Geschwindigkeitslehre in der Schule

von

Professor Dr. J. Hermes.

Wissenschaftliche Beilage zum 34. Programm

des

Königl. Realgymnasiums

zu

Osnabrück.

Osnabrück.
Buchdruckerei von A. Liesecke.
1901.

Programm Nr. 357.

905
5 (1901)

357

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem Allerhöchsten Erlasse vom 26. November 1900 ist im Unterrichte das: „non multa sed multum" zu beachten. Viele Einzelheiten sind zu einem einheitlichen Ganzen im Bewußtsein der Schüler zu verknüpfen und als ein integrierender Teil der Gesamtbildung dauernd zu befestigen.

Ist nun auch, was die mathematische Disziplin anlangt, jeder Lehrsatz, jede Formel schon als eine Vereinigung unzähliger Spezialfälle (multa) in ein kurz gefaßtes und einzuprägendes Allgemeingültiges (multum) anzusehen, so wird es doch, um dem eigentlichen Sinne obiger Devise gerecht zu werden, gerade darauf ankommen, diese Lehrsätze und Formeln zu abgerundeten Gebieten und Gruppen zusammenzufassen und selbst hiefür wieder gemeinsame, dominierende Gesichtspunkte aufzufinden.

Man könnte nun, wie etwa für die untere Stufe (IV bis II) das Sich-gleichbleibende, die Gleichheit, insbesondere die Gleichung einen passenden Mittelpunkt verschiedenartigster Betrachtungen bildet, für die obere Stufe (II bis I) das Sich-ändernde, die Ungleichheit $\left\{ > ; < ; \neq \right\}$ im Sinne von Näherung, Grenze, Fluxion . . ., Geschwindigkeit, Maximum und Minimum . . . ., Wahrscheinlichkeit . . . . . als den beherrschenden Grundgedanken hinstellen, doch würde die Durchführung dieser Unterscheidung leicht zu weit greifen. Auch erzielt man ein bequemeres Verständnis, wenn man die Ungleichungen der Form nach durch Gleichungen ersetzt, bei tieferer Auffassung wird man die Ungleichung allerdings kaum entbehren können.

Wir beschränken uns im Folgenden darauf, die im Wesentlichen von Lagrange entwickelte Geschwindigkeitslehre als einen bei etwas vereinfachtem Gange geeigneten und leichten Lehrgegenstand, gleichsam als ein multum zu bezeichnen, das sich der Schüler in wenig Wochen aneignen kann und von welchem aus eine Menge sonst zerstreut liegender mathematischer und physikalischer Gebiete (multa) ihm leicht zugänglich gemacht werden können.

Es mögen noch einige Bemerkungen vorangeschickt werden.

Wir wollen uns für gewöhnlich nicht der Zeichen $(> ; < ; \neq)$ bedienen, sondern, um denselben Zweck zu erreichen, des Gleichheitszeichens, der Punkte (. . .) und des Pluszeichens ohne zugefügte nachfolgende Größe, wie aus folgenden Beispielen erhellt: $\sqrt{2} = 1,414\ldots$ (statt: $\sqrt{2} \neq 1,414$) $4 = 5 + .$ (statt: $4 < 5$), indem ja die hinzugedachte Größe auch negativ sein kann, hier z. B. (-1) ist.

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit: -3, so ist jetzt in: $-12 = -15 + .$ freilich das Zusatzglied ein anderes wie vorhin, nämlich 3, auch würde in $-3\sqrt{2} = -4,242\ldots$ die Bedeutung der Punkte eine andere wie vorhin sein, überdies wäre die letzte Stelle unsicher geworden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir dürfen hienach z. B.

$$(a + b)^2 = c^3 + .$$
$$(a + b)^2 = a^2 + b^4 + .$$
$$(a + b)^2 = a^2 - b^2 + .$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + .$$

setzen und haben dann diese „unvollständigen" Gleichungen nicht sowohl als Bestimmungsgleichungen, sondern als zwar richtige, jedoch nicht gleich gut anwendbare Identitäten anzusehen, indem das mit + angedeutete Zusatzglied schon als ausgerechnet zu denken ist. Bei der dritten Gleichung ist es z. B.: $(2b^2 + 2ab)$ {als ein Glied}, bei der ersten würde es auf den Wert von c^3 ankommen, ob er von a (und b) abhängig gedacht ist oder nicht. Wäre $c = \sqrt[3]{(a + b)^2}$, so wäre das Zusatzglied: Null. Soll eine Rechnung bis zur 5. Dezimale richtig sein und ist in der letzten Gleichung $b \leqq \frac{1}{317}$, so wird dieselbe anwendbar und bietet bei der Ausrechnung eine Erleichterung vor der gewöhnlichen Formel dar.

Man wird in manchen Fällen nicht leicht bestimmen können, ob das Zusatzglied in der Anwendung vernachlässigt werden kann oder nicht. Dies beeinträchtigt die Richtigkeit der mit einem +. versehenen Formel nicht, sondern zieht nur ihre Anwendbarkeit in dem fraglichen Falle in Zweifel. Es wäre ein Verstoß gegen die Strenge, wollte man den Schüler ohne weiteres eine stete Anwendbarkeit annehmen lassen; das +. aber, ohne die Formel für das Gedächtnis schwieriger zu machen, erinnert ihn daran, daß im gegebenen Falle Vorsicht zu gebrauchen ist.

Eine numerische Nachrechnung, ob eine Annäherung genau genug ist, wird zuweilen nicht nur geboten, sondern auch an sich nützlich sein.

Der Begriff der Näherung ist von dem der Genauigkeit zu unterscheiden.

Je nachdem von dem Zusatzgliede, welches seinem Begriffe nach nicht für sich allein die Formel bilden darf, erwiesen werden kann, daß es a) unter einer gegebenen oder b) unter einer beliebig hohen Dezimale bleibt, ist die Formel a) nur als Annäherung, b) als genügend genaues, oder wie wir kürzer sagen wollen, als exaktes Endergebnis anzusehen.

Schon bei früherer Gelegenheit kann der Begriff der Konvergenz und Divergenz gestreift werden z. B. bei Behandlung der Dezimalbrüche und bei der geometrischen Reihe.

Alle Dezimalbrüche { und analog die geometrische Reihe $a + aq + aq^2 + .$ (in inf.) für $q < 1$ } sind konvergent, denn sie sind kleiner als 0,9999 . . . ., was die Grenze 1 genau erreicht.

Als Beispiel zur Divergenz wähle man etwa $R =: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ (in inf.). Es kann gezeigt werden, daß für R der Grundsatz: „Jede Größe ist sich selbst gleich" nicht giltig ist. Teilen wir die Glieder der Reihe nach in Gruppen zu je einem, zwei, drei . . . . Brüchen ab und setzen in jeder Gruppe die Brüche gleich dem kleinsten derselben, so ist $R > \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{10} + \frac{5}{15} + \frac{6}{21} + ..$ und dies ist, wenn $\frac{2}{3} + \frac{4}{10} + \frac{6}{21} + \ldots.$ fortgelassen wird, wieder $> \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots.$ also ist $R > R$, daher gehört R nicht zu den bestimmten endlichen Größen, für die jener Grundsatz als giltig angenommen wird und ist zur Rechnung nicht verwendbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da im Folgenden durchweg an sich genugsam Bekanntes erörtert wird, schien ein Litteraturnachweis übrig.

Es ist somit nur der Gang und der aufs engste zusammengezogene Umfang des Gegebenen, was den Verfasser zur Veröffentlichung dieser Darstellung berechtigen kann, wenn in der That der Kraft des Schülers an keiner Stelle zu viel zugemutet wird.

Eine Geschwindigkeitslehre, welche eine hinreichende, wenn auch vielleicht nicht rigorose Strenge mit Einfachheit verbinden möchte, würde sich, bei der Leichtigkeit und Vielseitigkeit ihrer Anwendung ihren Platz in der Schule sichern. Diese Leichtigkeit hat ihr Lagrange durch den „Strich" gegeben. Die Wissenschaft verlangt wohl nicht mit Unrecht für tiefer gehende Untersuchungen eine vollkommenere Bezeichnung; für die Schule dürfte man mit der Lagrangeschen ausreichen und man kann sogar den Buchstaben **t** (aber auch nur diesen) dabei unterdrücken, weil er tempus bedeutet und die Geschwindigkeit sich zunächst nur auf die Zeit beziehen kann.

Bei der bekannten Divergenz *) der Meinungen in dieser Materie bitte ich um nachsichtige Beurteilung, zumal auch der mir zugemessene Raum eine eingehendere Erörterung mancher nur angedeuteten Folgerung verbietet.

Es würde mir erfreulich sein, wenn man zugeben könnte, daß hier von einer Vorwegnahme keine Rede sein kann, sondern daß nur eine in richtigen Grenzen gehaltene Vorbereitung und Anregung zu späterem Studium geboten worden.

---

*) Da das Programm auch für den Schüler bestimmt ist, so hätte hier eine Erörterung für ihn keinen Wert. An sich erscheint mir diese oft schon als abgeschlossen geltende Frage einer Revision bedürftig. Die häufig ihrer Kürze und Anschaulichkeit wegen bevorzugte „graphische Methode" möchte als Grundlage begrifflich nicht scharf genug sein, um darauf bauen zu können; sie bildet aber eine wertvolle Ergänzung und ermöglicht, als zweiter Kursus gedacht, ein schnelleres Fortschreiten, vgl. Unterrichtsblätter für Math. u. Naturw. Jahrg. VI Nr. 5. Schulaufgaben aus der Mechanik von A. Wernicke, Braunschweig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I) Geschwindigkeitslehre.

1) Obwohl die Bewegung eines Körpers den Ruhezustand desselben dem Begriffe nach ausschließt, so sind doch auch die Körper, die wir als ruhende, den bewegten gegenüber, zu bezeichnen pflegen, ebenfalls in Bewegung. Es ist daher Ruhe und Bewegung im relativen Sinne zu verstehen, auch bleibt es überaus fraglich, ob im Weltall ein absolut ruhender, d. h. an demselben Raumpunkte sich dauernd befindender Körper überhaupt vorhanden ist.

2) Um die (relative) Ruhe eines Körpers, den wir uns als kleine (punktuelle) Kugel P denken wollen, zu konstatieren, ist im Allgemeinen eine viel länger fortgesetzte und sorgfältigere Beobachtung nötig, als um die Bewegung festzustellen und ihre Durchschnittsgeschwindigkeit zu bestimmen.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit wird definiert durch die Angabe, wie viele Wegeinheiten*) in der Zeiteinheit*) durchlaufen werden. Man schreibt sie als Bruch. Im Zähler steht die Zahl, welche die durchlaufenen Längeneinheiten angiebt, im Nenner die Zahl der Zeitsekunden. Beide Zahlen können auch selbst wieder Brüche sein. Die Benennung ist: „Geschwindigkeits-Einheiten". Häufige praktische Anwendung! z. B. auch bei den (bürgerlichen) Bewegungsaufgaben.

3) Wie sich aus 2) ergiebt, sind zur Bestimmung der Durchschnittsgeschwindigkeit durchaus zwei verschiedene Zeitmomente nötig, welche durch den Uhrzeiger (Fig. 1) etwa bei A′ und B′ angegeben werden und entsprechend zwei Orte A und B, an denen sich die Kugel P in jenen Zeitmomenten befand. Außerdem müßte man die Kurve kennen, auf der sich diese Kugel bewegt, um die Bogenlänge in Längeneinheiten zu berechnen.

Im Grunde genommen findet hiebei nur die Vergleichung zweier Geschwindigkeiten statt, der einen, die bestimmt werden sollte und einer andern, die man schon besser kennt und als nahezu gleichförmig annimmt und die gleich der Geschwindigkeitseinheit: 1 ist, wenn die Uhrzeigerspitze in 60 Sekunden eine Peripherie von genau 60 cm Länge durchläuft.

Es kann hier im Unterrichte eine kleine Tabelle angegeben und besprochen werden, welche die bekannten Geschwindigkeiten etwa vom Wachsen eines Grashalms bis zur Lichtgeschwindigkeit enthält.

4) Steht die Kugel P still, so fällt A mit B zusammen, die Weglänge wird also Null; A′ und B′ können aber nicht zusammenfallen, weil zwei verschiedene Zeitmomente begrifflich nötig sind, der Nenner ist also nicht Null, mag er nun groß oder klein sein, mag die Kugel nun lange oder kurze Zeit still stehen.

---

*) Man wählt: Centimeter (cm) (auch wohl: m, km, $\mu\mu$) und mittlere Zeitsekunde s, deren recht verwickelte Erklärung auf gedachter Stufe als bekannt vorausgesetzt werden kann. Es empfiehlt sich, sie bei dieser Gelegenheit zu repetieren und später noch zu vertiefen. S. Schluß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

A′ B′ kann freilich einen Wert wie 0,0 . . $_*$ . . . z . . . haben, wo z eine Ziffer außer Null und das Sternchen $_*$ eine beliebig hohe Nullenanzahl bedeuten soll. Wir haben aber nicht das Recht, A′ B′ exakt = Null zu setzen, denn [vgl. Vorbemerkung bei b)] es ist kein Zusatzglied. Als Endergebnis ist 7,0 . . $_*$ . . z . . genügend genau = 7, wenn die Anzahl der Nullen beliebig hoch gegriffen werden darf und gegriffen wird, aber 0,0 . . $_*$ . . z . . ist ein Wert, der noch von Null verschieden gedacht werden muß, wenn er auch nicht mehr meßbar und nachweisbar ist.

Die Geschwindigkeit einer ruhenden Kugel, die ja schon dem Begriffe nach Null sein muß, ist also auch hienach

$$= \frac{\text{Null.}}{\text{Von Null verschiedener Wert.}} = \text{Null.}$$

5) Handelt es sich nicht um die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der sich die Kugel von A nach B bewegt, die sehr verschieden von den einzelnen Geschwindigkeiten sein kann, mit welchen Teilstrecken von A B durchlaufen werden, sondern um eine dieser einzelnen Geschwindigkeiten, etwa um die unmittelbar nach A, so braucht man nur B so nahe an A anzunehmen, daß in diesem Teil die Geschwindigkeit sich nicht merklich ändert. Man hat dann aber im Wesentlichen doch wieder eine Durchschnittsgeschwindigkeit und könnte denselben Prozeß wiederholen und B noch näher an A rücken, [was zuletzt bei geeigneter Vergrößerung übrigens immer dieselbe Figur gäbe].

Es darf aber B nicht in A fallen, weil 2 verschiedene Zeitmomente A′ und B′ gemäß der Definition sein müssen und bei vorausgesetzter Weiterbewegung, dann auch A von B verschieden sein muß.

6) Man spricht trotzdem von der Geschwindigkeit an der Stelle A, weil unmittelbar nach A eine plötzliche Änderung eintreten könnte. Derartige Ausnahmefälle müssen einem späteren, eingehenderen Studium vorbehalten bleiben. Sehen wir davon ab, so läßt sich der Hauptsatz der ganzen Lehre folgendermaßen fassen.

Es möge (Fig. 2) $OA = f_0$. Centimeter sein und in t_0. Sekunden durchlaufen werden, auch möge man, wenn t gegeben ist, f berechnen können, ebenso $f_1. = OB$, wenn statt t_0 beim Berechnen der Wert: $t_0 + 1.t$, $f_2. = \overline{OC}$, wenn der Wert: $t_0 + 2.t$, etc . . . genommen wird. $\overline{AB} = f_1. - f_0.$ sei durch $\mathfrak{f}$ (gelesen: deutsch f) abgekürzt und die Geschwindigkeit an der Stelle A (also nach f_0 durchlaufenen Centimetern) sei: f_0' (gesprochen *) f_0 Strich oder auch Geschwindigkeit [a. d. St.] von f_0).

Nach 5) ist nun bei nicht zu großem, den Verhältnissen der Aufgabe angepaßten Zeitintervalle t (das bei der Bewegung der Erde um die Sonne einen Tag, beim Schall etwa einen kleinen Bruchteil einer Sekunde beträgt) der Wert $\mathfrak{f}$ dividiert durch t zwar nicht exakt $= f_0'$, wohl aber muß $\mathfrak{f} : t = f_0.' +$. richtig sein und hieraus folgt, wenn mit t beiderseits multipliziert wird, $\mathfrak{f} = tf_0.' +$. oder auch $f_1. - f_0. = tf_0.' +$. und endlich

$$\text{I)} \quad f_1. = f_0. + tf_0.' + .$$

Der Index $_0.$ kann in den meisten Fällen auch noch fortgelassen werden, $f_1. = f + tf' +$.

Man kann hier ohne weiteres zugestehen, daß eine solche unvollständige Gleichung eigentlich gar nichts besagt. Das ist in der That auch zutreffend in jenen ausgeschlossenen Fällen.

*) Die Bezeichnung $_1.$ als Index und: ′ (Strich), lateinisch f und deutsch $\mathfrak{f}$ etc . . ist, wie sich herausstellen wird, ganz bequem, doch muß der Schüler gleich anfangs darauf achten und keine Verwechslung Platz greifen lassen. (Vgl. 44. ⌒).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dessenungeachtet ist der Satz I einer der wichtigsten und nützlichsten in der Mathematik und Physik. Liegen nämlich solche Ausnahmefälle nicht vor, so wird sich für nicht zu großes t die Durchschnittsgeschwindigkeit $f : t$ von f' der Geschwindigkeit an Stelle A nicht um viel unterscheiden und man wird in vorliegendem Falle ähnlich wie oben einen Wert für t ermitteln können, so daß etwa die 5te Dezimale noch richtig bleibt. (Man beachte, daß über f' im Vorhergehenden noch nichts bestimmtes ausgesagt ist; trotzdem möge man es wie bekannt denken, indem es im Folgenden für spezielle Fälle ermittelt wird).

In Worten lautet der Hauptsatz:

„Der in $\mathbf{t} + t$ Sekunden zurückgelegte Weg ist gleich dem in $\mathbf{t}$ Sekunden durchlaufenen Wege vermehrt um das Produkt aus Zeitintervall t und der nach $\mathbf{t}$ Sekunden erlangten Geschwindigkeit + einer in gewöhnlichen Fällen für nicht zu großes t bei bestimmter Dezimalenanzahl zu vernachlässigenden Größe."

Zusatz. Es ist unschwer einzusehen, daß statt des Wortes „bestimmter" auch „beliebig hoher" stehen kann, allerdings wird dann auch für t eine Größe : $0,0\ldots{}_{*}\ldots z\ldots$ zu nehmen sein, die zwar eine geringere, aber doch ebenfalls beliebig hohe Nullenanzahl hat. Der Satz ist dann exakt.

Es darf aber nicht etwa, außer, wenn $f' =$ Null wäre, der Satz in diesem Falle zu $f_{1.} = f$ zusammengezogen werden, weil sich daraus $0 = tf'$ oder auch $0 = t$ ergeben würde, was nicht sein kann, vgl. 4). Anders ausgedrückt: tf' hört auf Zusatzglied zu sein.

7) Aus 4) folgt, daß $c' = 0$ ist, wenn f nicht von $\mathbf{t}$ abhängt und die Kugel an einer um c Centimeter vom Anfangspunkte entfernten Stelle ruht. Es ist daher z. B. $(3)' = 0$; $(480)' = 0$; $x' = 0$; $y' = 0$ ꝛc. . . . kurz: die Geschwindigkeit jeder nicht von der Zeit abhängigen, also ruhenden, d. h. in der Entfernung 3 cm, 480 cm, x Meter y Kilometer vom Anfangspunkte beharrenden Kugel ist Null. Man faßt dies in $(\text{constante})' = 0$ zusammen.

8) Wenn die Kugel in $\mathbf{t}$ Sekunden $\mathbf{at}$ Centimeter zurücklegt, f also $= : \mathbf{at}$ ist, so geht der Hauptsatz über in $\mathbf{a}(\mathbf{t} + t) = \mathbf{at} + tf' +$. Es kann das Zusatzglied in diesem Falle nur Null sein, nach der Herleitung, weil die Geschwindigkeit an jeder Stelle dieselbe und gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit ist. Hieraus und wie direkt klar ist, wird $f' = a$ oder mit Benutzung der Formel für f wird $(\mathbf{at})' = a$ und auch [bei analogem Verfahren]: $(\mathbf{at} + c)' = a$, wo a und c konstant. $(f + g + \ldots)' = f' + g' + \ldots$ Beweis mit I (Zusatz) analog zu führen.

9) Ein Blatt möge in Hinsicht auf die Längsrichtung nach einem andern Gesetze wachsen, als in Beziehung auf die Breite. Wie groß ist die Geschwindigkeit seines Wachstums zu der bestimmten Zeit $\mathbf{t}$?

Der Einfachheit halber möge das Blatt die Form eines Rechtecks A B C D (O) haben (Fig. 3).

Das Gesetz des Wachsens sei für die Länge durch die Formel φ, für die Breite durch ψ gegeben, so daß sich φ und ψ bei gegebenem $\mathbf{t}$ berechnen lassen, indem Ausnahmefälle wie immer ausgeschlossen sind.

Zur Zeit $\mathbf{t}$ sei die Größe des Blattes $\varphi\,\psi$ Flächeneinheiten, zur Zeit $\mathbf{t} + t$ sei sie $\varphi_{1.}\,\psi_{1.}$. Nach Satz I muß nun $\varphi_{1.}\,\psi_{1.} = \varphi\,\psi + t\,(\varphi\,\psi)' +$. sein. Für $t = 0,0\ldots{}_{*}\ldots z\ldots$ darf
. . . I′ . . . dies exakt: $\varphi_{1.}\,\psi_{1.} = \varphi\,\psi + t\,(\varphi\,\psi)'$ geschrieben und $\varphi_{1.}\,\psi_{1.}$ kann direkt durch Multiplikation von $\varphi_1 = \varphi + t\,\varphi'$ und $\psi_1 = \psi + t\,\psi'$ oder auch aus der Figur *)
in $\varphi\,\psi + \varphi\,.\,t\,\psi' + \psi\,.\,t\,\varphi' + t^2\,\varphi'\,\psi'$ zerlegt werden. Es folgt

*) Der schraffierte Teil der Figur ist mikroskopisch schmal zu denken, weil $t = 0,0\ldots{}_{*}\ldots z\ldots$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nun aus der Gleichung I′, wenn $\varphi\,\psi$ weggehoben wird, $t\,(\varphi\,\psi)' = \varphi\,t\,\psi' + \psi\,.\,t\,\varphi' + t^2\,\varphi'\,\psi'$. Da t nicht $= 0$ ist, darf durch t dividiert werden also $(\varphi\,\psi)' = \varphi\,\psi' + \psi\,\varphi' +$. wo das Zusatzglied bei unsrer Annahme für t nach Vorbemerkung bei b) weggelassen werden darf. Wir erhalten exakt: Satz II

$$(\varphi\,\psi)' = \varphi\,\psi' + \psi\,\varphi' \qquad \ldots \text{II} \ldots$$

in Worten: die Geschwindigkeit, mit der ein rechteckiges Blatt wächst, ist gleich der Summe der Geschwindigkeiten, mit der die beiden Seiten wachsen, jede dieser Geschwindigkeiten zuvor mit der anderen Seite multipliziert. (Die Stelle, an der die Geschwindigkeit zur Zeit **t** hiebei genommen ist, ist die gebrochene Linie A B ; B C) oder auch: „Die Geschwindigkeit eines Produktes aus zwei Faktoren ist gleich der Summe zweier Produkte, das eine gebildet aus dem ersten Faktor und der Geschwindigkeit des zweiten, das andere aus dem zweiten Faktor und der Geschwindigkeit des ersten."

10) Nach Satz II wird die Geschwindigkeit von $\mathbf{a\,t}$ oder $(\mathbf{a\,t})' = \mathbf{a\,t'} + \mathbf{t\,a'}$ oder, da $a' = 0$, wenn a konstant ist, wird $(\mathbf{a\,t})' = \mathbf{a\,t'}$. Oben war $(\mathbf{a\,t})' = \mathbf{a}$, also muß $\mathbf{t'} = 1 = 1\mathbf{t}^0$ sein, was auch aus $(\mathbf{a\,t})' = \mathbf{a}$ für $a = 1$ folgt und unmittelbar klar ist, da bei der in 3) erwähnten Vergleichung zweier Geschwindigkeiten, hier beide Male dieselbe Geschwindigkeit auftritt. Hängt aber a von **t** ab und ist etwa $= \mathbf{t}$, so wird $(\mathbf{t}^2)'$ nach Satz II

$$= \mathbf{t\,t'} + \mathbf{t\,t'} = 2\mathbf{t\,t'} = 2\mathbf{t}$$

und $\left(\frac{g}{2}\,.\,\mathbf{t}^2\right)' = \mathbf{g\,t}$, wenn g eine Konstante. Beim freien Fall auf der Erde ist sie im Mittel 980,89 cm . $\left\{\frac{g}{2}\text{ abgerundet} = 5\text{ Meter}\right\}$. Eine Anschauung für diese Formel bietet die Atwoodsche Fallmaschine und die Fallrinne. Eine sorgfältige Besprechung dieser Apparate ist im Unterrichte an dieser Stelle oder schon früher namentlich auch deshalb nötig, weil beim weiteren Vordringen zwar die logische Folge evident ist, jedoch der Anschauung zunächst wenig geboten werden kann. Es ließen sich wohl einige Apparate nach Art der Automaten erdenken, die diesem Übelstande abhelfen könnten, doch soll hierauf nicht näher eingegangen werden.

11) Es soll die Geschwindigkeit von $f = : \mathbf{t}^3$ und zwar an der Stelle, $\mathbf{t}_0 = 2{,}2$ Sekunden entsprechend, also bei 10,648 cm Entfernung vom Anfangspunkte bestimmt werden. Man kann hier nicht $(10{,}648)' = 0$ anwenden, denn die Kugel steht ja an dieser Stelle nicht still, sondern man muß nach Satz II $(\mathbf{t}^3)' = (\mathbf{t}^2\,.\,\mathbf{t}) = \mathbf{t}^2\,.\,\mathbf{t'} + \mathbf{t}\,(\mathbf{t}^2)'$

$$= \mathbf{t}^2\,.\,1 + \mathbf{t}\,.\,2\mathbf{t}$$

$$= 3\mathbf{t}^2 \qquad \text{bilden}$$

und nun erst $\mathbf{t}_0 = 2{,}2$ setzen [die Benennung Sekunden ist fortzulassen, vgl. 2) „Zahl"]. Man erhält: 14,52 und hat cm als Benennung zuzusetzen. Die Kugel würde also, wenn sie 10,648 cm nach dem Gesetz $f = : \mathbf{t}^3$ gelaufen wäre und nun, mit Aufhebung des Gesetzes, etwa in horizontaler Rinne ohne Reibung und Luftwiderstand weiter liefe, pro Sekunde 14,52 cm zurücklegen.

Die Geschwindigkeit von $\mathbf{t}^4$ kann in doppelter Weise gefunden werden.

$$(\mathbf{t}^4)' = (\mathbf{t}^2\,.\,\mathbf{t}^2)' = 2\mathbf{t}^2\,(\mathbf{t}^2)' = 2\mathbf{t}^2\,.\,2\mathbf{t} = 4\mathbf{t}^3 \text{ und}$$

$$(\mathbf{t}^4)' = (\mathbf{t}^3\,.\,\mathbf{t})' = \mathbf{t}^3\,\mathbf{t'} + \mathbf{t}\,(\mathbf{t}^3)' = \mathbf{t}^3\,.\,1 + \mathbf{t}\,.\,3\mathbf{t'} = 4\mathbf{t}^3 \text{ wie vorhin.}$$

$$(3 + 5\mathbf{t} + 8\mathbf{t}^2 + \mathbf{t}^3 + 7\mathbf{t}^4)' = 5 + 16\mathbf{t} + 3\mathbf{t}^2 + 28\mathbf{t}^3 \text{ (beachte 8) „analog").}$$

12) Der Schüler wird für ganzzahliges n den Satz $(\mathbf{t}^n)' = n\mathbf{t}^{n-1}$ durch Induktion schließen und wohl auch beweisen können. (Schluß von n—1 auf n.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

13) Es soll die Geschwindigkeit von $\frac{1}{t}$ bestimmt werden, so lange t als endlich vorausgesetzt wird. Dieselbe sei ein noch unbekannter, jedoch wenn t gegeben wäre, berechenbarer Ausdruck u. Da $1 = t\left(\frac{1}{t}\right)$ ist, so muß nach Satz II: $t \,.\, u + \frac{1}{t} \,.\, 1 = 0$ sein.

hieraus $u = : -\frac{1}{t^2} = (-1)\, t^{-2}$; $\left(\frac{1}{t}\right)' = (-1)\, t^{-2}$; Bedeutung des minus im Resultat? Richtung nach 0 hin. Die Geschwindigkeit nimmt bei wachsendem t ab. Als ein kleiner Bruchteil der ersten Sekunde verflossen war, befand sich die Kugel sehr weit vom Beobachter, der am Anfangspunkte 0 stand. Sie kam schnell, jedoch langsamer werdend, auf ihn zu; nach 1 Sekunde war sie 1 cm von 0 entfernt, nach 10 Sekunden nur noch $\frac{1}{10}$ cm von 0 entfernt; ihre Bewegung war kaum noch bemerkbar, $\frac{1}{100}$ cm pro Sekunde an dieser Stelle. Wird sie 0 je erreichen? Nein. Wird sie vor 0 stillstehen? Nein. Die Stelle 0 bildet also einen Ausnahmefall.

14) Es soll die Geschwindigkeit einer Bewegung bestimmt werden, die nach dem Gesetze $\sqrt{t}$ vor sich geht. und zwar an der Stelle 25 cm vom Anfangspunkte. Wir schließen zunächst, daß diese Stelle erst nach 625 Sekunden erreicht worden ist, also $t = 625$.

Die Geschwindigkeit von $\sqrt{t}$ möge ein unbekannter Ausdruck v sein, der für ein gegebenes t berechenbar ist. Es muß nach Satz II $(t)' = (\sqrt{t}\,\sqrt{t})' = 2\sqrt{t}\,v$ sein; $(t)' = 1$, also aus $1 = 2\sqrt{t} \,.\, v$ folgt $v = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, mithin $(\sqrt{t})' = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ Die Geschwindigkeit an der gegebenen Stelle beträgt $\frac{1}{2\sqrt{625}} = \frac{1}{50} = 0{,}02$ cm pro Sekunde.

Die durch $\sqrt{t}$ gekennzeichnete Bewegung ist am Anfange $(0 + .)$ explosionsartig, sinkt schon nach Verlauf einer Sekunde auf $\frac{1}{2}$ cm pro Sekunde und wird bald äußerst langsam, ohne je in völlige Ruhe überzugehen. Jeder noch so ferne Punkt der Bahn wird allmählich erreicht.

15) Wird bei dem Verfahren in 11) und 14) beachtet, wie ja die Benennung immer zunächst fortgelassen werden mußte und man es eigentlich nur mit Zahlen zu thun hatte, so ist es unschwer einzusehen, daß man von Sekunden und Centimenter und von der sich bewegenden Kugel auch absehen kann und mit den Zahlenwerten allein zu operieren hat, die dann auch wieder durch irgend welche Buchstaben verallgemeinert werden, ja sogar andere z. B. geometrische Benennungen erhalten können.

Es ist aber dabei notwendig, im Auge zu behalten, welcher Buchstabe die Rolle von t übernommen hat und man muß diesen Buchstaben daher als Marke (jetzt ohne Punkt, zum Unterschiede vom früheren Zahlenindex) hinzufügen. Man hat also z. B. $(s^2)' = 0$ wie oben, wenn s unabhängig von t, aber $(s^2)'_s = 2s$ wie vorhin $(t^2)' = 2t$, wenn s die Rolle von t übernahm. Es muß auch $(t^2)'_p$ [gesprochen: t^2-Strich in Bezug auf p] = Null sein, wenn t nicht abhängig von p ist. $(a^2 + ts)'_x = 0$; $(a^2 + ts)'_s = t$; $(a^2 + ts)'_a = 2a$; $(p + a^2 + ts)'_p = 1$.

16) Wenn man aus dem Zusammenhange beim letzten Beispiel wüßte, daß a, t und s von p abhängen [was durch Einklammerung oder auch durch in ( ) unten zugesetztes p kenntlich gemacht werden kann, manchmal muß], so wäre $(p + a^2 + ts)'_{(p)} = 1 + 2a \,.\, a'_{(p)} + ts'_{(p)} + st'_{(p)}$ oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch, was ganz dasselbe bedeuten soll, $(p + a^2 + ts)'_{(p)} = 1 + 2a(a)'_p + t(s)'_p + s(t)'_p$. nach Satz II. Hierin hätte $2a(a)'_p$ auch $= 2a \,.\, a'_p$ $\{ a = :$ Formel $(p) \}$ auch $= : (a^2)'_a \,.\, (a)'_p$ geschrieben werden können.

Dies führt auf Satz III:

$$f' = f'_s \,.\, s'$$

in Worten: Ist eine Formel von s abhängig, dieses wieder von t, so ist die Geschwindigkeit der Formel (in Bezug auf t) dieselbe, als wenn sie nach dem Einsatz s genommen wird, falls letztere noch multiplikativ mit der Geschwindigkeit des Einsatzes korrigiert wird.

Beweis: $f_{1.}$ entstand seiner Erklärung gemäß (vergl. 6) aus der Formel f, indem für das in ihr vorkommende t überall $t + 1 \,.\, t$ gesetzt wird und ist nach Satz I, Zusatz exakt $= f + tf'$, wenn $t = 0{,}0 \,..\, * \,..\, z$ ist. Nun muß man $f_{1.}$ auch erhalten können, wenn man, dem Begriffe eines Einsatzes zufolge, zuerst in s für t den Wert $t + t$ einführt, also nach Satz I, Zusatz $s_{1.} = s + ts' = s + \dot{s}$ erhält, und dann in f für s die Größe $s + \dot{s}$ setzt, was nach Satz I [für den Buchstaben s]

$$f_{1.} = f + \dot{s} f'_s + \,..\, \text{ergiebt.}$$

Unter Ausschluß eines Ausnahmefalles ist jetzt $\dot{s} = : ts'$ auch eine Größe mit beliebig hoher Nullenzahl und daher kann das Zusatzglied wegfallen.

Wir haben also aus: $f_{1.} = f + tf'$ und $f_{1.} = f + \dot{s} f'_s$ durch Subtraktion.

$tf' = \dot{s} f'_s$ und da t nicht $= 0$, kann dadurch dividiert werden, mithin

$$f' = \frac{\dot{s}}{t} f'_s = s' f'_s \quad \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Der Satz III kann auch die Form $f' : s' = f'_s$ erhalten und durch: ...(III)... $\frac{\dot{f}}{t} + . \; : \frac{\dot{s}}{t} + . = \frac{\dot{f}}{\dot{s}} + .$ kürzer, jedoch, wie mir scheint, weniger streng bewiesen werden.

17) Beispiele zu III. Es sei: $f = : t^6$; durch den Einsatz $s = : t^3$ kann f als $(t^3)^2$ dargestellt werden.

Man thut nun gut, den Buchstaben s nicht weiter zu benutzen, sondern dafür sogleich $[t^3]$ zu schreiben.

Dann wird nach Satz III

$(t^6)' = ([t^3]^2)' = 2\,[t^3] \,.\, 3t^2 = 6t^5$ (vgl. 12); $3t^2$ ist hier die multiplikative Korrektur.

Eine größere Zahl von Übungen wird an dieser Stelle zweckmäßig sein, einige davon mögen Platz finden.

Übung 1. $f = \sqrt{a + bt + ct^2}$; der Einsatz s ist hier der Radikand, dessen Geschwindigkeit $b + 2ct$ ist, also wird $f' = \dfrac{b + 2ct}{2\sqrt{a + bt + ct^2}}$

Übung 2. $f = \dfrac{1}{t^2}$; $s = : t^2$; $\left(\dfrac{1}{s}\right)'_s = -\dfrac{1}{s^2}$ vgl. 13,

$$\text{also } \left(\frac{1}{t^2}\right)' = -\frac{1}{[t^2]^2} \,.\, 2t = -\frac{2}{t^3} = -2t^{-3},$$

$$\text{analog } \left(\frac{1}{t^n}\right)' = -nt^{-n-1}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Übung 3. $f = \sqrt[4]{t} = \sqrt{\sqrt{t}}$; $s = \sqrt{t}$

$$\text{mithin } \left(\sqrt[4]{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{t}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{4}\, t^{-\frac{3}{4}}.$$

Die Geschwindigkeit einer n^{ten} Wurzel aus t sei u. Da $t = \left(\sqrt[n]{t}\right)^n$ ist, so ergiebt sich für $s = \sqrt[n]{t}$ nach Satz III : $1 = n\left(\sqrt[n]{t}\right)^{n-1} \cdot u$, mithin $u = \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}$. Es kann somit 12) auf beliebiges n verallgemeinert werden.

Übung 4. $(\sqrt{1+x})_x' = ?$ $(\sqrt{1-x})_x' = ?$

Es kann nun $(\sqrt{1-x^2})_x'$ auf zwei Arten, nach Satz II und nach Satz III gebildet werden. Es ist zu zeigen, daß beide Male dasselbe erhalten wird.

18) Es mögen die Geschwindigkeiten von $\cos(t)$ und $\sin(t)$ unbekannte Formeln u und v sein, die von t abhängen, so folgt aus $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ nach Satz III, wenn beiderseits die Geschwindigkeit genommen wird, $2\cos(t) \cdot u + 2\sin(t) \cdot v = 0$, also

$$\frac{u}{v} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)}, \text{ daher } u = -\sin t \cdot \text{Fac.}(t)$$
$$\text{und } v = \cos t \cdot \text{Fac.}(t),$$

wo Fac.(t) ein unbekannter Faktor ist, der möglicherweise von t abhängig sein kann. Aus der bekannten Formel $1 - \cos(2t) = 2\sin^2(t)$ folgt mit Benutzung der Formeln für u und v nach III $+\sin(2t) \cdot \text{Fac.}(2t) \cdot 2 = 2 \cdot 2\sin t \cdot \cos t \cdot \text{Fac.}\, t$, also, da $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ ist, $\text{Fac.}(2t) = \text{Fac.}(t)$, mithin auch $\text{Fac.}(4t) = \text{Fac.}(2t)$ etc . . .

Da nun ein kleiner Bogen des Einheitskreises nur wenig von $\sin t$ abweicht, kann man $t = \sin(t) + .$ setzen; für $t \gtrless 0{,}017584$ [zum Zentriwinkel $1^0\,0'\,27''$ gehörig] bewirkt das Zusatzglied eine Veränderung in der 6ten Dezimale; für $t \gtrless 0{,}0\,..\,{}_*\,...\,z\,..$ haben wir exakt $t = \sin(t)$. Wird beiderseits die Geschwindigkeit genommen, so erhält man $1 = \cos(t) \cdot \text{Fac.}(t)$ und hieraus bei dem Werte $t \gtrless 0{,}0\,..\,{}_*\,..\,z\,..$, für welchen $\cos(t)$ exakt $= 1$ ist, auch $\text{Fac.}(t) = 1$ für derartige t. Da nun vorhin $\text{Fac.}(t) = \text{Fac.}(2t) = \text{Fac.}(4t) \,.\,.\,.\,.\,.$, wird der Fac.$(t)$ überhaupt $= 1$, ist also konstant. Somit ist $(\cos(t))' = -\sin(t)$ und $(\sin t)' = \cos(t)$. Man kann das Resultat auch leicht geometrisch anschaulich machen, resp. so auch herleiten, jedoch, wie mir scheint, weniger streng.

Übung 5. $[\cos(\sqrt{g}\, t)]' = -\sin(\sqrt{g}\, t) \cdot \sqrt{g}$

$$[\cos(t^2)]' = -\sin(t^2) \cdot 2t$$
$$[(\sin x)^2]_x' = 2(\sin x) \cdot \cos x = \sin(2x)$$
$$\left(\frac{1}{2}\left[1 - \cos(2x)\right]\right)_x' = +\frac{1}{2}\sin(2x) \cdot 2 = \sin(2x).$$

$$(\tan x)_x' = \left(\sin x\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)_x' = \sin x\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right) \cdot (-\sin x) + \frac{1}{\cos x} \cdot \cos x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ (nach II und III.)}$$

$$(x\sqrt{2px})_x' = \frac{x \cdot 2p}{2\sqrt{2px}} + \sqrt{2px} = \frac{3}{2}\sqrt{2px}.$$

$$\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)' = \frac{(1+\sin x)(-1)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} + \frac{\cos x}{(1-\sin x)} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

19) Es kann der Prozeß, wonach die Geschwindigkeit genommen wird, auch iteriert werden. Dabei nennt man die Geschwindigkeit von der Geschwindigkeit die „Beschleunigung". Es ist damit weiter keine Schwierigkeit verknüpft.

$[a + bt + ct^2 + \delta \,.\, t^3]'' = [b + 2ct + 3\delta \,.\, t^2]' = 2c + 6 \,.\, \delta \,.\, t$;

$(\sin t)'' = (\cos t)' = -\sin(t)$

$(\sin t)''' = -\cos t$

$(\sin t)'''' = \sin t$, daher entsteht bei fortgesetztem Prozesse eine Periode, analog bei $\cos(t)$; $(\cos t)' = -\sin t$; $(\cos t)'' = -\cos t$ etc..

20) Auch die umgekehrte Aufgabe ist wichtig. Es soll in die leer gelassene Klammer ein Ausdruck derart gesetzt werden, daß die Gleichung $(\qquad)_x' = a + bx + cx^2$ stimmt. Hierbei muß man dem Ausdrucke noch eine beliebige, nur nicht mit x in Zusammenhang stehende Größe, also ein Konstante hinzufügen, indem 7) beachtet wird. Der Ausdruck ist, wie man unschwer findet:

$$c_1 + ax + \frac{b}{2}x^2 + \frac{c}{3}x^3.$$

Übung 6. Zu ermitteln: $(\qquad)'' = a \sin(wt)$;

zuerst suche man $[\qquad]' = a \sin(wt)$;

in die Klammer $[\qquad]$ wird: $c - \frac{a}{w}\cos(wt)$

und in die ursprüngliche Klammer somit: $c_1 + ct - \frac{a}{w^2}\sin(wt)$ gesetzt werden müssen.

Ferner: $\left(\qquad\right)_x' = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ zu ermitteln;

da $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^2 x \,.\, \frac{1}{\cos^2 x}$ ist, so wird man mit Übung 5 für die Klammer

$c + \frac{1}{3}\tan^3 x$ schließen können.

Im Folgenden wird auch noch $(\qquad)_x' = 2\sin^2 x$ gebraucht werden;

da dies $[= 1 - \cos(2x)] = 1 + \sin^2 x - \cos^2 x$ ist,

so $(\qquad) = x - \sin x \cos x$;

ähnlich $(\qquad)_x' = 4\sin^4 x$

$= 3\sin^2 x\,(1 - \cos^2 x) + \sin^4 x$

also $(\qquad) = \frac{3}{2}(x - \sin x \cos x) - \sin^3 x \cos x$;

oder auch $(\qquad)_x' = 6\sin^6 x$

$= 5\sin^4 x\,(1 - \cos^2 x) + \sin^6 x$

mithin $(\qquad) = \frac{5}{4}\left[\frac{3}{2}(x - \sin x \cos x) - \sin^3 x \cos x\right] - \sin^5 x \cos x$; etc...

Das Fallgesetz gestaltet sich hiernach so. Man nimmt die Beschleunigung: g an. Nennt man nun den Fallraum s, so muß $s'' = g$ sein, mithin $s' = c + gt$, [das auch v genannt wird] und $s = c_1 + ct + \frac{g}{2}t^2$; c und c_1 sind aus den Anfangs- resp. Endwerten zu ermitteln.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

21) Sehr wesentlich für den mathemathischen Unterricht auf der oberen Stufe werden nun die Erweiterungen des Hauptsatzes I, zu denen wir jetzt übergehen.

Nach Art der Dezimalbruchentwickelung können wir annehmen, daß der Satz I erweitert:

$$f_1 = f_0 + tf'_0 + t^2u + \ldots$$

lauten wird, $\left[t \text{ z. B.} = : \frac{1}{10} \right]$, worin u eine unbekannte Formel in **t**, für welche $u_1 = u + tu' + \ldots$ gilt (ebenfalls nach I).

Um u zu ermitteln, bilden wir auf zwei Arten f_2, einmal, indem wir statt t, was ja beliebig war, einen doppelt so großen Wert: 2t einsetzen, zweitens, indem wir statt $\mathbf{t}_0$ den Einsatz $\mathbf{t}_0 + t$ machen. $f_1.$ enthielt ja $\mathbf{t}_0 + 1t$; dies wird also in beiden Fällen zu $\mathbf{t}_0 + 2t$, mithin entsteht beide Mal f_2. Wir haben hiernach

$$\text{einmal: } f_2. = f_0 + 2tf' + 4t^2u + \ldots$$

$$\text{zweitens: } f_2. = f_1. + tf_1'. + t^2u_1. + \ldots$$

In der letzten Formel setzen wir für $f_1.$

$$\text{wiederum} \ldots f_1. = : f_0. + tf_0' + t^2u + \ldots$$

$$\text{für } tf_1'. \ldots\ldots\ldots\ldots tf'_0. + t^2f'' + \ldots$$

$$\text{für } t^2u_1. \ldots\ldots\ldots\ldots t^2u + \ldots \text{ ein.}$$

Durch Vergleichung ergiebt sich: $4t^2u = 2t^2u + t^2f_0''$ mithin $u = {}^1{}_2 f_0''$, so daß also Satz I vollständiger $f_1. = f_0. + tf_0'. + \frac{t^2}{1.2} f_0'' + \ldots$ lautet. Dies Verfahren kann ganz ebenso fortgesetzt werden; man nimmt $f_1. = f_0. + tf_0'. + \frac{t^2}{1.2} f_0'' + t^3v + \text{an}$, bildet wiederum auf beide Arten, durch $t = : 2t$ und $\mathbf{t}_0 = : \mathbf{t}_0 + t$ (= : gesprochen: substituiert) $f_2.$ und erhält durch Vergleichung:

$$8t^3v = 2t^3v + \frac{t^3}{1.2} f_0''' + \frac{t^3}{1.2} f_0''' \text{ also } v = \frac{1}{1.2.3} f_0'''$$

Wir nehmen nun an, es sei schon gezeigt, daß

$$f_1. = f_0. + tf_0'. + \frac{t^2}{1.2} f_0'' + \ldots \frac{t^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} f_0.^{(n-1)} + t^n w + \ldots$$

sei; wir haben dann, wenn wir auf beide Arten $f_2.$ bilden und vergleichen, durch t^n dividieren,

$$2^n w = 2w + f^{(n)} \left[\frac{1}{1.2\ldots(n-1)} + \frac{1}{1.2\ldots(n-2)} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2\ldots(n-3)} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \ldots \right]$$

$$\text{woraus } w = \frac{n + \frac{n(n-1)}{1.2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \ldots + n}{1.2.3.4\ldots(n-1)\, n.(2^n-2).}$$

Es möge nun schon $1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \ldots + 1 = 2^{n-1}$ bewiesen sein, so folgt, wenn wir beiderseits mit $1 + 1 = 2$ multiplizieren,

$$\begin{array}{lllll} 1 + n - 1 & + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} & + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} & + \ldots \\ + \quad 1 & + \quad n - 1 & + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} & + \ldots \\ \hline 1 + \quad n & + \frac{(n-1).n}{1.2} & + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.3}.n & + \ldots + 1 = 2^n; \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hieraus erhellt, daß sich für $w = \frac{f^{(n)}}{1 . 2 \ldots . n}$ ergiebt; Satz I lautet demnach, zu Satz IV erweitert:

$$f_{1.} = f + tf' + \frac{t_2}{1 . 2} f'' + \frac{t^3}{1 . 2 . 3} f''' + \ldots\ldots \quad ^{*)}$$

22) Anwendungen des Satzes IV. Zunächst sei $f = : \mathbf{t}^n$ folglich: $f' = n\mathbf{t}^{n-1}$ [vgl. 12) und Übung 3.], $f'' = n(n-1)\mathbf{t}^{n-2}$; $f''' = n(n-1)(n-2)\mathbf{t}^{n-3}$ etc., daher $f_{1.}$ oder $(\mathbf{t} + t)^n = \mathbf{t}^n + tn\mathbf{t}^{n-1} + \frac{t^2 n(n-1)}{1 . 2}\mathbf{t}^{n-2} + \ldots$ oder wenn man $\mathbf{t} = : a$; $t = : b$ schreibt.

$$(a + b^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 . 2} a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} a^{n-3}b^3 + \ldots$$

Hiermit ist also der binomische Lehrsatz bewiesen. Weitere Folgerungen übergehe ich hier.

Ferner $f = \sin \mathbf{t}$; in 19) sind f', f'', ... abgeleitet, mithin nach IV)

$$\sin(\mathbf{t} + t) = \sin \mathbf{t} + t\cos \mathbf{t} - \frac{t^2}{1 . 2}\sin \mathbf{t} - \frac{t^3}{1 . 2 . 3}\cos \mathbf{t} + \ldots$$

Für $\mathbf{t}$ = Null und $t = x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \frac{x^5}{1 . 2 . 3 . 4 . 5} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

Konvergenzfragen können unerledigt bleiben, indem man nur genügend kleine Bogen anzuwenden pflegt. [x ist immer ein Bogenstück des Einheitskreises. Ist der Winkel in Graden und Minuten gegeben, so mache man ihn zu Minuten und multipliziert mit

$$\frac{\pi}{10800}; \log \frac{\pi}{10800} = 0{,}46373 - 4.]$$

Analog wie $\sin x$ erhalten wir $\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^4}{1 . 2 . 3 . 4} - \frac{x^6}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} + \ldots$

Sind diese Reihen abgeleitet, können wieder $(\sin x)'$ und $(\cos x)'$, ferner $\sin^2 x + \cos^2 x$; $\sin(x + y)$ . . etc. gebildet werden.

Da $\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x)$ ist für $i = \sqrt{-1}$, so liegt es nahe, $\cos x + i \sin x$ als Reihe darzustellen. Es ergänzen sich die geraden Potenzen des Cosinus mit den ungeraden des Sinus. Beachtet man noch, daß $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ (Periode) ist, so erhält man den Moivre'schen Ausdruck

$$\cos x + i \sin x = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{1 . 2} + \frac{(ix)^3}{1 . 2 . 3} + \frac{(ix)^4}{1 . 2 . 3 . 4} + \ldots$$

Da links ein Potenzieren auf die n^{te} Potenz nur den Bogen x ver-n-facht,**) muß das auch rechts der Fall sein. Wir erheben auf die $(-i)$te und erhalten:

$$(\cos x + i \sin x)^{-i} = 1 + x + \frac{x^2}{1 . 2} + \frac{x^3}{1 . 2 . 3} + \ldots.$$

*) Eine naheliegende historische Notiz lassen wir fort, da das Zusatzglied noch nicht diskutiert ist und der Satz erst dann in vollständiger Form ist. Man dürfte sonst mit Recht eine Vorwegnahme rügen.

**) Dies kann aus der Trigonometrie als bekannt vorausgesetzt werden. Andernfalls ziehe man 37) herbei.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die linke Seite kann: $\cos(-ix) + i\sin(-ix)$ und dies wieder $\left(\cos(-i) + i\sin(-i)\right)^x$ oder $(\cos i - i\sin i)^x$ geschrieben werden. Ist in der Gleichung:

$$(\cos i - i\sin i)^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$x = 1$, so wird rechts der Wert

$$1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \ldots = 2{,}718281828459\ldots = e.$$

erhalten. Es muß also, was zunächst freilich der Anschaulichkeit entbehrt,*) $\cos i - i\sin i = e.$ sein. Bildet man

$$\left(e.^x\right)'_x = \left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right)'_x$$

so ergiebt sich: $1 + \frac{2.x}{1.2} + \frac{3.x^2}{1.2.3} + \ldots = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \ldots$ also wieder $e.^x$

Daher hat die Exponentialfunktion $e.^x$ die merkwürdige Eigenschaft, daß ihre Geschwindigkeit wiederum sie selbst ist, also auch iteriert,

$$\left(e.^x\right)^{////\ldots}_x = e.^x\,;\ \left(e.^{xy}\right)^{(10)}_{x^{(9)}y} = xy^9 e.^{xy} + 9y^8 e.^{xy}.$$

Sie wird dadurch für mathematische und physikalische Berechnungen sehr brauchbar. Logarithmenberechnung siehe 37.) Aus Vorstehendem erhellt schon, wie bequem hier verschiedene mathematische Lehrgebiete der Prima z. B. Kombinationslehre, figurierte Zahlen, arithmetische Reihen [vgl. den Beweis zu IV], binomischer Lehrsatz, trigonometrische und andere Reihenentwickelungen etc.. aus einem dominierenden Gesichtspunkte, eigentlich dem Satze I sich ergeben, die hier im Einzelnen nicht weiter verfolgt werden können.

Eine andere Erweiterung von Satz I (nämlich V) wird für die Stereometrie wichtig und auch die Kurvenlehre kann im Folgenden angebahnt werden, wenn sie auch auf Kegelschnitte beschränkt bleiben muß.

23) Indem wir in Satz I für $\mathbf{t}_0.$ den Wert $\mathbf{t}_0 + t$ substituierten, erhielten wir oben: $f_2. = f_1. + tf'_1. + .$, denn $f'_2.$ hängt ja von $\mathbf{t}_0 + 2t$ ab. Wird wieder $\mathbf{t}_0 = : \mathbf{t}_0 + t$ eingesetzt, so ergiebt sich: $f_3. = : f_2. + tf'_2. + \ldots$ endlich: $f_{1000}. = f_{999}. + tf'_{999}. + .$ [Es ist hier zweckmäßig eine Zahl als Index, nicht einen Buchstaben zu wählen, um die Vorstellung des Schülers zu fixieren. Natürlich kann auch eine andere Zahl als 1000. gewählt werden.] Es mögen nun der Reihe nach folgende Gleichungen aufgestellt und addiert werden:

$$\begin{aligned} f_{101}. &= f_{100}. + tf'_{100}. + . \\ f_{102}. &= f_{101}. + tf'_{101}. + . \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f_{1000}. &= f_{999}. + tf'_{999}. + . \end{aligned}$$

Es ergiebt sich durch Addition $f_{1000}. = f_{100}. + \sum_{100.}^{999.} tf'_{*} + .$,
indem sich $f_{101}.$ aus der ersten Gleichung gegen $f_{101}.$ aus der zweiten Gleichung und so fort bis $f_{999}.$ aus der vorletzten gegen $f_{999}.$ aus der letzten weghebt und das Σ von 100 bis 999 besagt,

*) Siehe jedoch Nr. 46.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daß das Glied $+ tf'_*$ an Stelle des Sterns mit dem Index 100, 101, . . . 999 zu versehen ist. Ist nun t eine Größe $0{,}0 \,.\, _* \,.\, z$, so haben wir zwar in jeder Zeile, wenn sie als Endergebnis betrachtet wird, das Recht, $+ .$ fortzulassen, nach 6) Zusatz; aber, wenn wir nun, statt von 100 bis 1000 zu summieren, von $10_* \,.\,.$ bis $100_* \,.\,.$ die Summation ausführen, muß es zunächst zweifelhaft erscheinen, ob das $+ .$ im Endresultat: (Satz V)

$$\sum_{10_*}^{99_*} tf' = f_{100*} - f_{10*} \qquad \ldots V.$$

ebenfalls wegfallen kann. Dies kann aber im Hinblick auf Satz IV geschehen, indem das dritte Glied: $\frac{t^2}{1\,.\,2} f''$ war, die Änderung also erst in einer beliebig hohen Dezimale erfolgt, falls nur nicht f'' einem Ausnahmefalle angehört.

24) Die Anwendung dieses Satzes V., den wir auch: $\sum_{0.}^{999.} \mathfrak{x} f'_x = f_{1000.} - f_{0.}$ schreiben können, indem x die Rolle von **t** und $\mathfrak{x}$ die von t übernimmt (vgl. 15), wird einige Nachhülfe erfordern. Sie sei an folgendem Beispiel erörtert. Es soll die Halbkugel (Fig. 4) berechnet werden.

Wir teilen den Radius $\overline{OA} = R$ in 1000 Teile; [1000 steht hier für $100_* .$; ist aber bequemer zu sprechen]. Jedes Teilchen sei $\mathfrak{x} = \frac{R}{1000}$.

Nach Pythagoras ist im Dreiecke OSP $x^2 + y^2 = R^2$. Die einzelne Lamelle ist: $y^2\pi \,.\, \mathfrak{x} = (R^2 - x^2)\,\pi\,\mathfrak{x}$, die Halbkugel also $= \sum_{0.}^{999.} \mathfrak{x} \left[(R^2 - x^2)\,\pi \right]$, indem $x_{0.} = 0$ ist, $x_{1.} = x_{0.} + 1 \,.\, \mathfrak{x}$; $x_{2.} = x_{0.} + 2\,\mathfrak{x}$; . . $x_{999.} = x_{0.} + 999\,\mathfrak{x} = 999\,\mathfrak{x}$, also fast schon $= R$ ist.

Nach dem Satze V muß nun

$[R^2\pi - x^2\pi] =: f'_x$ sein, also ist nach 20) $\left(\qquad \right)'_x = R^2\pi - x^2\pi$ zu bilden. Die Klammer enthält dann $f =: R^2\pi x - \frac{x^3\pi}{3} + c$. Da nun die $\sum_{0.}^{999.} = f_{1000.} - f_{0.}$ sein soll, so bilde man $f_{1000.}$, indem man in f für $x =: x_{0.} + 1000\,\mathfrak{x} = R$ und $f_{0.}$, indem man: $x = x_{0.} = 0$ setzt,

$$f_{1000.} = R^2\pi R - \frac{R^3\pi}{3} + c$$

$$f_{0.} \quad = \quad c \qquad \text{und subtrahiere, so}$$

$$f_{1000.} - f_{0.} = R^3\pi - \frac{R^3\pi}{3} = \frac{2\,R^3\pi}{3} = \text{Halbkugel.}$$

Der Kugelinhalt wird $= \frac{d^3\pi}{6}$, wenn $d = 2R$ der Durchmesser ist. Ist R in cm gegeben, so sind kcm zuzusetzen. *)

*) Bei Formeln möge man jedoch lieber Kubikzentimeter ausschreiben oder „Kubikeinheiten" zusetzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Übung 7.) Analog die Kugelschicht zu berechnen. (Fig. 4a.) Es seien $450\,\mathfrak{x} =: a$ und 770 Teile $\mathfrak{x} = b = a + h$,

$$\text{so wird } f_{770\cdot} = R^2\pi(a+h) - \frac{(a+h)^3\pi}{3} + c$$

$$f_{450\cdot} = R^2\pi a \qquad - \frac{a^3\pi}{3} \qquad + c\,.$$

$$\text{Mithin } \sum_{450\cdot}^{769\cdot} = R^2\pi h - a^2 h\pi - a h^2\pi - \frac{h^3\pi}{3}$$

$$\text{Da nun } \left.\begin{aligned} R^2 &= a^2 + r^2 \\ &= (a+h)^2 + \varrho^2 \end{aligned}\right\} \text{ also } = a^2 + ah + \frac{h^2}{2} + \frac{r^2}{2} + \frac{\varrho^2}{2}$$

ist, so erhält man für die Kugelschicht $\frac{r^2\pi h}{2} + \frac{\varrho^2\pi h}{2} + \frac{h^3\pi}{6}$ Kubikeinheiten.

[Die Zahlen 450 und 770 sind willkürlich, könnten aber auch einem bestimmten Beispiele entsprechen und mußten, um das Resultat ohne Zusatzglied zu erhalten, als 450 * und 770 * gedacht worden sein. Sie können später durch $\left|\begin{matrix} x = b \\ x = a \end{matrix}\right.$ ersetzt werden.]

Übung 8. Den Kegelinhalt zu ermitteln. (Fig. 5); die Kegelhöhe k werde wiederum in 1000 Teile $\mathfrak{x}$ geteilt. Es gilt $x : y = k : r$, also $y = \frac{r\,x}{k}$; die einzelne Lamelle $y^2\pi.\,\mathfrak{x}$ wird $= \frac{r^2 x^2 \pi}{k^2}\mathfrak{x}$ und der Kegel ist daher $= \sum_{0\cdot}^{999\cdot} \left[\frac{r^2 x^2 \pi}{k^2}\right] \mathfrak{x}$ folglich muß $\frac{r^2 x^2 \pi}{k^2}$, wenn Satz V zur Anwendung kommen soll $= f'_x$ sein; wir müssen also nach 20) aus $\left(\qquad\right)'_x = \frac{r^2 x^2 \pi}{k^2}$ den Inhalt der $(\qquad) =: f$ ermitteln.

$$\text{Er wird } c + \frac{r^2 x^3 \pi}{3k^2} =: f\,, \text{ denn } (x^3)'_x = 3\,x^2;$$

$$f_{1000\cdot} = c + \frac{r k^3 \pi}{3k^2}, \text{ weil } 1000\,\mathfrak{x} = k \text{ war,}$$

$$f_{0\cdot} = c \qquad\qquad, \text{ weil } \quad 0.\,\mathfrak{x} = 0 \text{ ist,}$$

$$\text{also Kegelinhalt} = \frac{r^2\pi k}{3} \text{ Kubikeinheiten.}$$

(Vgl. Übung 15 und 16).

25) Eine dritte Erweiterung des Satzes I hat keine Schwierigkeit, nur muß man der Bezeichnung einige Sorgfalt zuwenden. Nachdem man nach Satz I $f_{1\cdot} = f + \mathfrak{x}\,.\,f'_x + .$ angesetzt, denke man sich in der Formel f außer x auch ein y, welches in $y + 1\,\mathfrak{y}$ übergehen soll. Man muß die Zahlenindizes, die durch Punkte gekennzeichnet sind, von den Buchstabenmarken,*) vgl. 15), außerdem einen ersten und zweiten Platz unterscheiden. [auf x und y bezüglich] Sehen wir zu,

*) Des bequemeren Druckes halber setzen wir dann Zahlenindizes und Buchstabenmarken in eine Zeile. (!)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

was aus I wird. $f_{1\cdot}$ wird dann in $f_{1\cdot 1\cdot}$ übergehn, d. h. also, für x_0 steht $x_0 + 1 \,.\, \mathfrak{x}$ und für y_0 steht $y_0 + 1\,\mathfrak{y}$; f das doch f_0 war, wird zu $f_{0\cdot 1\cdot}$ und dies nach Satz I zu $f_{0\cdot 0\cdot} + \mathfrak{y}\, f'_{0\cdot 0\cdot y} +$. endlich wird das $\mathfrak{x}\, f'_x$, das ja eigentlich $\mathfrak{x}\, f'_{0\cdot x}$ war, zu $f'_{0\cdot 1\cdot x}$ und dies ist nach Satz I $= \mathfrak{x}\, f'_{0\cdot 0\cdot x} + \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\, f''_{0\cdot 0\cdot x;y} +$.

Beabsichtigen wir nun $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht zu groß zu nehmen, so kann das in $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$ multiplizierte Glied leicht unter eine bestimmte Dezimale herabgedrückt werden, falls nur kein Ausnahmefall vorliegt, etwa $f''_{0\cdot 0\cdot x;y}$ eine Größe wie R in der Vorbemerkung wäre, d. h. nicht mehr zu den berechenbaren Zahlen gehörte. Es wird daher Satz VI $f_{1\cdot 1\cdot} = f + \mathfrak{x}\, f'_x + \mathfrak{y}\, f'_y +$. VI
indem die Nullen wieder weggelassen werden dürfen. Eine Ausdehnung auf x, y, z . . . . ist ohne weiteres klar.

26) Durch Satz VI kann für Gleichungen und Kurvenlehre eine Grundlage gewonnen werden. Wir wollen die linke Seite einer auf Null gebrachten Gleichung in x und y kurz mit: l bezeichnen; l ist also ein Ausdruck wie etwa $x^2 + y^2 - r^2$ und $l = 0$ wäre dann ein Kreis. . . . .

Es liegt im Begriffe einer Bestimmungsgleichung z. B. der Gleichung: $l = 0$, daß sie . . . . . A)
durch eine Reihe von Zwischengleichungen umgeformt werden kann, bis sie zuletzt die Gestalt:

y = einer von x abhängigen event. mehrdeutigen Formel, ... B)

also doch auch noch die einer Bestimmungsgleichung annimmt. Alle diese Gleichungen sind dann in Beziehung auf die ihnen genügenden Werte, als dasselbe besagend anzusehen, indem Faktoren in x und y nicht herausfallen mögen.

Daher wird ein für B) passendes Wertepaar auch stets für A) d. i. für $l = 0$ passen. — Setzt man nun in A) also in die Gleichung $l = 0$ statt x_0 den Wert $x_1 = x_0 + \mathfrak{x}$, so wird, wenn die Gleichung für x_0 und y_0 erfüllt war und auch wieder für $x_1 = x_0 + \mathfrak{x}$ und $y_1 = y_0 + \mathfrak{y}$ erfüllt sein soll, $\mathfrak{y}$ in ganz bestimmter, jedoch noch unbekannter Weise von $\mathfrak{x}$ abhängen. Dies Verhältnis $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ soll ermittelt werden und zwar für Größen $0{,}0_* z$ und $0{,}0_* z_1$. Statt es aus A) zu ermitteln, können wir es ebensogut, wie wir sahen, aus B) bestimmen.

Wir haben dann aus B) nach Satz I exakt $y_{1\cdot} = y_{0\cdot} + \mathfrak{x} \cdot y'_{(x =: x_0)}$*) oder auch: $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}\, y'_{(x_0)}$ und $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ ist nun bekannt $= y'_{(x_0)}$.

Die linke Seite aus A), nämlich l wird nach Satz VI [bei analogem Zusatze wie in 6)] zu $l_{1\cdot 1\cdot} = l + \mathfrak{x}\, l'_{x_0} + \mathfrak{y}\, l'_{y_0}$.

$l_{1\cdot 1\cdot}$ muß nun aber nach dem Begriffe der Gleichung, wenn $x_{1\cdot}$ und das ebenbestimmte $y_{1\cdot}$ [aus B] eingesetzt worden, also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die nämlichen Größen, wie vorhin bedeuten, identisch $= 0$ sein, also ist auch:

$l + \mathfrak{x}\, l'_{x_0} + \mathfrak{y}\, l'_{y_0} = 0$ und da $l = 0$ war (für x_0; y_0), ist auch: $\mathfrak{x}\, l'_{x_0} + \mathfrak{y}\, l'_{y_0} = 0$.

Hierin, da die Größen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nach 4) zwar nahezu Null, aber von Ausnahmefällen abgesehen, wenigstens nicht gleichzeitig Null selbst werden können, bleibt das Verhältnis $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ ein be-

*) Gesprochen: Geschwindigkeit von y nach x an der Stelle $x =: x_0$ (vgl. 11). Man schreibt auch kurz $y'_{(x_0)}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

stimmtes, nämlich: $-l'_{x_0} : l'_{y_0}$. Anderseits war $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = y'_{(x_0)}$ [die Klammer deutet an, daß y von x abhängig gedacht wird (vgl. 16).] Hiermit sind eigentlich drei Beziehungen bewiesen, die wir in

VII .... Satz VII $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = -l'_{x_0} : l'_{y_0} = y'_{(x_0)}$ zusammenfassen.

Anmerkung. Eine geometrische Deutung dieses Beweises führt auf Satz VIII (Fig. 6). Man muß nämlich T_1 und T_0 durch Drehung von ST_0 um T_0 einander so nahe kommen lassen, daß T_0S als Tangente angesehen werden kann. $\frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{x}'}$ ist $\tan(\tau')$ nach der Figur, aber $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ ist $= \tan(\tau') + . = \tan$ von einem Winkel τ, den die geometrische Tangente in $T_0 = (x_0 ; y_0)$ an

VIII ... die Kurve: $l = 0$ mit der Abscisse bildet. Satz VIII. $y'_{(x_0)} = \tan\tau$.

27) Beispiele.

Gleichung $3x + 4y - 34 = 0$ | $y = : \frac{17}{2} - \frac{3x}{4}$

$l = : 3x + 4y - 34 ; l'_x = 3 ;$

$l'_y = 4$, also $-l'_x : l'_y = \frac{-3}{4}$ ..... $y'_{(x.)} = \frac{-3}{4}$

Gleichung $y^2 - 2px = 0$ | $y = + \sqrt{2px}$

$l = : y^2 - 2px$

$l'_x = -2p ; l'_y = 2y$ | $y'_{(x)} = + \frac{1}{2\sqrt{2px}} . 2p$

$-l'_x : l'_y = \frac{p}{y}$ ..... $= \frac{p}{y}$

Es muß also: $\tan\tau = \frac{p}{y} = \frac{py}{y^2} = \frac{y}{2x}$ sein; Daher wird die Parabeltangente (siehe Fig. 7) die Strecke: $-s$ numerisch $= x \left| \overline{OS = S_1O} \right|$ auf der x-Axe abschneiden, d. h. es wird von der Scheiteltangente $\frac{y}{2}$ abgeschnitten werden.

Gleichung: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ | $y = + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$l = : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 ; l'_x = \frac{2x}{a^2}$

$l'_y = \frac{2y}{b^2}$ | $y'_{(x)} = + \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$

$-l'_x : l'_y = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$ ..... $= \frac{-b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$

Es kann nun $\tan\tau$ auch $= \frac{-xy}{a^2\left(\frac{y^2}{b^2}\right)} = \frac{-xy}{a^2 - x^2} = \frac{y}{\frac{-a^2}{x} + x} = \frac{y}{SS_1}$ geschrieben werden, mithin müssen bei der Ellipse (Fig. 8) $A_1 S_1 A S$ vier harmonische Punkte sein, weil dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nach dem Satze von der halben konjugierten Strecke $a^2 = x\,s$ sein möchte, s also $= \frac{a^2}{x}$ wird und $S_1 S = \frac{a^2}{x} - x$ (im absoluten Sinne), folglich $S_1 T$ Polare zu Pol S.

28) Ist $l = 0$ die Gleichung einer beliebigen Kurve (Fig. 9), $T_0 = (x_0 ; y_0)$ der Tangentialpunkt, so muß $\frac{\eta}{\xi - s} = \tan\tau = -l'_{x_0} : l'_{y_0}$ also $l'_{x_0} \cdot \xi + l'_{y_0} \cdot \eta =$ freiem Gliede sein. Das freie Glied wird $l'_{x_0} \cdot x_0 + l'_{y_0} y_0$ was auch bei Bestimmung von s folgen würde. Eine weitere Umformung des fr. Gl. möge hier unterbleiben.

Beispiel. Im Punkte $\frac{4}{5} ; \frac{3}{5}$ ist eine Tangente an die Ellipse:

$$2x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 2y + 1 = 0$$

gezogen. Die Gleichung der Tangente zu berechnen.

$$l = 2x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 2y + 1 ; \; l'_x = 4x + 2y - 3 ;$$

$$l'_{x_0} = \frac{16}{5} + \frac{6}{5} - 3 = \frac{7}{5} ; \; l'_y = 2x + 2y - 2 ; \; l'_{y_0} = \frac{4}{5} ;$$

$$\text{also: } \frac{7}{5} \cdot \xi + \frac{4}{5} \cdot \eta = \text{fr. Gl.}$$

Das fr. Gl. wird $\frac{28}{25} + \frac{12}{25} = \frac{8}{5}$ also ist $7\xi + 4\eta - 8 = 0$ die Gleichung der Tangente.

29) Wir stellen in einer Übersicht die bisher gewonnenen Sätze zusammen.

I) Der Hauptsatz: $f_{1.} = f + t f' + .$

II) und III) Produkt- und Substitutionssatz.

II) $(\varphi\,\psi)' = \varphi\,\psi' + \psi\,\varphi'$; III) $f' = f'_s \cdot s'$.

Drei Erweiterungen des Hauptsatzes:

IV) der Entwickelungssatz $f_{1.} = f + t f' + \frac{t^2}{1.2} f'' + \frac{t^3}{1.2.3} f''' + \ldots$

V) der Summationssatz: $\sum_{100.}^{999.} t f' = f_{1000.} - f_{100.}$

VI) der Hauptsatz für 2 oder mehr Variable.

$$f_{1.1.} = f + \mathfrak{x} f'_x + \mathfrak{y} f'_y + \ldots$$

VII) und VIII) Sätze über das Verhältnis der Zuwachse.

VII) $\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = -\frac{l'_x}{l'_y} = y'_{(x)}$ und $y'_{(x)} = \tan\tau \ldots$ VIII).

Die Sätze VII und VIII mußten getrennt werden, weil beim letzten VIII die Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten in's Spiel trat.

Hierzu mögen nun noch IX, ein Satz über das Max. und Min. und X, ein für die Mechanik wichtiger Satz hinzugefügt werden. [IX soll nur bedingt ausgesprochen werden.] Ein aufwärts geworfener Stein steigt so lange, bis seine Geschwindigkeit = Null ist und dann negative Werte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

annimmt, während sie vorher positive Werte besaß. Das Max. der Höhe war also erreicht, als die Geschwindigkeit = Null war. Aber da auch bei einem ruhenden Körper die Geschwindigkeit = Null ist, so ist aus dieser Beziehung, wie schon erwähnt, nur ein bedingter Schluß auf das Vorhandensein eines max. oder min. zu ziehen. Zwar läßt sich dieser Mangel beseitigen, doch ist es in den für den Schulunterricht zweckmäßigen Beispielen gewöhnlich leicht, mit dem Verstande oder durch eine Probe zu entscheiden, welcher Fall eintritt, so daß ein näheres Kriterium übrig erscheint. Wir sprechen daher Satz IX so aus:

IX . . . . „f wird meistens max. oder min., wenn $f' =$ Null ist."

Beispiel. Für welchen Wert wird die Formel: $(x - 5)(x - 3)$ ihren größten oder kleinsten Wert erhalten?

$(x^2 - 8x + 15)'_x = 2x - 8$; Wird $2x - 8 = 0$ gesetzt, so ist $x = : 4$, also $(4 - 5)(4 - 3) = -1$ der kleinste Wert, denn die Probe $x = : 5$ oder $x = : 3$ zeigt, daß ein min. erhalten wurde. Die Darstellung in einer Kurve ist hier zu empfehlen. Ist z. B. $y = : x^3 - 12x^2 + 45x - 54$ gegeben und wird dies graphisch dargestellt, so sieht man, daß von einem größten und kleinsten Werte absolut, d. h. hier „im Ganzen" genommen, keine Rede sein kann, relativ aber, d. h. in Bezug auf die nächste Umgebung, wird man zwei Gipfel (Kulminationspunkte)*) angeben können und die stellen das max. und min. dar. Um diese Punkte, in denen die Tangente parallel der x-Axe läuft, zu erhalten, bilden wir $(x^3 - 12x^2 + 45x - 54)'_x = 3x^2 - 24x + 45$ und lösen die quadr. Gl. $3x^2 - 24x + 45 = 0$ auf. Dann ist 3 der zum relativen Maximum: 0 und 5 der zum relativen Minimum: -4 gehörige Wert von x.

30) Häufig tritt zu der Forderung, den Formelwert: f zu einem max. oder min. zu machen, noch eine Bedingungsgleichung: $l = 0$ hinzu; (hier sind f und l Ausdrücke in x und y). Es läßt sich leicht zeigen, daß dann nur in Satz IX an Stelle von $f' = 0$ zwei Gleichungen:

$$f'_x + \lambda l'_x = 0 \text{ und}$$

. . IX′ . . (ebenso in Bezug auf y) $f'_y + \lambda l'_y = 0$ zu setzen sind,

wo λ ein zu eliminierender Faktor ist. Die Elimination ergiebt nämlich:

$$f'_x l'_y - f'_y l'_x = 0 \text{ oder mit Satz VII (aus } l = 0) \; f'_x + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} f'_y = 0.$$

Denkt man sich nun aus $l = 0$ die Größe y für ein bestimmtes, freilich noch unbekanntes x berechnet und in f eingesetzt, so hängt f nur noch von einer Größe ab.**) An Stelle des obigen f' muß also: $f'_{(x)}$ treten, wo x in Klammern geschlossen ist wegen des gedachten Einsatzes (vgl. 16 u. 26). $f'_{(x)}$ wird daher $= f'_x + f'_y \cdot y'_{(x)}$ (III) $= f'_x + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} f'_y$; dies sollte nun gleich Null gesetzt werden und wir erhalten somit das Resultat obiger Elimination, w. z. b. w.

---

*) Obwohl die Sätze I bis VIII es leicht möglich machen, Inflexionspunkte, Spitzen etc. zu behandeln, so schließen wir doch alles nicht zum Lehrpensum gehörende aus, nur für dieses die Hilfe in Anspruch nehmend, die die Geschwindigkeitssätze gewähren.

**) Es wird also $f_{1 \cdot 1 \cdot} = f_1$, wenn hier für y der Ausdruck in x eingesetzt ist.

$$f_{1 \cdot 1 \cdot} = f + \mathfrak{x} f'_x + \mathfrak{y} f'_y + \ldots \text{ und } f_1 = f + \mathfrak{x} f'_{(x)} + \ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

31) Eine Ausdehnung auf 3 Größen hat keine Schwierigkeit. Sind die Bedingungsgleichungen $l = 0$ und $m = 0$ gegeben, so wird f meistens max. oder min., wenn

$$\left\{\begin{array}{l} (f + \lambda l + \mu m)'_x = 0 \\ (\qquad\qquad\qquad)'_y = 0 \\ (\qquad\qquad\qquad)'_z = 0 \end{array}\right. \text{ erfüllt} \qquad \ldots \text{IX}'' \ldots$$

sind, worin λ und μ zwei zu eliminierende Faktoren bedeuten. Der Beweis kann im Unterrichte übergangen werden, eignet sich aber auch als Übungsaufgabe. Er sei hier kurz angedeutet.

Die Elimination ergiebt: $\begin{vmatrix} f'_x & l'_x & m'_x \\ f'_y & l'_y & m'_y \\ f'_z & l'_z & m'_z \end{vmatrix} = 0$

Da wie in 26) aus $l_{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot} = l + \mathfrak{x}\, l'_x + \mathfrak{y}\, l'_y + \mathfrak{z}\, l'_z + .$

und $m_{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot} = m + \mathfrak{x}\, m'_x + \mathfrak{y}\, m'_y + \mathfrak{z}\, m'_z + .$ die Gleichungen: $\mathfrak{x}\, l'_x + \mathfrak{y}\, l'_y + \mathfrak{z}\, l'_z = 0$

und $\mathfrak{x}\, m'_x + \mathfrak{y}\, m'_y + \mathfrak{z}\, m'_z = 0$ geschlossen werden können

und $\mathfrak{x} : \mathfrak{y} : \mathfrak{z} = \begin{vmatrix} l'_y & l'_z \\ m'_y & m'_z \end{vmatrix} : - \begin{vmatrix} l'_x & l'_z \\ m'_x & m'_z \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l'_x & l'_y \\ m'_x & m'_y \end{vmatrix}$ ergeben, so geht das Eliminationsresultat in $f'_x \cdot \mathfrak{x} + f'_y\, \mathfrak{y} + f'_z\, \mathfrak{z} = 0$ oder *) auch in $f'_x + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} f'_y + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{x}} f'_z = 0$ über.

Aus $f_{1 \cdot 1 \cdot 1} = f_1$ (wenn für y und z ihre aus $\left\{\begin{array}{l} l = 0 \\ m = 0 \end{array}\right.$ sich ergebenden Werte in x eingesetzt worden sind) folgt: $f'_{(x)} = f'_x + f'_{(y)}\, y'_{(x)} + f'_{(z)} \cdot z'_{(x)} = f'_x + \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} f'_y + \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{x}} f'_z$. Wird dies = Null gesetzt, so ergiebt sich das Eliminationsresultat.

32. Anwendungen zu Satz IX.

Aus einem zylinderförmigen Baumstamme den relativ-festesten Balken zu schneiden.

Da die relative Festigkeit : f proportional der Breite x [Fig. 10.)] und dem Quadrate der Höhe ist, so muß von einem Factor c abgesehen, $f = : x\, y^2 = \text{Max.}$ werden, während die Bedingungsgleichung: $x^2 + y^2 - d^2 = 0$ ist. d = Durchmesser des Kreises, der den Quer-Durchschnitt des Balkens bildet. Mithin $l = x^2 + y^2 - d^2$; $l'_x = 2x$; $l'_y = 2y$; $f'_x = y^2$; $f'_y = 2xy$. Es sind nach IX′ die Gleichungen $y^2 + \lambda . 2x = 0$ und $2xy + \lambda\, 2y = 0$ zu lösen.

*) Da $\mathfrak{x}$ nahezu Null, aber nicht Null selbst ist, so darf mit $\mathfrak{x}$ dividiert werden wie in 4).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus $y^3 - 2x^2 y = 0$; $y = 0$ zum Min. gehörig; $y^2 = 2x^2$ oder $y = x\sqrt{2}$ zum Max. gehörend. Die Bedingungsgleichung geht nun in $3x^2 = d^2$ über, hieraus $x = : \frac{d}{3}\sqrt{3}$ $y = \frac{d}{3}\sqrt{6}$ und Festigkeitsmaximum $f = : \frac{2}{9} d^3 \sqrt{3}$ mal c. Zur Konstruktion ist $x : y = 1 : \sqrt{2}$ am bequemsten. Man verlängert die Seite des Einheitsquadrats, bis sie gleich der Diagonale wird, bis E und vergrößert die Figur so, daß $BE' = d$ wird. Fig. 10.

Übung 9. In einen Kegel [r; k] den größten Zylinder: $x^2 \pi y$ zu beschreiben. Es muß $k : r = k - y : x$ oder $kx + ry - rk = 0$ gelten;

$$\left.\begin{array}{r} \text{Mithin } 2x\pi y + \lambda k = 0 \\ \text{und } x^2\pi \,.\, 1 + \lambda r = 0 \end{array}\right\} \text{ aufzulösen.}$$

$2x\pi yr - x^2\pi k = 0$; $x = : 0$ zum Min. gehörend;

$2yr = xk$, also aus der Bedingungsgl.

$3ry = rk$; $y = \frac{k}{3}$. „Die Höhe des größten Zylinders ist ein Drittel der Kegelhöhe." (Fig. 11.)

Übung 10. In ein Kugelsegment [r; k; Kugelradius = R] den größten Zylinder zu konstruieren. (Fig. 12 und 13.) Andeutung. $a^2 + r^2 = R^2$; Bedingungsgl.: $x^2 + (y + a)^2 = R^2$

oder $x^2 + y^2 + 2ay - r^2 = 0$; Gl.: $\left\{\begin{array}{l} 2x\pi y + \lambda \,.\, 2x = 0 \\ x^2\pi 1 + \lambda(2y + 2a) = 0 \end{array}\right.$

$x = 0$; Min; $x^2 = : 2y^2 + 2ay$.

Die Bedingung geht in $3y^2 + 2a \,.\, 2y - r^2 = 0$ über, hieraus

$$y = \frac{1}{3}\left[-2a \pm \sqrt{(2R)^2 - r^2}\right]$$

zum Max gehörig. + für das kleinere Segment; — für das größere [hier kann aber die Grundfläche des Zylinders einen größeren Radius als r haben]. Konstruktion: $AC = r$ abgetragen; CB um 2a verkürzt bis D (D_1.) Dann ist die Höhe des Maximalzylinders $y = : \frac{1}{3}\,CD$.

Übung 11. Vom Punkte p; q auf die Gerade $ax + by + c = 0$ ein Lot zu fällen, d. h. den (kürzesten) Abstand des Punktes von der Geraden zu ermitteln.

$$f = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2} = \text{Min}; \; l = : ax + by + c.$$

Es kann statt f hier f^2 benutzt werden.

Die Gleichung werden: $\left|\begin{array}{l} 2(x - p) + \lambda a = 0 \\ 2(y - q) + \lambda b = 0 \end{array}\right.$. Durch Elimination: $bx - ay = bp - aq$.

[Hiermit haben wir die Gleichung der Senkrechten, und es kann der Fußpunkt und die Länge des Lotes: f berechnet werden. Letzteres wird $= \frac{ap + bq + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Übung 12. Den Abstand des Punktes $P = (p; q; r)$ von der Ebene:

$$ax + by + cz + d = 0$$

nach IX′ zu bestimmen. $f = \sqrt{(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2}$; $l = ax + by + cz + d$. Aus den Gleichungen $2(x - p) + \lambda a = 0$; $2(y - q) + \lambda b = 0$; $2(z - r) + \lambda c = 0$ folgen

$$bx - ay = bp - aq \text{ und } cx - az = cp - ar$$

$$x \text{ wird: } \frac{p(b^2 + c^2) - a(bq + cr + d)}{a^2 + b^2 + c^2}; \; f = \text{min} = \frac{ap + bq + cr + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

33) Anwendungen zu Satz IX.''

Unter allen rechtwinkeligen vierseitigen Prismen mit gegebener Oberfläche $= 2a^2$ und gegebener Kantensumme $= 4k$ das größte zu berechnen.

Prisma $= xyz =$ Max.

Bedingungen: $xy + yz + zx - a^2 = 0$ und $x + y + z - k = 0$.

$$\text{Gln.:} \begin{cases} yz + \lambda(y+z) + \mu = 0 \\ zx + \lambda(z+x) + \mu = 0 \\ xy + \lambda(x+y) + \mu = 0 \end{cases}$$

Hieraus folgen $(y - x)(z + \lambda) = 0$ und $(z - y)(x + \lambda) = 0$. Man darf hier nicht: $x = y = z$ folgern, da dies wegen der Bedingungen: a und k nicht unabhängig von einander erfordern würde. Vielmehr: $z = -\lambda$ und $z = y$ also $x = k + 2\lambda$. Die erste Bedingung geht dann in $\lambda^2 + \frac{k}{3}\frac{2\lambda}{} + \frac{a^2}{3} = 0$ über.

$$\lambda = \frac{1}{3}\left(-k \mp \sqrt{k^2 - 3a^2}\right) \quad ; \quad x = \frac{1}{3}\left(k \mp 2\sqrt{k^2 - 3a^2}\right)$$

$$y = z = \frac{1}{3}\left(k \pm \sqrt{k^2 - 3a^2}\right).$$

z. B. Oberfläche $= 288$ Flächeneinheiten; Kantensumme 84 Längeneinheiten, so wird $x = 9$ [oder 5] $y = z = 6$ [oder 8] Inhalt $= 324$ [oder 320] Kubikeinheiten.

Übung 13) Oberfläche $= 1188$ Flächeneinheiten; Kantensumme $= 172$ Längeneinheiten.

$$\lambda = -\frac{43 \mp \sqrt{67}}{3} \quad : \quad y = z = 11{,}6; \quad x = 19{,}8.$$
$$= [17{,}06]; \quad = [8{,}88]$$

Inhalt $= 2664{,}3$ (Max) ; [2584,4 (Min)] Raumeinheiten.

Dazwischen liegt: $x = 18$; $y = 16$; $z = 9$; Inhalt 2592 Raumeinheiten.

Aufgabe bezüglich IX.'''

Der gebrochene Lichtstrahl wird dem im dichtern Medium gedachten Lote bekanntlich nach dem Verhältnis $\sin\alpha : \sin\beta = n : 1$ zugebrochen . n zu bestimmen.

Es sind (vgl. Fig. 14) drei Bedingungsgleichungen:

$$\beta + \beta_1 - \gamma = 0 \; ; \qquad \sin\alpha - n\sin\beta = 0$$
$$\text{und } \sin\alpha_1 - n\sin\beta_1 = 0.$$

$\sphericalangle\, \delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha - \beta$ soll Min werden, oder auch $\alpha + \alpha_1 - \gamma =$ Min, wo $\sphericalangle\, \gamma$ der brechende Winkel des Prismas ist. Wir erhalten in Bezug auf $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ nach IX''' die Gleichungen $1 + \mu\cos\alpha = 0$; $1 + \nu\cos\alpha_1 = 0$

$$\lambda - \mu n\cos\beta = 0 \text{ und } \lambda - \nu n\cos\beta_1 = 0.$$

$$\text{also auch: } \left.\begin{matrix} \mu\cos\alpha = \nu\cos\alpha_1 \\ \mu\cos\beta = \nu\cos\beta_1 \end{matrix}\right\} \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1} \text{ oder auch:}$$

$$\frac{1 - n^2\sin^2\beta}{1 - \sin^2\beta} = \frac{1 - n^2\sin^2\beta_1}{1 - \sin^2\beta_1} \text{ d. i. } (n^2 - 1)\sin^2\beta_1 = (n^2 - 1)\sin^2\beta.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus möge $\sin\beta_1 = +\sin\beta$ gefolgert werden.

$$\beta = \beta_1 = \frac{\gamma}{2} \text{ mithin } n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Wird also durch den Versuch die kleinste Ablenkung: δ gemessen, so ist n berechenbar.

Erheblich schwerer ist die Aufgabe: zwischen zwei im Raume befindlichen Geraden $\frac{\Delta;E;\Phi}{d;e;f}$ und $\frac{\Delta_1;E_1;\Phi_1}{d_1;e_1;f_1}$ die Minimalentfernung m mit Satz IX'''' zu berechnen. Es ergiebt sich, falls

$$D = \begin{vmatrix} e & f \\ e_1 & f_1 \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} f & d \\ f_1 & d_1 \end{vmatrix} \text{ und } F = \begin{vmatrix} d & e \\ d_1 & e_1 \end{vmatrix} \text{ ist,}$$

$$m = \frac{\Delta d_1 + E e_1 + \Phi f_1 + d\Delta_1 + e E_1 + f\Phi_1}{\sqrt{D^2 + E^2 + F^2}}.$$

Die wenigen herausgegriffenen Aufgaben lassen schon erkennen, wie mannigfach die Gebiete sind, auf denen Satz IX Anwendung findet, und wie einfach sich dieselbe im Allgemeinen gestaltet.

Für die Mechanik kann in analoger Weise Satz X, zu dem wir jetzt übergehen wollen, einen passenden Mittelpunkt bilden.

34) Den Satz von Parallelogramm der Kräfte*) habe ich im Unterrichte fast immer nur experimentell bewiesen, weil mir ein einwandsfreier, theoretischer Beweis zu zeitraubend erschien. Auch an dieser Stelle möge die Lücke unausgefüllt bleiben, wir setzen ohne Beweis:

X ..... $$m \,.\, x'' = X \text{ und } m \,.\, y'' = Y,$$

wo m die Masse [kann oft auch = 1 gesetzt werden] X und Y die horizontale und vertikale Komponente der äußeren bewegenden Kraft P bedeuten.

Ist nun der angegriffene Massenpunkt T_0 gezwungen, auf einer Kurve $l = 0$ zu bleiben (Fig. 15), so geht Satz X, wie leicht gezeigt werden kann, in

$$m\,x'' = X + \lambda\, l'_x$$

X' .... $$\text{und } m\,y'' = Y + \lambda\, l'_y \text{ über.}$$

Beweis. Man denke die Kurve als Röhre, in der die punktuelle Kugel ohne Reibung sich bewegt. An der Stelle T habe die Röhre eine Öffnung, die von einer durch die Kraft L gegengestemmten punktuellen Klappe verschlossen wird. L wirkt also in der Normale und kann zerlegt werden in die Komponenten H und K. Ist nun T derselbe Punkt auf derselben Kurve wie in Fig. 6, so muß, wie aus der Figur ersichtlich, wegen Ähnlichkeit der betreffenden Dreiecke in

$$\text{Fig. 15 und in Fig. 6} \quad -H : K = \frac{\mathfrak{y}\,\cdot}{\mathfrak{x}\,\cdot} = \frac{-l'_x}{l'_y}$$

nach Satz VII stattfinden, indem H das entgegengesetzte Zeichen wie $\mathfrak{y}$ bekommen muß [vgl. die Pfeile in der Fig.]. Hieraus kann $H =: \lambda\, l'_x$ und $K =: \lambda\, l'_y$ geschlossen werden, wo λ ein noch unbekannter zu eliminierender Faktor, wie bei IX' ist, und es tritt daher H zu X und K zu Y

*) Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten behandelt schon Kant ausführlich in „Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft." Riga 1786. pag. 20 bis 28.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hinzu. Denkt man sich denselben Prozeß an jedem Punkte der Röhre wiederholt, so bestände dieselbe nur noch aus Öffnungen, kann also fortgelassen werden, die Bewegung erfolgt wie eine freie nach dem Gesetze X!

$$\text{Die Ausdehnung:} \quad \left\{ \begin{array}{l} m x'' = X + \lambda l'_x + \mu m'_x \\ m y'' = Y + \lambda l'_y + \mu m'_y \\ m z'' = Z + \lambda l'_z + \mu m'_z \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} l = 0 \\ m = 0 \end{array} \right\} \qquad \ldots X''\ldots$$

sei erwähnt, ohne daß wir darauf eingehen.

35) Anwendungen*) zu Satz X und X! Ein Massenpunkt T_0, dessen Maße $m = 1$, möge sich auf einem Kreise mit Radius $\mathfrak{L}$ bewegen müssen, also die Bedingung: $x^2 + y^2 - \mathfrak{L}^2 = 0$ erfüllen (Fig. 16). Die Gleichungen X′ werden: $\left\{ \begin{array}{l} x'' = \lambda \,.\, 2\,x \\ y'' = -g + \lambda\, 2\,y \end{array} \right.$, indem die horizontale Kraftkomponente = Null sein soll.

Durch Elimination von λ folgt: $-y\,x'' + x\,.\,y'' = -g\,x$. Setze $x =: \mathfrak{L} \sin\varphi$ und $y = -\mathfrak{L}\cos\varphi$, bilde $x' = \mathfrak{L}\cos\varphi\,.\,\varphi'$ und $y' = \mathfrak{L}\sin\varphi\,.\,\varphi'$

$$= -y\,.\,\varphi' \qquad\qquad = x\,.\,\varphi'$$

$$\text{hieraus } x'' = -y\,\varphi'' - \varphi' y' \text{ und } y'' = x\,\varphi'' + \varphi' x'.$$

Unsre Gleichung wird also:

$$y^2 \varphi'' + \varphi' \,.\, \frac{1}{2}\,(y^2)' + x^2 \varphi'' + \varphi' \frac{1}{2}\,(x^2)' = \mathfrak{L}^2 \varphi'' + \varphi' \frac{1}{2}\,(\mathfrak{L}^2)' = -g\,\mathfrak{L}\sin\varphi\,.$$

$$\text{oder, da } \mathfrak{L}^2 \text{ konstant, } \varphi'' = \frac{-g}{\mathfrak{L}}\,.\,\sin\varphi.$$

Wir können diese Gleichung nun in zwiefacher Weise spezialisieren.

A) Es möge auch die vertikale Kraftkomponente $-g$ = Null sein, oder doch in Anbetracht großer Rotationsgeschwindigkeit vernachlässigt werden dürfen. Es ist dann: $\varphi'' = 0$ zu behandeln. Hieraus folgt $\varphi' = \text{constante} = w$, wenn mit: w die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet wird [dieselbe ist $= 1$, wenn der Radius einen Winkel von $57^0\ 17'\ 44{,}8''$ in einer Zeitsekunde bestreicht; sie ist $= 2\pi$, wenn die ganze Kreisfläche in einer Sekunde vom Radius bestrichen wird]. Aus $\varphi' = w$ folgt dann: $\varphi = w\,t + c$. Hierin kann c = Null angenommen werden, wenn sich zur Zeit $t = 0$ die Kugel im Punkte A befand. (Fig. 17.)

$$\text{Nun war: } \begin{array}{lll} x' = -y\,\varphi' = -y\,w, & \text{also} & (x')^2 = y^2 w^2 \\ y' = \quad x\,\varphi' = \quad x\,w & & (y')^2 = x^2 w^2 \\ \hline & & (x')^2 + (y')^2 = \mathfrak{L}^2 w^2 \end{array}$$

$$\text{Mithin } \sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \mathfrak{L}\,.\,w\,. = v\,;\ [v \perp \mathfrak{L}].$$

Die lineare Geschwindigkeit ist also in der Tangente der Bahn gerichtet = Radius mal Winkelgeschwindigkeit.

Ferner war: $x'' = -y\,\varphi'' - \varphi' y'$ und $y'' = x\,\varphi'' + \varphi' x$, also, wenn die Einsätze: $\varphi'' = 0$ und $\varphi' = w$ gemacht werden

$$x'' = -w\,y' = -w^2 x$$

$$y'' = \quad w\,x' = -w^2 y, \text{ was positiv ist,}$$

da $y = -\mathfrak{L}\cos\varphi$ angenommen war.

*) Die Behandlung in rechtwinkeligen Koordinaten verdient wenigstens für den Anfang den Vorzug. Dies schließt direkte, kürzere Ableitungen im Physikunterricht nicht aus (vgl. Note zu A w. u.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Quadieren und Addieren ergiebt sich

$$(x'')^2 + (y'')^2 = w^4 \mathfrak{L}^2 \text{ mithin}$$

... (A)*) ... $$P = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2} = \mp w^2 \mathfrak{L} = \mp \frac{v^2}{\mathfrak{L}}.$$ Die Figur ($w = : 2$) lehrt durch Ähnlichkeit der Dreiecke, daß diese Zentripetalkraft $P = m \frac{v^2}{\mathfrak{L}}$ in der Richtung des Radius und zwar von T_0 nach dem Mittelpunkte 0 hin wirkt. Dies ist nach dem Beweise zu X' notwendig, wenn T_0 auf dem Kreise gehalten werden soll, ohne daß ein Faden im Spiele wäre. Man denke etwa in 0 eine anziehende Zentralkraft.

Der Faden $\mathfrak{L}$ wird jedoch durch eine ihr gleiche aber in entgegengesetzter Richtung wirkende Zentrifugalkraft zerrissen. Die beim Unterrichte zur Veranschaulichung dienenden Zentrifugalmaschinen müßten die Winkelgeschwindigkeit: w meßbar machen, wenn sie ihren Zweck erfüllen wollen.

... (B) ... B) Wir nehmen jetzt B) den Winkel α über den φ nie herausgeht, so klein an, daß wir: $\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1.2.3} + \frac{\alpha^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$ (vgl. 22) annähernd $= \alpha$ setzen können, um so mehr $\sin\varphi = : \varphi$. Allerdings bleibt das Verfahren nun nicht mehr exakt. [$\sin\varphi = : \varphi + .$ würde keine weiteren Schlüsse erlauben!!] (siehe jedoch Note).

Die Gleichung $\varphi'' = \frac{-g}{\mathfrak{L}} \sin\varphi$ geht dann in $\varphi'' = -g . \varphi$ über (für $\frac{g}{\mathfrak{L}} = : g$.) Wäre $g = 1$, also $\mathfrak{L} = 980{,}89$ cm, so würde sich mit Hinblick auf 19) $\varphi = : \cos t$ ergeben, denn $(\cos t)'' = -\cos t$; auch $\varphi = c . \cos t$ würde für ein konstantes c, wie auch noch andere Einsätze, die aber auf das nämliche hinauslaufen, der Gleichung $\varphi'' = -\varphi$ genügen.

Möchte man $\varphi = c . \cos(m t)$ wählen, so würde $\varphi' = -c \sin(m t) . m$ (Satz III) und $\varphi'' = -c m^2 \cos(m t) = -m^2 . \varphi$ werden, mithin $m^2 = g$ und $m = \sqrt{g}$.

Die Bewegung eines Pendels mit kleinen Schwingungen ist also näherungsweise in $\varphi = : c \cos(\sqrt{g}\, t)$ und $\varphi' = -c(\sqrt{g} \sin(\sqrt{g}\, t)$ enthalten, worin noch c zu bestimmen. Dies geschieht durch den Anfangszustand; für $t = 0$ wird $\varphi =$ dem Elongationswinkel (neg.) $= -\alpha$ also $-\alpha = c \cos(\sqrt{g} . 0) = c . 1$. Hieraus $c = -\alpha$. Die nun resultierende Gleichung $\varphi = -\alpha \cos(\sqrt{g}\, t)$ geht für die Schwingungsdauer T, in welcher der Bogen 2α durchlaufen wird in: $\alpha = -\alpha \cos(\sqrt{g}\, T)$ über. Da die Gleichung durch α dividiert werden kann und α herausfällt, so ergiebt sich der Satz, daß „kleine Schwingungen bei unveränderter Fadenlänge angenähert dieselbe Schwingungsdauer haben müssen." $1 = -\cos(\sqrt{g}\, T)$. Es muß mithin $\sqrt{g}\, T$, wenn es sich um nur eine Schwingung handelt, $= \pi$ sein. Aus naheliegenden Gründen konnte α nicht als Größe $0{,}0_{*}z$ angenommen werden, so daß

$$T \text{ nur} = \frac{\pi}{\sqrt{g}} + . = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{g}} + . \text{ gesetzt werden darf.}^{**})$$

---

*) Ganz unmittelbar erhält man dies Resultat: $\frac{v^2}{\mathfrak{L}}$ nach der graphischen Methode durch den Hodograph der Bewegung (vgl. die vorhergehende Note).

**) Wenn auch in physikalischer Hinsicht ein experimenteller, leicht zu erbringender Nachweis für die in dieser Formel enthaltenen Gesetze in der Schule als hinreichend erachtet werden mag, so pflegt doch eine dem Experimente vorangehende, resp. nachfolgende, aus der Geschwindig- (S)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

36) Übung 13) Zwischen den beiden Punkten F und F_1 ist ein Faden von der Länge: $2a$ befestigt (Fig. 18), an dem ein bewegliches Gewicht P hängt. Wo wird, nachdem die Bewegung aufgehört, der Angriffspunkt x, y sich befinden?

$$x'' = 0;\ y'' = 0. \quad \text{Also} \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{Pk}{e} + \lambda \dfrac{2x}{a^2} \\ 0 = \dfrac{Ph}{e} + \lambda \dfrac{2y}{b^2} \end{cases} ;\ h^2 + k^2 = a^2 - b^2 = e^2;$$

$$\text{mithin: } \frac{Pk}{e}\, a^2 y - \frac{Ph}{e}\, b^2 x = 0 \text{ oder } y = \frac{h}{k}\,\frac{b^2 x}{a^2}$$

Wird dies in die Bedingungsgleichung $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ eingesetzt, so ergiebt sich die Angriffsstelle:

$$\begin{cases} x =: \dfrac{k a^2}{\sqrt{b^2 h^2 + a^2 k^2}} \\ y =: \dfrac{-h b^2}{\sqrt{}} \end{cases}$$

Ist nun, da $\tan\tau = \dfrac{-l'_x}{l'_y} = \dfrac{-x b^2}{y a^2}$ folgt, $\tau = \alpha$, $\tan\alpha = \dfrac{k}{h}$, so genügt der ermittelte Punkt, also ist er der Tangentialpunkt einer horizontalen Tangente an die Ellipse auf der der Erde zugewandten Seite.

---

keitslehre gefolgerte Ableitung nicht ohne Anregung für geweckteres Schüler zu sein. Da dürfte es denn allerdings als störend empfunden werden, dem mathematischen Bedürfnisse nur ein angenähertes Verfahren bieten zu können. Nun ist eine exakte Behandlung des hin und her, nicht ganz herumschwingenden Pendels, im Verhältnis nur wenig schwieriger und möge daher in dieser Note Platz finden. Man wird aber, wenn man diesen Weg zu beschreiten gedenkt, doch gut thun, zuvor die angenäherte Formel wie vorhin abzuleiten und so den strengen Beweis vorzubereiten. Es möge hier, um zu kürzen, $g = \dfrac{g}{\mathfrak{L}} = 1$ sein und es gilt dann die Gleichung: $\varphi'' = -\sin\varphi$ zu erfüllen.

Wird beiderseits mit $2\varphi'$ multipliziert, so wird $2\varphi'\varphi'' = -2\sin\varphi \,.\, \varphi'$ erhalten und ebenfalls, wenn von $(\varphi')^2 = 2\cos\varphi + \text{const}$ die Geschwindigkeit genommen wird. Für $\varphi =: -\alpha$ wird $\varphi' = 0$ also $0 = 2\cos\alpha + \text{const}$. Somit bleibt

$$(\varphi')^2 = 2(\cos\varphi - \cos\alpha) = 2\left(1 - \cos\alpha - (1 - \cos\varphi)\right) = 4\left[\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]$$

$$\text{oder } +\varphi' = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} \quad \text{oder auch, wenn ein Hülfswinkel:}$$

(S) .. $\sin(n) =: \dfrac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$ eingeführt wird, wobei aber n von t abhängt, $\varphi' = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(n)$ zu lösen übrig.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nachdem nun die 10 Geschwindigkeitssätze, wenn wir den letzten auch so nennen wollen, erörtert und an Beispielen eingeübt, gehen wir in Teil 2 dazu über, einige Gebiete zu skizzieren, um die Vorteile einer Behandlung von diesem Gesichtspunkte aus wenigstens anzudeuten.

Nehmen wir von der Substitutionsgleichung (S) auf beiden Seiten die Geschwindigkeit, so erhalten wir $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(n) \,.\, n' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \,.\, \varphi'$ und wäre nun

..... (N) $n' = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$, so wäre auch $\varphi' = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos(n)$ erfüllt und unsere Aufgabe gelöst. Die Gleichung (N) kann aber: $n'\left(1 - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2 n\right)^{-1/2} = 1$ oder auch nach dem binomischen Lehrsatze 22) für den Exponenten: $-\frac{1}{2}$

$$\left(1 + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2 n + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^4 n + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin^6 n + \ldots\right) n' = 1$$

geschrieben werden. Zieht man Übung 6 hinzu und beachtet III), so wird:

..... (G)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Const}_1 + n + \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(n - \sin n\cos n\right) \,.\, \frac{1}{2} \\
&+ \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{3}{2}(n - \sin n\cos n) - \sin^3\cos n\right)\frac{1}{4} \\
&+ \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}(n - \sin n\cos n) - \sin^3 n\cos n\right) - \sin^5 n\cos n\right) \,.\, \frac{1}{6} + \ldots = \mathbf{t}
\end{aligned}$$

genügen. Ist $\mathbf{t} = \frac{T}{2}$, so ist $\varphi = 0$ und $n = 0$, mithin $\mathrm{Const}_1 = \frac{T}{2}$; ist $\mathbf{t} = : T$, so muß $\varphi = \alpha$ werden, also $\sin n = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = 1$, daher ergiebt sich $n = \frac{\pi}{2}$. In der Gleichung (G) wird dann $\cos(n) = 0$ und sie geht in:

$$\frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\sin^6\left(\frac{\alpha}{2}\right)\ldots\right) = T - \frac{T}{2}$$

über, und dies, wenn g nicht $= 1$, sondern wie oben $= \frac{g}{\mathfrak{g}}$ ist, in

$$T = \pi\sqrt{\frac{\mathfrak{g}}{g}}\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \ldots\right).$$

In Bezug auf den wichtigen Foucault'schen Pendelversuch möge auf Jochmann, Grundriß der Experimentalphysik § 352, verwiesen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Behandlung einiger Gebiete mit der Geschwindigkeitslehre.

Da wir uns auf einige kurze Andeutungen beschränken wollen, so ist eine Ordnung, in der diese Gebiete nacheinander vorgebracht werden sollen, von keinem Belang.

A. Berechnung der Logarithmen.

37) Will man in 22) nicht die Moivre'schen Sätze als bekannt voraussetzen, so verfahre man in folgender Weise: Man erhebe einmal: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und zweitens: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn}$ nach dem binomischen Lehrsatze 22).

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + n.\frac{x}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^3}{n^3} + \ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{xn} = 1 + xn.\frac{1}{n} + \frac{xn(xn-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \frac{xn(xn-1)(xn-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{n^3} + \ldots$$

Ist nun n eine Größe, die ein mit bestimmter Stellenanzahl gedachtes x, wie groß es auch sei, um eine beliebig hohe Anzahl von Stellen übertrifft, so können nur die Teile von Einfluß sein, die im Zähler und Nenner gleich hohe Potenzen von n haben und wir erhalten beide Male dasselbe, nämlich:

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots \quad + .$$

Ob das Zusatzglied fortgelassen werden kann, erscheint zunächst fraglich. Da aber, wie man leicht sieht, sein Hauptanteil $\frac{x^2}{2\cdot n}\left[1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right]$ ist und die Parenthese vom x^{ten} Gliede ab unter die geometrische Reihe herabgedrückt werden kann, mithin eine bestimmte Größe hat, so bewirkt das n im Nenner den Fortfall des Zusatzgliedes. Somit gilt

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots.$$

also für $x = 1$, $e^{(x=1)} = e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$

und wieder für $x = x$, $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$

daher auch $\left(e^x\right)^m = 1 + \frac{mx}{1} + \frac{(mx)^2}{1\cdot 2} + \frac{(mx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$

etc. wie in 22).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

38) Logarithmieren wir nun **t** für die Basis e und sei $[\text{lognat}(\mathbf{t})]' = u$, so muß, da $e^{\text{lognat}(\mathbf{t})} = \mathbf{t}$ ist, nach Satz III und 22) $e^{\text{lognat}(\mathbf{t})}\, u = 1$ sein, denn Geschwindigkeit von **t** ist

nach 10) 1, mithin $u = \dfrac{1}{e^{\text{lognat}(\mathbf{t})}} = \dfrac{1}{\mathbf{t}}$

oder $[\text{lognat}(\mathbf{t})]' = \dfrac{1}{\mathbf{t}}$ Dies geht

für $\mathbf{t} =: 1 + x$ über in $[\text{lognat}(1+x)]'_x = \dfrac{1}{1+x} \cdot 1$ nach III.

Durch Division wird $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\ldots$

39) Es sei $\text{lognat}\,(1+x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots\ldots$ für genügend kleines x, so muß, wenn $x = 0$ genommen wird, $A = 0$ sein, denn $\text{lognat}\,1 = 0$. Wird beiderseits die Geschwindigkeit gebildet, so nach 38)
$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\ldots = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^4 + \ldots$ mithin, da x beliebig und auch $= 0$ sein könnte, $B = 1 \ldots$ und so fort $\ldots\ldots C = \dfrac{-1}{2}; D = \dfrac{+1}{3}; E = \dfrac{-1}{4} \ldots\ldots$ Mithin:
$\text{lognat}\,(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \ldots\ldots$ Die Vergleichung mit $1 - x + x^2 - x^3 \ldots$ lehrt, daß wir für $x > -1$ bis $x < 1$ keine Divergenz zu befürchten haben. Für $x = -1$ divergiert die Reihe nach Vorbemerkung, andere Fälle können wir unentschieden lassen.

40) Wir bilden aus $\text{lognat}\,(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots\ldots$, indem wir $x =: -x$

substituieren, $\text{lognat}\,(1-x) = -\left\{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots\ldots\right\}$,

...H... dann $\text{lognat}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\left\{x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots\ldots\right\}$, setzen $\dfrac{1+x}{1-x} =: z$, woraus $x = \dfrac{1-z}{1+z}$,

und erhalten die zur Berechnung von lognat 2 taugliche Formel:

$$\text{lognat}\,(z) = 2\left\{\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \ldots\ldots\right\};$$

$$\text{hiernach lognat } 2 = 2\left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \ldots\right\} = 0{,}6931\ldots\ldots$$

41) Aus der Identität:

$$n = \sqrt{(n-1)\,(n+1)\,\frac{n^2}{n^2-1}}$$

folgt: $\text{lognat}\, n = \dfrac{1}{2}\log(n-1) + \dfrac{1}{2}\log(n+1) + \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{n^2}{n^2-1}\right)$

ist $\dfrac{n^2}{n^2-1} = z$, so wird $\dfrac{z-1}{z+1} = \dfrac{1}{2n^2-1}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also erhalten wir zur Berechnung der Logarithmen ungerader Zahlen n die Bessel'sche (?) Formel:

$$\text{lognat } n = \frac{1}{2} \log (n-1) + \frac{1}{2} \log (n+1)$$
$$+ \left[\frac{1}{2n^2-1} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n^2-1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n^2-1}\right)^5 + \dots \right]$$

Da $n-1$ und $n+1$ gerade Zahlen sind, so können ihre Logarithmen bereits als vorher berechnet angesehen werden. $\text{lognat } 10 = \text{lognat } 2 + \text{lognat } 5$.

$$\text{lognat } 5 = \frac{1}{2} \text{ lognat } 4 + \frac{1}{2} \text{ lognat } 6 + \frac{1}{49} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{49}\right)^3 + \dots$$
$$\text{lognat } 6 = \text{lognat } 2 + \text{lognat } 3$$
$$\text{lognat } 3 = \frac{1}{2} \text{ lognat } 2 + \frac{1}{2} \text{ lognat } 4 + \frac{1}{17} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{17}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{17}\right)^5 + \dots$$

Die Berechnung ergiebt: $\text{lognat } 10 = 2{,}302585\,..$ und da $\log 10$ im dekadischen System 1 ist, gewinnt man in $\frac{1}{2{,}302585\,..} = 0{,}43429448\,..$ den Faktor, womit alle natürlichen Logarithmen multipliziert werden müssen, um die Briggischen zu ergeben. Auf independente Verfahren gehen wir hier nicht weiter ein.

Anmerkung: Die Reihe in 39) konnte auch mit Satz IV erhalten werden.

B. Berechnung von π, dem Inhalte des Einheitskreises.

42) Nach 22) und 37) erhalten wir für $m = i = \sqrt{-1}$; $x =: \alpha$ und $=: -\alpha$ die Formeln:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$$
$$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \sin\alpha,$$

mithin durch Division $e^{2i\alpha} = \frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\alpha - i\sin\alpha} = \frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}$;

Wird auf beiden Seiten für die Basis e logarithmiert und Formel H in 40) für

$$x =: i\tan\alpha\,, \left(\text{positives*)}\ \alpha < \frac{\pi}{4}\right) \text{ angewandt,}$$

so ergiebt sich $2i\alpha = 2\left[i\tan\alpha + \frac{1}{3}\left(i\tan\alpha\right)^3 + \frac{1}{5}\left(i\tan\alpha\right)^5 + \dots \right]$

oder auch $\alpha = \tan\alpha - \frac{1}{3}\tan^3\alpha + \frac{1}{5}\tan^5\alpha - \dots$ ...T...

ebenso $\beta = \tan\beta - \frac{1}{3}\tan^3\beta + \frac{1}{5}\tan^5\beta - \dots$

*) Das i kann eine Divergenz nicht herbeiführen, denn es hebt sich heraus und die Bedingungen für die Konvergenz haben sich noch günstiger gestaltet, da je zwei Glieder zu einer

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Werden diese Gleichungen für die speziellen Werte $\tan\alpha = \frac{1}{2}$; $\tan\beta = \frac{1}{3}$, also

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \,.\, \tan\beta} = \frac{5/6}{5/6} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

addiert, so erhalten wir eine zur Berechnung brauchbare Formel für $\frac{\pi}{4}$, nämlich

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots$$

$$+ \frac{1}{3} \qquad - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 \ldots$$

$$\pi = 3{,}14159265\ldots \left[\text{ annähernd } 3\frac{1}{7} \text{ und } 113 \,\middle|\, 355. \right]$$

Differenz, kleiner als das eine von ihnen, vereinigt werden können. Man kann daher Formel T auch für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ benutzen und erhält die Leibnitz'sche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots\ldots = 2\left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \ldots\ldots\right]$$

dies ist aber kleiner als $2\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right]$

...2D... und dies wieder $< 2\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right]$;

faßt man Gruppen von 1, 2, 4, 8, 16 ... Gliedern zusammen, jedes Glied gleich dem größten in der Gruppe setzend, so ist

$$D < \frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \frac{8}{8^2} + \frac{16}{16^2} + \ldots$$

Die geometrische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ ist aber konvergent.

$$\text{Aus } \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \ldots$$

$$\text{folgt } \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \qquad - \frac{1}{9} \qquad + \frac{1}{15} \ldots$$

$$\text{also } \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \qquad + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \qquad - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \qquad + \frac{1}{17} - \ldots;$$

$$-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \qquad - \frac{1}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots$$

$$\text{also } \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = 1 \qquad - \frac{1}{7} \qquad - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \qquad + \frac{1}{17} - \ldots;$$

$$+\frac{1}{7}\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4}\right) = \qquad + \frac{1}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \text{, mithin}$$

$\frac{8}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{4} =$ einer entspr. Reihe, in der im Nenner die Primzahl 7 nicht mehr als Faktor

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Übung 14) Zwei ganze Zahlen zu erraten, die der Gleichung $3(x+y) = xy - 1$ genügen und dann das Ergebnis mit dem Vorhergehenden in Zusammenhang zu bringen.

Anmerkung. Der Entwickelung in Reihen ist die in Produkte zugeordnet. Ein Beispiel dazu ergiebt sich aus der Formel $\sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$, wenn mit jedem Faktor wieder analog verfahren wird. Umstellung der Faktoren.

$$\sin\alpha = 2^1\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2^3\sin\left(\frac{\alpha}{4}\right).\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{2\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= 2^7\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right).\sin\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{1.\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{2\pi}{8}\right)\ldots.\sin\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{7\pi}{8}\right)$$

Da nun $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$ ist und

$$\sin\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{4\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{8}\right) \text{ ist, so folgt:}$$

$$\sin\alpha = 2^7\sin\left(\frac{\alpha}{8}\right)\left[\sin^2\left(\frac{1\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right]\left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right]. \qquad \ldots. Z$$

$$\left[\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)\right]\cos\left(\frac{\alpha}{8}\right);$$

---

auftritt. Faktoren 3 und 5 waren schon vorher ausgemerzt. Fährt man analog fort, so wird man $\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{7}{8}.\frac{11}{12}.\frac{13}{12}.\frac{17}{16}\ldots.$ erhalten; in diesem Produkte gehören dem Zähler alle ungeraden Primzahlen als Faktoren an, der Nenner besteht aber aus Zahlen, die um 1 größer resp. kleiner als die darüber stehenden Primzahlen sind, je nachdem diese durch 4 geteilt den Rest 3 oder $+1$ lassen. Solche Formeln entsprechen zwar nicht einem praktischen Bedürfnisse, vermögen aber doch in anderer Beziehung anregend zu wirken. Dahin gehört auch die aus der Anmerkung zu 42) für den Wert $\alpha = \frac{\pi}{2}$ resultierende Formel von Wallis

$$\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\ldots.$$

$$= \frac{1.3}{2.2}.\frac{3.5}{4.4}.\frac{5.7}{6.6}\ldots.. \text{ das ist } \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots.}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots.};$$

$$\text{ferner } \frac{e}{2} = \frac{3.8.45.264.1855\ldots}{2.9.44.265.1854\ldots} \quad \text{(Gesetz und Beweis leicht.)}$$

$$\text{Auch } \frac{\pi}{16} = -\frac{1}{8} - \frac{1}{(-1).1.3} - \frac{1}{3.5.7} - \frac{1}{7.9.11} - \frac{1}{11.13.15} - \ldots..$$

möge erwähnt werden. Es giebt jedoch viel konvergentere Reihen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für ein $\alpha = 0,0_{*}z$ vgl. 4) und 22) ergiebt sich hieraus exakt:

$$\alpha = 2^7 \cdot \frac{\alpha}{8} \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \sin^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot 1 \,.$$

N .... oder $1 = 2^4 \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi}{8}\right) \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, was auch leicht direkt verifizierbar.

Dies kann nun auf $\frac{\alpha}{16}, \frac{\alpha}{32}, \ldots \frac{\alpha}{2^\mu} =: \frac{\alpha}{m}$ verallgemeinert werden. Wird Z durch N dividiert, so resultiert für beliebiges α ; $m =: 8$

$$\sin\alpha = 2^3 \sin\left(\frac{\alpha}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{8}\right)}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{8}\right)}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{8}\right)$$

und allgemein für $m =: m$,

$$\sin\alpha = m \sin\left(\frac{\alpha}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{m}\right)}\right) \left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{m}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{m}\right)}\right) \ldots\ldots\ldots \cos\left(\frac{\alpha}{m}\right)$$

Dies geht bei wachsendem $m = 2^\mu$, was die einzelnen Faktoren betrifft, (vgl. 4) exakt in

$$\sin\alpha = \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{(2\pi)^2}\right) \left(1 - \frac{\alpha^2}{(3\pi)^2}\right) \ldots.$$

über, ob aber das Produkt im Ganzen konvergiert, lassen wir auf dieser Stufe unbewiesen.

C. Behandlung krummer Linien.*)

43) Dem Lehrplane gemäß kommen nur die Anfangsgründe der Kegelschnitte in Betracht. Dies schließt nicht aus, daß im Unterrichte von der logarithmischen Linie, den Spiralen oder bei der optischen Polarisation von der Lemniskate die Rede ist oder daß sonst gelegentlich Zykloide und Epizykloide, Konchoide, Kardioide und Diokles' Zissoide erwähnt werden. Spezialfälle dieser Kurven weisen oft leicht verifizierbare Eigenschaften auf.

Gewöhnlich muß man den Radiusvektor r und den Winkel φ einführen, den er mit der x-Axe bildet.

Aus der Gleichung für die Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ folgt für $x = e$, wenn $e^2 = a^2 - b^2$ ist und wenn das zugehörige y, der Halbparameter mit p bezeichnet wird,

$$\frac{e^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$\text{woraus } p = \frac{b^2}{a} \text{ und } \frac{p}{a} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2 \text{ folgt für } \varepsilon = \frac{e}{a};$$

[ε wird: numerische Exzentrizität genannt] $\varepsilon < 1$.

*) Es kann bei der Reichhaltigkeit dieses Gebietes hier auch nicht einmal annähernd ein Überblick gegeben werden. Wir beschränken uns auf Sektor- und Kurvenbogenelement; die Tangente wurde schon 28) besprochen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus Figur 19 [in der φ ein stumpfer Winkel ist], entnehmen wir:

$$\left.\begin{array}{r} -r\cos\varphi = x + e \\ r\sin\varphi = y \end{array}\right\} \text{ woraus } r^2 = (x+e)^2 + y^2.$$

Die mit b^2 multiplizierte Ellipsengleichung $\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2 = a^2\frac{b^2}{a^2}$ kann

$$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = a^2(1-\varepsilon^2)$$

geschrieben werden*) oder auch $x^2 + e^2 + y^2 = a^2 + \varepsilon^2 x^2$

hierzu $\dfrac{2\,e\,x}{r^2} = \dfrac{2\,a\,\varepsilon\,x}{(a+\varepsilon x)^2}$, weil

$e = a\,\varepsilon$, so ergiebt die Addition

oder $r = a + \varepsilon x$ [analog $r_1 = a - \varepsilon x$ und daher $r + r_1 = 2\,a$; Fadenkonstruktion].

Zu $r - \varepsilon x = a$ fügen wir: $-\varepsilon e = -\varepsilon^2 a$

so: $r - \varepsilon(x+e) = a(1-\varepsilon^2) = p$

oder $r + \varepsilon r\cos\varphi = p$, woraus sich der Radiusvektor

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi} \text{ ergiebt,} \qquad \ldots\ldots P \ldots\ldots$$

eine Formel, die ebenso für Parabel und Hyperbel gilt, nur daß hier: ε resp. $= 1$ und > 1 ist. Für die Hyperbel ist der Beweis in derselben Weise zu führen (Aufgabe), für die Parabel folgt er aus $r = TL = p + r\cos(\pi - \varphi)$ unmittelbar.

Denken wir uns nun sowohl r als φ von der Zeit **t** abhängig, so können wir bei der Gleichung P, die wir in: $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$ umformen, beiderseits die Geschwindigkeit bilden ....(P).... und erhalten nach III), da p konstant ist,

$$\frac{-1}{r^2}\,r' = \frac{-\varepsilon}{p}\sin\varphi\,.\,\varphi'$$

$$\text{oder} \qquad r' = \frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi\,.\,r^2\varphi'; \qquad \ldots Q \ldots$$

Sollen aber φ und r nicht von **t** abhängig gedacht werden, sondern nur von einander $\left[\text{nach der Gleichung } \frac{1}{r} - \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi = 0\right]$ so kann nach Satz I $\varphi_{1.} = \varphi + r\varphi'_r + .$ gesetzt werden und φ'_r ist dann nach VII $= +\frac{1}{r^2} : \frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi$. Ebenso auch: $r_{1.} = r + \hat{\varphi}\,r'_\varphi + .$ wo $r'_\varphi = +\frac{\varepsilon}{p}\sin\varphi : +\frac{1}{r^2}$; [wegen $\wedge$ siehe 44).]

44) In Ermangelung eines deutschen zu φ zugehörigen Buchstabens, behalten wir den Buchstaben φ bei, unterscheiden ihn aber durch ein darüber gesetztes Dachchen [$\wedge$], so daß also $\varphi_{1.} - \varphi = \hat{\varphi}$ sein soll. Hierdurch wird im Bewußtsein die Vorstellung einer einzigen Größe gewahrt, während durch vorgesetztes d für Schüler eine Verwechselung mit einem Produkt zu nahe liegt, überdies die Achtsamkeit erfordert würde, den Buchstaben d in der übrigen Rechnung zu vermeiden. Wir könnten auch, wenn z. B. r vorher schon in anderer Bedeutung gebraucht wäre,

*) Die Form $y^2 = (1-\varepsilon^2)(a^2 - x^2)$ für die Ellipsengleichung ist oft bequem; analog für die Hyperbel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$r_1 . - r = : \hat{r}$ setzen. Es erscheint aber nicht als zweckmäßig, diese Bezeichnung zu einer durchgehenden zu machen, da nur vereinzelt die Notwendigkeit vorliegen wird, sich des Dachchens bedienen zu müssen.

Nach 43) haben wir also: $\hat{\varphi} = r\varphi'_r$ und $r = \hat{\varphi}.r'_\varphi$ was dasselbe besagt, und können daher entweder r oder $\hat{\varphi}$ in der Rechnung beibehalten, gewöhnlich wählt man $\hat{\varphi}$. In Figur 20) wird $\hat{\varphi}$ durch E_0E_1 repräsentiert, wenn nur $FE_0 =$ der Einheit ist und TT_0 in die Tangente in T_0 übergehend gedacht ist. (Vgl. 26 Anm.) T_0R wird dann $r\,\hat{\varphi}$; $RT = r$; $T_0T = k$; $k = \sqrt{r^2 + r^2\hat{\varphi}^2} =$ Kurvenbogenelement; $s = \frac{1}{2} r^2\hat{\varphi} =$ Sektorelement. [Die Begründungen sind aus Teil 1 zu entnehmen, event. nochmals geometrisch zu interpretieren.]

45) Wählen wir in 43) $\varepsilon = 1$, also die Parabel, so war $r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$ mithin wird das Sektorelement $s = \frac{p^2}{8\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)} . \hat{\varphi}$, also der Sektor nach V)

$$= \sum_0^{99^*} \left(\frac{p^2}{8\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right)\hat{\varphi}$$, wenn φ in 100^* gleiche Teilchen $\hat{\varphi}$ geteilt gedacht ist. Es muß

$$\text{also} \left(\qquad\right)'_\varphi = \frac{p^2}{8\cos^4\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \text{ ermittelt werden.}$$

Ohne Vorbereitung wird der Schüler den Inhalt der Klammer, nämlich f nicht anzugeben vermögen, jedoch mit Hinweis auf die Übungen 5. und 6., da

$$\frac{1}{\cos^4\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{\cos^4\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{\cos^2\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} \text{ ist,}$$

wird $f = \frac{p^2}{4}\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{3}\tan^3\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + c \Big|_{\varphi = 0}^{\varphi = : \varphi}$ zu setzen sein. Für $\varphi = : \frac{\pi}{2}$ ist der Sektor mithin $= \frac{p^2}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{p^2}{3}$. Der Parameter wird also von der Parabel $\frac{2}{3}p^2$ Flächeneinheiten abschneiden.

Da $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cot\tau = \frac{y}{p}$ ist (vgl. 27), so geht der für Winkel φ erhaltene Sektor OFT_0 in $\frac{p^2}{4}\left(\frac{y}{p} + \frac{1}{3}\frac{y}{p} . \frac{2x}{p}\right)$ über, denn $y^2 = 2px$; Nimmt man zu dem Sektor $= \frac{py}{4} + \frac{xy}{6}$ das Dreieck $FS_1T_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{p}{2}\right)y$ hinzu, so wird, wie man ebenfalls durch Anwendung eines Parabelsatzes und einer geometr. Reihe erkennen kann, das Parabelflächenstück $OS_1T_0 = \frac{2}{3}xy$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es muß dies ja auch $= \Sigma \sqrt{2px}\, \mathfrak{x}$ sein. In der That folgt aus

$\left(\qquad \right)'_x = \sqrt{2px}$, daß in die Klammer $c + \frac{2}{3} x \sqrt{2px}$ zu setzen ist, vgl. Übung 5.

Das Parabelflächenstück $O T_0 T_1$ beträgt $\frac{4}{3} x y$ Flächeneinheiten. Im Anschlusse hieran mögen 2 Übungen eingeschaltet werden, vgl. Übung 8.

Übung 15) Wie groß wird der Rotationskörper, der entsteht, wenn $O T_0 T_1$ um $O S_1$ als Axe rotiert?

Der Inhalt ist: $\sum_0^{99*} y^2 \pi . \mathfrak{x} = \Sigma (2 p x \pi) \mathfrak{x}$ also $\left(\qquad \right)'_x = 2 p x \pi$ mithin $f = x^2 p \pi + c \Big|_0^x = x^2 p \pi$ In Worten: „das durch eine zur x Axe senkrechte Ebene im Abstande x (vom Scheitel) begrenzte Rotationsparaboloid enthält $x^2 p \pi$ Raumeinheiten".

Übung 16) Eine Kugel durch eine Ebene zu halbieren.

Die Ebene schneide einen Radius ($R = 1$) in der Entfernung x vom Mittelpunkt senkrecht. Durch Gleichsetzen beider Kugelsegmente ergiebt sich eine kubische Gleichung mit den Wurzeln $x = 0$; $x = \pm \sqrt{3}$; Die Deutung führt darauf, das Analoge von Übung 15 beim zweischaligen, gleichseitigen Rotationshyperboloid zu machen. Die Entfernung vom Mittelpunkt O soll $\pm \sqrt{3}$ sein.

$$x^2 - y^2 = 1 \; ; \; \sum_{100*}^{173*} y^2 \pi . \mathfrak{x} = \Sigma (x^2 - 1) \pi . \mathfrak{x} \; ; \; \left(\qquad \right)'_x = \pi (x^2 - 1)$$

$f = \frac{\pi}{3} (x^3 - 3x) \Big| \begin{matrix} x > R \\ R = : 1 \end{matrix}$. Also wird der Inhalt : $= \frac{\pi}{3} (x^3 - 3x + 2)$ für $x = \sqrt{3}$ zu $\frac{\pi}{3} (3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2) = \frac{2\pi}{3} =$ der Halbkugel. Es ist also:

Kugel $+ i^2$ Halbkugel $= - i^2$ Halbkugel zu denken. vgl. 46)

46) [Nummer 46, wie auch schon vorher die Aufgabe am Schlusse von 33) und Anmerkung zu 42), sind nicht zur Verarbeitung im Unterricht zu empfehlen, bezeichnen aber die Grenze des noch Erreichbaren und dienen hier zur Abrundung und Vervollständigung des Aufsatzes.]

Es soll bei einer gleichseitigen Hyperbel der vom Mittelpunkte O ausgehende Sektor $A O T_0$ (Fig. 21) berechnet werden. $\overline{OA} = 1$. $\sphericalangle A O T_0 = \vartheta$; Gleichung $x^2 - y^2 - 1 = 0$, $O T_0 = \varrho$; Das Sektorelement wird wie in 44) $= \frac{1}{2} \varrho^2 \hat{\vartheta}$; $\varrho^2 = x^2 + y^2$; $\varrho \cos \vartheta = x$; $\varrho \sin \vartheta = y$, mithin aus der Gleichung: $\varrho^2 (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) = 1$ wird $\varrho^2 = \frac{1}{2 \cos (2\vartheta)}$, also ist der verlangte Sektor $= \sum_0^{99*} \left(\frac{1}{2 \cos (2\vartheta)} \right) \hat{\vartheta}$ und es muß daher $\left(\qquad \right)'_\vartheta = \frac{1}{2 \cos (2\vartheta)}$ ermittelt werden.

Der Schüler würde hier wohl an den lognat $[2 \cos (2\vartheta)]$ denken, aber wegen der nach Satz III hinzutretenden multiplikativen Korrektur $- 4 \sin (2\vartheta)$ führt dies noch nicht zum Ziele.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch der Hinweis auf Übung 5, wonach $\left(\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}\right)'_\vartheta = \frac{4\cos(2\vartheta)}{[1-\sin(2\vartheta)]^2}$ ist, würde ihn wohl kaum dazu führen, eine Vereinigung von beiden herzustellen und $f = \frac{1}{8}\,\text{lognat}\left(\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}\right) + c$ zu setzen. Daher bezeichnen wir diese Stelle als schwierig, weil sie über die durchschnittliche Erfindungsgabe des Schülers hinausgeht. Es hätte also noch die Übung $\left(\frac{1}{8}\,\text{lognat}\left[\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}\right]\right)'_\vartheta$ vorangeschickt werden müssen, die aber als solche willkürlich und daher nicht anregend ist.

Die Ausführung ist nun folgende:

$$f'_\vartheta = \frac{1}{8}\left[\frac{1-\sin(2\vartheta)}{1+\sin(2\vartheta)}\cdot\frac{4\cos(2\vartheta)}{[1-\sin(2\vartheta)]^2}\right] = \frac{\cos(2\vartheta)}{2\,[1-\sin^2(2\vartheta)]}$$

$$= \frac{\cos(2\vartheta)}{2\cos^2(2\vartheta)} = \frac{1}{2\,.\cos(2\vartheta)}.$$

Der doppelt genommene Sektor $A\,O\,T_0$ ist also [für $A\,O = 1$]

$\frac{1}{4}\,\text{lognat}\left(\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}\right) = \frac{1}{2}\,\text{lognat}\sqrt{\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}}$ Flächeneinheiten. Für ein bestimmtes x wird er gleich der Flächeneinheit werden. Das ergiebt die Gleichung:

$\sqrt{\frac{1+\sin(2\vartheta)}{1-\sin(2\vartheta)}} = e_.^2$, wo hier $e_.$, die Basis der natürlichen Logarithmen von dem e der gleichseitigen Hyperbel ($e = \sqrt{2}$) zu unterscheiden ist. Es muß also $\sin(2\vartheta) = \frac{e_.^4-1}{e_.^4+1}$ werden; $\cos(2\vartheta) = \frac{2\,e_.^2}{e_.^4+1}$ folglich $\tan\vartheta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\vartheta)}{1+\cos(2\vartheta)}} = \frac{e_.^2-1}{e_.^2+1} = \frac{y}{x}$; hierzu $y^2 = x^2-1$, also $x^2\left(\frac{e_.^2-1}{e_.^2+1}\right)^2 = x^2-1$ somit $+x = \frac{e_.^2+1}{2\,e_.} = \frac{1}{2}\left(e_. + \frac{1}{e_.}\right)$ und $y = \frac{1}{2}\left(e_. - \frac{1}{e_.}\right)$

....J.... und $x - i\,(i\,y) = e_. = 2{,}71828\ldots.$

Wird bei einem Kreise vom Radius $\overline{O\,A} = 1$ der doppelte Sektor $= \overline{O\,A}^2 =$ dem Einheitsquadrat gebildet, so gehört der Sektor zum Winkel $x = 57^\circ\ 17'\ 44{,}''8$, der als Bogen des Einheitskreises $x = 1$ ist (vgl. 35). Wir können mithin, wenn wir die gleichseitige Hyperbel $x^2 - y^2 - 1 = 0$ als $x^2 + (i\,y)^2 - 1 = 0$, also als imaginäre Fortsetzung des Kreises auffassen, sie dann jedoch nicht mit dem gezeichneten*) reellen Kontur identifizieren, sondern beachten, daß sie, als imaginärer Kontur gedacht, den konstanten Radius 1 haben muß, obigen Winkel ϑ, dessen zugehöriger, jedoch verdoppelter Sektor ja auch $= \overline{O\,A}^2 = 1$ war, als imaginäre Winkel-

* Wir haben daher in der Figur, weil i einer Drehung um 90° entspricht, die gleichseitige Hyperbel in eine zum Kreise senkrechte Ebene gedreht. Dies kann geschehen; es ist aber festzuhalten, daß eine reelle Repräsentation des Imaginären an sich nicht möglich ist. Dessen ungeachtet müssen nun die horizontalen und vertikalen Abmessungen stimmen und man kann z. B. die Durchschnittspunkte G und G_1 zweier sich reell nicht schneidenden Kreise *M* und M wie in Figur 22 darstellen und zeigen, daß sie die imaginären Steiner'schen Grenzpunkte der andern Schar von Kreisen sind, die die gegebenen rechtwinklig schneiden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einheit i ansehen. Es ist daher $x = 1 \,.\, \cos i$ und $i\,y = 1 \sin i$, mithin geht die vorhin gefundene Gleichung J in $\cos i - i \sin i = e$ über und veranschaulicht diese in 22) angeführte Formel.

47) Um bei der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Fig. 23) den vom Mittelpunkte O ausgehenden Sektor $A\,O\,T_0$ zu bestimmen $[\sphericalangle\, \Theta = \sphericalangle\, \vartheta]$, führen wir $x = a \cos \Theta$; $y = b \sin \Theta$ ein und erhalten aus der Gleichung $x - a \cos \Theta = 0$ nach Satz VII $\Theta'_x = \frac{-1}{a \sin \Theta}$.

Wir wollen zuerst das Ellipsenflächenstück $A\,S_1\,T_0$ berechnen und teilen a in 100* gleiche Teile $\mathfrak{x}$ ein, nun mögen bis S_1 etwa 70* solcher Teilchen angenommen werden. Das einzelne Streifenelement ist: $y\,\mathfrak{x}$. Bilden wir nun $\sum_{70*}^{99*} \mathfrak{x}\,y = \sum b \sin \Theta \,.\, \mathfrak{x}$, so muß

$$\left(\qquad \right)'_{(x)} = b \sin \Theta = \frac{a\,b \sin^2 \Theta}{a \sin \Theta} = -\frac{a\,b}{2} [\cos (2\,\Theta) - 1] \,.\, \left(\frac{-1}{a \sin \Theta} \right) \text{ sein,}$$

folglich ist in die Klammer $f =: \frac{a\,b}{4} \sin (2\,\Theta) - \frac{a\,b}{2}\,\Theta + c$ zu setzen

und Satz III) $f'_{(x)} = f'_\Theta \,.\, \Theta'_x$ anzuwenden.

$$f_{100*} = f_{(\Theta =: 0)} = c$$

$$f_{70*} = f_{(\Theta =: \Theta)} = \frac{a\,b}{4} \sin (2\,\Theta) - \frac{a\,b}{4}\,\Theta$$

$$\text{Ellipsenflächenstück } A\,S_1\,T_0 = f_{100*} - f_{70*} = \frac{a\,b\,\Theta}{2} - \frac{a\,b}{4} \sin (2\,\Theta)$$

$$\text{hierzu kommt das Dreieck } \frac{x\,y}{2} = \frac{a\,b}{4} \sin (2\,\Theta).$$

Also wird der zu ϑ gehörige Ellipsensektor $O\,A\,T_0 = \frac{a\,b}{2}\,\Theta$,

$$\text{wo } \tan \vartheta = \frac{y}{x} = \frac{b \sin \Theta}{a \cos \Theta} = \frac{b}{a} \tan \Theta \text{ und } \tan \Theta = \frac{a}{b} \tan \vartheta\,.$$

Da nun $\varrho^2 = x^2 + y^2 = x^2 + x^2 \tan^2 \vartheta = \frac{a^2 b^2 (1 + \tan^2 \vartheta)}{b^2 + a^2 \tan^2 \vartheta}$ durch Einsatz von x und $y =: x \tan \vartheta$ in die Ellipsengleichung erhalten werden kann und derselbe Sektor auch durch $\sum_{0*}^{29*} \frac{1}{2}\,\varrho^2\,\hat{\vartheta} = \sum \frac{a^2 b^2}{2} \left(\frac{1 + \tan^2 \vartheta}{b^2 + a^2 \tan^2 \vartheta} \right) \hat{\vartheta}$ hätte berechnet werden, so ergiebt sich in $\frac{a\,b\,\Theta}{2}$ zugleich die Auflösung für $\left(\qquad \right)'_\vartheta = \frac{1}{2}\,a^2 b^2 \left(\frac{1 + \tan^2 \vartheta}{b^2 + a^2 \tan^2 \vartheta} \right)$.

Übung 17) Hierfür die Probe zu machen und $\varrho = \sqrt{a\,b}\,\sqrt{\Theta'_\vartheta} = \frac{a \,.\, \cos \Theta}{\cos \vartheta}$ nachzuweisen $\Big[$aus $\tan \alpha =: z$ oder auch $\tan \alpha - z = 0$ folgt $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$ und nach VII) $\alpha'_z = +1 : \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ (vgl. Übung 5a), also $\alpha'_z = \frac{1}{1 + z^2}$; Hierin ist eben α der Bogen (arc), dessen tangens $=: z$ ist.$\Big]$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

48) Für $\Theta = \vartheta = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir aus 47) den Ellipsenflächenquadranten $= a\,b\,\frac{\pi}{4}$, also wird die Ellipsenfläche $= a\,b\,\pi$, wie auch unmittelbar zu erkennen ist, wenn $T_0\,S_1$ mit $T_0\,S_1$ verglichen wird;*) Kreisfläche $= a^2\,\pi$.

49) Ein spezieller Fall der Kardioide zeigt recht deutlich, wie die Kegelschnitte in mancher Beziehung andern Kurven an Einfachheit betreffs der Behandlung nachstehen. In dem Kreise AB vom Durchmesser a (Fig. 24) werden von B aus Sehnen gezogen und stets um a verlängert und auch verkürzt, z. B. $\overline{BR} + a$ ergiebt T_0, $\overline{BR} - a$ $[-\overline{BR} + a]$ giebt T_1.

Nennen wir $BT =: r$ und $\sphericalangle A_1\,B\,T = \varphi$, so wird

$$r = a\cos\varphi + a = a\,(1 + \cos\varphi) = 2\,a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \text{ und } r - 2\,a\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

ist die Gleichung der Kurve.

Nach 44) wird das Kurvenelement $k = \sqrt{\mathfrak{r}^2 + r^2\hat{\varphi}^2}$

Da nach Satz I $r_{1.} = r + \hat{\varphi}\,.\,r'_{\varphi} +. = r + \mathfrak{r}$ ist,

also $\mathfrak{r} = -4\,a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).\ \frac{\hat{\varphi}}{2} = -\,a\sin\varphi\,.\,\hat{\varphi}$

so wird $k = 2\,a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\,.\,\hat{\varphi} = 2\,a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right).\ \hat{\varphi}$ Mithin ist der Kurvenbogen K von A_1 bis $T_0 = \sum_0^{99*}\left[2\,a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\hat{\varphi}$.

---

*) Den Umfang der Ellipse kann man wie in Note zu 35) erhalten. Man führe $\frac{\pi}{2} - \Theta = \psi$ ein und hat dann $a\sin\psi =: x$ und $b\cos\psi =: y$, hieraus $a\cos\psi\,.\,\hat{\psi} = \mathfrak{x}$ und $-\,b\sin\psi\,.\,\hat{\psi} = \mathfrak{y}$, also $k = \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} = \hat{\psi}\sqrt{a^2\cos^2\psi + b^2\sin^2\psi} = a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\psi}\ \hat{\psi}$.

Mithin Umfang $= 4\,\Sigma_0\,a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\psi}\,.\,\hat{\psi}$; Also muß $\left(\qquad\right)'_{\psi}$

$$= 4\,a\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\psi} = 4\,a\left(1 - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\sin^2\psi - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\,\varepsilon^4\sin^4\psi - \frac{1\,.\,1\,.\,3}{2\,.\,4\,.\,6}\,\varepsilon^6\sin^6\psi + \ldots\right)$$

sein. Die $\left(\qquad\qquad\right)$ wird daher $=$ const $+\ 4\,a\left[\psi - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\left(\psi - \sin\psi\cos\psi\right)\frac{1}{2}\right.$

$\left. - \frac{1\,.\,1}{2\,.\,4}\,\varepsilon^4\left(\frac{3}{2}\,(\psi - \sin\psi\cos\psi) - \sin^2\psi\cos\psi\right)\frac{1}{4} - \ldots\right]$, also wenn $\psi = 1000\,\hat{\psi} = \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, Ellipsenumfang $= 2\,a\,\pi\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\varepsilon^2 - \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2\frac{\varepsilon^6}{5} - \ldots\right]$, Kreislinie $= 2\,a\,\pi$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es muß daher $\left(\qquad \right)'_{\varphi} = 2a\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ ermittelt werden, was hier keine Schwierigkeit, wie sonst gewöhnlich bei Kurvenbögen mit sich führt. Die Klammer f wird

$4a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + c \Big|_0^{\varphi}$; Bogen $K = A_1 T_0$ ist also $4a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ Längeneinheiten.

Konstruktion. Wird $BA_2 = BA_1 = 2a$ gemacht, so ist $\overline{A_1 A_2} = 2.2a.\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ so lang wie der verlangte Kurvenbogen $K = A_1 T_0$ Beweis. $\triangle A_2 B A_1$ ist gleichschenklig, mithin $\sphericalangle CBA_1 = \frac{\varphi}{2}$ und $CA_1 = CA_2 = 2a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ also $\overline{A_1 A_2} = 4a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = K$.

Wir sehen also, daß es auch krumme Linien giebt, die in genau eben so lange gerade Linien gestreckt (rektifiziert) werden können, ohne daß dabei π in's Spiel kommt. Der Ausgangspunkt aller Sehnen, B (im allgemeinen Falle: Doppelpunkt), ist hier „Rückkehrpunkt".

Auf die Zweckmäßigkeit dieser Aufgabe für die Schule bin ich von Dr. Sanio-Jena aufmerksam gemacht worden. Er schlägt vor, diesen Spezialfall „Rektifikate" zu nennen.

Auch die Konchoide ist lehrreich wegen des Asymptotenbegriffes.

D. Behandlung numerischer Gleichungen [Näherung].

50) Da dieses Gebiet eine eingehendere Erörterung erfordern würde, muß es nebst anderm für diesmal zurückgestellt werden. Es kann dies um so eher geschehen, als sein Wert für den Schüler hinter dem zurückbleiben möchte, den Anwendungen der sphärischen Trigonometrie in mathematischen, geographischen und nautischen Aufgaben mit sich bringen.*)

Wir müssen aber aus demselben Grunde auch: **E. Die sphärische Trigonometrie** übergehen.

F. Das physische Pendel.

51) Zwar sind auch hier einige Sätze voranzuschicken, jedoch erscheint das physische Pendel zu wichtig, um es unerwähnt zu lassen. Eine Andeutung der Behandlung ohne weitere Erörterung, etwa das, was beim Unterrichte an der Tafel und nachher im Gedächtnisse fixiert wird, möge ausreichen.

Def. Statisches Moment. $= \pm m \,.\, a$ „Bewegende Kraft**) mal Lot auf die .... (1.)
Richtung der Kraft"; Drehungssinn; Grundsatz: „Der Angriffspunkt kann in der Richtung der Kraft verschoben werden."

*) Es mag daher auf den Anhang zu Mehler's Elementarmathematik und auf zahlreiche Aufgabensammlungen, z. B. O. Hermes, Berlin, (Springer'scher Verlag) bezüglich dieser Lücken verwiesen werden.

**) Vgl. Note zu 51. Statt m ist an der Erdoberfläche: m g zu denken, g hebt sich im Satze jedoch heraus.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Satz über statische Momente. „Die Summe der statischen Momente ist Null, wenn keine Drehung stattfindet."

...(2.)..... $\sum \pm m a = 0$

Beweis. Es sei bereits Gleichgewicht eingetreten, so gilt:

Fig. 25.

$$m_1 : m_2 = \sin a_2 : \sin a_1$$

$$= \frac{a_2}{p} : \frac{a_1}{p} = a_2 : a_1$$

$$+ m_1 a_1 + (- m_2 a_2) = 0$$

für zwei statische Momente.

Fig. 26.

Ausdehnung auf 3 und mehr statische Momente. **AB sei = 1;**

1) Hinzufügung von

$$\pm m_1 a_1 \ldots\ldots;$$

nach dem Vorigen:

$$m_1 a_1 - 1 . (m_1 a_1) = 0$$

$$m_2 a_2 - 1 \quad (m_2 a_2) = 0$$

$$m_3 a_3 - 1 . (m_3 a_3) = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2) Diese Paare werden abgehakt, wodurch keine Drehung veranlaßt werden kann. Es bleibt:

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + (- a_3 m_3)$$

$$\ldots\ldots = 0$$

Folgerung für den Schwerpunkt $S = (x ; y)$

...(3.).... $$x = \frac{\Sigma m \xi}{\mathfrak{M}} \quad ; \quad y = \frac{\Sigma m \eta}{\mathfrak{M}}$$

wenn $\mathfrak{M}$ die Gesamtmasse $= \Sigma m$. Beispiele:

Fig. 27. $\begin{cases} A \ldots \text{ Axenpunkt (beliebig) } \overline{AB} = 1 . \text{cm} \\ m_1 = 4 \text{ Gewichtseinheiten *)} \quad \xi_1 =: 1 . \text{cm} \\ m_2 = 3 \quad \text{"} \quad \xi_2 =: 15 . \text{cm} \end{cases} \mathfrak{M} = 7.$

$x = \overline{AS} = \frac{4 . 1 + 3 . 15}{7} = 7$, also $\overline{BS} = 6$; $\overline{SC} = 8$; Hebel; Schwerpunkt des Dreiecks, Tetraeders, Kreisbogens etc. . . . Guldinsche Regel; . . . . . [Verschiedene Aufhängepunkte; labil; stabil.]

...(4.)..... Bemerkung. Fällt A in S, so muß $\Sigma m \xi = 0$; $\Sigma m \eta = 0$ werden, weil 0; 0 herauskommt.

52) Trägheitsmoment. [Grundsatz vom Schwung und Beharrungsvermögen: B; wir wollen diesen Buchstaben für das (beliebige) Trägheitsmoment wählen, um Verwechselungen zu vermeiden] Def. Trägheitsmoment um beliebige Axe: $B = \Sigma m . a^2$. Satz über das Trägheits-
...(5.)....
...(6)....
moment $B =: B + \mathfrak{M} s^2$.

*) Wir brauchen für unsern jetzigen Zweck „Gewichtseinheiten und Masseneinheiten" nicht zu scheiden (s. w. u.).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Fig. 28.*) $B = \Sigma m a^2 = \Sigma (m s^2 + m d^2 + m \,.\, 2 s \xi)$, weil
$a^2 = s^2 + d^2 + 2 s \xi$, ... $= \Sigma\, m s^2 + \Sigma m d^2 + 0$ nach (4)
$= \mathfrak{M} s^2 \quad + B$ „das Trägheitsmoment um eine beliebige Axe ist gleich dem Trägheitsmoment um eine durch den Schwerpunkt S gehende Parallelaxe, vermehrt um die Gesamtmasse mal dem Quadrate des Abstandes beider Axen".

53) Der Schwerpunkt S des starren Körpers K sei von A der Drehungsaxe s entfernt. Der untere Pfeil giebt die Richtung an, in der sich der Körper bei einer Pendelschwingung zur Zeit t bewegt. In diesem Augenblicke werde ein jedes Massenteilchen [als Repräsentant sei m gewählt] durch eine „aufhaltende Kraft" in der Richtung des oberen Pfeils, also auch der ganze Körper, zum Stillstande gebracht. Fig. 29) Hat sich S aus der Vertikalen um $\sphericalangle \varphi$ bewegt, so ist dies wegen der Starrheit auch mit jedem Massenteilchen der Fall; Winkel (m) A m $= \varphi$; Das Massenteilchen m hat also in der Zeit, während der Schwerpunkt aus der Vertikalen nach S gelangte, den Bogen $a\varphi$ durchlaufen; seine Geschwindigkeit an der Stelle m ist also $a\varphi'$, die Beschleunigung ist $a\varphi''$, die bewegende Kraft $m a \varphi''$, mithin muß die aufhaltende Kraft $= - m a \varphi''$ sein und das zugehörige st. Mom. muß, da das Lot auf die Richtung dieser Kraft der Radius a ist, $= - m a^2 \varphi''$ sein. Hierzu kommt die vertikale äußere Kraftkomponente $- m g$ und deren Moment ist: $- m g \xi$. Da der Körper nun still steht, muß $\Sigma(- m a^2 \varphi'' - m g \xi) = 0$ sein, ...(7.)...
die Σ in Bezug auf alle Massenteilchen gedacht; m, a, ξ können sich ändern, φ'' und g nicht; Es wird daher Gleichung (7) auch

$$\varphi'' \,.\, \Sigma m a^2 = - g \Sigma m \xi, \text{ und da}$$
$$\Sigma m a^2 = B = B + s^2 \mathfrak{M} \text{ nach (6) war,}$$
$$\varphi'' = - \frac{g \Sigma m \xi}{B + s^2 \mathfrak{M}} = - \frac{g x}{\frac{B}{\mathfrak{M}} + s^2} \qquad \ldots\ldots (8.)$$

nach (3) geschrieben werden dürfen.

Hierin kann die Schwerpunktabscisse x durch s . sin φ ersetzt werden. Wird zur Abkürzung der Ausdruck: $\frac{B}{\mathfrak{M} s}$ mit σ bezeichnet, so erhalten wir (8) in der Form:

$$\varphi'' = - \frac{g \sin \varphi}{\frac{B}{\mathfrak{M} s} + s} = - \frac{g \sin \varphi}{\sigma + s} = - \frac{g}{\mathfrak{L}} \sin \varphi, \text{ wenn } \mathfrak{L} = : \sigma + s. \qquad \ldots\ldots (9.)$$

Die Gleichung: $\varphi'' = - \frac{g}{\mathfrak{L}} \sin(\varphi)$ war aber die eines mathematischen Pendels, vgl. 35).
(B). „Das physische Pendel schwingt also mit einem mathematischen isochron, dessen Länge $\mathfrak{L}$ = der Entfernung des Aufhängepunktes (Axe) vom Schwingungspunkte ist, letzterer liegt um $\sigma = \frac{B}{\mathfrak{M} s}$ tiefer als der Schwerpunkt S. Das auf eine durch den Schwerpunkt gehende Parallelaxe bezügliche Trägheitsmoment $B = \Sigma m d^2$ kann nun entweder praktisch durch das Reversionspendel oder in einzelnen Fällen durch die Ausführung der Summation bestimmt werden.

*) Ebene I ist bestimmt durch die ursprüngliche Axe und den Schwerpunkt. Ebene II senkrecht zu I durch ein gedachtes Massenteilchen m.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

54) Das Reversionspendel (Fig. 30) muß so lange korrigiert werden, bis es um Axe A (I) isochron wie um Axe A_1 Lage II schwingt; Wir haben für I die Gleichungen, wenn $\frac{B}{\mathfrak{M}} = : k^2$, $\begin{cases} s + \sigma = \mathfrak{L} \\ s\sigma = k^2 \end{cases}$ und für II nach Voraussetzung. $\begin{cases} s_1 + \sigma_1 = \mathfrak{L} \\ s_1 \sigma_1 = k^2 \end{cases}$, denn es kann sich weder B noch $\mathfrak{M}$ ändern.

Ist nun das Reversionspendel symmetrisch um eine horizontale Axe, so könnte, da diese symmetrischen Gleichungen *) zwei Werte für s und 2 Werte für σ, im ganzen aber nur zwei verschiedene Werte haben, $s = s_1$ und $\sigma = \sigma_1$ sein, was nichts ergeben würde, ist es aber unsymmetrisch, so muß jetzt $s = \sigma_1$ und $\sigma = s_1$ sein. Daher wird $\mathfrak{L} = s + s_1$, das ist die Entfernung der Axen $A A_1$. Man erhält sehr genaue Resultate (Bessel)

$g_{Pol} = \frac{1}{289} + \frac{1}{149} = \frac{1}{98} + . > g_{Aequ.}$ Verschiedenheiten von g geologisch wichtig.

55) Das Pendel sei eine sehr dünne Stange; a Centimeter lang; homogen. Fig. 31. Die Längeneinheit sei der Gewichtseinheit entsprechend. $s = : \frac{a}{2}$; $\mathfrak{M} = a$ Gramm. **)

$\frac{B}{2} = \sum_0^{499} x^2 \mathfrak{x}$, wo $\mathfrak{x} = \frac{a}{1000}$ Gramm; $\left(\qquad \right)'_x = x^2$

also $f = \frac{x^3}{3} + c \qquad f_{499} = \frac{a^3}{24} + c$; $f_0 = c$

also $\frac{B}{2} = \frac{a^3}{24}$; $B = \frac{a^3}{12} \qquad k^2 = \frac{B}{\mathfrak{M}} = \frac{a^2}{12}$; $\frac{k^2}{s} = \frac{a}{6} = \sigma$; $\qquad L = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2}{3} a$

„Die Fadenlänge des korrespondierenden mathematischen Pendels beträgt 2/3 der Länge der homogenen dünnen Stange."

56) Kreisrunde sehr dünne Scheibe $. = r^2 \pi$ Fig. 32. $s = : r$. Die Quadrateinheit entspreche der Gewichtseinheit; der Radius sei in 1000 Teile $\mathfrak{x}$ geteilt; wir fassen die in derselben Entfernung x von dem Schwerpunkte S liegenden Teile $\pi (x + \mathfrak{x})^2 - x^2 \pi = 2 x \pi \mathfrak{x} + \mathfrak{x}^2 \pi$ in m zusammen und bilden $B = \sum_0^{999} m . x^2 = \sum 2 x^3 \pi \mathfrak{x} + \mathfrak{x}^2 \pi x^2 = \sum (2 x^3 \pi + \mathfrak{x} \pi x^2) \mathfrak{x}$

also $\left(\qquad \right)'_x = 2 x^3 \pi + \mathfrak{x} \pi x^2$ mithin $f = \frac{2 x^4}{4} \pi + \mathfrak{x} \pi \frac{x^3}{3} + c \Big|_0^r$. Wird in 100 * Teile geteilt, so ist das Resultat exakt $B = \frac{r^4}{2} \pi$; $k^2 = \frac{B}{\mathfrak{M}} = \frac{r^4 \pi}{2 r^2 \pi}$, da $\mathfrak{M} = r^2 \pi$. Gramm; $\sigma = \frac{r}{2}$; $\mathfrak{L} = \frac{3 r}{2}$ oder $\frac{3}{4} d$, wenn d der Durchmesser. „Die Fadenlänge des korresp. math. Pendels ist 3/4 vom Durchmesser der Scheibe."

---

*) Man löse $\begin{matrix} x + y = \mathfrak{L} \\ x y = k^2 \end{matrix}$ auf;

**) Vgl. 51. *)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Übung 18) Die Scheibe wird von zwei konzentrischen Kreisen begrenzt.

$$B = \left(r^4 - \varrho^4\right)\frac{\pi}{2}\,;\quad \mathfrak{M} = (r^2 - \varrho^2)\pi\,;\quad \sigma = \left(r + \frac{\varrho^2}{r}\right)\frac{1}{2}\,;\quad \mathfrak{L} = \frac{3\,r}{2} + \frac{\varrho^2}{2\,r}$$

$\mathfrak{L} = \frac{3}{4}\,d + \frac{\varrho^2}{d}$; wird ϱ nahe $= \frac{d}{2}$, so wird $\mathfrak{L} = d$. „Das korresp. math. Pendel eines dünnen kreisförmig gebogenen Drahtes ist = dem Durchmesser des Kreises".

Übung 19) Kugel; Radius R. (Fig. 4.) Es wird hier leicht der Fehler gemacht, das Trägheitsmoment um den Mittelpunkt, anstatt um eine durch den Mittelpunkt gehende Axe zu bilden. Die Kubikeinheit entspreche der Gewichtseinheit. $\mathfrak{M} = \frac{4}{3}\,R^3\,\pi$. Gramm. (Vgl. 24.)

$\frac{B}{2} = \sum_0^{999} \frac{y^4\,\pi}{2}\,\mathfrak{x}$; nach 56 für die einzelne Scheibe $= \Sigma\left(R^2 - x^2\right)^2 \frac{\pi}{2}\,\mathfrak{x}$;

$$\left(\qquad\qquad\right)'_x = \frac{R^4\,\pi}{2} - R^2\,x^2\,\pi + \frac{x^4\,\pi}{2}\,;\quad f = R^4\,x\,\frac{\pi}{2} - \frac{R^2\,x^3}{3}\,\pi + \frac{x^5\,\pi}{10} + c\,\Big|_0^R$$

$\frac{B}{2} = R^5\,\pi\,\frac{4}{15}$; $B = R^5\,\pi\,.\,\frac{8}{15}$; $k^2 = \frac{2\,R^2}{5}$; $\sigma = \frac{2\,R}{5}$; $\mathfrak{L} = \frac{7\,R}{5} = 7\,\frac{d}{10}$. „Die Fadenlänge des korresp. math. Pendels ist $^7/_{10}$ des Kugeldurchmessers.

Übung 20) Dünne Platte in Form eines Rechtecks, dessen Länge $= a = 1600\,\mathfrak{y}$; Breite $= b = 1000\,\mathfrak{x}$; $\mathfrak{M} = a\,b$ Gramm. Fig. 33; $m = \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$. Die Entfernung des Teilchens m von einer durch den Schwerpunkt gehenden Parallelaxe $S_1\,S \parallel A_1\,A$ wird $\sqrt{x^2 + y^2}$. Denken wir zuerst y wie konstant und bilden: $\sum_0^{499}\left(x^2 + y^2\right)\mathfrak{x}$, so folgt aus $\left(\qquad\qquad\right)'_x = x^2 + y^2$, daß

$f = \frac{x^3}{3} + y^2\,x + c$ ist; $f_{500} = \frac{b^3}{24} + y^2\,\frac{b}{2} + c$; $f_0 = c$. Also ist in Bezug auf einen horizontalen Streifen das Ergebnis: $\frac{b^3}{24} + y^2\,\frac{b}{2}$; $\frac{B}{4}$ wird mithin

$$= \sum_0^{799}\left(\frac{b^3}{24} + y^2\,\frac{b}{2}\right)\mathfrak{y} \text{ sein;}$$

$\left(\qquad\qquad\right)'_y = \frac{b^3}{24} + y^2\,\frac{b}{2}$ erfordert $F = \frac{b^3}{24}\,y + y^3\,\frac{b}{6} + c$; $F_{800} = \frac{b^3 a}{48} + \frac{a^3 b}{48} + c$;

$F_0 = c$, also $\frac{B}{4} = \frac{a\,b}{48}\,(a^2 + b^2)$ Trägheitsmoment B also $= \frac{a\,b}{12}\,.\,d^2$, wenn d die Diagonale des Rechtecks. $k^2 = \frac{d^2}{12}$; $\sigma = \frac{d^2}{6\,a}$; $s = \frac{a}{2}$; $\mathfrak{L} = \frac{a}{2} + \frac{d^2}{6\,a}$; Wird $d = a + .$, indem b sehr nahe Null, so ergiebt sich wie in 55) $\mathfrak{L} = \frac{2\,a}{3}$.

Übung 21) Es sei jetzt die Kugel nicht wie in Übung 19) an einem Punkte der Oberfläche, sondern an einem Faden von der Länge a Fig. 34) aufgehängt, dessen Gewicht zu vernachlässigen ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$s = a + R;\ B = R^5 \cdot \pi \cdot \frac{8}{15};\ \mathfrak{M} = \frac{4}{3} R^3 \pi.\quad k^2 = \frac{B}{\mathfrak{M}} = \frac{2R^2}{5};\ \sigma = \frac{2R^2}{5(a+R)}$$

$\mathfrak{L} = a + R + \frac{2R^2}{5(a+R)}$. Bei großem a, resp. kleinem R wird ein nur wenig tiefer als der Kugelmittelpunkt gelegener Punkt zum Schwingungspunkt, und wir nähern uns der Vorstellung von einem mathematischen Pendel.

57) Bestimmung der Masse der Erde; — ....

58) Pendeluhren; Messung der Zeit.

G. Die Kepler'schen Gesetze.

59) Bei diesem Gebiete vornehmlich liegt es nahe, einen historischen Eingang zu geben.*) Eine weitere Vorbereitung wird durch den üblichen Beweis des Flächensatzes und durch Erörterung der Konstanten K^2 des Sonnensystems ($K = 0{,}0172$.) im Vergleich zur Gravitationskonstanten g geboten. Der Mond erhält von der Erde eine Beschleunigung, die nur ca. einen Millimeter beträgt.

Erörterung**) folgender Tafel

☽	Dr.	= 27, 212 143	Tage	Monat.
	T	= 27, 321 586	"	
	σ	= 27, 321 667	"	
	α	= 27, 556 285	"	
	Syn.	= 29, 530 590	"	
	Sonn.	= 30, 436 852	"	

♁	T	= 365, 24222	Tage	Jahr.
	σ	= 365, 256	"	
	α	= 365, 25997	"	

T tropisch.
σ siderisch.
α anomalistisch.

Rücken der Knoten Ω und ☋; Präzession der Tag- und Nachtgleichen.

60) Zwei Massenpunkte . m und m_1; Es wird die Beschleunigung, falls die Sonne (☉) (♁) fest stände $= -\frac{K^2 m}{r^2}$ und die Anziehungskraft umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung r und proportional den Massen $= -\frac{K^2 m m_1}{r^2}$ angenommen wird, und die Be-

*) Von Copernikus [1473—1543] ausgehend, an Gallilei [1565—1642] erinnernd, verweile man bei einem Lebensbilde Joh. Kepler's [1571—1601—1630], der zu Prag Gehülfe Tycho de Brahe's war, durch „lang fortgesetzte Nachtwachen den Kriegsgott Mars überwand" und seinen Weg erkannte, zu Linz und als Zeitgenosse Wallensteins zu Rostok lehrte.

Seine Gesetze wurden von Newton [1642—1727] als notwendig abgeleitet.

Auch auf Gauß [1771—1801—1855] theoria motus corp. coelest. [1809] ist hinzuweisen. [Asteroiden.]

**) Diese Erörterung, die wir übergehen, ist deshalb notwendig, weil bei mehr als 2 Massenpunkten auch die Kepler'schen Gesetze nur eine Annäherung darstellen. Kompliziertheit der Mondbewegung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

schleunigung, falls die Erde fest stände $= -\frac{K^2 m_1}{r^2}$ jene, indem durch: m_1, diese, indem durch: m dividiert wird. Die Gesamtbeschleunigung ist folglich:

$$-\frac{K^2(m+m_1)}{r^2} = -\frac{K^2 m}{r^2}\left(1+\frac{m_1}{m}\right) = -\frac{m}{r^2}k, \text{ wenn } k =: K^2\left(1+\frac{m_1}{m}\right).$$

Da es uns nur auf die Kepler'schen Gesetze ankommt, so wenden wir Satz X nur für die Masse m [⊙] an, die wir auch $= 1$ setzen können und nehmen bereits als dargethan an, daß die Bewegung in einer Ebene erfolgt. Nach Satz X sind $x'' = X$ und $y'' = Y$ die Gleichungen, $X = +\frac{k\cos\varphi}{r^2}$; $Y = -\frac{k\sin\varphi}{r^2}$ die Komponenten von $-\frac{mk}{r^2}$; Fig. 19) [$\sphericalangle\varphi$ sei stumpf.] Die Gesetze werden sich also aus:

$$x'' = \frac{k\cos\varphi}{r^2} \text{ und } y'' = -\frac{k\sin\varphi}{r^2}$$

ergeben müssen. Während beim Pendel: L konstant war, ändert sich hier: r mit der Zeit **t**.

$$x = -r\cos\varphi; \quad x' = r\sin\varphi\,.\,\varphi' - \cos\varphi\, r'$$
$$y = r\sin\varphi; \quad y' = r\cos\varphi\,.\,\varphi' + \sin\varphi\, r'$$
$$x'' = r\sin\varphi\,.\,\varphi'' + r\cos\varphi\,.\,(\varphi')^2 + 2\sin\varphi\,.\,r'\varphi' - \cos\varphi\,.\,r'' = \frac{k\cos\varphi}{r^2}$$
$$y'' = r\cos\varphi\,.\,\varphi'' - r\sin\varphi\,.\,(\varphi')^2 + 2\cos\varphi\, r'\varphi' + \sin\varphi\, r'' = -\frac{k\sin\varphi}{r^2}$$

61) Nehmen wir nun die erste Gleichung mit $r\sin\varphi$, die zweite mit $r\cos\varphi$ und addieren, so erhalten wir $r^2\varphi'' + 2r\varphi' r' = 0$, woraus: ...F...

$r^2\varphi' = c$ zu schließen ist. ..(F)..

Da $\varphi_1 = \varphi + t\varphi' + ..$ nach Satz I ist, so ist $t\varphi' = \varphi_1 - \varphi = \hat{\varphi}$. und $\varphi' = \frac{\hat{\varphi}}{t}$ also $r^2\varphi' = \frac{r^2\hat{\varphi}}{t}$ das bedeutet: das in dem Zeitintervall t durchlaufene doppelte Sektorelement (Vgl. 44); da hierfür nun eine Konstante erhalten worden, so muß sich, wenn t zum Beispiel verdoppelt wird, auch $r^2.\hat{\varphi}$ genau verdoppeln, welche Zeit **t** auch angenommen wird; „Es werden also in gleichen Zeiten gleiche Sektoren durchlaufen vom Radiusvektor derjenigen Kurve, auf der der Planet m_1 geht."

62) Zweitens nehmen wir die erste Gleichung mit $-r\cos\varphi$, die zweite mit $r\sin\varphi$ und erhalten: $-r^2(\varphi')^2 + rr'' = \frac{-k}{r}$. Es liegt nahe, die Gleichung mit r^2 zu multiplizieren, weil $r^4(\varphi')^2 = c^2$ nach (F); es ergiebt sich

$$-c^2 + r^3.r'' = -kr \text{ oder } \frac{r^2 r''}{c^2} = \frac{1}{r} - \frac{k}{c^2}; \text{ Statt} \qquad ...E...$$

$\frac{k}{c^2}$ können wir: $\frac{1}{p}$ setzen als bekannte, sich nicht ändernde Größe. Es geht also Gleichung E. in $\frac{r^2 r''}{c^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$ über. Nun hatten wir in 43) Formel Q für die Ellipse $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{\varepsilon}{p}\cos\varphi$ ..(E)..

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

...Q... die Gleichung: $r' = \frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi \,.\, r^2 \varphi'$ abgeleitet, und sollte die Bahn von m_1 eine Ellipse mit dem Brennpunkte: m [⊙] sein, so könnte die letzte Gleichung: $r' = \frac{\varepsilon}{p} \sin \varphi \,.\, c$ geschrieben werden oder, wenn beiderseitig die Geschwindigkeit genommen und mit r^2 multipliziert wird:

$$r^2 r'' = \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi \,.\, \varphi' r^2 c \quad \text{oder}$$

$$r^2 r'' = \frac{\varepsilon}{p} \cos \varphi \, c^2 \qquad \text{oder auch}$$

$$\frac{r^2 r''}{c^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$$

; dies ist Gleichung (E) und dieselbe sagt daher aus, „daß sich der Planet in einer Ellipse bewegt, deren einer Brennpunkt die Sonne ist" und deren Halb-Parameter $p = \frac{c^2}{k} = \frac{c^2}{k^2\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)} = \frac{c^2}{k^2 (1 + m_1)}$ ist, wenn $m = 1$; Man muß aber bei diesem Gesetze festhalten, daß die Sonne selbst wieder eine Bewegung ausführt, und außerdem der Schwerpunkt des Systems im Weltenraume sich auf einen Punkt des Himmels hin bewegt.

63) Da nun die Ellipsenfläche 48) $a b \pi$ von Radiusvektor r in der Umlaufzeit T bestrichen wird, so muß $\frac{2 a b \pi}{T} = c$ sein, $p = \frac{b^2}{a}$ und $k = \frac{c^2}{p} = \frac{4 a^2 b^2 \pi^2}{T^2} : \frac{b^2}{a} = \frac{4 a^3 \pi^2}{T^2}$

es ist also für Planet m_1 $\quad K^2\left(1 + \frac{m_1}{m}\right) = \frac{4 a_1^3 \pi^2}{T_1^2}$

für Planet m_2 $\quad K^2\left(1 + \frac{m_2}{m}\right) = \frac{4 a_2^3 \pi^2}{T_2^2}$

mithin kann, wenn m_1 und m_2 entweder einander an Masse gleichen, oder wenn m_1 die Masse des Zentralkörpers sie bedeutend überwiegt, $\frac{4 a_1^3 \pi^2}{T_1^2} = \frac{4 a_2^3 \pi^2}{T_2^2} +$. gesetzt werden oder $a_1^3 : a_2^3 \neq T_1^2 : T_2^2$. „Die Kuben der großen Axen verhalten sich nahezu wie die Quadrate der Umlaufszeiten". Aus der Abweichung kann ein Schluß auf die Masse der Planeten gemacht werden, wenn die Masse des einen z. B. der Erde, vergl. 57) bekannt ist.

Beispiel. ♁ und ☿; $20^3 : 7{,}8^3 = (365)^2 : T_2^2$; $T = 88$ Tage; Umlaufszeit des Merkurs.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Kepler'schen Gesetze und Newton's Erklärung derselben lehrten die Bahn der Erde und die Lage derselben im Sonnensysteme mit geschärfterem geistigen Auge betrachten.

Gleicherzeit war das physische Auge durch Erfindung und Vervollkommnung der Fernröhre mehr und mehr raumdurchdringend geworden und so konnte die Dauer der Periode der Erdbewegung, das Jahr und damit die Einheit der Zeit, die mittlere Zeitsekunde streng definiert und auch wegen der geglückten Messung der Zeit durch das Pendel festgestellt werden.

Die Fortschritte der Astronomie kamen wieder der Gradmessung zu gut und ermöglichten mit Hilfe des Mikroskops eine ähnlich genaue Bestimmung der Längeneinheit.

So wurden die Einheiten, die der Geschwindigkeitslehre zu Grunde liegen, gewonnen und zwar durch Anwendung der Geschwindigkeitslehre selbst.

Die Bedeutung dieser Lehre für den Unterricht geht über die genannten Gebiete A) bis G) hinaus, indem noch die

Wellenbewegung

gleichsam eine andere Art des Pendels, die ja selbst ein Gemeinsames für Licht-, Elektrizitäts-, Wärme- und Schalllehre bildet, hinzutritt und ohne den Begriff der Geschwindigkeit nicht erklärt werden kann. Die Wellenlehre liegt daher allerdings auch in unserer Aufgabe, doch wird sie besser einen Teil für sich ausmachen; in dem zuvor sorgfältig die Grenze des noch zur Schule gehörigen festgestellt und eingehalten wird.

Trotz dieser und anderer Unvollständigkeiten in der Ausführung glaube ich gezeigt zu haben, daß die Geschwindigkeitslehre in der That ein multum für den Schüler der oberen Stufe sein kann, daß sie weder zu schwierig noch zu zeitraubend ist und daß man bei ihrer Erklärung eine Menge Begriffe, Worte und Zeichen, namentlich die Grenzbetrachtungen, entbehren kann, die sonst mit diesem Gegenstande unzertrennlich verbunden schienen, aber zur Erörterung in der Schule nicht geeignet waren.

Berichtigung:

Seite 7,	Zeile	21	von	oben	lies:	. . Änderung
„ 8,	„	19	„	„	„	. . hört auf,
„ 9,	„	3	„	„	„	. . wegzulassen ist.
„ 9,	„	16	„	unten	„	. . an einer $t^0 = 2{,}2$ Sek. entsprechenden Stelle,
„ 11,	„	18	„	„	„	. . Subtraktion:
„ 12,	„	2	„	oben	sind die Bruchstriche in Höhe des Gleichheitszeichens zu stellen.	
„ 14,	„	6	„	unten	ist der Faktor $f^{(n)}$ zuzufügen.	
„ 16,	„	9	„	„	lies:	. . zweckmäßig,
„ 19,	„	3	„	oben	„	. . $x f'_{0 \cdot 1 \cdot x}$ statt $f'_{0 \cdot 1 \cdot x}$.
„ 40,	„	6	„	unten	„	. . 57^0 statt $57''$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Kepler'schen Gesetze und Ne … Bahn der Erde und die Lage derselben im Sonnensysteme mi … en.

Gleicherzeit war das physische A … mung der Fernröhre mehr und mehr raumdurchdringend gew … r Periode der Erdbewegung, das Jahr und damit die Ein … nde streng definiert und auch wegen der geglückten Messun … llt werden.

Die Fortschritte der Astronomie … gut und ermöglichten mit Hilfe des Mikroskops eine ähnlich g … it.

So wurden die Einheiten, die … iegen, gewonnen und zwar durch Anwendung der Geschwindig …

Die Bedeutung dieser Lehre fü … nten Gebiete A) bis G) hinaus, indem noch die

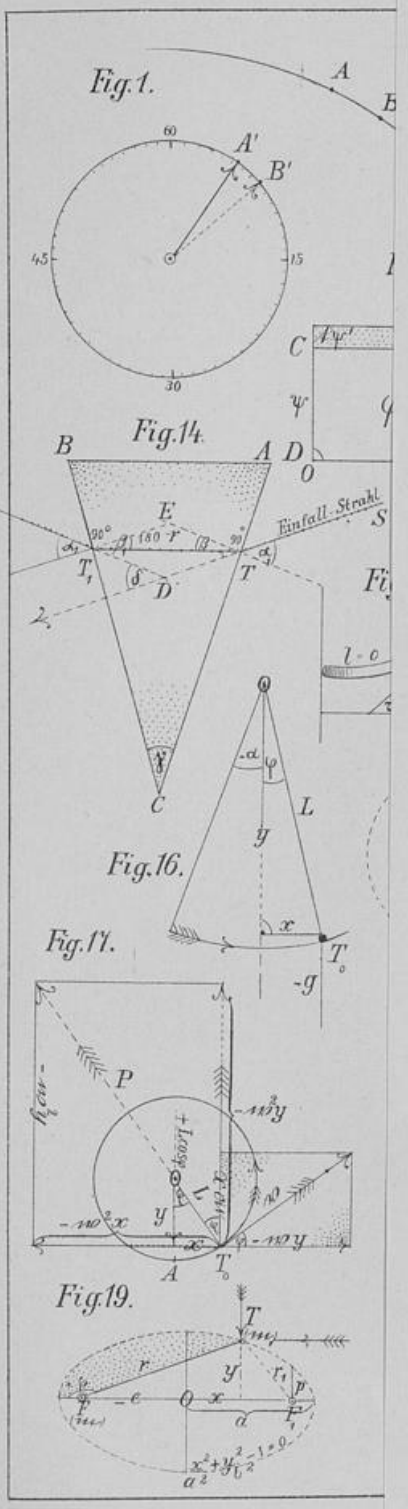
gleichsam eine andere Art des Pendels … Licht-, Elektrizitäts-, Wärme- und Schalllehre bildet, hinzutr … indigkeit nicht erklärt werden kann. Die Wellenlehre liegt … ufgabe, doch wird sie besser einen Teil für sich ausmachen; … des noch zur Schule gehörigen festgestellt und eingehalten w …

Trotz dieser und anderer Unvol … be ich gezeigt zu haben, daß die Geschwindigkeitslehre in der … er oberen Stufe sein kann, daß sie weder zu schwierig noch … ihrer Erklärung eine Menge Begriffe, Worte und Zeichen, … behren kann, die sonst mit diesem Gegenstande unzertrennlich … erung in der Schule nicht geeignet waren.

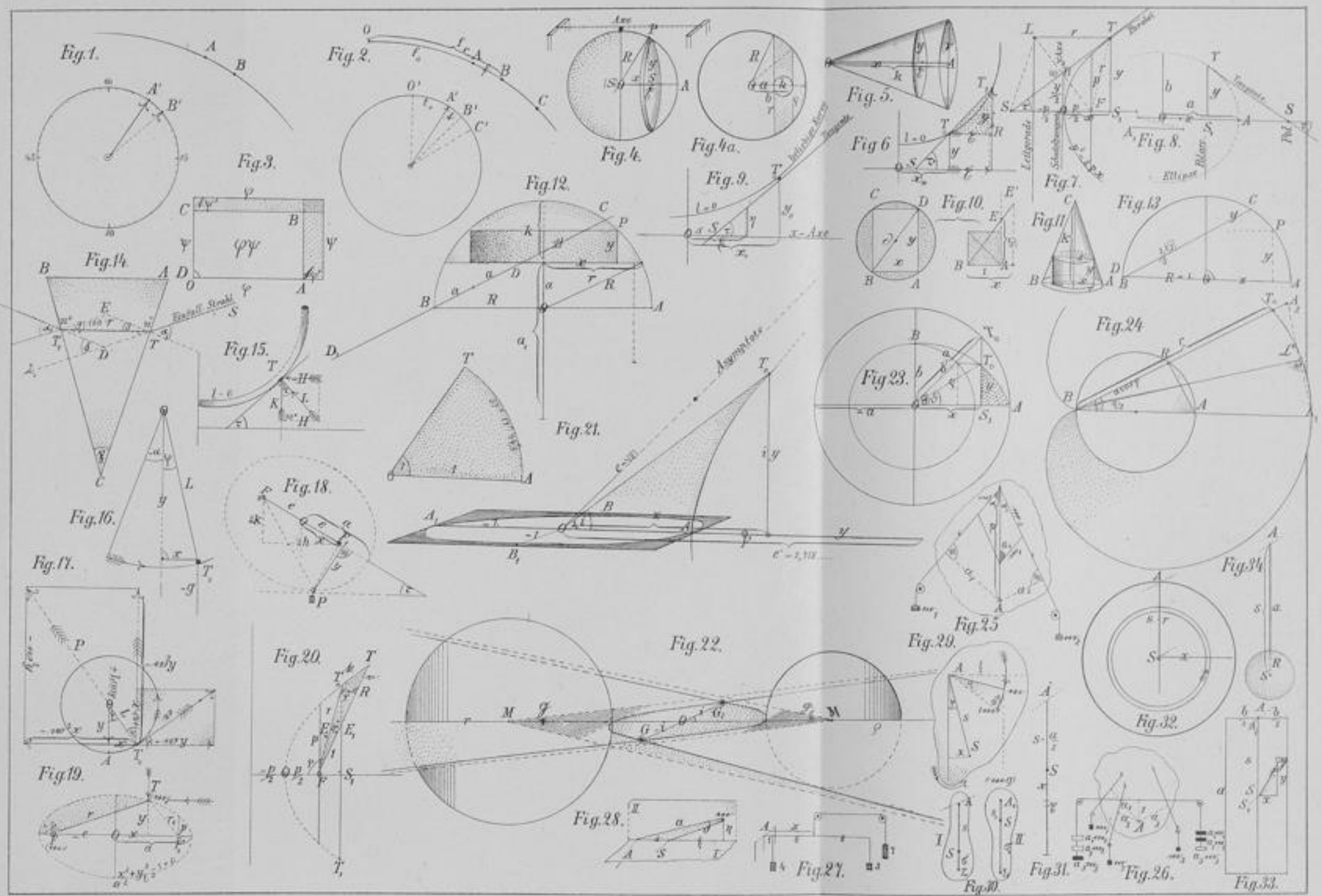
Seite 7, Zeile 21 von oben li …
" 8, " 19 " "
" 9, " 3 " "
" 9, " 16 " unten … orechenden Stelle,
" 11, " 18 " "
" 12, " 2 " oben … heitszeichens zu stellen.
" 14, " 6 " unten
" 16, " 9 " " …
" 19, " 3 " oben
" 40, " 6 " unten

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf