IV.

In der erwähnten Periode von 6585 Tagen 7 Stunden finden 40 bis 41 Sonnenfinsternisse statt; eine partiale, ringförmige oder totale Verfinsterung wiederholt sich für einen bestimmten Ort der Erde nach diesem Zeitraume nicht, obgleich für die Erde überhaupt die Sonnenfinsternisse sehr nahe nach demselben Gesetz wiederkehren wie die Mondfinsternisse.

Erstere sind nämlich für verschiedene Orte gleichzeitig von ganz verschiedener Größe. Orte zwischen m und m' haben eine totale Verfinsterung. In n sieht man in demselben Augenblick eine Randberührung der westlichen Mond- und östlichen Sonnenscheibe. Am Orte c ist die Hälfte des Verlaufes vorüber, während die Verfinsterung am zweiten ihr Ende erreicht und am dritten Orte n' eben erst beginnt. An Orten zwischen m und n sieht man bereits den östlichen Teil, an Orten zwischen m' und n' erst die westliche Scheibe verfinstert und zwar an jedem Orte um so mehr, je näher er an m und m' liegt. Der Kern- und Halbschatten des Mondes breiten sich über die der Sonne zugekehrte Erdhälfte in nahezu kreisförmigem Raume aus. Der Durchmesser des ersten ist im günstigsten Falle nur 38 geographische Meilen. Ebenso breit kann dann auch nur der Teil der Erdzone sein, der in der Richtung von West nach Ost von dem Mondschatten bestrichen wird. Die Richtung West — Ost findet annähernd nur zur Zeit der Sonnenwenden statt. In den übrigen Monaten folgt der vorüberziehende Mondschatten nie den Parallelkreisen; im Frühling (21. März) ist seine Bewegung von Südwest nach Nordost und im Herbst umgekehrt gerichtet. An denjenigen Orten, die außerhalb des Kern- und Halbschattens liegen, sieht man überhaupt keine Verfinsterung. Soll sich also nach 18 Jahren 11 Tagen an einem bestimmten Ort der Erde eine Sonnenfinsternis von derselben Größe wiederholen, so muß außer den übrigen Vorbedingungen nicht nur die Entfernung zwischen Erde, Sonne und Mond dieselbe sein, sondern der Ort muß dieselbe Stellung zu Sonnen- und Mondmittelpunkt haben. Diese Bedingung würde erfüllt, wenn Sonne und Mond am Horizont des Ortes dieselbe Stellung wie früher hätten. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall, und so kommt es denn, daß an einem bestimmten Ort der Erde eine totale Sonnenfinsternis durchschnittlich nur alle 200 Jahre stattfindet.

Die Gegenden, in denen eine Sonnenfinsternis überhaupt sichtbar ist, wird im allgemeinen von 4 Hauptcurven begrenzt. Der Radius des Schattenkreises (in Figur 5) n n' ist immer kleiner als der Erdradius; deshalb kann nicht die ganze Erde von dem Schattenkegel eingehüllt werden, und es muß daher im Süden und Norden der Erde die Finsternis ihr Ende erreichen. An dem äußerst südlich gelegenen Ort wird man nur noch eine Berührung vom Südrand des Mondes mit dem Nordrand der Sonne sehen. Alle Orte, die bei der Fortbewegung des Schattenkegels von West nach Ost dieselbe Erscheinung haben, liegen in der

1). südlichen Grenzcurve der Finsternis.

An dem nördlichsten Punkte beobachtet man nur noch eine Berührung vom nördlichen Mondrand mit dem südlichen Sonnenrand; die Verbindungslinie aller der Orte, an denen erwähnte Erscheinung noch gesehen wird, ist:

2). die nördliche Grenzcurve der Finsternis.

3). In der Mitte zwischen beiden liegt die Curve der Centralität. Parallelbogen zu ihren Grenzcurven begrenzen im Norden und Süden Gegenden, in denen als größte Phase noch $^1/_4$ $^1/_2$ $^3/_4$ des Sonnendurchmessers verfinstert erscheint und genannt werden

4). nördliche und südliche Grenzcurven von 3, 6 und 9 Zollen.

Die nördliche und südliche Curve für die Phase von 12 Zollen begrenzen die Curve der Totalität. An Orten, die auf diesen Curven liegen, tritt zwar noch Totalität ein, aber die völlige Verdunklung der Sonnenscheibe dauert nur einen Augenblick. Für Gegenden, die in der Mitte der Curve der Centralität liegen, ist die Dauer der Totalität am längsten.

Wenn die Spitze des Schattenkegels gerade noch die Erdoberfläche trifft, so reduciert sich die Zone der totalen Verfinsterung auf eine Linie. Bei ringförmigen Finsternissen liegen die Gegenden der Erde, in welchen dieselbe gesehen wird, in einem äußerst schmalen Streifen, der bis zu $1^1/_2$ Minuten betragen kann.

Wenn der Mondmittelpunkt Figur 6. in A steht, so trifft sein Halbschatten den Punkt g. Dort sieht ein Beobachter am allerersten auf der Erde eine Randberührung von Mond und Sonne und zwar bei Sonnenaufgang. Man berechnet daher

5). Länge und Breite des Ortes, wo der Beginn der Finsternis zuerst beobachtet wird.

Ist der Mond in seiner Bahn bis C' gekommen, so sieht ein Beobachter in h zu allerletzt eine Berührung am östlichen Sonnenrand und zwar, wenn ihm die Sonne untergeht.

6). Dieser Ort wird nach Länge und Breite bestimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7) Diese beiden letzt genannten Punkte liegen auf zwei Hauptcurven, nämlich der westlichen und östlichen Grenzcurve. Im Westen liegen noch andere Orte, die den Anfang der Finsternis bei ihrem Sonnenaufgang sehen werden. An solchen Orten ist dann der ganze Verlauf der dort stattfindenden Verfinsterung sichtbar, weil die Sonne über dem Horizont steht. Die Verbindungslinie dieser Punkte ist nur ein Theil der westlichen Grenzcurve. Der andere Teil verbindet die Orte, die grade noch das Ende bei Sonnenaufgang sehn; an denselben war während des übrigen Verlaufs die Sonne unter dem Horizont. Weiter westlich gelegene haben überhaupt keine Verfinsterung. Der genannte Curventeil ist als die eigentliche westliche Grenze anzusehn. Beide Zweige vereinigen sich in den Berührungspunkten mit der nördlichen und südlichen Grenzcurve und bilden meist eine ovalförmige geschlossene Linie.

8). Der unter 5). genannte Punkt liegt auf dem Zweig der östlichen Curve, der Orte verbindet, wo noch der ganze Verlauf sichtbar ist, das Ende bei Sonnenuntergang stattfindet. Der östliche Teil ist als eigentliche Grenze zu betrachten. Dort beginnt die Verfinsterung bei Sonnenuntergang. Der ganze Verlauf ist ebenso wie an weiter östlich gelegenen Orten unsichtbar. Die Vereinigungspunkte der beiden Curventeile sind die Berührungspunkte mit der nördlichen und südlichen Grenzcurve.

Außer den beiden Curven sind

9). die 4 Punkte zu bestimmen, in welchen die nördliche und südliche Grenzcurve von der westlichen und östlichen berührt werden.

Allen von der westlichen Grenzcurve eingeschlossenen Gegenden geht die Sonne mehr oder weniger verfinstert auf. Für ungefähr in der Mitte liegende Orte ist bereits die größte für sie statthabende Verfinsterung eingetreten, wenn die Sonne aufgeht.

Innerhalb der östlichen Grenzcurven liegen Orte, die wohl den Anfang, aber nicht das Ende der Verfinsterung sehn; die Sonne geht zum Teil verfinstert unter. In der Mitte findet das Maximum der Verfinsterung bei Sonnenuntergang statt.

Daher:

10). Berechnung der Curven der größten Phase im Horizont bei Sonnenaufgang und Sonnenuntergang

Auf letzteren liegen auch die unter 9) genannten Schnittpunkte.

Ist die Finsternis total, oder ringförmig, so wird jede der genannten Curven unterbrochen und zwar durch die Punkte, die die westliche und östliche Grenze bilden für die nördliche und südliche Curve der zwölfzölligen Verfinsterung.

Der Beginn der centralen Finsternis wird erst wahrgenommen, wenn der Mond in seiner Bahn von A nach A′ gerückt ist. Inzwischen ist aber ein westlicher gelegener Ort in die Lichtgrenze gekommen, und man sieht dort bei Sonnenaufgang zuerst centrale Bedeckung. Demnach liegt letzterer immer westlicher als der unter 5) genannte Punkt. Denkt man sich alle westlich gelegenen Gegenden, wo bei Sonnenaufgang entweder Anfang oder Ende der centralen Finsternis gesehen wird, verbunden, so erhält man

11) die westliche Grenzcurve der Centralität.

Ist der Mondmittelpunkt bis C gekommen, so wird man in h bei daselbst stattfindendem Sonnenuntergang das Ende der centralen Finsternis zu allerletzt sehen. Dieser Ort muß östlicher liegen als der unter 6). angeführte und liegt

12) auf der östlichen Grenzcurve der Centralität.

Beide Curven bilden meistens sehr kleine ovalförmige Ringe.

13) Noch kann man berechnen, an welchen Orten das Maximum der Verfinsterung grade am wahren Mittag stattfindet. Im Vordergrund stehn hierbei die Orte, wo centrale Verfinsterung um diese Zeit eintritt.

14) Auch wird meistens die Dauer der Totalität oder Ringförmigkeit bestimmt.

15) Bei dem äußerst seltenen Fall wo die Finsternis teils total, teils ringförmig ist, wird der Ort berechnet, wo der Übergang stattfindet.

16) Für einen gegebenen Ort kann man noch die Hauptumstände einer Sonnenfinsternis ermitteln, nämlich Zeit des Anfangs und Endes und die größte Phase. Meistens wird auch bestimmt, an welchem Punkte des Sonnenrandes der Ein- und Austritt erfolgt.

Hansen hat in seiner Abhandlung „Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen“ untersucht, welche andere Formen die westliche und östliche Grenzcurve außer der ovalförmigen Gestalt noch annehmen können. Jede derselbe kann außer einer Curve mit Spitze auch Curve mit Doppelpunkt werden und die Form einer liegenden Acht haben. Ist dies z. B. bei der östlichen Grenzcurve der Fall, so fängt an dem Orte, der dem Doppelpunkt entspricht, die Sonnenfinsternis abends bei Sonnenuntergang an und hört am nächsten Morgen bei Sonnenaufgang auf. Der eigentliche Verlauf ist unsichtbar. Oder es kann auch der Fall eintreten, daß die Finsternis mit Sonnenaufgang anfängt und mit Sonnenuntergang aufhört. Außerdem giebt es dann einige Orte, wo die Sonne mehr oder weniger verfinstert unter- und am nächsten Morgen immer noch verfinstert aufgeht. Auch kann die Sonne zum Teil verfinstert auf- und zum Teil verfinstert untergehn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Tritt der Fall ein, daß der Schattenkegel des Mondes die Erdkugel im Norden oder Süden grade noch berührt, ohne darüber hinauszuragen, so wird die nördliche oder südliche Grenzlinie zu einem Punkt. Alsdann ist dieser nördliche oder südliche Grenzpunkt auch gemeinsamer Punkt der westlichen und östlichen Grenzcurve oder Doppelpunkt der sogenannten westlich-östlichen Grenzcurve, die fast ausschließlich die Form einer ∞ hat.

Die beiden Curven der größten Phase im Horizont, die sich sonst innerhalb der östlichen und westlichen Grenzcurven hinziehen, bilden ebenfalls eine Linie; letzere geht durch den nördlichen oder südlichen Grenzpunkt, wenn er gemeinschaftliche Spitze der östlichen und westlichen Grenzcurve ist. Im übrigen schneidet die Curve der größten Phase im Horizont dieselbe in 2 Punkten.

Ragt der Schattenkegel im Norden oder Süden über die Erde hinaus, so werden die Berührungspunkte der westlichen und östlichen Grenzcurve mit der nördlichen oder südlichen Grenzcurve imaginär. Auch in diesem Falle ist die westlich-östliche Grenzcurve ein achterförmiger Curvenzug.

Bei der Sonnenfinsternis vom 4. Juni 1788 traten alle Curven in ihren einfachsten Formen auf.

Bei der Sonnenfinsternis vom 18. Juli 1860 waren die Schnittpunkte der westlichen und östlichen Grenzcurve mit der nördlichen imaginär.

V.

Es würde über den Rahmen der beabsichtigten Arbeit weit hinausgehen, wenn ich eine genaue Entwickelung aller in Betracht kommenden Formeln wiedergeben wollte. Allen Berechnungen neusten Datums liegt die bereits erwähnte Abhandlung von Hansen „Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandter Erscheinungen". (Abh. d. Kgl. sächs. Gesellsch. d. Wiss. IV). zu Grunde. Herr v. Oppolzer hat in seinen Syzygientafeln für den Mond (Publik der astr. Gesellsch. XVI). verschiedenen Werten nur andere Form gegeben. Ähnliches ist zu bemerken für „die Tafeln zur Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse" des Herrn Lehmann (herausg. 1882 vom Kgl. pr. statistischen Büreau).

Man denkt sich durch den Mittelpunkt der Erde eine Ebene senkrecht zur Achse des Mondschattenkegels. Der Radius des in derselben ausgeschnittenen Schattenkreises wird mit u' bezeichnet. f, der Erzeugungswinkel des Schattenkegels, läßt sich berechnen durch:

$$\sin f = \frac{K}{R'} \cdot G, \text{ wobei } G = 1 + \frac{\sin \pi'}{\sin(\pi - \pi')}$$

wenn zuvor K aus dem Mondhalbmesser, der Sonnenparallaxe und dem scheinbaren Sonnenradius bestimmt ist. Letzter Wert ist für äußere Randberührungen constant;

$$\log K = 7{,}66884.$$

ebenso für innere $\log K = 7{,}66668_n$

$\sphericalangle$ f wird höchstens 16'.

$$u' \text{ bestimmt sich durch: } u' = s + \frac{K}{R'} \cdot \frac{1}{\sin(\pi - \pi')}$$

wenn s = Mondhalbmesser = 0,273 Erdradius, R' = mittl. Entfernung der Erde von der Sonne Man erhält wegen log K 2 Werte, einen für äußere und einen für innere Randberührungen, deren Summe $u'_a + u'_i = 0{,}5473$, so daß man unter dieser Voraussetzung immer nur einen zu berechnen braucht.

Außerdem nimmt man den Mittelpunkt der Erde zum Coordinatenanfang und zählt die P in der Ekliptik nach Osten, die Q in derselben Ebene nach Norden in der Richtung des Breitenkreises; Die Verbindungslinie des Sonnen- und Mondmittelpunktes ist der Z Achse parallel.

Die Coordinaten P, Q werden bestimmt durch:

$$P = \frac{\cos b \sin(L - L')}{\sin(\pi - \pi')}; \quad Q = \frac{\sin(b - b')}{\sin(\pi - \pi')}$$

In Figur 7 stellt T C den Wert Q dar. Die stündlichen Änderungen beider Werte müssen alsdann bestimmt werden. Ist Cl die stündliche Änderung von P und lb diejenige von Q, so erhält man $n \sin N_1 = \triangle P$

$$n \cos N_1 = \triangle Q$$

Cb = n ist die stündliche Bewegung der gemeinschaftlichen Projektion der Mittelpunkte der Sonne und des Mondes, und N_1 ist der Winkel, den die Richtung der Projektion mit dem Breitenkreise bildet.

Außer n und N_1 wird der Winkel bestimmt, den der Deklinationskreis C P mit dem Breitenkreise bildet. Derselbe berechnet sich aus L' und ε nach $\operatorname{tg} h = \cos L' \operatorname{tg} \varepsilon$; $N' = N_1 - h$ ist der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Winkel, den die Projektionslinie mit dem Deklinationskreis bildet. Man findet die Deklination der Sonne aus $\sin \delta' = \sin L'. \sin \varepsilon$.

Aus dem Dreieck TC M findet man $\gamma = Q \sin N_1 =$ dem kleinsten Abstand der Projektion des Mond- und Sonnenmittelpunktes vom Mittelpunkt der Erde.

Der Punkt C entspricht der wahren Conjunktion von Sonne und Mond. $\frac{Q \cos N_1}{n}$ ist der Wert in Stunden von der wahren Conjunktion bis zur Zeit des kürzesten Abstandes, oder $\frac{15}{n} Q \cos N_1$ derselbe Wert nach Graden. Nennt man T_0 die mittlere Zeit der wahren Conjunktion, z die Zeitgleichung d. h. die Differenz zwischen mittlerer und wahrer Zeit so ist:

$\tau_0 = T_0 - z$ die wahre Zeit der wahren Conjunktion in Stunden ausgedrückt, $15\ \tau_0$ derselbe Wert nach Graden ausgedrückt, also findet der kleinste Abstand statt, nach Graden ausgedrückt, zur Zeit $\mu = 15\ \tau_0 - \frac{15}{n} Q \cos. N_1$

Aus den Gleichungen:

$$\sin g \sin G = \sin N' \sin \delta' \qquad \sin k \sin K = \sin N'$$
$$\sin g \cos G = \cos N' \qquad \sin k \cos K = \cos N' \sin \delta'$$
$$\cos g = \sin N' \cos \delta' \qquad \cos k = \cos N' \cos \delta'$$

in denen N' und δ' bekannt sind, werden die Hilfsgrößen g, G, k K bestimmt.

Die Abplattung der Erde wird zu $c = {}^1/_{300}$ angenommen, und mit N' und δ' werden die Größen d, D, e, e' ν und ν' erhalten aus den Gleichungen:

$$d \sin D = \sin \delta' \qquad e \sin (N' + \nu) = d \sin N'$$
$$d \cos D = (1-c) \cos \delta' \qquad e \cos (N' + \nu) = \cos N'$$
$$e' \sin (N' + \nu') = \sin N'$$
$$e' \cos (N' + \nu') = d \cos N'$$

Wenn ϑ der vom Deklinationskreis an gezählte Positionswinkel des Berührungspunktes der Ränder ist, so hat man $\vartheta = \psi + N'$. ψ, der von der Mondbahn an gezählte Positionswinkel, kann in einzelnen Fällen berechnet werden, oder hat bei der indirekten Lösung Werte, die nahe an 90^0 oder 270^0 liegen.

Aus den bekannten Winkeln N' und K wird die Hilfsgröße W durch $N' - K = W$ eingeführt. H, die Höhe des Sonnenmittelpunktes über dem wahren Horizont, kann ebenfalls bestimmt werden.

Nachdem in den einzelnen Fällen H, ψ und W berechnet sind, werden Länge und Breite der Orte gesucht.

$$\text{Aus } \operatorname{tg} H' = \frac{\operatorname{tg} H}{\cos (N' - W)} \text{ und } \operatorname{tg} t = \frac{\cos H' \operatorname{tg} (N' - W)}{\sin (H' - D)}.$$

erhält man t; derselbe bezeichnet nach Graden die wahre Zeit des Beobachtungsortes τ, nach Graden, bedeutet die sich auf den ersten Meridian (meistens Greenwich) beziehende Zeit des Ortes, wo die bestimmte Phase stattfindet, und wird für die einzelnen Fälle bestimmt.

Aus der Differenz findet man die geographische Länge des Ortes; $\lambda = t - \tau$. Die allgemeine geographische Breite erhält man aus $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{ctg} (H' - D) \cos t$.

Letzter Wert ist zu verbessern. Dies geschieht nach Tabellen, die den Unterschied angeben, der wegen der Abplattung für die einzelnen geographischen Breiten besteht und mit $(\varphi - \varphi_1)$ bezeichnet wird; die eigentliche Breite ist somit; $\varphi = \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1)$

Bei den meisten Curven ist die Strahlberechnung im Horizont berücksichtigt; die mittlere beträgt 33', wird aber nach Teilen des Radius ausgedrückt und $r = 0{,}0009599$ angenommen.

A). Die westliche und östliche Grenzcurve der partiellen Finsternis werden berechnet nach $(\sin W + \nu) = \frac{\gamma + u'_a \sin \psi}{e}$ wobei ψ alle Werte von $0^0 - 360^0$ annehmen kann. Jedem beliebigen Werte von ψ entsprechen 2 Werte von $(W + \nu)$, für welche alsdann H bestimmt wird, aus $\operatorname{tg} H = - \operatorname{tg} f_a \cos (\psi + W) - r$.

Treten imaginäre Werte auf, wenn nämlich $\sin (W + \nu) > 1$, so sind die erhaltenen Punkte auszuschließen. Ob der Punkt den Anfang oder Ende der Finsternis angehört, wird entschieden durch: $n \varkappa \cos \psi + \sin (\psi + W) \sin D$ wobei $\log \varkappa = 0, 582$.

Ein negativer Wert entspricht dem Anfang, ein positiver Wert dem Ende.

$$\tau \text{ findet sich aus } \tau = \mu + \frac{15}{n} e' \cos (W + \nu') + \frac{15}{n} u'_a \cos \psi$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach dem oben angegebenen Verfahren erhält man aus H′ t, τ die geographischen Längen und Breiten der Orte.

B). Die unter 5) und 6) genannten Punkte liegen auf diesen Curven; für dieselben ist aber $W + \psi$ nahe 360^0, der eine nahe an 90^0, der andere an 270^0. Deshalb erhält man für die betreffenden Werte aus obiger Gleichung $\pm (e + u'_a) = \gamma$. Da aber für 1 annähernd $\sin (W + \nu)$ gesetzt werden kann, so ist $\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e + u'_a}$ Näherungsformel.

Man erhält für $(W_1 + \nu)$ 2 Werte und aus $\operatorname{tg} \psi_1 = - \frac{e' \sin (W_1 + \nu')}{e \cos (W_1 + \nu)}$ ebenfalls 2 Werte; Der unter A gegebener Ausdruck enscheidet, ob ψ dem Anfang oder Ende angehört. Alsdann wird aus $\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'_a}{e} \sin \psi$ ein dem eingesetzten ψ entsprechendes $(W_2 + \nu)$ gefunden, wobei W_2 in demselben Quadranten gewählt werden muß wie W_1. Mit letztem Wert muß ψ_2 bestimmt und das Verfahren solange fortgesetzt werden, bis der Anfangswert von $(W + \nu)$ mit dem Endwert stimmt. Die weitere Rechnung ist wie bei A).

Für den Anfangs- und Endpunkt der Curve der Centralität bei Sonnenaufgang und Untergang ist: $\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e}$, $\operatorname{tg} H = - r$. und die allgemeine Formel für τ reduciert sich auf

$$\tau = \mu + \frac{15}{n} e' \cos (W + \nu')$$

C). Für die Curve der größten Phase im Horizont sind zunächst u′ und f für eine beliebige Phase von i Zollen zu berechnen.

Wenn $^1/_{12} (u'_a - u'_i) = \triangle u$
$^1/_{12} (f_a - f_i) = \triangle f$,
so ist für i Zoll $u' = u'_a - i \triangle u$
$f = f_a - i \triangle f$.

Man hat für die weitere Rechnung:

$$\operatorname{tg} \psi = - \frac{n \varkappa + e' F \sin (W + \nu')}{e F \cos (W + \nu)}, \text{ wobei } \log \varkappa = 0{,}582 \text{ und}$$

für die nördliche Curve	für die südliche Curve
$E = \sin D - \operatorname{tg} f \cos D \sin N'$	$E = \sin D + \operatorname{tg} f \cos D \sin N'$
$F = E + r \cos D \cos (N' - W)$	$F = E + r \cos D \cos (N' - W)$

(r = Strahlenberechnung).

Außerdem ist wieder: $\sin (W + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e} \sin \psi$.

Durch die beiden Gleichungen müssen ψ und W bestimmt werden; dasselbe geschieht am einfachsten durch Näherung, indem man zunächst aus $\sin (W_1 + \nu) = \frac{\gamma + u'}{e}$, W berechnet und aus seinem Wert durch die angesetzte Formel ψ. Wegen $\sin (W_1 + \nu)$ bekommt man 2 Werte für ψ, wovon der eine zu der nördlichen Curve der größten Phase bei Sonnenuntergang, der andere für jene bei Sonnenaufgang gehört. Ebenso findet man für die südliche Curve durch die Annahme $\sin (W_1 + \nu) = \frac{\gamma - u'}{e}$ 2 Werte von ψ, die für Sonnenaufgang und Untergang gelten. Alsdann berechnet man mit dem gefundenen ψ von neuem ein W_2 durch die erwähnte Formel $\sin (W_2 + \nu) = \frac{\gamma}{e} + \frac{u'}{e} \sin \psi$ Mit W_2 muß die ganze übrige Rechnung wiederholt werden, wenn W_2 mit W_1 nicht genügend übereinstimmt; meistens ist sie aber nicht nötig.

Nachdem aus $\sin H = \operatorname{tg} f \sin W - r$ für die nördliche Curve
„ $\sin H = - \operatorname{tg} f \sin W - r$ für die südliche „ noch H gefunden ist, werden H′, t, τ und daraus die geographischen Längen und Breiten wie früher bestimmt.

C). Um die 4 Punkte zu erhalten, in denen die nördliche und südliche Grenzcurve der partiellen Finsternis von der westlichen und östlichen berührt werden, braucht man nur das unter B) angewandte Verfahren zu wiederholen; muß man aber, da dieselben auch zu der Curve der größten Phase im Horizont für 0 Zoll gehören, für u den speciellen Wert u'_a und für tg f den Wert $\operatorname{tg} f_a$ einsetzen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

D). Um die westliche und östliche Grenzcurve der Centralität zu bestimmen, verfährt man wie bei A) hat nur statt u'_a und $tg\ f_a$ die Werte u'_i und $tg\ f_i$ zu substituieren.

E). Zunächst werden für die nördliche und südliche Grenzcurve einer gegebenen Größe nach C) die Werte f und u' berechnet; alsdann aus $\sin g' \sin G' = \sin g \sin G \mp tg\ f. \cos \delta'$

$$\sin g' \cos G' = \sin g \cos G$$

$$\cos g' = \cos g \pm tg\ f \sin \delta'$$

wobei das obere Zeichen für die nördliche, das untere für die südliche Curve gilt, g' und G' gefunden.

Die Werte $\alpha = (1 - c) \cos g'$ und $\beta = \frac{15}{n} (1 - c) \cos k$ sind weitere Hilfsgrößen. Der Stundenwinkel t, der beliebig angenommen werden muß, hat als Grenzen die Stundenwinkel, welche zu den betreffenden Phasen im Horizont gehören. Man berechnet für ein beliebiges zulässiges t

$$\eta = \sin g' \sin (G' + t) \qquad \Theta = \sin k \sin (K + t)$$

$$\eta_1 = \sin g' \cos (G' + t) \qquad \Theta_1 = \frac{15}{n} \sin k \cos (K + t)$$

Aus $a \sin A = \eta$ bekommt man a und A.
$a \cos A = \alpha$

$$\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin \psi}{a} \text{ und}$$

$$tg\ \psi = \frac{n\ \varkappa - \Theta \cos \varphi_1}{\eta_1 \cos \varphi_1} \text{ bestimmen } \eta_1 \text{ und } \psi.$$

Man nimmt zunächst für $\sin \psi \pm 1$ und erhält aus $\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma \pm u'}{a}$ einen genäherten Wert von $\varphi_1 = \varphi'_1$, aus der zweiten Gleichung einer genäherten Wert für $\psi = \psi'$, der in der ersten Gleichung eingesetzt einen genauern Wert von φ_1 giebt. Dieses indirekte Verfahren giebt meistens schon ein wünschenswert genaues Resultat. φ_1 wird durch den sinus bestimmt; es ist in diesem Falle nur der Wert zulässig, der $\varphi < \pm 90^0$ macht. Die eigentliche Polhöhe ist wie in den andern Fällen $\varphi = \varphi_1 + (\varphi - \varphi_1)$ Die Berechnung von $\lambda = t - \tau$ gestaltet sich hier wie folgt.

$$\alpha_1 = (1 - c)\ tg\ f \sin \delta'$$

$$\beta_1 = tg f \cos \delta' \cos t.$$

$$u = u' - \alpha_1 \sin \varphi_1 - \beta_1 \cos \varphi_1$$

$$\tau = \mu + \beta \sin \varphi_1 - \Theta_1 \cos \varphi_1 + \frac{15}{n} u \cos \psi$$

Wegen $a \cos A = \alpha$, ist das Minimum von $a = \alpha$.

Solange $\alpha > \gamma + u' \sin \psi$, ist $\sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma + u' \sin \psi}{a} < 1$.

In diesem Falle sind die nördliche und südliche Grenzcurve reell.

F). Die Curve der Centralität wird nach dem in E) angegebenen Verfahren berechnet; nur ist $\alpha = (1-c) \cos g$ $\beta = \frac{15}{n}(1-c) \cos k$ $\eta = \sin g \sin (G + t)$ $\Theta_1 = \frac{15}{n} \sin k \cos (K + t)$;

$$a \sin A = \eta_1 \quad a \cos A = \alpha \qquad \sin (\varphi_1 - A) = \frac{\gamma}{a}; \ \tau = \mu + \beta \sin \varphi_1 - \Theta_1 \cos \varphi_1$$

G). Die Hauptumstände einer Sonnenfinsternis für einen gegebenen Ort werden nach folgendem ermittelt:

Die allgemeine Breite wird zunächst in excentrische Polhöhe durch $tg\ \varphi_1 = (1-c)\ tg\ \varphi$ verwandelt. Aus $\zeta = \cos \varphi_1$
$\eta = (1-c) \sin \varphi_1$ werden ζ und η bestimmt.

Durch $m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \zeta \sin g \sin (G + \tau)$
$m \cos M = - \eta \cos k + \zeta \sin k \cos (K + \tau)$
$u_1 = u'_a - (\eta \sin \delta' + \zeta \cos \delta' \cos \tau)\ tg\ f_a$ wobei $\tau = \lambda + \mu$ zu nehmen ist, erhält man M, m und u_1

$$\varkappa' = \frac{30 \sin {}^1/_2 (t - \tau)}{t - \tau}, \ G' = G + {}^1/_2\ \tau, \ K' = K + {}^1/_2\ \tau$$

Durch $m' \sin M' = - \varkappa' \zeta \sin g \cos (G' + {}^1/_2\ t)$
$m' \cos M' = n - \varkappa' \zeta \sin k \sin (K' + {}^1/_2\ t)$
$u = u_1 + \varkappa' \zeta\ tg\ f_a \cos \delta' \sin {}^1/_2 (t + \tau) \frac{t - \tau}{15}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ergiebt sich m', M' und u. Aus $\sin \chi' = \frac{m}{u} \sin (M + M')$ bestimmt man χ' und erhält Anfang und Ende der Finsternis für den gegebenen Ort durch $t = \tau - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M') + 15 \frac{u}{m}, \cos \chi'$

Die Rechnung ist indirekt; denn in den Gleichungen für M, m und u ist t unbekannt. Man nimmt für t zunächst τ und erhält aus der zuletzt angegebenen Gleichung ein t_1 als Näherungswert für t. Derselbe wird jetzt für t in dieselben Formeln eingesetzt; man erhält jetzt einen genaueren Wert t_2. Das Verfahren muß solange wiederholt werden, bis die Werte für t annähernd stimmen. Wird bei der ersten Näherung $\sin \chi' > 1$, so setzt man in der letzten Gleichung $\cos \chi' = o$, findet dann einen Wert für t, der in die vorhergehenden Gleichungen eingesetzt zu einem neuen Werte von $\sin \chi'$ führt. Wird letzter Wert stets > 1, so findet für den angegebenen Ort keine Finsternis statt.

Im übrigen ergeben sich für χ' aus $\sin \chi' = \frac{m}{u} \sin (M + M')$ 2 Werte; für jeden ist $\cos \chi'$ für die letzte Gleichung zu bestimmen. Der negative Wert entspricht dem Eintritt, der positive dem Austritt.

Zur Bestimmung der Zeit und Größe der größten Phase hat man die Gleichungen:

$$m \sin M = \gamma - \eta \cos g + \zeta \sin g \sin (G + t_o).$$

$$m \cos M = (t_o - \lambda - \mu) \frac{n}{15} - \eta \cos k + \zeta \sin k \cos (K + t_o)$$

$$m' \sin M' = - \varkappa \zeta \sin g \cos (G + t_o)$$

$$m' \cos M' = n - \varkappa \zeta \sin k \sin (K + t_o)$$

$$t_1 = t_o - 15 \frac{m}{m'} \cos (M + M')$$

Das Verfahren ist wie vorher; man nimmt für t_o zunächst $\lambda + \mu$; u. s. w.

In beiden Fällen muß m und m' positiv genommen werden. Ist m_1 der letzte Wert von m, so ist die größte Phase in Zollen $= \frac{12 (u'_a - m_1)}{u'_a - u'_i}$.

Um Anfang und Ende der Centralität für einen gegebenen Ort zu bestimmen, muß man in den unter G) gegebenen Gleichungen für u' m und f die Werte u'_i und f_i einsetzen. Außerdem nimmt man für t als ersten Näherungswert den Stundenwinkel, der für die Zeit der größten Phase gilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ergiebt sich m′, M′ und u. Aus $\sin \chi' = \frac{m}{u} \sin (M +$ und

Ende der Finsternis für den gegebenen Ort durch $t = \tau$ os χ'

Die Rechnung ist indirekt; denn in den Gleichung Man nimmt für t zunächst τ und erhält aus der zuletzt angeg wert für t. Derselbe wird jetzt für t in dieselben Formeln eing Wert t_2. Das Verfahren muß solange wiederholt werden, bis d bei der ersten Näherung $\sin \chi' > 1$, so setzt man in der letz einen Wert für t, der in die vorhergehenden Gleichungen einge führt. Wird letzter Wert stets > 1, so findet für den angegeb

Im übrigen ergeben sich für χ' aus $\sin \chi' = \frac{m}{u}$ os χ' für die letzte Gleichung zu bestimmen. Der negative Wert en tritt.

Zur Bestimmung der Zeit und Größe der größten

$$m \sin M = \gamma - \nu \cos g + \zeta \sin g \sin ($$

$$m \cos M = (t_0 - \lambda - \mu)\frac{n}{15} - \eta \cos k$$

$$m' \sin M' = - \varkappa \zeta \sin g \cos (G + t_0)$$

$$m' \cos M' = n - \varkappa \zeta \sin k \sin (K + t_0)$$

$$t_1 = t_0 - 15\frac{m}{m'} \cos (M + M')$$

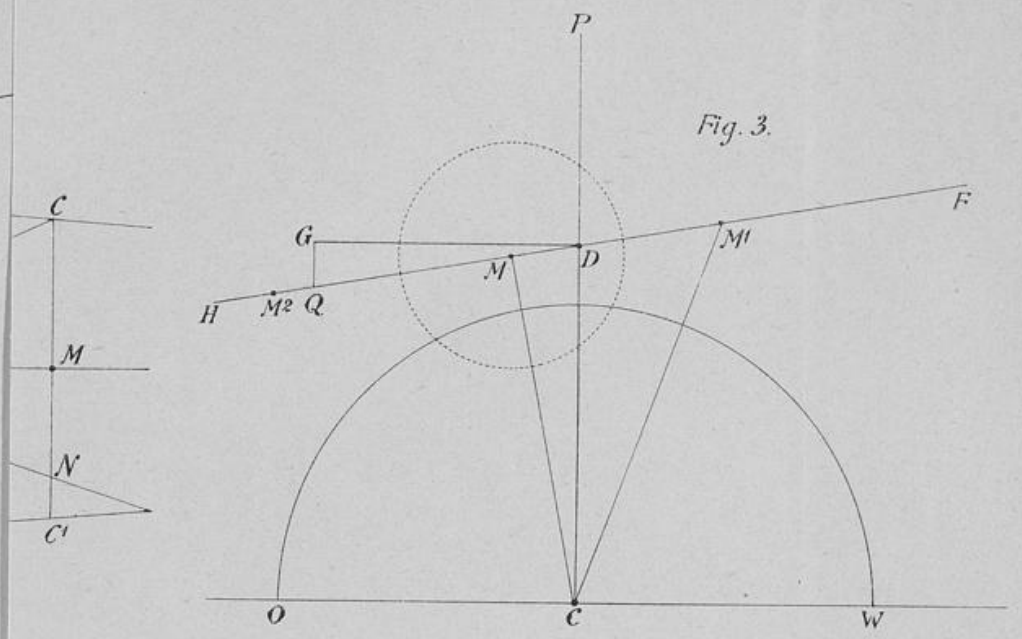
Das Verfahren ist wie vorher; man nimmt für t_0 z

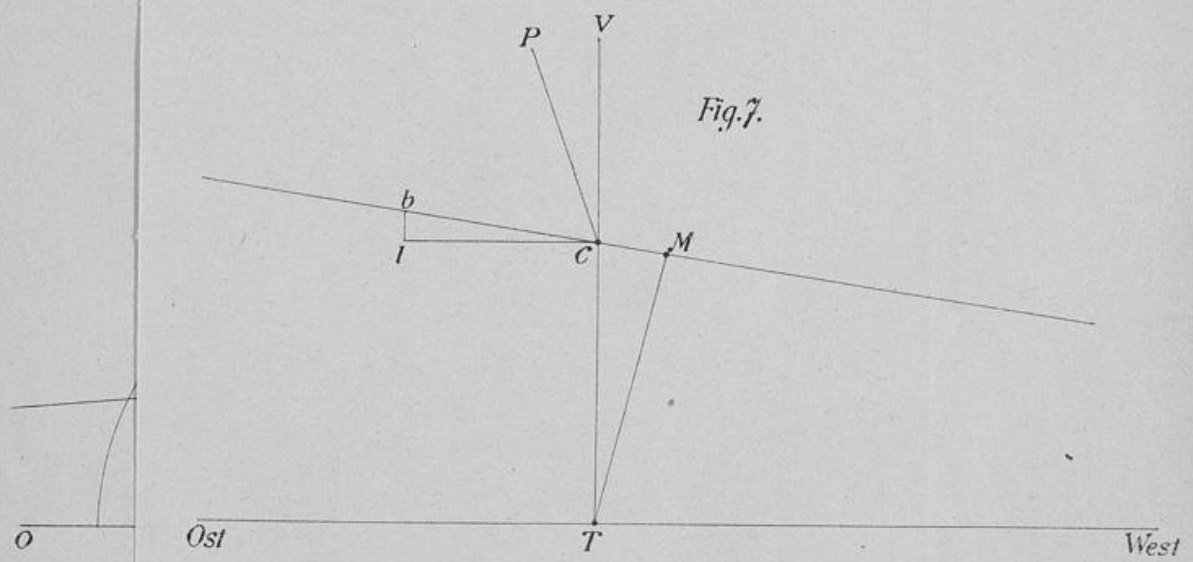
In beiden Fällen muß m und m′ positiv genommen m, so ist die größte Phase in Zollen $= \frac{12 (u'_a - m_1)}{u'_a - u'_i}$.

Um Anfang und Ende der Centralität für einen geg den unter G) gegebenen Gleichungen für u′ m und f die W man für t als ersten Näherungswert den Stundenwinkel, der

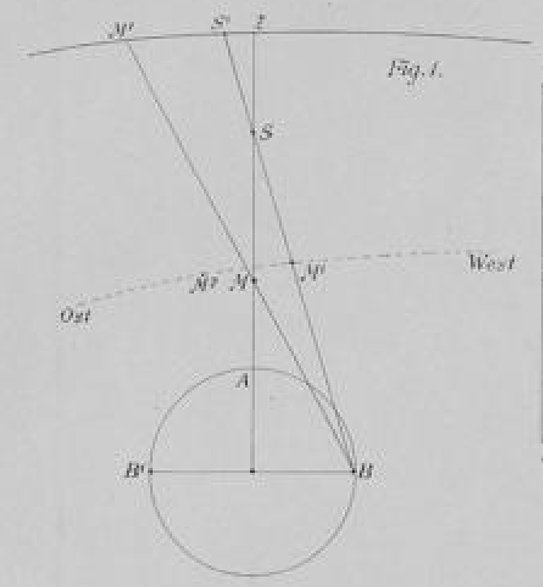
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

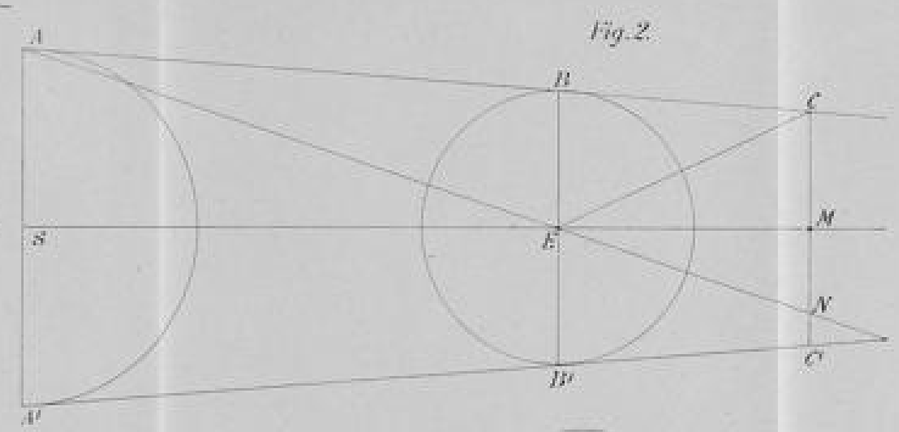
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

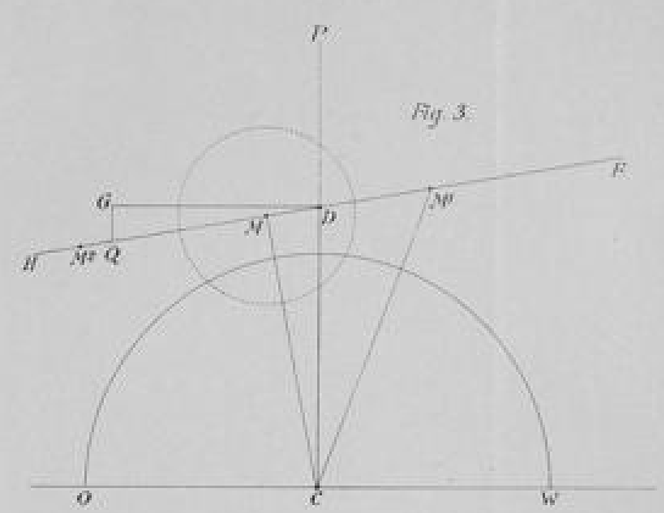


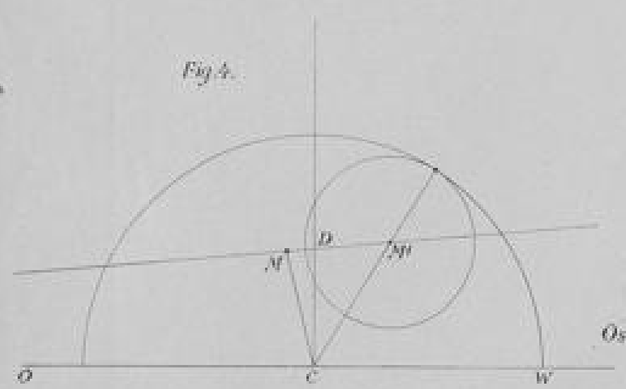


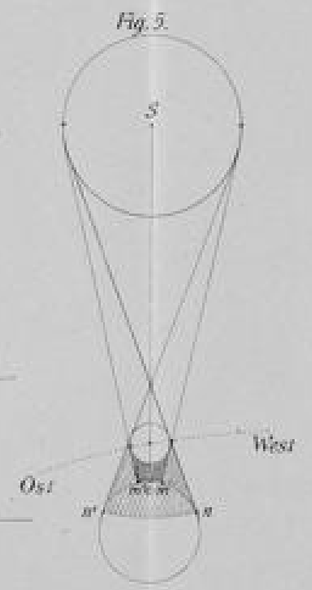
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

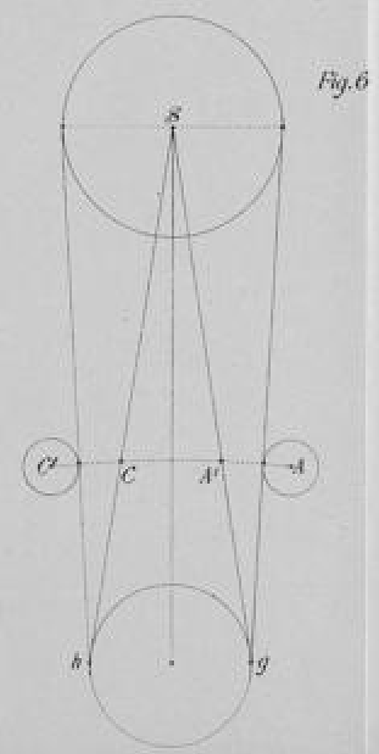


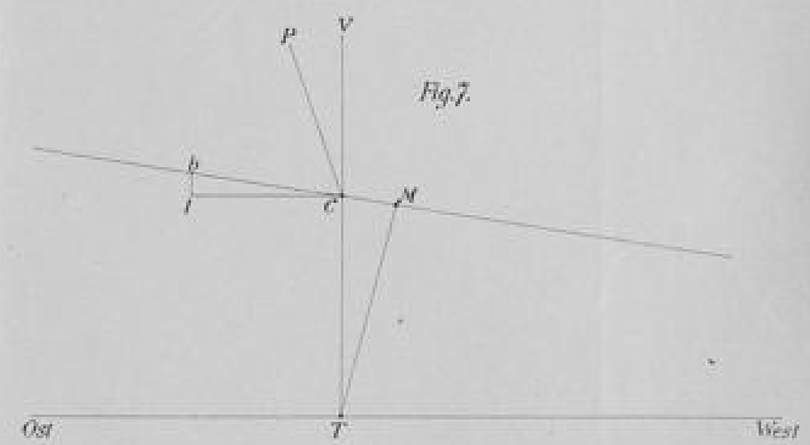












Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf