektion der Fokale auf die Ebene yz, eine Curve 8. Ordnung, oder die Gleichung eines zur x-Achse parallelen Cylinders, der die Fokale auf die yz-Ebene projiciert. Zwischen Gleichung 1 und 2 wurde die Elimination früher schon ausgeführt. Aus 1 und 3 erhält man die Gleichung der Projektion in der Form, in der sie aus den Koordinaten der Brennpunkte abgeleitet wurde, die sich auf zwei verschiedenen Wegen ergaben. Die 3 Flächen haben verschiedene Gestalt, je nachdem $a \gtreqless r$ oder $= 0$ und Winkel $xz = \frac{\pi}{2}$ ist oder nicht. Für die 3te Fläche wurde das wichtigste früher angeführt. Aus der 1. u. 3. Gleichung folgt, dass bei $xz = \frac{\pi}{2}$ die Brennpunkte auf $x = 0$ und $H(y_1 z) = 0$ zu suchen sind, d. h.: Wenn das Kegelschnittbüschel zu dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

charakteristischen Achsenschnitt des Kegels oder zu irgend einem Achsenschnitt des Rotationskegels normal ist, so liegen die Brennpunkte in diesem Achsenschnitt und auf einem Cylinder, dessen Kanten dazu normal sind und durch die Punkte der Hyperbel der Mittelpunkte des Büschels gehen.*)

2. Ordnet man die Gleichung der Projektion der Fokale auf die Ebene yz teilweise nach Formen von $(z - d)$ und y, so erhält man:

$$\cos^2 xz\left(d^2(y+a)^2 - r^2z^2\right)\left[d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right]^2 z^2$$
$$-\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right)\left[\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)^2\left(d^2y^2 + ad^2y - r^2(z-d)^2\right.\right.$$
$$\left.\left.+ r^2d(z-d)^2\right)^2\right] - r^2\left[\left(dy - a(z-d)\right)^2\left(d^2y^2 + ad^2y - r^2(z-d)^2 + r^2d(z-d)\right)^2\right] = 0.$$

Diese Gleichung besteht aus 3 Produkten, jedes enthält in einer eckigen Klammer eine Funktion von $(z - d)$ und y, und es kommen diese Grössen nicht unter 4. Potenz vor. Daraus folgt aber, dass eine Form niedriger als 4. Grads von $(z - d)$ und y nicht in der Gleichung auftreten kann, wenn sie vollständig nach Formen dieser Grössen geordnet wird. Der Punkt S, Centrum des Kegels, ist somit ein 4facher Punkt der Projektion. Er liegt jedoch auf der Fokale und ist auch auf ihr ein 4facher Punkt und zwar ein Knoten.

Die Gleichung der Projektion sei ferner teilweise nach Formen von $(y + a)$ und z geordnet:

$$-\cos^2 xz\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)^2\left[z^2\left(d^2(y+a)^2 - r^2z^2\right)\right]$$
$$+ r^2\left[\left(d(y+a) - az\right)^2\left(d^2(y+a)^2 - ad^2(y+a) - r^2z^2 + r^2dz\right)^2\right]$$
$$+\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right)\left[\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right)\left(d^2(y+a)^2 - ad^2(y+a)\right.\right.$$
$$\left.\left.- r^2z^2 + r^2dz\right)^2\right] = 0.$$

Der Punkt G ist mithin ebenfalls ein 4facher Punkt der Projektion. Er ist indessen auch ein 4facher Punkt der Fokale, aber isoliert, wenn g ausserhalb des Kegels liegt und nicht berührt $(a > r)$ und ein Knoten, wenn g innerhalb des Kegels liegt $(a < r)$.

---

*) Da die Untersuchung der Flächen und der Fokale mehr Raum beanspruchen würde als hier zur Verfügung steht, so müssen wir uns damit begnügen einige der wichtigsten Eigenschaften mittelst einer Projektion herzuleiten, um den speziellen Fall, wo das Büschel zu einem Achsenschnitt normal und die Fokale reducibel und eben ist, nicht übergehen zu müssen. Diese Untersuchung und diejenige der ebenen Fokalen wird den Gegenstand einer späteren Abhandlung bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Punkt O (0,0) ist ein Knoten der Fokale.

Die Fokale hat verschiedene Gestalten, je nachdem g ausserhalb des Kegels liegt ($a > r$), den Kegel berührt ($a = r$) oder denselben schneidet ($a < r$). Wenn g im charakteristischen Achsenschnitt liegt, ($a = 0$, $yz = \frac{\pi}{2}$) ist die Fokale dazu symmetrisch.

3. Wenn g den Kegel berührt, so ist die Fokale reducibel. Ihre Projektion zerfällt in:

$$(dy - rz + dr)^3 = 0$$

und

$$r^2(dy - rz + dr)(dy + rz)^2 - \cos^2 xz\,(dy + rz + dr)(dy + rz - dr)^2 z^2$$

$$+ \left((y + r)^2 + z^2 + 2\,(y + r)\,z \cos yz\right)(dy + rz - dr)\,(dy + rz)^2 = 0,$$

d. h. in die von g geschnittene Kegelkante SK_1 und in eine Curve 5. Ordnung. Die Flächen der Fokale sind in diesem Falle ebenfalls reducibel, und es besteht letztere daher aus einer Raumcurve 5. Ordnung. Sie enthält den Punkt O als Knoten, dagegen G und S als einfache Punkte. Der Punkt O der Projektion hat die beiden Tangenten:

$$dy + rz - d \cos xz \,.\, z = 0, \quad dy + rz + d \cos xz \,.\, z = 0.$$

Die Kante SK_1 berührt die Curve 5. Ordnung im Punkte $G = K_1$ und schneidet sie in S. Die Kante SK_2 ($dy + rz - dr = 0$) ist Asymptote der Curve und berührt in einem dreifachen unendlich fernen Punkt.

§ 6.

1. Es sollen nun die Fälle untersucht werden, wo das Kegelschnittbüschel zu einem Achsenschnitt des Kegels normal liegt.

Wenn g zum charakteristischen Achsenschnitt des Kegels normal ist ($xz = \frac{\pi}{2}$), so ist die Fokale reducibel und liegt in der Ebene $x = 0$ und auf dem Cylinder $H(y,z) = 0$, d. h. in dem charakteristischen Achsenschnitt und dem dazu normalen Cylinder $H(y,z) = 0$, wie schon oben bemerkt wurde. Die Projektion der Fokale auf die yz-Ebene ist somit identisch mit einem Teil der Fokale selbst. Denn die Gleichungen der Flächen der Fokale nehmen die Form an:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $$x(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz) = 0,$$

2) $$\left((y + a^2) + z^2 + 2(y + a)z\cos yz\right)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2\left(d(y + a) - az\right)^2 - \left(d^2(y + a)^2 - r^2z^2\right)x^2 = 0,$$

3) $$x\left((d^2 + r^2)z + 2d^2(y + a)\cos yz\right)\left(d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz\right) = 0.$$

Folglich ergiebt sich die Gleichung des Teils der Fokale, der in der Ebene $x = 0$ liegt, indem man in Gleichung 2 den Wert $x = 0$ einsetzt, nämlich:

$$\left((y + a)^2 + z^2 + 2(y + a)z\cos yz\right)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2\left(d(y + a) - az\right)^2 = 0$$

und für den übrigen Teil der Fokale das System:

$$d^2y^2 - r^2z^2 + ad^2y + r^2dz = 0,$$

$$\left((y + a)^2 + z^2 + 2(y + a)z\cos yz\right)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2\left(d(y + a) - az\right)^2 - \left(d^2(y + a)^2 - r^2z^2\right)x^2 = 0.$$

Die in 3 auftretende Grösse $(d^2 + r^2)z + 2d^2(y + a)\cos yz$ gleich 0 gesetzt, stellt die Ellipse E dar, die hier zum Kreis wird und keinen realen Brennpunkt hat, daher ausser Betracht bleibt. Die Fokale besteht mithin aus einer ebenen Curve 4. Ordnung und einer Raumcurve 2. Ordnung.

2. Die ebene Fokale 4. Ordnung hat für $a \gtreqless r$ und für $a = 0$ verschiedene Gestalten: Figur 7 bei $a > r$, g liegt ausserhalb des Kegels; Figur 8 bei $a = r$, g berührt den Kegel; Figur 9 bei $a < r$, g schneidet den Kegel; Figur 10 bei $a = 0$, g geht durch die Achse des Kegels. Wenn $a = r$, so ist die Fokale reducibel und besteht aus der Kegelkante SK_1:

$$dy - rz + dr = 0$$

und aus einer Curve 3. Ordnung:

$$\left((y + r)^2 + z^2 + 2(y + r)z\cos yz\right)(dy + rz - dr) + r^2(dy - rz + dr) = 0.$$

Wenn $a = 0$, so hat die Curve 4. Ordnung die Gleichung:

$$(y^2 + z^2 + 2yz\cos zy)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2d^2y^2 = 0.$$

Die Asymptoten der Curve sind die Kegelkanten SK_1 u. SK_2, $dy - rz + dr = 0$ und $dy + rz - dr = 0$; die Curve 3. Ordnung hat nur eine Asymptote SK_2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Punkt S ist ein Knoten der Curve. Die Gleichung kann teilweise nach Formen von $z - d$ u. y geordnet die Form annehmen:

$$\left[d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right]\left(y^2 + a^2 + 2ay + (z-d)^2 - 2d(z-d) + d^2 + 2(y+a)(z-d)\cos yz\right.$$

$$\left. + 2d\cos yz\,.\,y + 2ad\cos yz\right) + r^2\left[\left(dy - a(z-d)\right)^2\right] = 0.$$

Die eckigen Klammern enthalten y und $z - d$ nur im 2. Grad. Somit hat S die Tangenten:

$$(a^2 + d^2 + 2ad\cos yz)\left(d^2y^2 - r^2(z-d)^2\right) + r^2\left(dy - a(z-d)\right)^2 = 0.$$

Der Punkt G ist ebenfalls ein Doppelpunkt. Ordnet man teilweise die Gleichung nach Formen von $y + a$ und z, so folgt:

$$\left[(y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right]\left(d^2(y+a)^2 - 2ad^2(y+a) + a^2d^2 - r^2z^2 + 2rdz - r^2d^2\right)$$

$$+ r^2\left[\left(d(y+a) - az\right)^2\right] = 0.$$

Mithin hat G die Tangenten:

$$r^2\left(d(y+a) - az\right)^2 + (a^2 - r^2)d^2\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right) = 0.$$

Bei $a > r$ sind diese Tangenten imaginär, G ist dann ein isolierter Punkt, bei $a < r$ sind sie real, G ist ein Knoten.

Für die Curve 3. Ordnung sind G und S nur einfache Punkte.

Bei $a = 0$ hat $G = 0$ die Tangenten:

$$z = 0,\ z + 2y\cos yz = 0 \ (TT_1 \text{ Fig } 10).$$

$z = 0$ ist Inflexionstangente, sie berührt in O 4punktig. $z + 2y\cos yz = 0$ berührt bloss 3punktig. Der entsprechende Zweig hat daher in O keine Inflexion. Der Diameter $z = 0$ des ersten Kreises und der Diameter $K'_1K'_2$ des zweiten Kreises E berühren die Curve in den Punkten O u. O_1, ihren Mittelpunkten, und schneiden sie in G. Eine Gerade des Punktes G, die in dem Winkel OGO_1 liegt, schneidet die Curve ausser in G in zwei imaginären Punkten. Jede dieser Geraden ist aber die Achse einer Ellipse. Folglich ist es die kleine Achse der Ellipse, und die Brennpunkte aller Ellipsen des Büschels, die von den beiden Kreisen K und E eingeschlossen werden, liegen auf dem Cylinder $H(y,z) = 0$ und ihre Projektion auf die Ebene yz ist die Hyperbel der Centren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Büschels. Sie liegen auf einer Raumcurve, deren Gleichungen im Abschnitt 1 angegeben wurden. Streng genommen erfüllen sie nur einen Bogen derselben, dessen Projektion auf die Ebene yz der Bogen OO_1 ist. Wenn g den Kegel berührt, wird diese Raumcurve zum Kreis. Nach Ausscheidung der Kante $dy - rz + dr = 0$ aus beiden Gleichungen, lautet das System von Gleichungen für diesen Teil der Fokale:

$$dy + rz = 0,$$

$$\left((y + r)^2 + z^2 + 2(y + r) z \cos yz\right)(dy + rz - dr)$$

$$+ r^2 (dy - rz + dr) + (dy + rz + dr) x^2 = 0.$$

Daraus folgt für die Projektion auf die Ebene xz:

$$d^2x^2 + (d^2 + r^2 - 2dr \cos yz) z^2 + 2rd^2 \cos yz . z = 0.$$

Es werde nun die Ebene $dy + rz = 0$ zur xz-Ebene gemacht, dann bestehen zwischen den Koordinaten x, z und x′, z′ die Beziehungen:

$$x = x', \; z = \frac{dz'}{d^2 + r^2 - 2dr \cos yz}.$$

Mittelst dieser Substitutionen erhält man aus der Projektion auf die Ebene xz die Gleichung des Kegelschnittes in seiner Ebene:

$$\sqrt{d^2 + r^2 - 2dr \cos yz}\,(x'^2 + z'^2) + 2dr \cos yz . z' = 0.$$

Da Winkel $x'z' = \frac{\pi}{2}$, so ist dies die Gleichung eines Kreises, der die Strecke OO_1 zwischen den Centren der beiden Kreise des Büschels zum Durchmesser hat.

3. Wenn der Kegel ein Rotationskegel ist ($xz = \frac{\pi}{2}$, $yz = \frac{\pi}{2}$), so fallen die beiden Kreise O und E zusammen, und die Brennpunkte sämtlicher Kegelschnitte des Büschels liegen in dem zu g normalen Achsenschnitt auf einer ebenen Curve 4. Ordnung, deren Gleichung lautet:

$$\left((y + a)^2 + z^2\right)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2\left(dy - a(z - d)\right)^2 = 0.$$

Dass hier auf dem Cylinder $H(y, z) = 0$ keine realen Brennpunkte liegen, folgt daraus, dass die auf ihm liegende Achse $y_1 = 0$ des Kegelschnittes des Büschels mit

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Hyperbel, auf der die Brennpunkte desselben liegen, keinen realen Punkt gemein hat, wie deren Gleichung ergiebt, die bei $xz = yz = \frac{\pi}{2}$ die Form hat:

$$x_1^2 - y_1^2 + \frac{(d^2 + r^2)\, a^2 r^2 u^2\, (u - d)^2}{P^2} = 0.$$

Die ebene Curve 4. Ordnung hat wieder verschiedene Gestalt bei $a > r$, Fig. 11; $a = r$, Fig. 12; $a < r$, Fig. 13; $a = 0$, Fig. 14. Bei $a = r$ lautet die Gleichung der Curve 3. Ordnung:

$$\left((y + r)^2 + z^2\right)(dy + rz - dr) + r^2 (dy - rz + dr) = 0.$$

Der Punkt S gehört dieser Curve als einfacher Punkt an, der Curve 4. Ordnung als Knoten. G ist ein isolierter (conjugierter) Punkt der Curve, wenn er ausserhalb des Kegels liegt, ein einfacher Punkt der Curve 3. Ordnung, wenn er auf den Kegel fällt, ein Knoten, wenn er innerhalb des Kegels liegt und ein Inflexionsdoppelpunkt, wenn er mit dem Centrum von K zusammenfällt. Die beiden 4punktig berührenden Tangenten fallen zusammen in den auf g normalen Diameter von K, die Gerade y. Für $a = 0$ lautet die Gleichung der Curve 4. Ordnung:

$$(y^2 + z^2)\left(d^2y^2 - r^2(z - d)^2\right) + r^2d^2y^2 = 0.$$

In diesem Falle nimmt die Fokale die regelmässigste Gestalt an, sie wird symmetrisch zur Kegelachse ($y = 0$). Beim Rotationskegel hat die Fokale auch das Centrum O von K zum Knoten. Die Gleichung der Fokale lautet nach Formen geordnet von y u. z:

$$d^2y^4 + (d^2 - r^2)y^2z^2 - r^2z^4 + 2ad^2y^3 - 2ar^2yz^2 + 2r^2dy^2z + 2r^2dz^3 + a^2d^2y^2$$
$$+ 2adr^2yz - r^2d^2z^2 = 0.$$

Folglich hat O die beiden Tangenten:

$$a^2d^2y^2 + 2adr^2yz - r^2d^2z^2 = 0.$$

Die Gleichung der Fokale 3. Ordnung in der Form:

$$dy^3 + ry^2z + dyz^2 + rz^3 + rdy^2 + 2r^2yz - drz^2 = 0$$

ergiebt für O die Tangenten:

$$dy^2 + 2ryz - dz^2 = 0.$$

Die Asymptoten der Fokale sind die Kegelkanten SK_1 und SK_2, bei der Fokale 3. Ordnung bloss SK_2 u. s. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 7.

1. Beim elliptischen Cylinder ($d = \infty$), liegt die Fokale des Ellipsenbüschels auf folgenden Flächen:

$$1)\ \cos xz(y^2 - r^2)z + (y + a)xy = 0,$$

$$2)\ (x^2 - r^2)(y + a)^2 - (y^2 - r^2)\big((y + a)^2 + z^2 + 2(y + a)z\cos yz\big) + 2\cos^2 xz(y^2 - r^2)z$$
$$+ 4\cos xz(y + a)xyz = 0,$$

$$3)\ \cos xz\,(y + a)^2\,(x^2 + y^2) - \big(z + 2(y + a)\cos yz\big).xy = 0,$$

und auf den Cylinder 6. Ordnung:

$$4)\ (y + a)^2 y^4 + z\big(z + 2\,(y + a)\cos yz\big)\,(y^2 - r^2)\,y^2 - \cos^2 xz\,.\,z^2\,(y^2 - r^2)^2 = 0,$$

der zugleich die Projektion der Fokale des Cylinders auf die Ebene yz darstellt.

Gleichung 1 und 2 sind die aus den Brennpunktshyperbeln des Kegelschnittes d. B. hervorgegangenen Flächen; Gleichung 3 ist die Fläche der Achsen des Büschels.

Auch die Cylinder-Fokale hat wie die Kegel-Fokale verschiedene Gestalt, je nachdem g ausserhalb, innerhalb des Cylinders, speziell in einem Achsenschnitt liegt oder den Kegel berührt. G und O sind Knoten der Curve, liegt jedoch G ausserhalb des Cylinders, so ist er ein isolierter Punkt.

Die Projektion der Fokale hat einen 4fachen unendlich fernen Punkt; denn jede Gerade $y = \text{const.}$ hat 4 unendlich ferne Punkte mit ihr gemein. Die beiden Geraden $y^2 - r^2 = 0$ sind Asymptoten, es sind die Cylinderkanten SK_1 und SK_2; sie haben 6 unendlich ferne Punkte mit ihr gemein. G ist ein Doppelpunkt der Curve mit imaginären Tangenten, wenn er ausserhalb des Cylinders gelegen ist. O ist ein Knoten mit den Tangenten $z^2 = 0$; sie haben ausser G den Punkt O 4fach mit der Curve gemein, der mithin ein Inflexionsknoten sein muss etc. Wenn g zum charakt. Achsenschnitt parallel wird ($yz = \frac{\pi}{2}$), so ist die Linie zur y-Achse symmetrisch.

2. Wenn g den Cylinder berührt, so hat man nach Ausscheidung von $y + r = 0$, der Cylinderkante SK_1, für die Cylinderfokale das System:

$$1)\ \cos xz(y + r)z + xy = 0,$$

$$2)\ (x^2 - r^2)\,(y + r) - (y - r)\,\big((y + r)^2 + z^2 + 2\,(y + r)z\cos yz\big)$$
$$+ 2\cos^2 xz\,(y - r)z + 4\cos xz\,.\,xyz = 0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$3)\ \cos xz\,(x^2+y^2)\,(y+r) - \big(z + 2\,(y+r)\cos yz\big)\,.\,xy = 0,$$

und für die Projektion auf die Ebene yz:

$$4)\ (y+r)\,y^4 + z\,\big(z + 2\,(y+r)\cos yz\big)\,(y-r)\,y^2 - \cos^2 xz(y-r)^2(y+r)z^2 = 0.$$

In diesem Falle liegen mithin die Brennpunkte des Ellipsenbüschels auf einer Raumcurve 5. Ordnung. Sie enthält den Punkt G als einfachen Punkt, O als Inflexionsdoppelpunkt. Die Projektion hat die Asymptote $y - r = 0$, die Cylinderkante SK_2. Jede Gerade $y = \text{const.}$ hat mit der Projektion 3 unendlich ferne Punkte gemein, folglich liegt auf der Projektion ein 3facher, unendlich ferner Punkt. Sie wird symmetrisch zur y-Achse, wenn $yz = \frac{\pi}{2}$ d. h. g zum charakterist. Achsenschnitt parallel ist.

Gehört g einem Achsenschnitt des Kegels an ($a = 0$), so hat man für die Cylinderfokale:

$$1)\ \cos xz\,(y^2 - r^2)\,z + xy^2 = 0,$$

$$2)\ y^2\,(x^2 - r^2) - (y^2 - r^2)\,(y^2 + z^2 + 2yz\cos yz)$$
$$+ 2\cos^2 xz\,(y^2 - r^2)\,z + 4\cos xz\,.\,xy^2 z = 0,$$

$$3)\ \cos xz\,(x^2 + y^2)\,y - xy\,(z + 2y\cos yz) = 0,$$

und für die Projektion:

$$4)\ y^6 + z\,(z + 2y\cos yz)\,(y^2 - r^2)\,y^2 - \cos^2 xz\,.\,z^2\,(y^2 - r^2)^2 = 0.$$

Somit ist bei dieser Lage von g die Fokale am regelmässigsten gestaltet. Zufolge der Gleichung entspricht jeden Punkt $+y, -z$ ein Punkt $-y, -z$ und jedem Punkt $+y, -z$ ein Punkt $-y, +z$; d. h. die Curve ist ein Koordinatenwinkel $(+y)(+z)$ genau so beschaffen wie im 3. Koordinatenwinkel $(-y)(-z)$, und im 2. Koordinatenwinkel $(-y)(+z)$ wie im 4. $(+y)(-z)$. Wenn $a = 0$ und $yz = \frac{\pi}{2}$, g dem charakt. Achsenschnitt angehört, dann ist sowohl die Gerade z eine Symmetrieachse der Cylinderfokale, die in diesem Falle die regelmässigste Gestalt annimmt, die sie annehmen kann etc.

3. Wenn das Ellipsenbüschel zum charakteristischen Achsenschnitt des Cylinders normal liegt ($xz = \frac{\pi}{2}$), so erhält man für die Cylinderfokale:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1) $$xy.(y+a) = 0,$$

2) $$(x^2 - r^2)(y+a)^2 - (y^2 - r^2\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right) = 0,$$

3) $$x.y\left(z + 2(y+a)\cos yz\right) = 0.$$

Die Ebene $y + a = 0$ begrenzt das Ellipsenbüschel, sie schneidet die Cylinder im Unendlichen. $z + 2(y+a)\cos yz = 0$ ist die Ebene der besonderen Ellipse E, die hier zum Kreis wird. Wie aus den Gleichungen 1, 2, 3 folgt, ist die Fokale reducibel; der eine Teil derselben liegt in der Ebene $x = 0$, dem charakterist. Achsenschnitt, der andere Teil in dem dazu normalen Achsenschnitt $y = 0$.

Setzt man in der 2. Gleichung $x = 0$, so folgt für den im charakt. Achsenschnitt gelegenen Teil der Fokale:

$$r^2(y+a)^2 + (y^2 - r^2)\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right) = 0.$$

Dies ist eine Curve 4. Ordnung, die wieder verschieden gestaltet ist bei speziellen Lagen von g. Figur 15 ist die Fokale, wenn g ausserhalb des Cylinders liegt, Figur 16, wenn g den Cylinder berührt, Figur 17, wenn g innerhalb liegt, Figur 18, wenn g einen Achsenschnitt des Cylinders angehört. Berührt g $(a = 0)$, so besteht die Curve aus der Cylinderkante $y + r = 0$ und einer Curve 3. Ordnung:

$$y^2(y+r) + z\left(z + 2(y+r)\cos yz\right)(y - r) = 0.$$

Liegt g im Achsenschnitt, so hat die Fokale die Gleichung:

$$y^4 + (z^2 + 2yz.\cos yz)(y^2 + r^2) = 0.$$

Schreibt man die allgemeine Gleichung der Curve 4. Ordnung als Funktion von $(y + a)$ und z, so lautet sie:

$$r^2(y+a)^2 + \left((y+a)^2 - 2a(y+a) + a^2 - r^2\right)\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right) = 0,$$

daraus geht hervor, dass g ein Doppelpunkt ist mit den beiden Tangenten:

$$r^2(y+a)^2 + (a^2 - r^2)\left((y+a)^2 + z^2 + 2(y+a)z\cos yz\right) = 0,$$

die bei $a > r$ imaginär sind. Demnach ist G isoliert bei $a > r$, ein einfacher Punkt der Curve 3. Ordnung bei $a = r$, ein Knoten bei $a < r$ und ein Inflexionsdoppelpunkt bei $a = 0$. Die beiden Inflexionstangenten sind im letzten Falle $z = 0$ und $z + 2(y+a)\cos yz = 0$, das sind die Diameter der beiden Kreise des Büschels, GK_1 und GK'_1. In den anderen 3 Fällen haben sie ausser G die Punkte O und O_1, ihre

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Centren, als Berührungspunkte mit der Curve gemein. Die Cylinderkanten SK_1 und SK_2 sind die Asymptoten der Linie, jede dazu parallele Gerade schneidet die letztere in zwei unendlich fernen Punkten, in dem unendlich fernen Doppelpunkt derselben. Die Curve 3. Ordnung hat nur die Asymptote SK_2 und einen einfachen unendlich fernen Punkt. Die zur Cylinderachse normale Gerade durch G ist eine Symmetrieachse der Fokale in den 4 aufgeführten Gestalten. Sie schneidet die Cylinderachse im Punkt M, sodass $MO = MO_1$. Wir machen nun die Gerade GM zur x-Achse und M zum Nullpunkt eines neuen Koordinatensystems. Dann bestehen zwischen den Koordinaten y', z' im neuen System und y, z die Beziehungen:

$$y = \frac{y'}{\sin yz},$$

$$z = z' - \frac{a \cos yz}{a \sin yz}(a \sin yz + y'),$$

oder wenn $a = 0$,

$$z = z' - \operatorname{tg} yz . y'.$$

Transformiert man die Gleichung der Fokale für das neue Koordinatensystem, so lautet sie:

$$ay'^2 (y' + b)^2 + \left(b^2 z'^2 - (a^2 - b^2)(y' + b)^2\right)(y'^2 - c^2) = 0,$$

wo $b = GM$ und $c =$ dem Abstand des Punktes M von der Cylinderkante SK_1 oder SK_2. Da sich $+z'$ mit $-z'$ in der Gleichung vertauschen lässt, so ist $z' = 0$ oder GM eine Symmetrieachse der Curve, wie oben behauptet wurde. Sie ist es auch für die Curve 3. Ordnung bei $a = r$:

$$r^2 y'^2 (y' + c) + \left(c^2 z'^2 - (r^2 - c^2)(y' + c)^2\right)(y' - c) = 0.$$

Bei $a = 0$, wird ausser GM noch die Cylinderachse zur Symmetrieachse der Fokale; denn alsdann hat sie die Gleichung:

$$r^2 y'^4 + \left(c^2 z'^2 - (r^2 - c^2) y'^2\right)(y'^2 - c^2) = 0,$$

in der $+y'$ mit $-y'$ vertauschbar ist.

Der zweite Teil der reducibelen Fokale, der in dem zum charakteristischen Achsenschnitt normalen Achsenschnitt liegt, ergiebt sich, wenn oben in Gleichung 2 die Grösse $y = 0$ gesetzt wird:

$$a^2 x^2 + r^2 z^2 + 2ar^2 \cos yz = 0.$$

Mithin ist dieser Teil der Fokale eine Ellipse, und es liegen auf ihr die Brennpunkte derjenigen Ellipsen des Büschels, die von den beiden Kreisen des Büschels eingeschlossen werden. OO_1 ist die grosse Achse der Ellipse, wenn g ausserhalb des

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Cylinders liegt, die kleine Achse derselben, wenn g innerhalb liegt. Die Ellipse wird zum Kreis mit dem Durchmesser OO_1, wenn g den Cylinder berührt, sie ist reducibel und identisch mit g, wenn g im Achsenschnitt liegt, die in diesem Falle die gemeinschaftliche grosse Achse aller Ellipsen ist, die von den beiden Kreisen des Büschels eingeschlossen werden.

4. Wenn der Cylinder zum Rotationscylinder wird ($xz = \frac{\pi}{2}$, $yz = \frac{\pi}{2}$), so ist bei jeder Lage von g in der Ebene von K ein zu g normaler Achsenschnitt vorhanden, auf den sich dann alles bezieht, was im vorigen Abschnitt für den charakt. Achsenschnitt ausgesprochen wurde. Da hier die beiden Kreise des Ellipsenbüschels in den einen Kreis K zusammenfallen, so wird der zweite Teil der Fokale imaginär, und es besteht dieselbe nur noch aus dem in der Ebene $x = 0$ gelegenen Teil, der die Gleichung hat:

$$y^2(y + a)^2 + z^2(y^2 - r^2) = 0.$$

Hier sind ebenfalls wieder die 4 Hauptlagen von g zu unterscheiden, für die die Curve verschiedene Gestalten hat: bei $a > r$, Figur 19; bei $a = r$, Fig. 20; bei $a < r$ Figur 21; bei $a = 0$, Figur 22. Bei $a = r$, besteht sie aus der Cylinderkante durch G und aus der Curve 3. Ordnung:

$$y^2(y + r) + z^2(y - r) = 0.$$

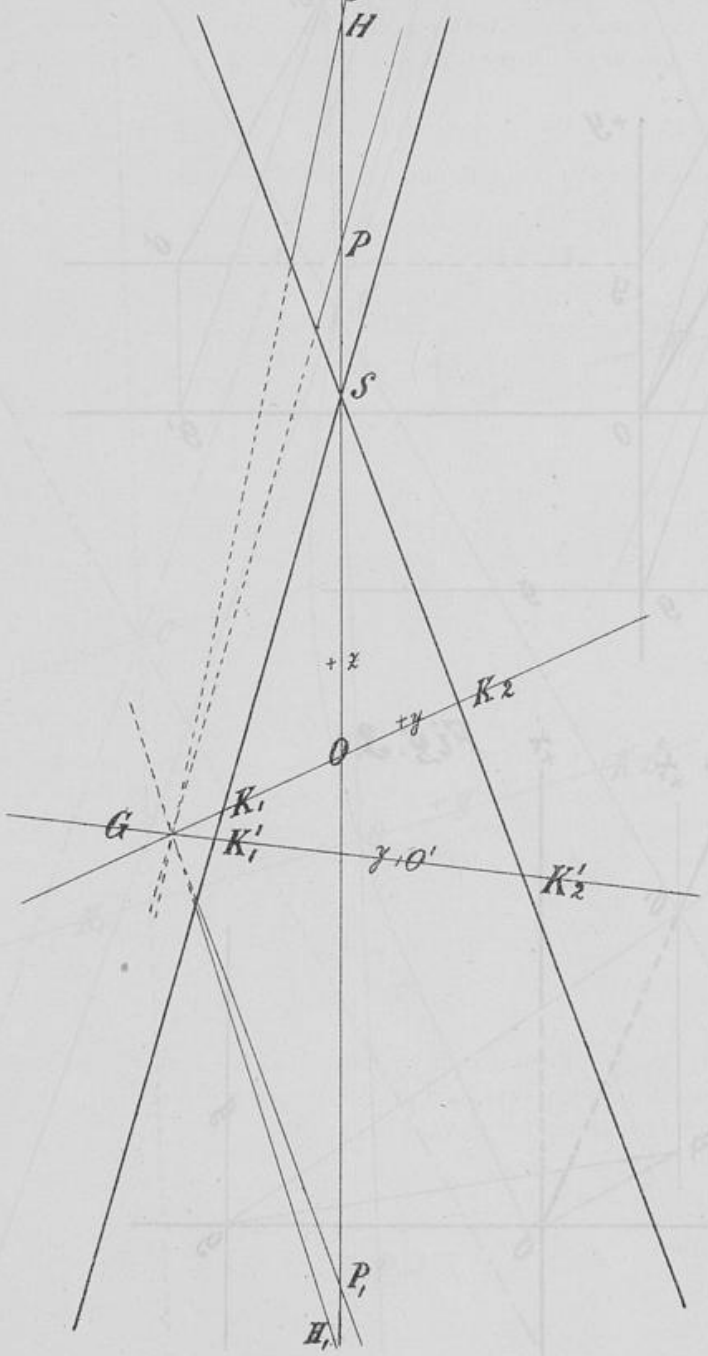
Die Cylinderkanten SK_1 und SK_2 sind die Asymptoten der Fokale 4. Ordnung, SK_2 ist die Asymptote der Curve 3. Ordnung, die einen einfachen unendlich fernen Punkt hat, während sonst ein unendlich ferner Doppelpunkt vorhanden ist. Der Punkt G ist ein Doppelpunkt und isoliert bei $a > r$, ein einfacher Punkt der Curve 3. Ordnung bei $a = r$, ein Knoten bei $a < r$ und ein Inflexionsdoppelpunkt bei $a = 0$, wo G und O zusammenfallen. $z^2 = 0$ sind die beiden zusammenfallenden Inflexionstangenten. Der Punkt O ist stets ein Knoten mit den beiden Tangenten:

$$a^2y^2 - r^2z^2 = 0.$$

Bei $a = 0$ hat die Fokale zwei Symmetrieachsen, die Cylinderachse und den zu g normalen Diameter von K, während in den übrigen Fällen nur der letzt genannte Diameter eine Symmetrieachse der Fokale ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 1.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 2.

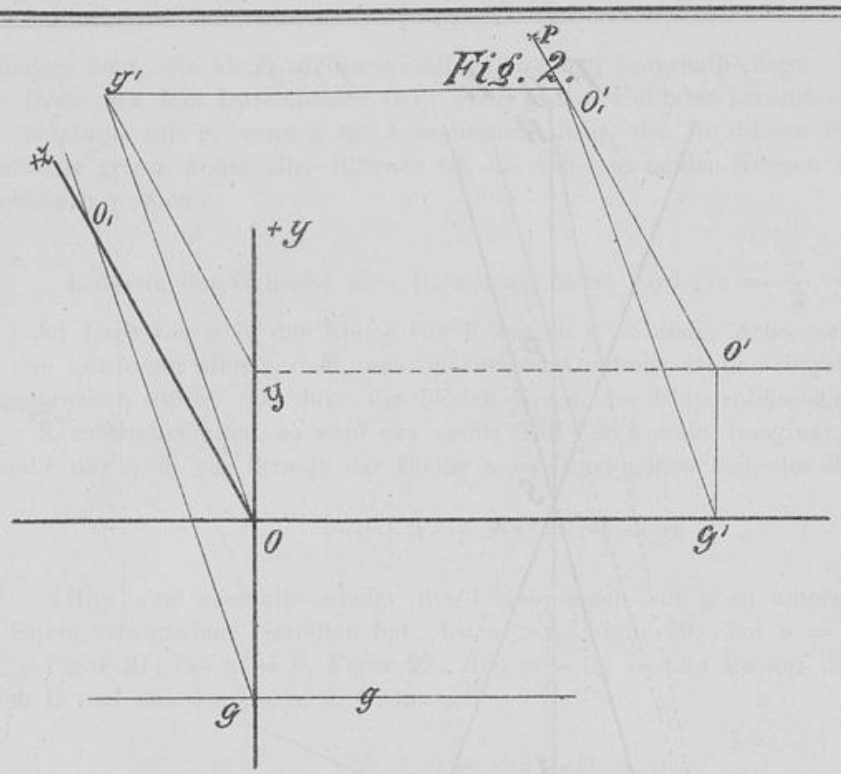
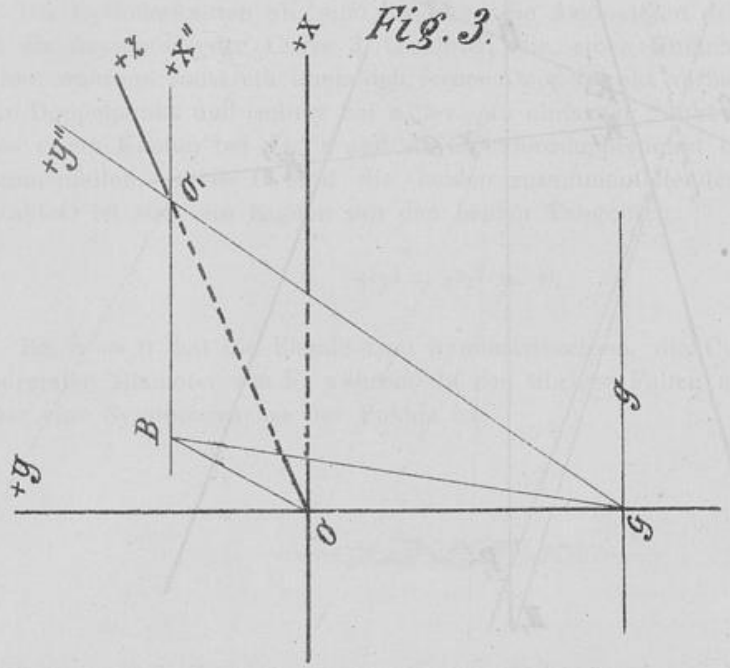
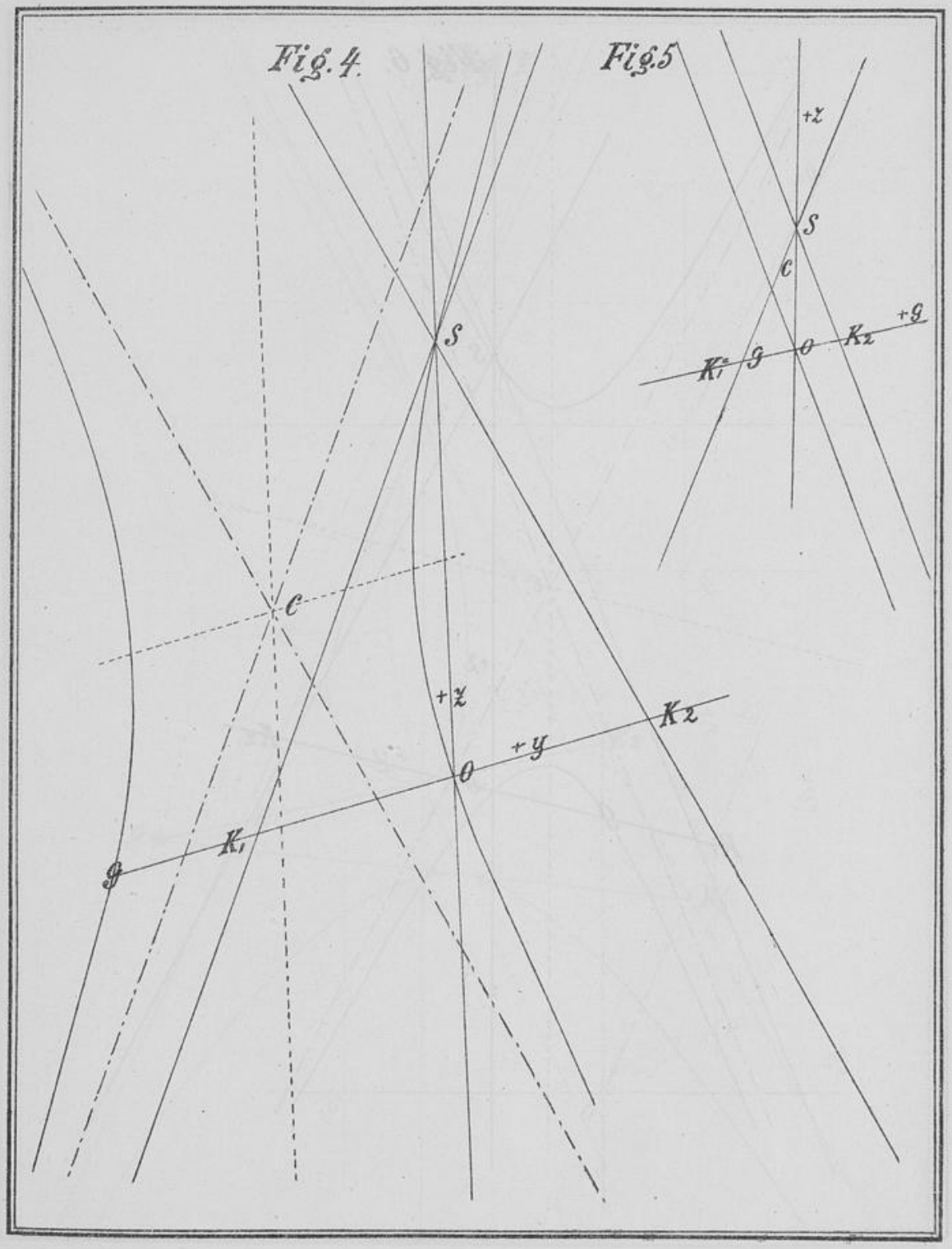


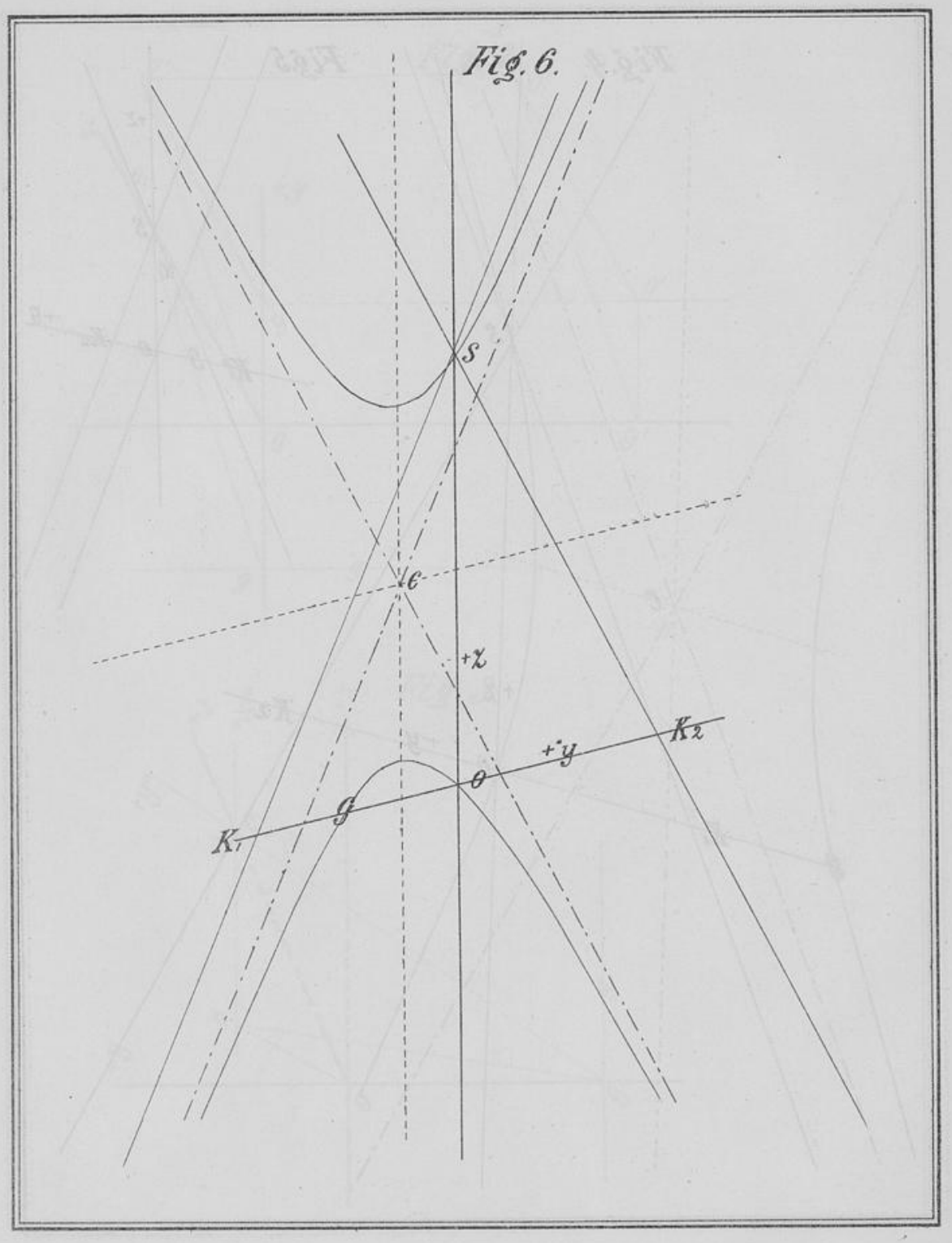
Fig. 3.



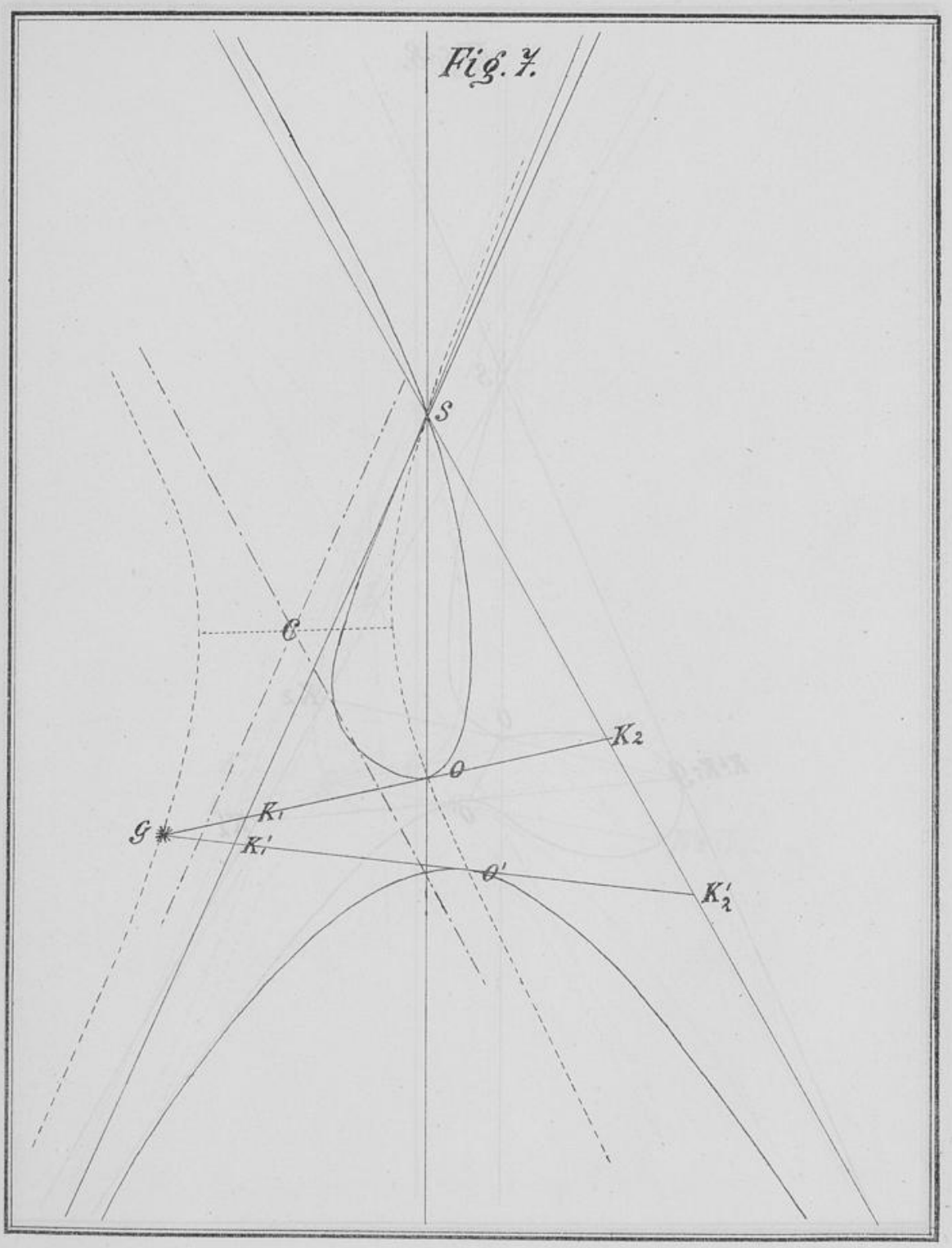
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

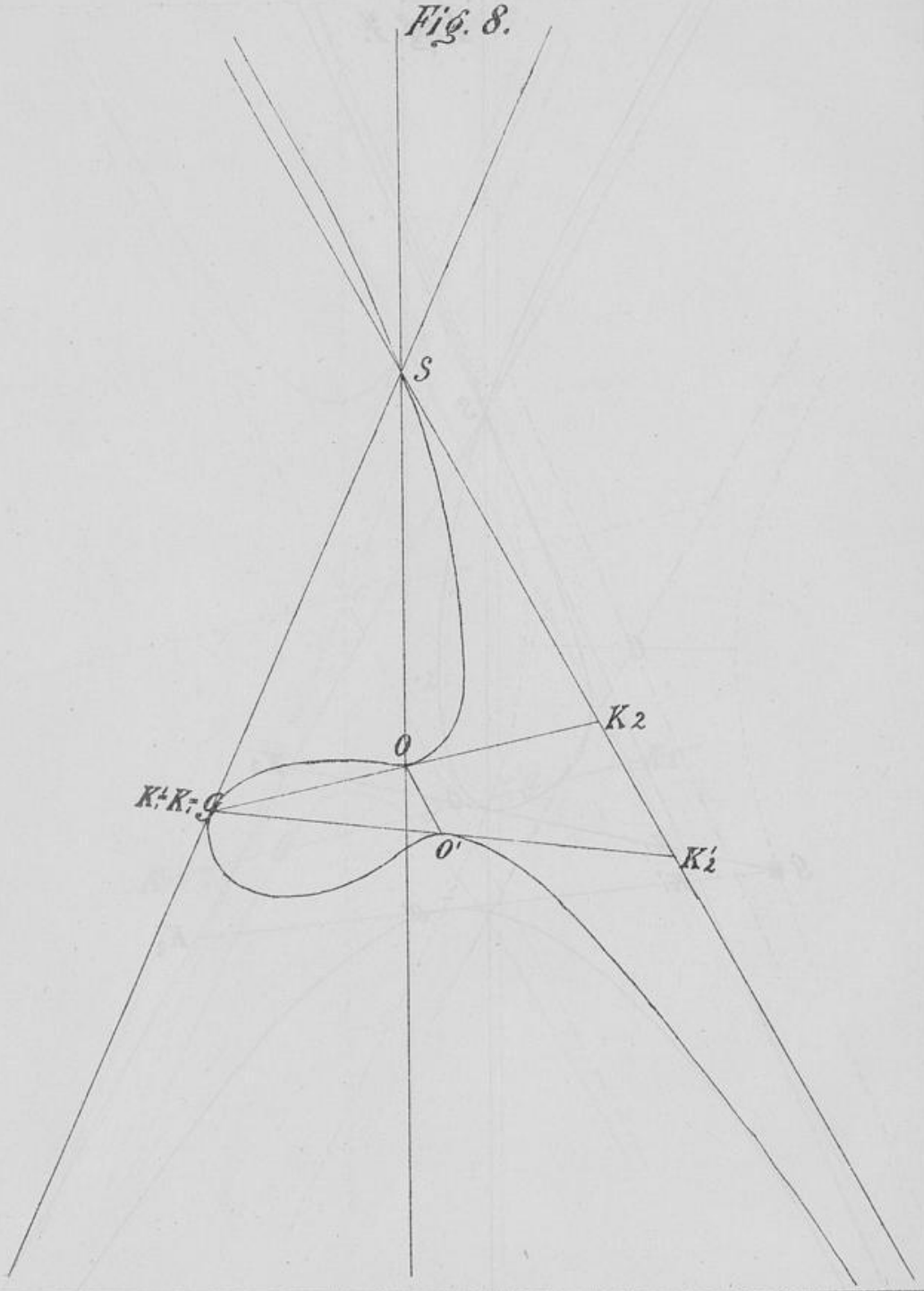


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

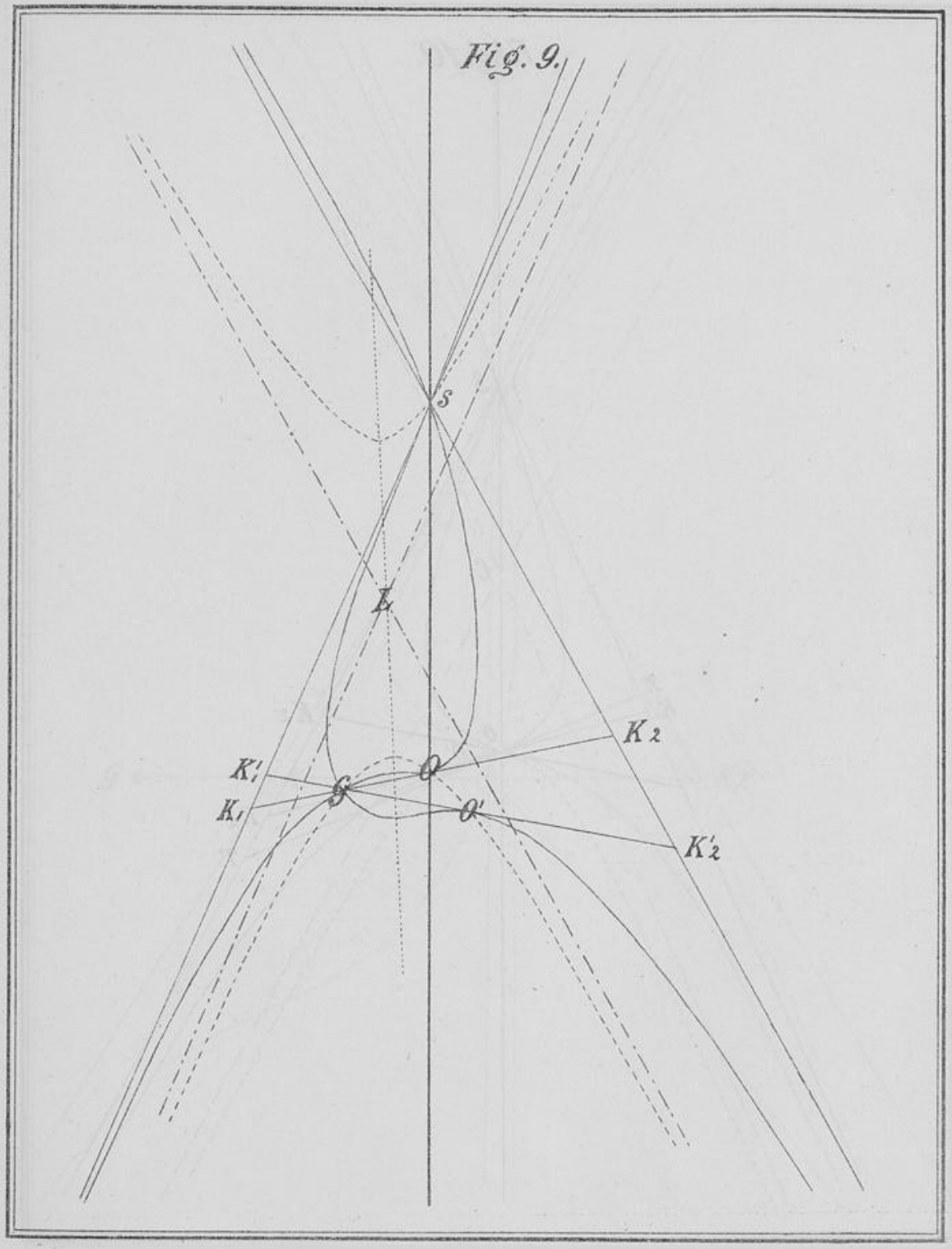


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

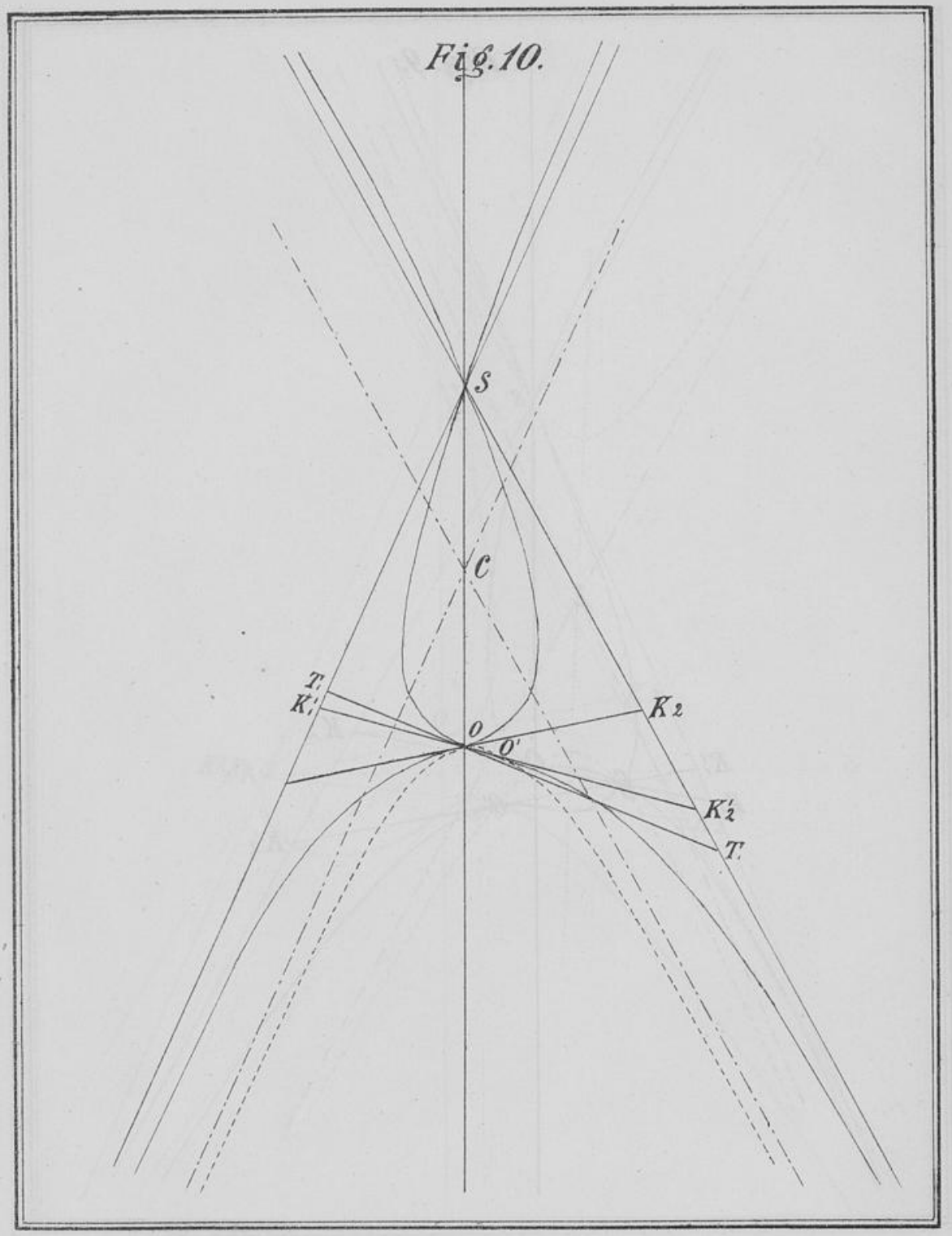
Fig. 8.



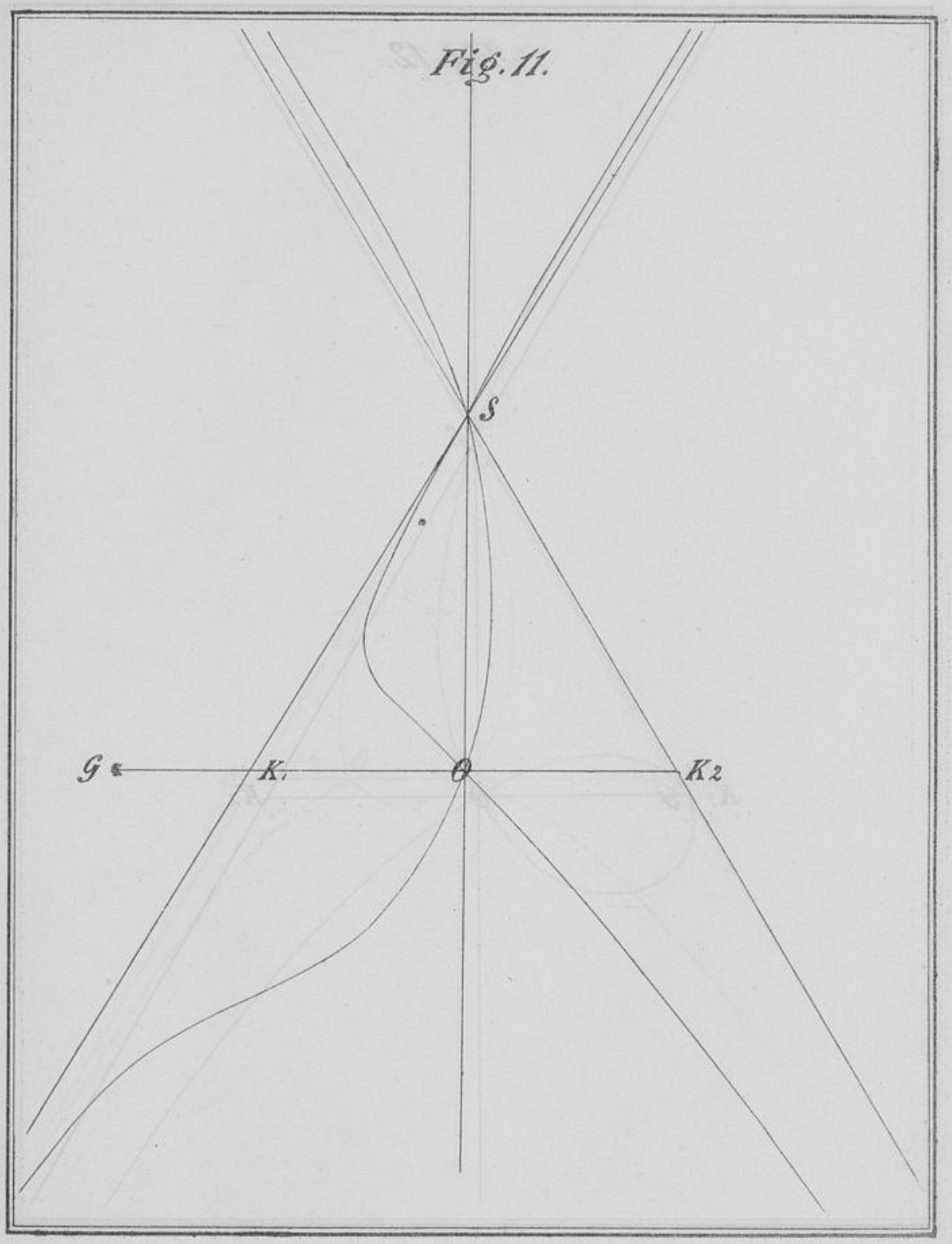
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



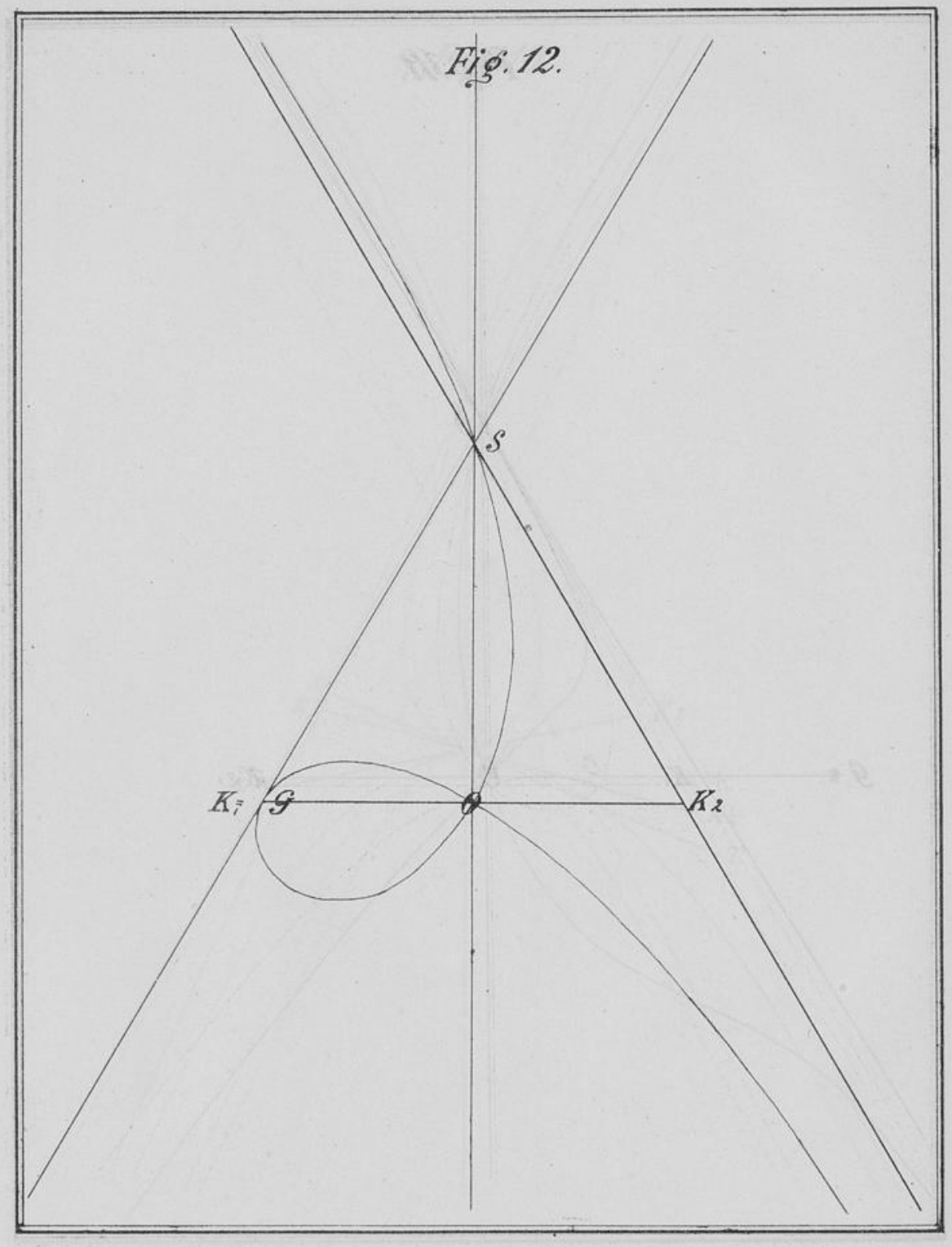
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



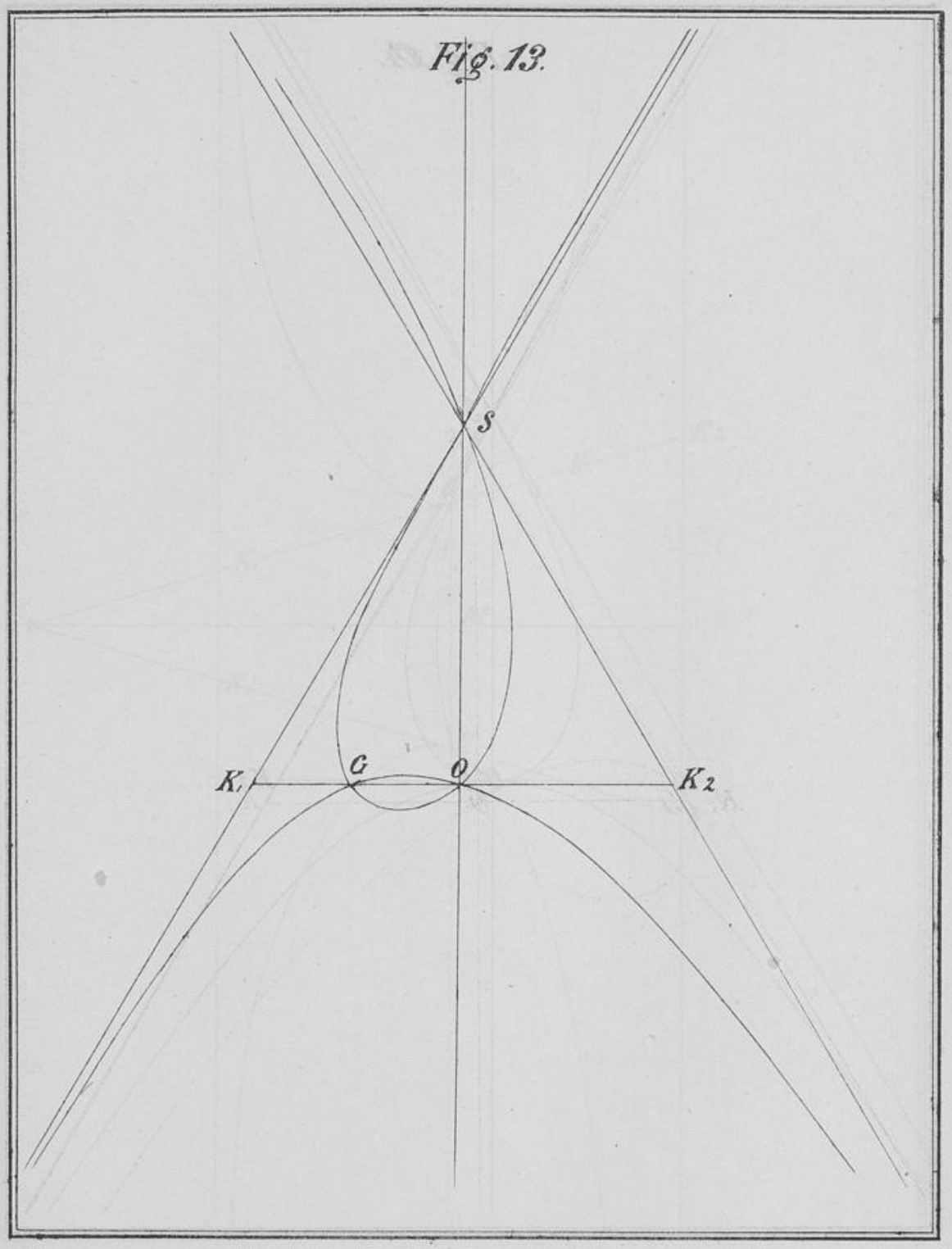
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



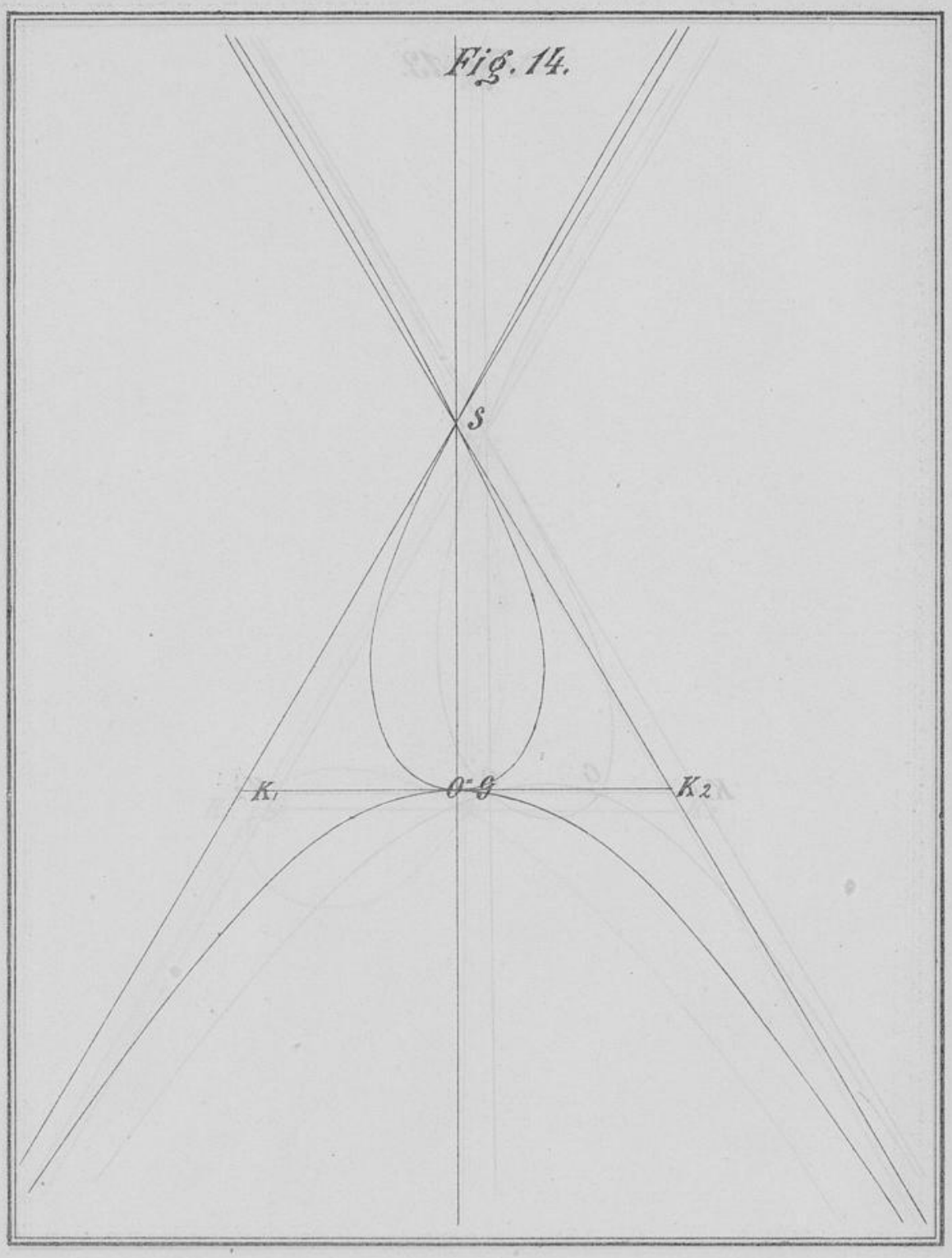
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



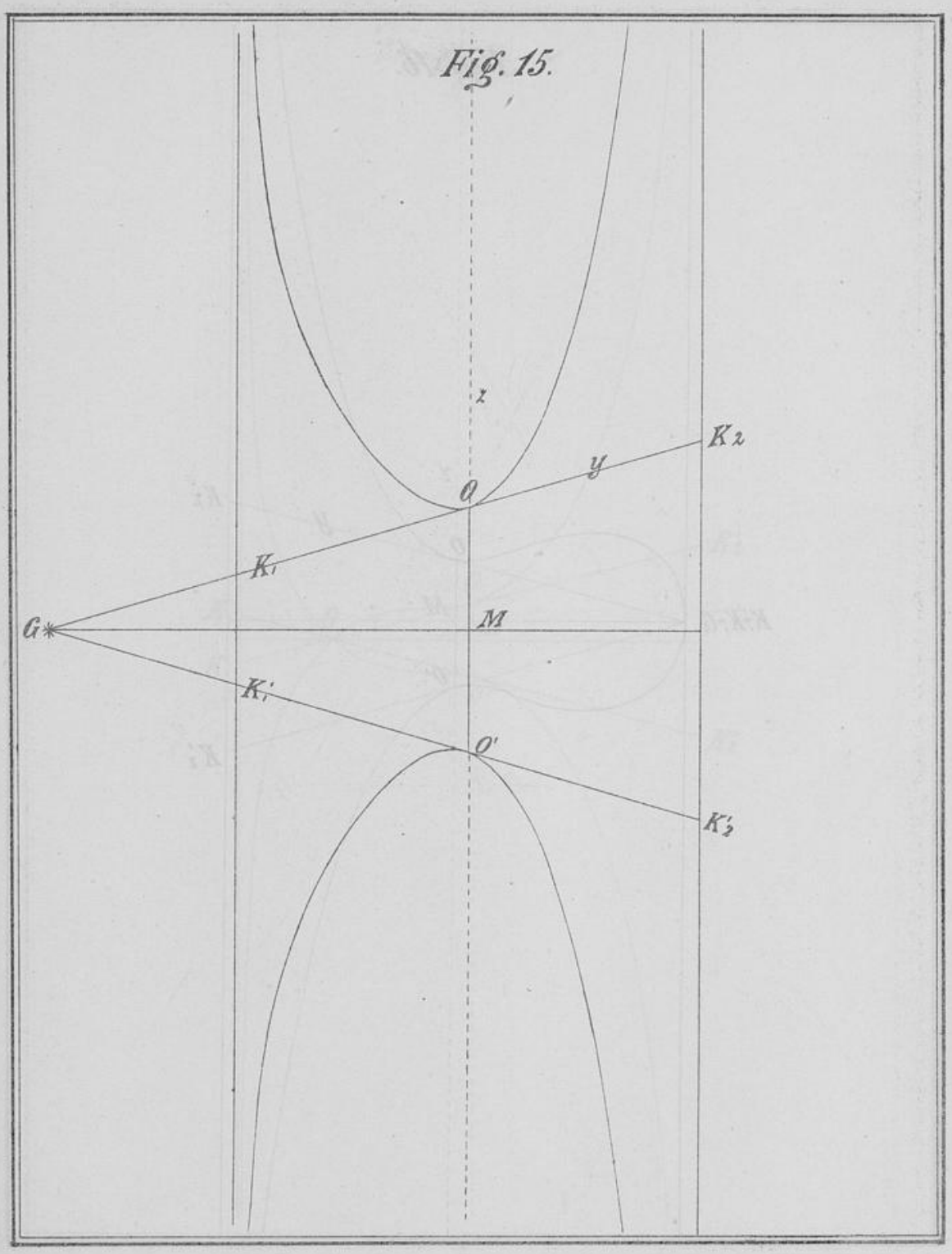
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

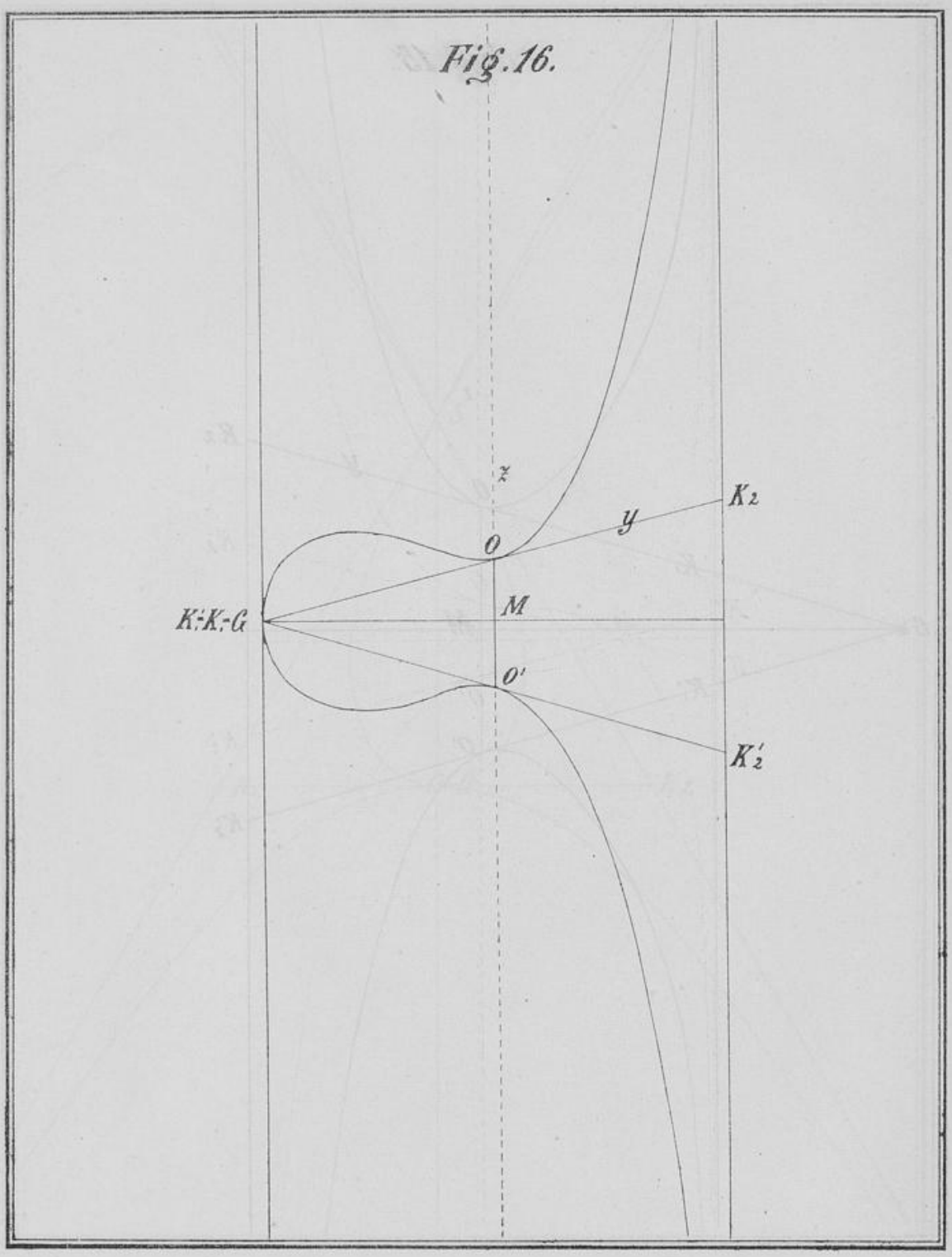


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



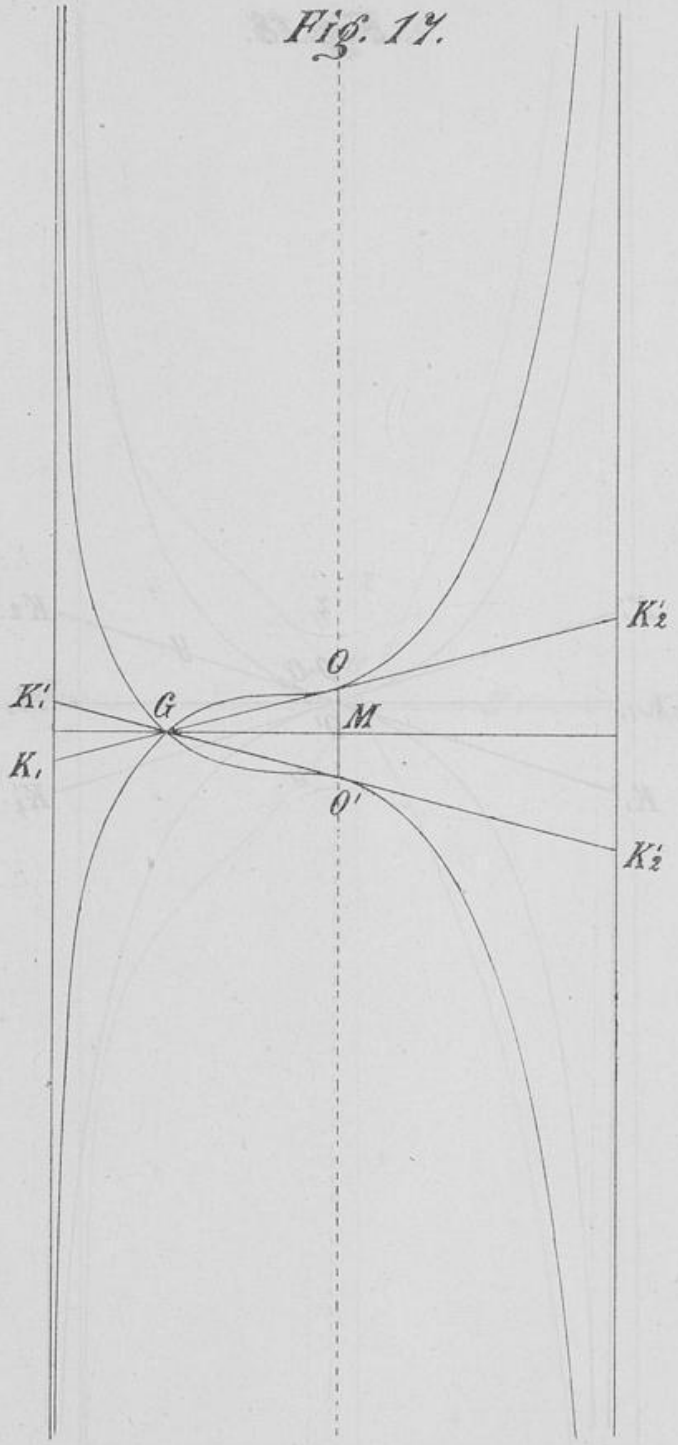
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 16.



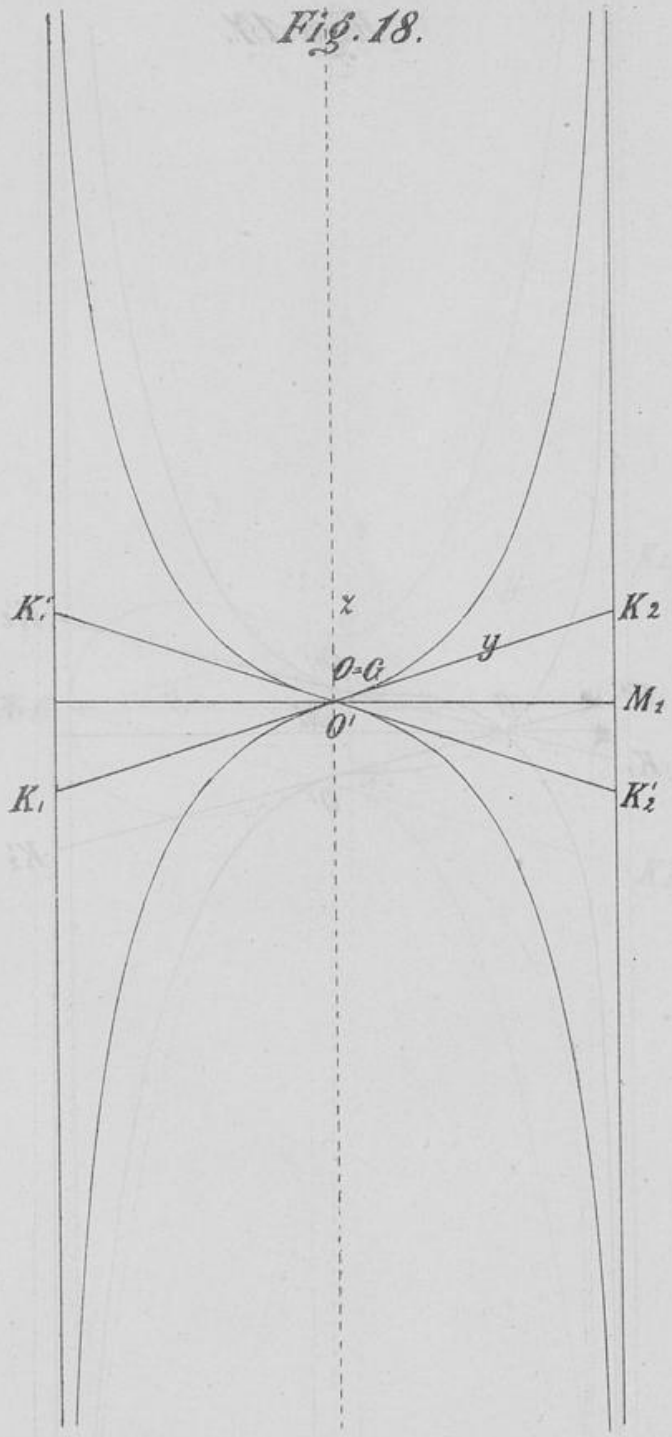
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 17.



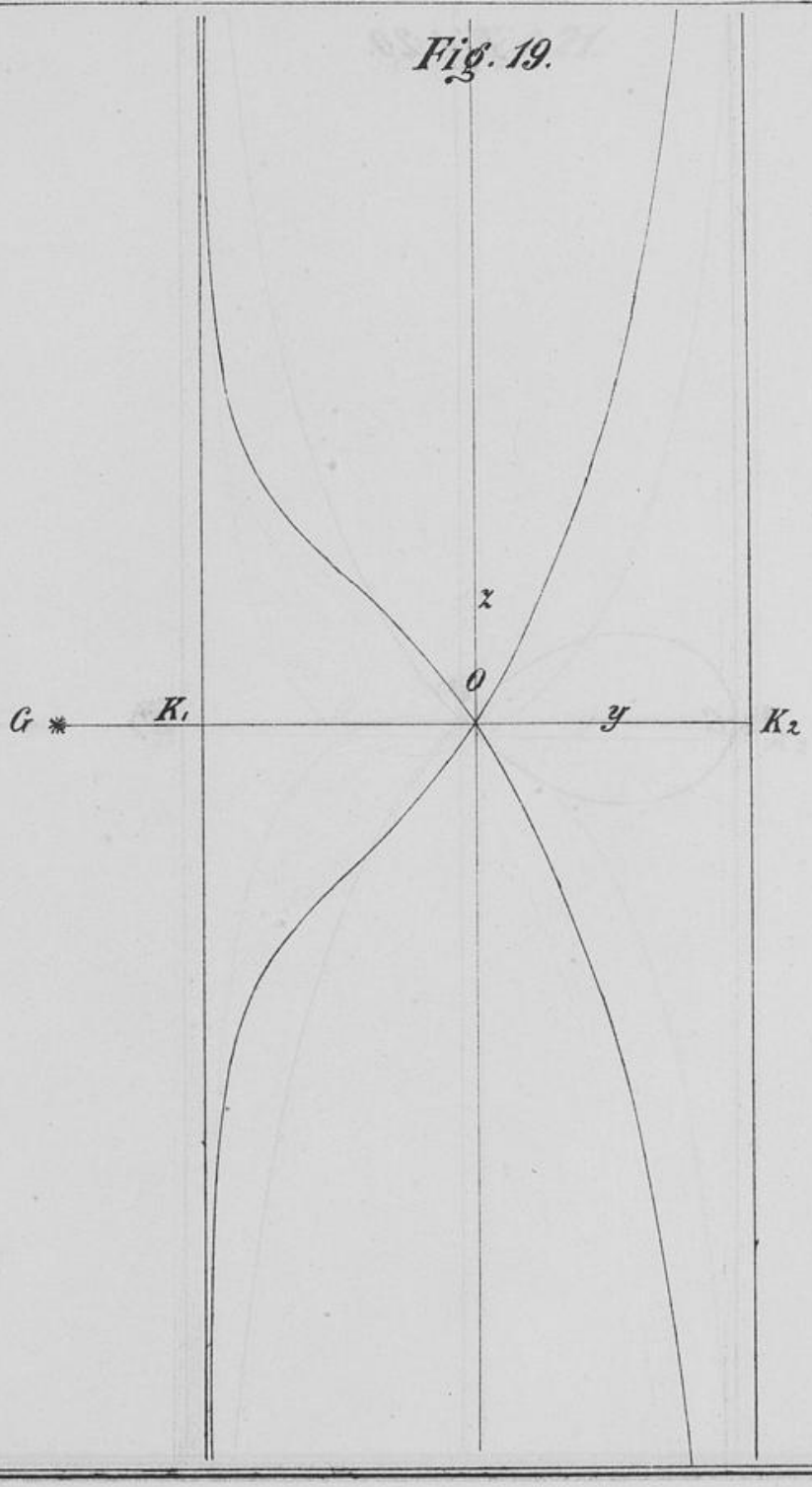
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 18.



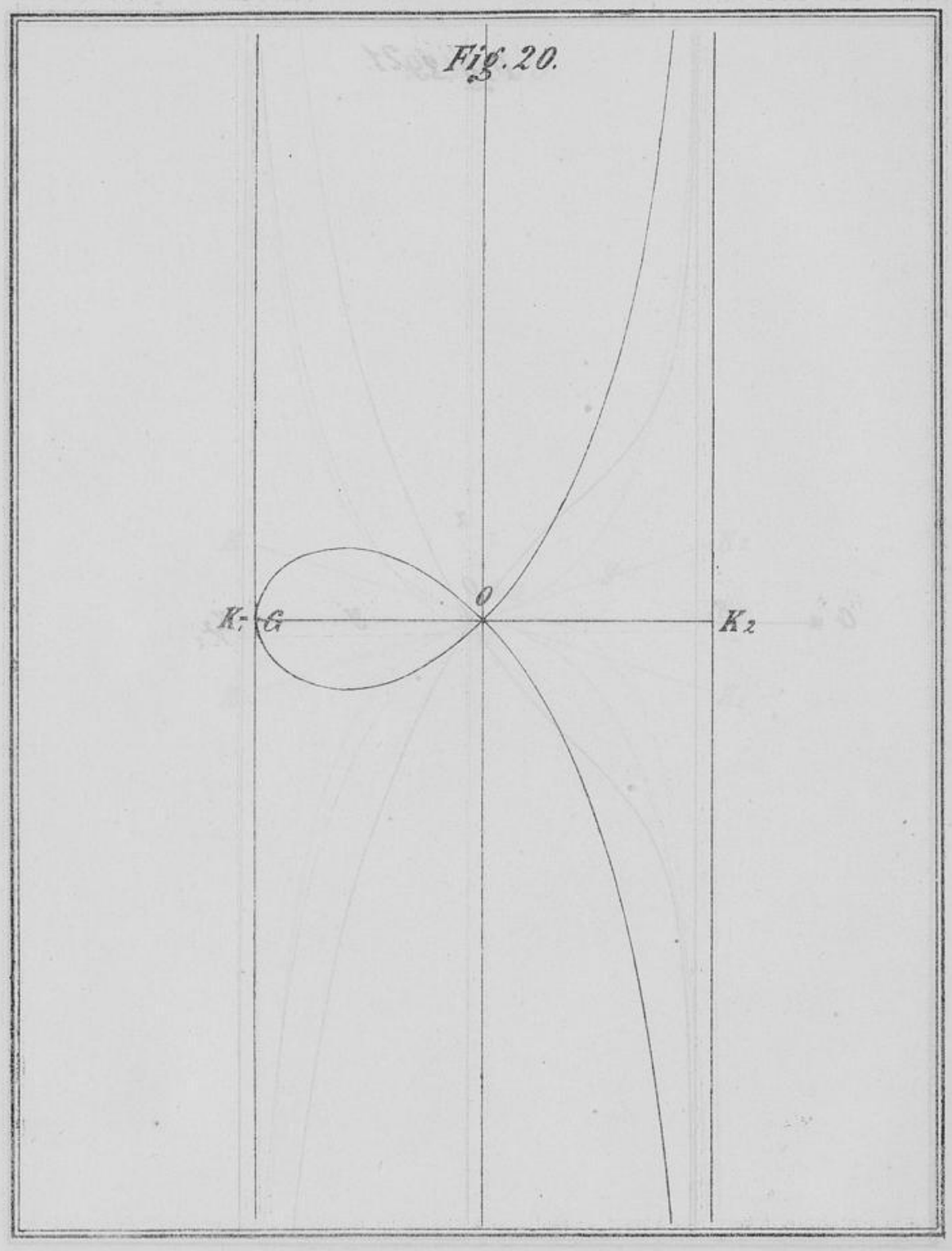
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 19.

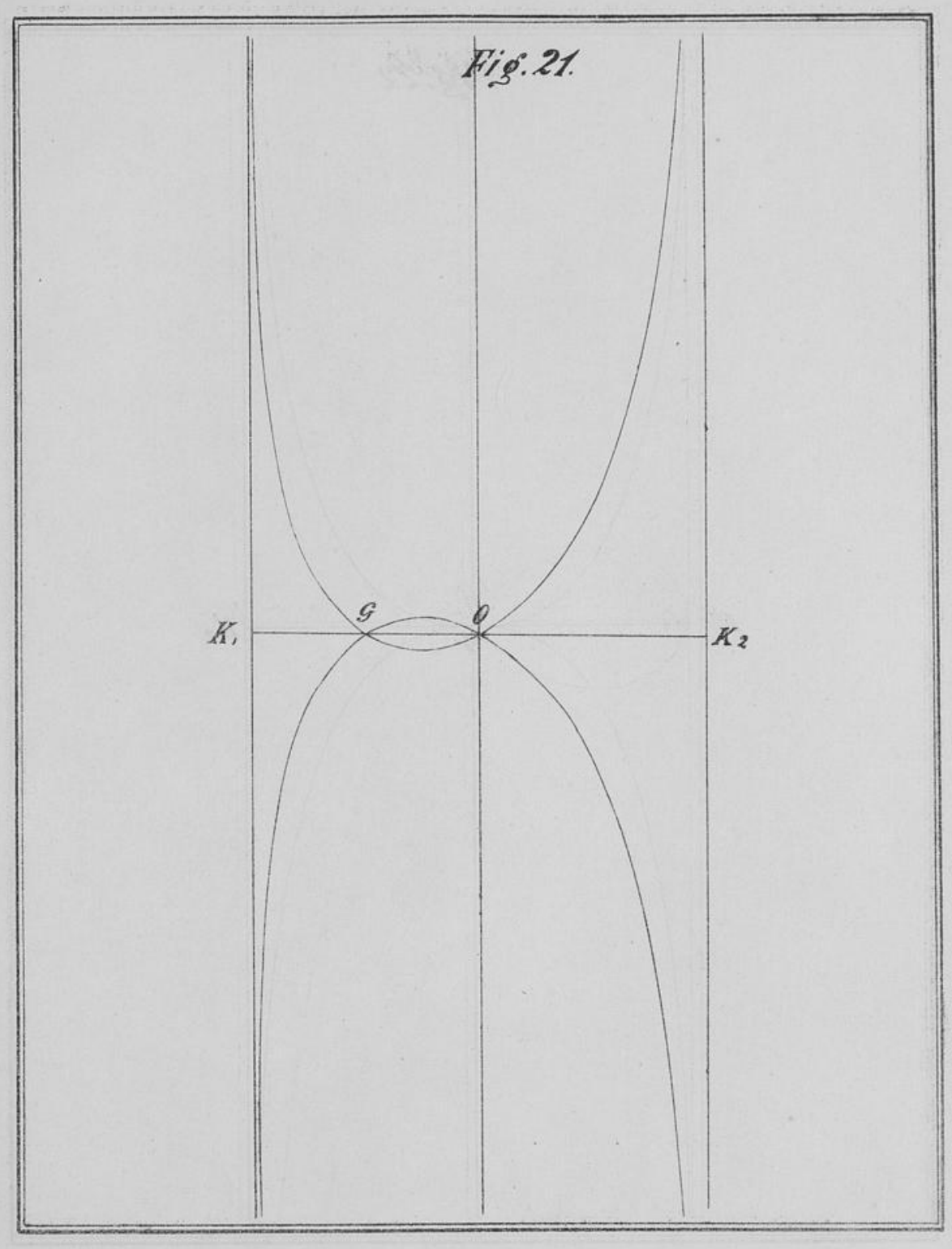


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 20.

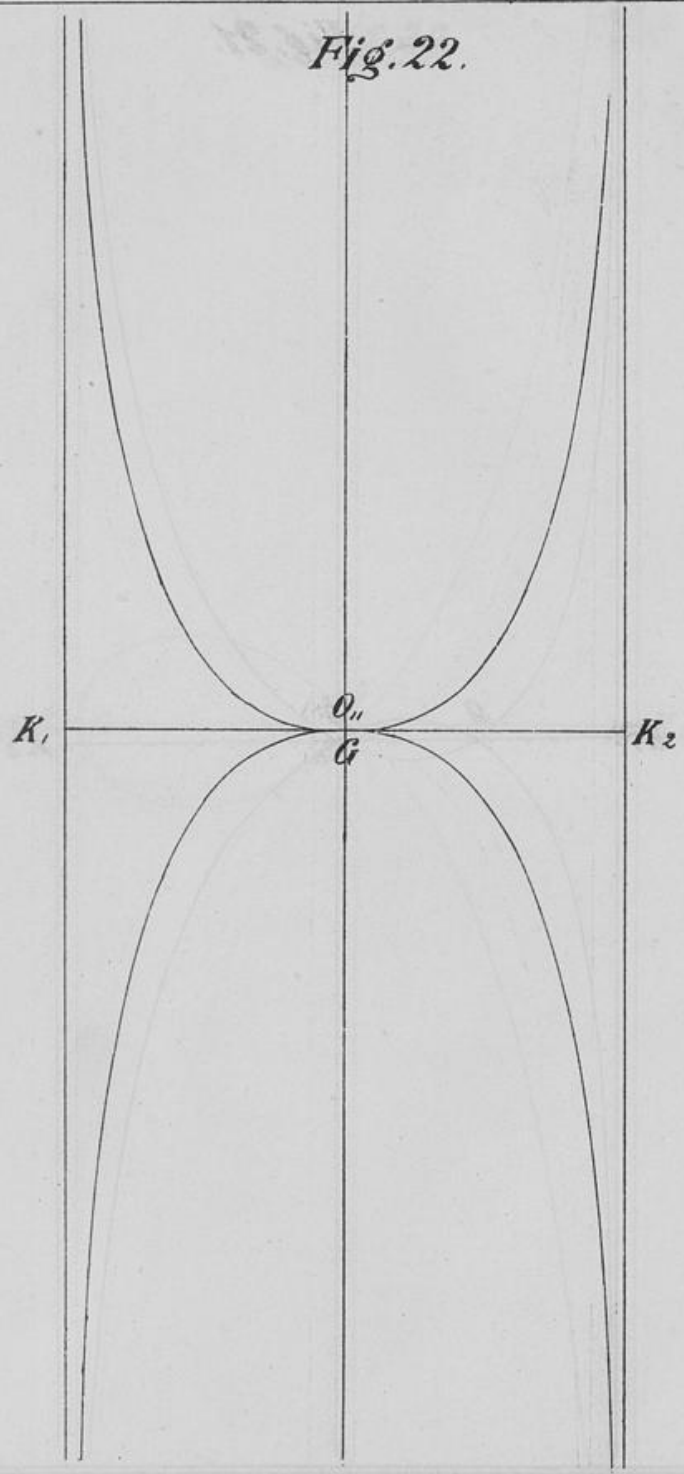


Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 22.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf