Anfangsgründe der analytischen Geometrie

des 4fach ausgedehnten Raumes.

Von

E. Fick,

K. Gymnasiallehrer.

Wissenschaftliche Beilage

des Kgl. humanistischen Gymnasiums

Neuburg a. D.

für das Studienjahr 1906/07.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

Neuburg a. D. 1907.

Grießmayersche Buchdruckerei.

gne 6 (1907)

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Während meiner Studienzeit hatte ich Gelegenheit eine Vorlesung von Professor von Dyck über Krümmungsmaß des mehrdimensionalen Raumes zu hören. Seit jenen Tagen beschäftigt mich, bald mehr bald weniger, das Problem des mehrdimensionalen Raumes. Ich hatte bereits vorliegende Arbeit in ihren Grundzügen entworfen, als mir Schoutes mehrdimensionale Geometrie (Sammlung Schubert 35) in die Hände kam. Was mich von Schoute unterscheidet, ist die rein analytische Behandlung des Problems; ohne auf geometrische Vorstellungen Bedacht zu nehmen, versuchte ich die Lösung des Problems als eine Aufgabe über lineare Mannigfaltigkeiten. Deshalb habe ich auch anfangs den Koordinatenbegriff nicht näher erklärt.

Die Arbeit beschränkt sich auf den 4fach ausgedehnten Raum, nur in einigen mit * versehenen Absätzen sind die Ergebnisse auf höhere Mannigfaltigkeiten ausgedehnt. In Anmerkungen sind Vergleiche gezogen mit der Geometrie des 3fach ausgedehnten Raumes, ohne jene Vergleiche strenge zu erweisen.

Neuburg a. D. im Mai 1907

E. Fick.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Erklärung.

Sind 4 Zahlen notwendig und hinreichend einen Punkt einer Punktmannigfaltigkeit eindeutig zu bestimmen, so nennen wir die Punktmannigfaltigkeit einen 4 fach ausgedehnten Raum (R_4). Die 4 Zahlen heißen Koordinaten des Punktes im R_4. § 1.

Vorausgesetzt wird also hiebei, daß für jeden Punkt eine Vierzahl eindeutig gefunden werden kann und umgekehrt, daß zu 4 reellen Zahlen immer ein Punkt der Mannigfaltigkeit (R_4) sich finden läßt.

Wenn n Zahlen notwendig und hinreichend sind einen Punkt einer Mannigfaltigkeit eindeutig zu bestimmen, so heißt die Mannigfaltigkeit n fach ausgedehnter (linearer) Raum (R_n). § 1*.

II. Der Punkt.

Der Punkt ist durch seine 4 Koordinaten völlig und eindeutig bestimmt und umgekehrt (§ 1). § 2.

Wir schreiben daher Punkt P: x_1, x_2, x_3, x_4 oder einfacher Punkt x_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Statt einen Punkt durch 4 Koordinaten zu bestimmen, kann man ihn auch durch die 4 Verhältnisse von 5 Koordinaten bestimmen, wir schreiben dann Punkt x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$). Letztere Koordinaten heißen Verhältniskoordinaten, während erstere gewöhnliche Koordinaten heißen sollen.

Um von Verhältniskoordinaten zu gewöhnlichen Koordinaten überzugehen erübrigt es nur $x_5 = 1$ zu setzen. Im weiteren werden, wenn nicht anderes erwähnt, gewöhnliche Koordinaten verwendet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Gebilde ersten Grades.

§ 3. 1. Hat man 2 Punkte x_i und y_i, so kann man daraus die Koordinaten eines neuen Punktes X_i ableiten, wenn man

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda\, y_i}{1 + \lambda}$$

setzt, wobei λ eine beliebige Zahl vorstellt.

Erteilt man dem λ andere und andere Werte, so stellen jene Gleichungen a) die Punkte einer Punktmannigfaltigkeit dar.

Da jedem Werte von λ ein und nur ein Punkt X_i der Mannigfaltigkeit entspricht und umgekehrt sich für jeden Punkt X_i der Mannigfaltigkeit ein und nur ein Wert für λ finden läßt,

$$\text{b)}\ \lambda = -\frac{X_i - x_i}{X_i - y_i},$$

so stellen die Gleichungen a) die Punkte eines einfach ausgedehnten Raumes (R_1) dar.

Ein einfach ausgedehnter Raum heißt auch Gerade. λ ist die Koordinate des Punktes auf der Geraden.

Man kann auch im R_1 Verhältniskoordinaten setzen:

$$\text{c)}\ X_i = \frac{\varphi_1\, x_i + \varphi_2\, y_i}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

$$(\lambda = \varphi_2 : \varphi_1)$$

Seien die ursprünglich gegebenen Punkte $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}$, so werden die Gleichungen der Geraden:

$$\text{d)}\ X_i = \frac{\sum_1^2{}_\varkappa\, \varphi_\varkappa\, x_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^2{}_\varkappa\, \varphi_\varkappa}$$

Wir erhalten hiemit den Satz:

Durch 2 (nicht zusammenfallende) **Punkte ist immer eine Gerade eindeutig bestimmt.**

Anm. 2 nicht zusammenfallende Punkte nennt man nach Schoute ein Simplex 2 oder S (2).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Hat man eine Gerade §4.

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

und außerhalb derselben einen Punkt z_i und verbindet man z_i mit irgend einem Punkte der Geraden durch eine neue Gerade, so hat diese die Gleichungen:

$$\text{b)}\ X_i = \frac{\frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda} + \mu' z_i}{1 + \mu'}$$

oder nach einfacher Umformung ($\mu = (1 + \lambda)\ \mu'$):

$$\text{c)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

Lassen wir hiebei λ und μ die Gesamtheit der reellen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir immer wieder andere Punkte X_i, deren Gesamtheit einen zweifachausgedehnten (linearen) Raum (R_2), auch Ebene genannt, bilden (§ 1*).

λ, und μ sind die Koordinaten eines Punktes in der Ebene.

Diese Koordinaten berechnen sich aus folgender Gleichung:

$$\text{d)}\ 1 : \lambda : \mu = \left\| \begin{matrix} X_i - x_i & X_i - y_i & X_i - z_i \\ X_\varkappa - x_\varkappa & X_\varkappa - y_\varkappa & X_\varkappa - z_\varkappa \end{matrix} \right\|,$$

wobei i und $\varkappa$ 2 beliebige aber verschiedene der 4 Zahlen 1, 2, 3, 4, vorstellen.

Setzt man statt λ und μ ebene Verhältniskoordinaten $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3$, so werden die Gleichungen der Ebene:

$$\text{e)}\ X_i = \frac{\varphi_1 x_i + \varphi_2 y_i + \varphi_3 z_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}$$

oder, wenn wir statt x_i, y_i, z_i : $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$ setzen:

$$\text{f)}\ X_i = \frac{\sum_1^3 {}^\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^3 {}^\varkappa \varphi_\varkappa}$$

Wir erhalten hiebei den Satz:

3 nicht in einer Geraden liegende Punkte (ein sog. S (3)) **bestimmen immer eine Ebene.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 5. 3. Hat man eine Ebene

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

und außerhalb derselben einen Punkt u_i und verbindet man u_i mit einem beliebigen Punkt der Ebene durch eine Gerade, so hat diese die Gleichungen:

$$\text{b)}\ X_i = \frac{\dfrac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu} + \nu'\, u_i}{1 + \nu'}$$

oder bei entsprechenden Umformungen wie in § 4

$$\text{c)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}$$

Läßt man hiebei λ, μ, ν die Gesamtheit der reellen Zahlen durchlaufen, so erhält man immer wieder andere Punkte X_i, welche durch 3 Koordinaten λ, μ, ν eindeutig bestimmt sind, deren Gesamtheit also nach § 1* einen dreifach ausgedehnten linearen Raum (R_3) darstellen, den man auch kurzweg Raum nennt.

Die Koordinaten λ, μ, ν des Punktes X_i im Raum berechnen sich aus der Gleichung

$$\text{d)}\ 1 : \lambda : \mu : \nu = \left\| \begin{matrix} X_i - x_i & X_i - y_i & X_i - z_i & X_i - u_i \\ X_\varkappa - x_\varkappa & X_\varkappa - y_\varkappa & X_\varkappa - z_\varkappa & X_\varkappa - u_\varkappa \\ X_l - x_l & X_l - y_l & X_l - z_l & X_l - u_l \end{matrix} \right\|,$$

wobei i, $\varkappa$, l 3 beliebige aber verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4 vorstellen.

Die Gleichungen des Raumes in räumlichen Verhältniskoordinaten $\varphi_1 : \varphi_2 : \varphi_3 : \varphi_4$ werden:

$$\text{e)}\ X_i = \frac{\varphi_1 x_i + \varphi_2 y_i + \varphi_3 z_i + \varphi_4 u_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4}$$

oder, wenn wir statt der Koordinaten x_i, y_i, z_i, u_i : $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, $x_i^{(3)}$, $x_i^{(4)}$ setzen:

$$\text{f)}\ X_i = \frac{\sum_1^4{}_\varkappa\, \varphi_\varkappa\, x_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^4{}_\varkappa\, \varphi_\varkappa}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hiebei erhalten wir den Satz:

4 nicht in einer Ebene liegende Punkte (ein sog. S(4)) **bestimmen immer einen Raum.**

4. Hat man einen Raum: § 6.

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}$$

und außerhalb desselben einen Punkt v_i, so kann man wie oben in § 3, 4, 5 die Gleichungen eines neuen Punktes ableiten, indem man setzt:

$$\text{b)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i + \rho v_i}{1 + \lambda + \mu + \nu + \rho}$$

Diese Gleichungen stellen die Gesamtheit der von 4 Koordinaten λ, μ, ν, ρ abhängigen Punkte eines 4fach ausgedehnten Raumes (R_4) dar.

Da der unseren Untersuchungen zu Grunde liegende Arbeitsraum ein 4fach ausgedehnter Raum ist, so müssen obige Gleichungen den 4fach ausgedehnten Arbeitsraum darstellen.

Und in der Tat: obige Gleichungen b) sind (für $i = 1, 2, 3, 4$) 4 Gleichungen in den 4 Unbekannten λ, μ, ν, ρ dh. für jeden gegebenen Punkt X_i lassen sich aus diesen Gleichungen die 4 Größen λ, μ, ν, ρ eindeutig berechnen.

Der durch obige Gleichungen b) gegebene 4fach ausgedehnte Raum enthält also alle Punkte unseres 4fach ausgedehnten Arbeitsraumes, deckt sich daher mit diesem völlig.

Die Berechnung der Koordinaten λ, μ, ν, ρ geschieht aus folgender Gleichung:

$$\text{c)}\ 1:\lambda:\mu:\nu:\rho = \left\| \begin{matrix} X_1 - x_1 & X_1 - y_1 & X_1 - z_1 & X_1 - u_1 & X_1 - v_1 \\ X_2 - x_2 & X_2 - y_2 & X_2 - z_2 & X_2 - u_2 & X_2 - v_2 \\ X_3 - x_3 & X_3 - y_3 & X_3 - z_3 & X_3 - u_3 & X_3 - v_3 \\ X_4 - x_4 & X_4 - y_4 & X_4 - z_4 & X_4 - u_4 & X_4 - v_4 \end{matrix} \right\|.$$

Durch 5 nicht in einem R_3 gelegene Punkte (ein sog. S(5)) **ist der 4fach ausgedehnte Raum (R_4) bestimmt.**

Obige Gleichung c) stellt eine Koordinatenveränderung vom gegebenen Koordinatensystem X_i auf ein durch ein S(5) bestimmtes anderes System dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Entsprechend wie oben (§ 3, 4, 5) erhalten wir für den 4 fach ausgedehnten Raum noch die Gleichungsformen

$$\text{d)}\quad X_i = \frac{\varphi_1 x_i + \varphi_2 y_i + \varphi_3 z_i + \varphi_4 u_i + \varphi_5 v_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5}$$

oder:

$$\text{c)}\quad X_i = \frac{\sum\limits_1^5{}_\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum\limits_1^5{}_\varkappa \varphi_\varkappa}$$

§ 6*. Ist der Arbeitsraum ein Raum von n Ausdehnungen und seien die Gleichungen eines R_d $(d < n)$

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{\sum\limits_1^{d+1}{}_\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum\limits_1^{d+1}{}_\varkappa \varphi_\varkappa}$$

$$i = 1, 2, 3 \ldots . n$$

und sei $x_i^{(d+2)}$ ein außerhalb R_d gelegener Punkt, so läßt sich dieser mit jedem Punkt von R_d durch eine Gerade verbinden, deren Gleichungen:

$$\text{b)}\quad X_i = \frac{\dfrac{\sum\limits_1^{d+1}{}_\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum\limits_1^{d+1} \varphi_\varkappa} + \varphi'_{(d+2)}\, x_i^{(d+2)}}{1 + \varphi'_{(d+2)}}$$

oder durch Umformung:

$$\text{c)}\quad X_i = \frac{\sum\limits_1^{d+2}{}_\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum\limits_1^{d+2}{}_\varkappa \varphi_\varkappa}$$

Läßt man in obigen Gleichungen c) $\varphi_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2 \ldots . (d+2))$ alle reellen Zahlen durchlaufen, so stellen die Gleichungen c) einen R_{d+2} dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da die Gleichungen a) für $d = 1, 2, 3, 4$ wie oben gezeigt (§ 3. 4. 5. 6.) gelten, so gelten sie für jedes $d \leq n$ und wir erhalten den Satz.

Im R_n wird jeder R_d ($d \leq n$) durch $d + 1$ nicht in einem R_{d-1} gelegene Punkte (ein sog. $S(d+1)$) **bestimmt.**

IV. Zusammenfallen.

1. Gegeben eine Gerade: § 7.

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

und 2 ihrer Punkte u_i und v_i mit den Koordinaten bezw. λ_1 und λ_2, man soll durch diese Punkte eine Gerade legen. Diese hat die Gleichung:

$$\text{b)}\quad X_i = \frac{u_i + \lambda' v_i}{1 + \lambda'} \quad \text{oder}$$

$$\text{c)}\quad X_i = \frac{\dfrac{x_i + \lambda_1 y_i}{1 + \lambda_1} + \lambda' \dfrac{x_i + \lambda_2 y_i}{1 + \lambda_2}}{1 + \lambda'}$$

oder:

$$\text{d)}\quad X_i = \frac{\left(\dfrac{1}{1+\lambda_1} + \lambda' \dfrac{1}{1+\lambda_2}\right) x_i + \left(\dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \lambda' \dfrac{\lambda_2}{1+\lambda_2}\right) y_i}{1 + \lambda'}.$$

Setzt man: $\varphi_1 = \dfrac{1}{1+\lambda_1} + \lambda' \dfrac{1}{1+\lambda_2}$

und $\varphi_2 = \dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \lambda' \dfrac{\lambda_2}{1+\lambda_2}$,

so wird $\varphi_1 + \varphi_2 = 1 + \lambda'$

also obige Gleichung d):

$$\text{e)}\quad X_i = \frac{\varphi_1 x_i + \varphi_2 y_i}{\varphi_1 + \varphi_2} \quad \text{oder}$$

$$\text{für} \quad \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \lambda$$

$$\text{f)}\quad X_i = \frac{x_1 + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das heißt man erhält wieder die anfangs gegebene Gerade.

Hieraus folgt:

2 Gerade, welche 2 Punkte gemeinsam haben, fallen zusammen.

oder:

2 nicht zusammenfallende Gerade haben höchstens einen gemeinsamen Punkt.

oder:

Je 2 Punkte (jedes S(2)) **können zur Bestimmung der Geraden gewählt werden.**

oder:

Die Gerade enthält keine ausgezeichneten Punkte.

Anm. Obige Gleichungen:

$$X_i = \frac{u_i + \lambda' v_i}{1 + \lambda'}$$

und

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

stellen dieselbe Gerade vor, bezogen auf verschiedene S(2); es ist dies also eine Koordinatenveränderung in der Geraden gegeben durch die Form:

$$\text{g)} \quad \lambda = \frac{\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} + \lambda' \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2}}{\frac{1}{1+\lambda_1} + \lambda' \frac{1}{1+\lambda_2}}$$

oder

$$\text{h)} \quad \lambda = \frac{a + b\lambda'}{c + d\lambda'}$$

§ 8. 2. Gegeben eine Ebene

$$\text{a)} \quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

und 3 Punkte derselben, welche nicht in einer Geraden liegen, (S(3)) u_i, v_i, w_i mit den bezüglichen Koordinaten:

$$\lambda_\varkappa \mid \mu_\varkappa \qquad \varkappa = 1, 2, 3,$$

man soll durch die 3 Punkte eine Ebene legen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichungen dieser Ebene sind:

$$\text{b)}\ X_i = \frac{u_i + \lambda' v_i + \mu' w_i}{1 + \lambda' + \mu'}$$

oder:

$$\text{c)}\ X_i = \frac{\varphi_1' u_i + \varphi_2' v_i + \varphi_3' w_i}{\varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3'}$$

oder:

$$\text{d)}\ X_i = \frac{\sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa \dfrac{x_i + \lambda_\varkappa y_i + \mu_\varkappa z_i}{1 + \lambda_\varkappa + \mu_\varkappa}}{\sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa} .$$

Setzt man:

$$\varphi_1 = \sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa \frac{1}{1 + \lambda_\varkappa + \mu_\varkappa}$$

$$\varphi_2 = \sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa \frac{\lambda_\varkappa}{1 + \lambda_\varkappa + \mu_\varkappa}$$

$$\varphi_3 = \sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa \frac{\mu_\varkappa}{1 + \lambda_\varkappa + \mu_\varkappa} ,$$

so wird

$$\sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi_\varkappa = \sum_1^3 {}_\varkappa\, \varphi'_\varkappa ,$$

also obige Gleichungen d):

$$\text{e)}\ X_i = \frac{\varphi_1 x_i + \varphi_2 y_i + \varphi_3 z_i}{\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3}$$

d. h. wir erhalten wieder die gegebene Ebene.

Daher erhält man wieder folgende Sätze:

1. **Ebenen, welche 3 nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein haben, fallen zusammen.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. **2 nicht zusammenfallende Ebenen haben höchstens eine Gerade gemein.**

3. **Je 3 beliebige nicht in einer Geraden liegende Punkte** (jedes S(3)) **können zur Bestimmung der Ebene gewählt werden.**

4. **Die Ebene enthält keine ausgezeichneten Punkte.**

Obige Ableitung stellt gleichzeitig eine Koordinatenveränderung von einem S(3): u_i, v_i, w_i, auf ein S'(3): x_i, y_i, z_i, dar.

Nebenbei ergibt sich noch der Satz:

1. **Jede Gerade, welche 2 Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in der Ebene.**

Denn: seien jene 2 Punkte die Punkte a_i und b_i, so ist die Gerade gegeben durch

$$X_i = \frac{a_i + \lambda b_i}{1 + \lambda}$$

und die Ebene unter Hinzunahme eines dritten Punktes c_i durch

$$X_i = \frac{a_i + \lambda b_i + \mu c_i}{1 + \lambda + \mu} .$$

Für $\mu = o$ erhalten wir aus den Gleichungen der Ebene die Gleichungen der Geraden, d. h. die Gerade liegt in der Ebene.

2. **Jede nicht in einer Ebene liegende Gerade hat mit dieser Ebene höchstens 1 Punkt gemein.**

§ 9. 3. Die Gleichungen:

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu} \text{ eines Raumes}$$

kann man ebenso wie oben durch Koordinatenveränderung überführen in die Form:

$$X_i = \frac{a_i + \lambda' b_i + \mu' c_i + \nu' d_i}{1 + \lambda' + \mu' + \nu'} ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn a_i, b_i, c_i, d_i, 4 nicht in einer Ebene liegende Punkte des gleichen Raumes sind (mit den jeweiligen Koordinaten: $\lambda_\varkappa \mid \mu_\varkappa \mid \nu_\varkappa \quad \varkappa = 1, 2, 3, 4$).

Man erhält deshalb die gleichen Sätze für den Raum:

1. **2 Räume fallen zusammen, wenn sie ein S(4) gemeinsam haben.**
2. **2 nicht zusammenfallende Räume haben höchstens eine Ebene gemeinsam.**
3. **Jedes S(4) des Raumes kann zu seiner Bestimmung gewählt werden.**
4. Durch ähnliche Ableitung wie oben kann man im Raum eine Koordinatenveränderung vornehmen von einem S(4) auf ein anderes S'(4).

Außerdem:

5. **Jede Gerade, welche 2 Punkte in einem Raum hat, liegt ganz im Raum.**
6. **Eine Gerade, welche nicht in einem Raum liegt, hat mit diesem höchstens 1 gemeinschaftlichen Punkt.**
7. **Jede Ebene, welche ein S(3) mit einem Raum gemein hat, liegt ganz im Raum.**
8. **Jede Ebene schneidet jeden Raum, dem sie nicht angehört, höchstens in einer Geraden.**

4. Die Gleichungen des vierfachen Raumes § 10.

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu v_i + \rho u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu + \rho}$$

lassen sich ebenso wie oben auf jedes andere S(5) a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, überführen:

$$X_i = \frac{a_i + \lambda' b_i + \mu' c_i + \nu' d_i + \rho' e_i}{1 + \lambda' + \mu' + \nu' + \rho'}$$

Im 4fachen Raume ist jede Koordinatenveränderung auf 5 nicht in einem Raum gelegene Punkte, als Eckpunkte des Koordinatensystems, möglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 10*. Hat man einen d fach ausgedehnten Raum mit den Gleichungen

$$X_i = \frac{\sum_1^{d+1} {}^{\varkappa} \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^{d+1} {}^{\varkappa} \varphi_\varkappa}$$

und $d + 1$ Punkte desselben: $y_i^{(l)}$ $l = 1, 2, 3 \ldots (d + 1)$, so lässt sich der R_d auch ausdrücken durch die Gleichung:

$$X_i = \frac{\sum_1^{d+1} {}^{l} \varphi'_l y_i^{(l)}}{\sum_1^{d+1} {}^{l} \varphi'_l}$$

(Der Nachweis wird durch gleichartigen Beweisgang, wie oben, erbracht.)

Daraus ergeben sich die Sätze:

1. **2 R_d fallen zusammen, wenn sie ein $S_{(d+1)}$ gemein haben.**
2. **2 nicht zusammenfallende R_d haben höchstens einen R_{d-1} gemein.**
3. **Jedes $S_{(d+1)}$ kann zur Bestimmung des R_d gewählt werden.**
4. **Räume ersten Grades enthalten keine ausgezeichneten Punkte.**
5. **Man kann in jedem R_d eine Koordinatenveränderung von einem $S_{(d+1)}$ auf ein anderes $S'_{(d+1)}$ vornehmen.**
6. **Jedes R_δ liegt in einem R_d ($\delta \leqq d$), wenn es mit dem R_d ein $S_{(\delta+1)}$ gemein hat.**
7. **Ein R_δ hat mit einem R_d ($\delta \leqq d$), mit welchem es nicht zusammenfällt, höchstens einen durch ein $S_{(\delta)}$ bestimmten $R_{\delta-1}$ gemein.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. Andere Darstellung der Gebilde 1. Ordnung.

1. Die Gleichungen des 4 fach ausgedehnten Raumes: § 11.

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i + \rho v_i}{1 + \lambda + \mu + \nu + \rho}$$

ergeben für jedes λ, μ, ν, ρ einen Punkt des 4 fach ausgedehnten Raumes und umgekehrt für jeden Punkt X_i lassen sich aus den 4 Gleichungen a) $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Größen λ, μ, ν, ρ berechnen.

Wir sehen also (wie oben § 6): die Gleichungen a) enthalten alle Punkte unseres Arbeitsraumes und stellen daher nur die Formeln einer Koordinatenveränderung vor.

2. Die Gleichungen des Raumes (R_3): § 12.

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}$$

stellen für jedes λ, μ, ν einen Punkt (des R_3) dar, aber nicht jeder Punkt X_i liegt in diesem R_3; denn für einen bestimmten Punkt X_i sind obiges 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten λ, μ, ν. Es muß also zwischen den 4 Koordinaten X_i eine Bedingungsgleichung bestehen, damit der Punkt X_i dem R_3 angehört. Diese Bedingungsgleichung erhalten wir durch Elimination von λ, μ, ν aus den Gleichungen a) in folgender Form:

$$\text{b)}\quad \begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 & X_4 - x_4 \\ y_1 - x_1 & y_2 - x_2 & y_3 - x_3 & y_4 - x_4 \\ z_1 - x_1 & z_2 - x_2 & z_3 - x_3 & z_4 - x_4 \\ u_1 - x_1 & u_2 - x_2 & u_3 - x_3 & u_4 - x_4 \end{vmatrix} = 0$$

oder in folgender Form:

$$\text{c)}\quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Die Gleichung c) läßt sich aber auch in folgende Form überführen:

$$\text{d)}\quad \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_3 \mathbf{X}_3 + \mathbf{A}_4 \mathbf{X}_4 + \mathbf{A}_5 = 0 \ ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn A_i die i^{te} Unterdeterminante der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & 1 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 1 \end{matrix} \right\| \text{ bedeutet.}$$

In Verhältniskoordinaten wird aus d):

$$\text{e)} \quad \sum_1^5{}^i \, \mathbf{A}_i \, \mathbf{X}_i = o \quad ,$$

wobei $X_5 = 1$ gewöhnliche Koordination liefert (§ 2).

Die Gleichung eines R_3 kann also immer in die Form e) gebracht werden.

Umgekehrt: Jede Gleichung von der Form

$$\text{e)} \quad \sum_1^5{}^i \, A_i \, X_i = o$$

ist die Gleichung eines Raumes (R_3). Denn die Gleichung e) stellt eine Punktmenge erster Ordnung dar, bei der zu jedem X_1, X_2, X_3, welche beliebig gewählt werden können, sich aus der Gleichung e) ein und nur ein Wert von X_4 finden läßt. Jeder Punkt X_i der Punktmenge e) ist also durch 3 Zahlen: x_1, x_2, x_3 völlig und eindeutig bestimmt; und umgekehrt für jeden Punkt der Punktmenge e) sind die 3 Zahlen x_1, x_2, x_3 bestimmt. Nach § 1* ist unsere Punktmenge also ein R_3.

Um die Gleichung e) in die gewöhnlichen Gleichungen § 5c) überzuführen, suchen wir ein S(4): x_i, y_i, z_i, u_i, dessen Punkte die Gleichung e) befriedigen, dann lassen sich aus den so entstehenden 5 Gleichungen:

$$1. \quad \sum_1^5 A_i \, X_i = o$$

$$2. \quad \sum_1^5 A_i \, x_i = o$$

$$3. \quad \sum_1^5 A_i \, y_i = o$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. $\sum_{1}^{5} A_i z_i = o$

5. $\sum_{1}^{5} A_i u_i = o$

die Größen A_i eleminieren und wir erhalten die Gleichung c) und hieraus die Gleichungen a) dieses Abschnittes.

3. Die Gleichungen einer Ebene: § 13.

a) $X_i = \dfrac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$

sind für ein bestimmtes X_i 4 Gleichungen mit 2 Unbekannten λ, μ. Es müssen also 2 Bedingungsgleichungen erfüllt sein, damit der Punkt X_i in der Ebene liegt. Diese Bedingungsgleichungen erhalten wir durch Elimination von λ und μ aus den 4 Gleichungen a) ($i = 1, 2, 3, 4$) in folgender Form:

$$\text{b)} \begin{cases} \begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 \\ X_1 - y_1 & X_2 - y_2 & X_3 - y_3 \\ X_1 - z_1 & X_2 - z_2 & X_3 - z_3 \end{vmatrix} = o \quad \text{und} \\ \begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_4 - x_4 \\ X_1 - y_1 & X_2 - y_2 & X_4 - y_4 \\ X_1 - z_1 & X_2 - z_2 & X_4 - z_4 \end{vmatrix} = o \end{cases}$$

oder durch eine einfache Umformung in folgender Form:

$$\text{c)} \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = o \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_4 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_4 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = o$$

oder in der Form:

$$\text{d)} \begin{cases} A_1' X_1 + A_2' X_2 + A_3' X_3 + A_5' = o \\ B_1' X_1 + B'_2 X_2 + B_4' X_4 + B_5' = o \end{cases}$$

oder, wenn wir beide Gleichungen d) 2 mal beliebig multipliziert addieren, in der Form:

$$\text{e)} \begin{cases} A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 = o \\ B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 + B_5 = o \end{cases}$$

d. h. **jede Ebene ist der Schnitt zweier Räume.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umgekehrt, haben wir 2 Räume:

$$\text{f)} \quad \begin{cases} A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 = o \\ B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 + B_5 = o \,, \end{cases}$$

so haben diese eine gemeinsame Ebene mit den Gleichungen f); denn diese Gleichungen f) stellen eine Punktmannigfaltigkeit dar, in welcher 2 Koordinaten beliebig gewählt die anderen 2 Koordinaten und damit den Punkt x_i völlig und eindeutig bestimmen; diese Mannigfaltigkeit aber ist nach § 1* eine Ebene.

Wollen wir andererseits die durch die Gleichungen f) bestimmte Ebene durch die gewöhnlichen Gleichungen der Ebene (§ 4 c) ausdrücken, so suchen wir 3 Punkte eines S(3) x_i, y_i, z_i, deren Koordinaten den Gleichungen f) genügen, dann ergibt sich aus der Gleichung:

$$\sum_1^5{}^i A_i X_i = o :$$

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu} \quad \text{(siehe § 12.)}$$

und aus der Gleichung:

$$\sum_1^5{}^i B_i X_i = o :$$

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu' v_i}{1 + \lambda + \mu + \nu'} \,.$$

Beide Gleichungen werden also erfüllt durch die Punkte der Ebene:

$$X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu} \,.$$

Als Ergebnis dieses Abschnittes heben wir den Satz hervor: **2 Räume schneiden sich in einer Ebene.**

§ 14. 4. Die vier Gleichungen einer Geraden

$$\text{a)} \quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

liefern durch Elimination des λ 3 Bedingungsgleichungen ersten Grades, die auf die einfache Form gebracht werden können:

$$\text{b)}\quad \frac{X_1 - x_1}{y_1 - x_1} = \frac{X_2 - x_2}{y_2 - x_2} = \frac{X_3 - x_3}{y_3 - x_3} = \frac{X_4 - x_4}{y_4 - x_4}\ .$$

Umgekehrt: 3 Gleichungen ersten Grades in den laufenden Koordinaten, also 3 Gleichungen folgender Form:

$$\text{c)}\quad \sum_1^5{}^i A_i X_i = o\ ;\quad \sum_1^5{}^i B_i X_i = o\ ;\quad \sum_1^5{}^i C_i X_i = o$$

stellen im allgemeinen eine Gerade dar; denn diese 3 Gleichungen stellen eine lineare Punktmannigfaltigkeit dar, welche 1 freiveränderliche Koordinate besitzt, deren Punkte also durch 1 Koordinate bestimmt sind, d. h. nach § 1* eine Gerade. Haben wir 2 Punkte x_i und y_i, welche die 3 Gleichungen c) erfüllen, so wird jede dieser Gleichungen ebenfalls erfüllt durch

$$\text{d)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}\ ;$$

denn dann ist:

$$\text{e)}\quad \sum_1^5{}^i A_i X_i \equiv \frac{1}{1+\lambda} \sum_1^5{}^i A_i x_i + \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_1^5{}^i A_i y_i\ ;$$

da nun sowohl

$$\text{f)}\quad \sum_1^5{}^i A_i x_i = o \quad \text{als auch}$$

$$\text{g)}\quad \sum_1^5{}^i A_i y_i = o\ ,\quad \text{so ist auch}$$

$$\text{h)}\quad \sum_1^5{}^i A_i X_i = o \text{ und ebenso } \sum_1^5{}^i B_i X_i = o\ ;\ \sum_1^5{}^i C_i X_i = o;$$

d. h. alle Punkte der Geraden erfüllen die 3 Gleichungen c).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daß aber kein weiterer Punkt diese 3 Gleichungen erfüllen kann, ergibt sich, wie schon oben erwähnt, aus dem Umstand, daß zu jedem beliebig gewählten X_1 eindeutig aus den 3 Gleichungen c) X_2, X_3, X_4 berechnet werden kann. Dieser Abschnitt liefert uns daher folgende Sätze:

1. **3 Räume schneiden sich in einer Geraden.**
2. **1 Raum und eine Ebene schneiden sich im allgemeinen in einer Geraden.**

§ 15. 5. Aus 4 Gleichungen der Form:

$$\sum_1^5{}_i\, A_i(\varkappa)\, X_i = o \qquad \varkappa = 1, 2, 3, 4$$

lassen sich immer die 4 Koordinaten X_i eines Punktes berechnen; d. h.

1. **4 Räume schneiden sich in einem Punkt.**
2. **2 Ebenen schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt.**
3. **Jede Gerade trifft jeden Raum, dem sie nicht angehört, in einem Punkt.**

§ 16. 6. Da aus 5 Gleichungen die 4 Koordinaten nicht bestimmt werden können, so folgt:

1. **Eine Ebene und eine Gerade schneiden sich im allgemeinen nicht.**
2. **2 Gerade schneiden sich im allgemeinen nicht.**

§ 16*. 1. Im R_n bestimmt 1 Gleichung 1. Grades in den laufenden Koordinaten einen R_{n-1}; d Gleichungen einen R_{n-d}. Jeder R_d ist bestimmt durch n—d Gleichungen.

2. Ein R_d und ein R_δ schneiden sich immer, wenn:

$$(n-d) + (n-\delta) \leqq n$$

d. h. wenn die Anzahl der Gleichungen nicht größer als die der Koordinaten, wenn also:

$$d+\delta \geqq n \;;$$

der Schnitt ist dann ein $R_{d+\delta-n}$, wobei ein R_0 einen Punkt bezeichnet.

Anm. Im 5fach ausgedehnten Raum sind Ebenen im allgemeinen windschief.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. Büschel, Bündel, Gebüsch und Netze von Räumen.

1. Sei a) $L_a \equiv \sum_1^5{}^i A_i X_i = o$ die Gleichung eines Raumes und § 17.

b) $L_b \equiv \sum_1^5{}^i B_i X_i = o$ die Gleichung eines zweiten Raumes, so ist:

c) $L_a = o$, $L_b = o$

die Gleichung ihrer Ebene und

$$d)\ L_a + \lambda L_b = o$$

die Gleichung eines durch diese Ebene gehenden Raumes. Die Gesamtheit der Räume d), welche man erhält, wenn λ die Gesamtheit der reellen Zahlen durchläuft, heißt **Raumbüschel.** Die Ebene c) heißt Träger des Büschels.

Die Gleichungen c) stellen nur dann keine Ebene und Gleichung d) kein Büschel dar, wenn

$$e)\ a L_a + b L_b \equiv o ,$$

d. h. wenn $f)\ a A_i + b B_i = o$;

denn dann haben wir in a) und b) die Gleichung desselben Raumes doppelt.

Wir erhalten also den Satz:

Durch jede Ebene gibt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Räumen.

2. Seien § 18.

a) $L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$

drei Räume, so schneiden sich diese Räume in einer Geraden

b) $L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$.

Jeder Raum

c) $L_d \equiv a L_a + b L_b + c L_c = o$

geht durch diese Gerade.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch jede Gerade gibt es also eine 2fache (lineare) Mannigfaltigkeit von Räumen, welche man ein Raumbündel nennt.

Anm. Würde man daher nicht den Punkt sondern den Raum als Bildungselement der Geometrie auffassen, so würde die Ebene (Raumbüschel) als einfach ausgedehntes, die Gerade (Raumbündel) als zweifach ausgedehntes Raumgebilde erscheinen.

Die 3 Gleichungen b)

$$L_a = o, \quad L_b = o, \quad L_c = o$$

stellen dann keine Gerade dar, wenn alle 3 Räume demselben Büschel angehören. Wenn also:

$$-c L_c \equiv a L_a + b L_b = o$$

oder wenn:

$$a L_a + b L_b + c L_c \equiv o$$

d. h., wenn: 3 Größen a, b, c so gefunden werden können, daß

$$a A_i + b B_i + c C_i = o; \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Die Sätze des § 14 lauten demnach:

1. **3 Räume, welche nicht demselben Büschel angehören, schneiden sich in einer Geraden.**
2. **Eine Ebene und ein Raum schneiden sich in einer Geraden, oder die Ebene liegt ganz im Raum.**

§ 19. 3. Hat man 4 Räume

$$a) \; L_a = o, \quad L_b = o, \quad L_c = o, \quad L_d = o,$$

so schneiden diese 4 Räume sich im allgemeinen in einem Punkt, mit den Gleichungen

$$b) \; L_a = o, \quad L_b = o, \quad L_c = o, \quad L_d = o$$

oder mit den aus diesen 4 Gleichungen berechneten Koordinaten X_i.

Jeder Raum von der Form:

$$c) \; e L_e \equiv a L_a + b L_b + c L_c + d L_d = o$$

ist ein Raum, der den durch b) bestimmten Punkt enthält.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lassen wir a, b, c, d alle möglichen Werte annehmen, so erhalten wir eine 3fache Mannigfaltigkeit von Räumen (ein sogenanntes Raumgebüsch), die alle durch denselben Punkt (als Träger des Gebüsches) gehen.

Obige 4 Gleichungen a) bestimmen nur dann keinen festen Punkt, wenn die 4 Räume a) demselben Bündel angehören, wenn also:

d) $-dL_d \equiv aL_a + bL_b + cL = o$ oder wenn:

e) $aL_a + bL_b + cL_c + dL_d \equiv o$ d. h. wenn:

sich 4 Größen a, b, c, d so bestimmen lassen, daß:

f) $aA_i + bB_i + cC_i + dD_i = o$ für $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Die Sätze des § 15 erhalten hiedurch folgende Form:

1. **4 Räume schneiden sich in einem Punkt, wenn sie jedoch demselben Raumbündel angehören, schneiden sie sich in einer Geraden.**
2. **Eine Gerade schneidet jeden Raum, dem sie nicht ganz angehört, in einem Punkt.**
3. **2 Ebenen schneiden sich im allgemeinen in einem Punkt, liegen die Ebenen jedoch in demselben Raum, so schneiden sie sich in einer Geraden (und umgek.)**

Der letztere Teil des 3. Satzes muß noch näher begründet werden:

2 Ebenen:

a) $\left.\begin{matrix} L_a = o \\ L_b = o \end{matrix}\right\}$ b) $\left\{\begin{matrix} L_c = o \\ L_d = o \end{matrix}\right.$

schneiden sich in einer Geraden, wenn die 4 Räume

c) $L_a = o,\ L_b = o,\ L_c = o,\ L_d = o$

einem Bündel angehören, wenn also:

d) $aL_a + bL_b + cL_c + dL_d \equiv o$

oder wenn:

e) $aL_a + bL_b \equiv -cL_c - dL_d = o$

Nun ist aber

f) $aL_a + bL_b = o$ ein durch die Ebene a) gehender Raum

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

g) $c L_c + d L_d = o$ ein durch die Ebene b) gehender Raum; beide Räume sind dieselben, also die Ebenen a) und b), welche sich in einer Geraden schneiden, liegen im gleichen Raum und umgekehrt.

§ 20. Haben wir 5 Räume:

a) $L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$, $L_d = o$, $L_e = o$, so haben diese 5 Räume im allgemeinen keinen gemeinsamen Punkt.

Die Gleichung:

b) $f L_f \equiv a L_a + b L_b + c L_c + d L_d + e L_e = o$

stellt jeden beliebigen Raum des 4fach ausgedehnten Raumes dar; denn nach obigem ist:

c) $f F_i = a A_i + b B_i + c C_i + d D_i + e E_i \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$

Dies sind also 5 Gleichungen, aus welchen sich die 5 Verhältnisse der 6 Größen a, b, c, d, e, f berechnen lassen, welchen Wert auch F_i haben mag.

Die Gleichung

d) $a L_a + b L_b + c L_c + d L_d + e L_e = o$

stellt eine vierfache Mannigfaltigkeit von Räumen dar, wenn a, b, c, d, e alle reellen Zahlen durchlaufen (ein Netz von Räumen), die alle im 4fach ausgedehnten Raum vorhandene Räume enthält.

Obige 5 Räume a) schneiden sich in einem Punkt, wenn

e) $a L_a + b L_b + c L_c + d L_d + e L_e \equiv o$ oder

wenn 5 Zahlen so gefunden werden können, daß

f) $a A_i + b B_i + c C_i + d D_i + e E_i = o \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$

Dies ist der Fall, wenn

$$\text{g)} \quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 \end{vmatrix} = o \quad .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wir erhalten hiemit den Satz:

Eine Gerade und eine Ebene schneiden sich nur dann in einem Punkt, wenn sie demselben Raum angehören, sonst sind sie windschief (und umgek.).

Denn im ersteren Falle ist nach Gleichung e)

$$a L_a + b L_b \equiv - c L_c - d L_d - e L_e = o$$

d. h. durch die Ebene wie durch die Gerade geht derselbe Raum.

Gehen die 5 Räume:

$L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$, $L_d = o$, $L_e = o$ durch einen Punkt, gehören sie also demselben Gebüsch an, so gehört auch der Raum:

$f L_f \equiv a L_a + b L_b + c L_c + d L_d + e L_e = o$ demselben Gebüsch an und geht damit durch jenen Punkt.

Hieraus folgt:

2 Gerade

a) $L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$,

b) $L_d = o$, $L_e = o$, $L_f = o$,

schneiden sich in einem Punkt, wenn

$$a L_a + b L_b + c L_c + d L_d + e L_e \equiv o \quad \text{und}$$
$$a' L_a + b' L_b + c' L_c + d' L_d + e' L_e + f' L_f \equiv o$$

oder wenn:

$$a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 L_c + d_1 L_d + e_1 L_e + f_1 L_f = o,$$
$$a_2 L_a + b_2 L_b + c_2 L_c + d_2 L_d + e_2 L_e + f_2 L_f = o,$$

wobei wenigstens eine der Größen: $a_1 \gtrless a_2$, $b_1 \gtrless b_2$, $c_1 \gtrless c_2$ u. s. f.

das heißt, wenn

$$a_i L_a + b_i L_b + c_i L_c \equiv - (d_i L_d + e_i L_e + f_i L_f) \quad i = 1, 2$$

oder mit anderen Worten, wenn 2 Räume vorhanden sind, welche durch diese beiden Geraden gehen. Also

2 Gerade schneiden sich immer und nur dann in einem Punkt, wenn sie in derselben Ebene liegen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da sich 6 Größen a_i $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ immer so finden lassen (siehe oben), daß:

$$a_1 L_1 + a_2 L_2 + a_3 L_3 + a_4 L_4 + a_5 L_5 + a_6 L_6 \equiv o$$

wenn $L_i = o$ Gleichung eines beliebigen Raumes, so folgt:

2 windschiefe Gerade bestimmen immer einen Raum.

Entsprechend dem baryzentrischen Kalkül des Möbius könnte man hier den Begriff der Koordinaten des Raumes, sowie die dualen Beziehungen zwischen Raum und Punkt ableiten, beides soll aber im nächsten Abschnitt auf eine etwas andere Weise geschehen. Auch die projektive Zuordnung von Raumbüscheln, -bündeln u. s. w. könnte hier angefügt werden.

VII. Duale Beziehungen im R_4.

§ 21. 1. Die Gleichung:

a) $A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 = o$

stellt sämtliche Punkte eines Raumes dar, ist also **die Gleichung eines Raumes in Punktkoordinaten.** Ändert man die A_i ab, so erhält man immer wieder einen anderen Raum; es gibt also eine 4 fache Mannigfaltigkeit von Räumen im R_4 (siehe § 20).

Setzen wir $-\frac{A_i}{A_5} = \xi_i$, so wird die Gleichung des Raumes

b) $\sum_1^4{}^i \xi_i X_i = 1$

Diese Gleichung liefert also für jedes feste ξ_i alle Punkte X_i, die den durch ξ_i bestimmten Raum erfüllen.

Man kann daher ξ_i die Koordinaten des Raumes nennen.

Läßt man in der Gleichung b) x_i fest, so erhält man immer wieder andere ξ_i, die Räume bestimmen, in welchen der Punkt x_i gelegen ist. Die Gleichung b) ist hiemit zugleich die **Gleichung eines Punktes in Raumkoordinaten.**

Wird die Gleichung b) für einen bestimmten Raum ξ_i und einen bestimmten Punkt x_i erfüllt, so zeigt das an, daß x_i in ξ_i gelegen ist. Man nennt deshalb die Gleichung b)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auch **die Gleichung des Ineinanderliegens von Punkt und Raum.**

Da jeder Punkt durch 4 Koordinaten x_i, jeder Raum durch 4 Koordinaten ξ_i bestimmt ist, da ferner die Gleichung b) gleichartig in x_i und ξ_i ist, so erhält man aus jedem Satz, der für Punktkoordinaten richtig ist, den entsprechenden Satz für Raumkoordinaten.

Man nennt 2 solche Sätze dual entsprechende Sätze.

2. Seien ξ_i und η_i 2 Räume, so ist: § 22.

$$\text{a)}\quad \zeta_i = \frac{\xi_i + l\eta_i}{1 + l}$$

die Gleichung einer Ebene in Raumkoordinaten.

Denn sei der durch ξ_i bestimmte Raum in Punktkoordinaten:

$$\text{b)}\quad L_a \equiv \sum_1^4{}^i\, \xi_i\, x_i - 1 = 0$$

und der durch η_i bestimmte Raum

$$\text{c)}\quad L_b \equiv \sum_1^4{}^i\, \eta_i\, x_i - 1 = 0$$

so folgt, der durch ζ_i bestimmte Raum

$$\text{d)}\quad L_c \equiv \sum_1^4{}^i\, \zeta_i\, x_i - 1 = \sum_1^4{}^i \left(\frac{\xi_i + l\eta_i}{1 + l}\right) x_i - 1 =$$

$$= \frac{\left(\sum_1^4{}^i\, \xi_i\, x_i - 1\right) + l\left(\sum_1^4{}^i\, \eta_i\, x_i - 1\right)}{1 + l}$$

$$= \frac{L_a + l L_b}{1 + l}$$

d. h. der durch ζ_i bestimmte Raum ist ein Raum des durch ξ_i und η_i bestimmten Raumbüschels. Die Gesamtheit der Räume ζ_i stellt also die Ebene als Träger des Raumbüschels dar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seien ξ_i, η_i, ϑ_i 3 Räume, so stellt die Gleichung

$$\text{e)}\quad \zeta_i = \frac{\xi_i + l\eta_i + m\vartheta_i}{1 + l + m}$$

die Gerade dar als Träger des Raumbündels.
Ebenso sind

$$\text{f)}\quad \zeta_i = \frac{\xi_i + l\eta_i + m\vartheta_i + n\sigma_i}{1 + l + m + n}$$

die Gleichungen eines Punktes als Träger eines Raumgebüsches. Und

$$\text{g)}\quad \zeta_i = \frac{\xi_i + l\eta_i + m\vartheta_i + n\sigma_i + r\tau_i}{1 + l + m + n + r}$$

sind die Gleichungen des 4 fach ausgedehnten Raumes erfüllt durch eine 4 fache Mannigfaltigkeit von Räumen (R_3) (Netz von Räumen).

Obige Gleichungen g) sind die Formeln für eine Koordinatenveränderung der Raumkoordinaten im 4 fach ausgedehnten Raum.

Es entsprechen sich also dual: **Punkt und Raum, Gerade und Ebene.**

§ 23. 3. Ferner stellt die Gleichung:

$$\text{a)}\quad \sum_1^5{}^i A_i \xi_i = o \qquad (\xi_5 = 1)$$

einen Punkt dar,

die Gleichungen $\text{b)}\begin{cases} \sum_1^5{}^i A_i \xi_i = o \\ \sum_1^5{}^i B_i \xi_i = o \end{cases}$ eine Gerade,

und die Gleichungen $\text{c)}\begin{cases} \sum_1^5{}^i A_i \xi_i = o \\ \sum_1^5{}^i B_i \xi_i = o \\ \sum_1^5{}^i \Gamma_i \xi_i = o \end{cases}$ eine Ebene

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ebenso stellen auch:

$$\text{d)}\quad \begin{cases} \sum_1^5{}_i\, A_i\, \xi_i = o \\ \sum_1^5{}_i\, B_i\, \xi_i = o \\ \sum_1^5{}_i\, \Gamma_i\, \xi_i = o \\ \sum_1^5{}_i\, \Delta_i\, \xi_i = o \end{cases} \quad \text{einen Raum dar.}$$

4. Die dualen Sätze wiederholend zusammengefaßt § 24. ergibt sich:

1. Das Bildungselement ist:
   a) der Punkt b) der Raum.

2a. 2 Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade.
 b. 2 Räume schneiden sich in einer Ebene.

3a. 3 Punkte, welche nicht in einer Geraden liegen (S(3)), bestimmen eine Ebene.
 b. 3 Räume, welche sich nicht in einer Ebene schneiden ($\Sigma(3)$), schneiden sich in einer Geraden.

4a. 4 Punkte eines S(4) bestimmen einen Raum.
 b. 4 Räume eines $\Sigma(4)$ schneiden sich in einem Punkt.

5a. 5 Punkte eines S(5) bestimmen den 4fachen Raum (R_4).
 b. 5 Räume eines $\Sigma(5)$ bestimmen den 4fachen Raum (R_4).

Ferner

1. das vollständige S(2) besteht aus 2 P 1 G.
   „ „ $\Sigma(2)$ aus 2 R_3 1 E.
2. das S(3) aus 3 P. 3 G. 1 E.
   „ $\Sigma(3)$ „ 3 R_3 3 E. 1 G.
3. „ S(4) „ 4 P. 6 G. 4 E. 1 R_3
   „ $\Sigma(4)$ „ 4 R_3 6 E. 4 G. 1 P.
4. „ S(5) „ 5 P. 10 G. 10 E. 5 R_3
   „ $\Sigma(5)$ „ 5 R_3 10 E. 10 G. 5 P.

Erweiterung: Ein R_d und ein R_{n-d-1} sind dual einander entsprechend. § 24*.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Richtungskosinus. Winkel.

§ 25. Im folgenden werden einige Einschränkungen getroffen, doch wird dadurch der Allgemeinheit der Abhandlung kein Eintrag getan, sondern nur ein besonderes Koordinatensystem der Betrachtung zugrunde gelegt.

In § 14b brachten wir die Gleichungen einer Geraden auf die Form:

$$\text{a)}\quad \frac{X_1 - x_1}{y_1 - x_1} = \frac{X_2 - x_2}{y_2 - x_2} = \frac{X_3 - x_3}{y_3 - x_3} = \frac{X_4 - x_4}{y_4 - x_4}$$

Bei den hiebei im Nenner stehenden Größen $y_i - x_i$ kommt es nicht auf ihren absoluten Wert an, sondern nur auf ihr Verhältnis; man kann sie also auch durch Größen ersetzen, welche das gleiche gegenseitige Verhältnis haben. Seien $\cos\alpha_i$ solche Größen, sodaß also:

$$\text{b)}\quad \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 : \cos\alpha_4 = (y_1 - x_1) : (y_2 - x_2) : (y_3 - x_3) : (y_4 - x_4)$$

oder kurzweg:

$$\text{c)}\quad y_i - x_i = p \cos\alpha_i ,$$

so werden die Gleichungen der Geraden:

$$\text{d)}\quad \frac{X_1 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{X_2 - x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{X_3 - x_3}{\cos\alpha_3} = \frac{X_4 - x_4}{\cos\alpha_4}$$

oder:

$$\text{e)}\quad \frac{X_i - x_i}{\cos\alpha_i} = \text{konstant.}$$

oder:

$$\text{f)}\quad X_i - x_i = P \cos\alpha_i .$$

Wir nennen nun $\cos\alpha_i$ den i^{ten} Richtungskosinus einer Geraden und P (bezw. p) die Entfernung des Punktes X_i (bezw. y_i) von x_i.

Die Gleichungen f) der Geraden sagen also:

1) **Auf einer Geraden ist die Lage jedes Punktes bestimmt, wenn man seine Entfernung von einem festen Punkte der Geraden kennt.**
2. **Jede Gerade ist durch einen ihrer Punkte und ihre Richtung** (die Cosinuse ihrer Richtung) **bestimmt.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. **Jeder Punkt des R4 ist bestimmt durch seine Entfernung von einem beliebigen Punkte und die Richtung, nach welcher er von jenem Punkte aus gelegen ist.**

Nennen wir den Punkt $x_i = o$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ den Anfangspunkt der Koordinaten, so wird für jeden Punkt X_i: (aus f)

$$g)\quad X_i = P \cos \alpha_i \,.$$

Jeder Punkt des Raumes ist bestimmt durch seine Entfernung vom Anfangspunkt und durch die Richtung, nach welcher er vom Anfangspunkte aus gelegen ist. Man nennt diese Bestimmung: Bestimmung durch Polarkoordinaten. Diese Bestimmung liefert ebenfalls 4 Koordinaten des Punktes: nämlich P und die 3 Verhältnisse der 4 Richtungskosinuse. Hiebei erweist sich als zweckmäßig p und $\cos \alpha_i$ ihrem absoluten Werte nach festzulegen, durch eine willkürliche Festsetzung, was durch die Annahme:

$$h)\quad \sum_1^4{}^i\ (y_i - x_i)^2 = p^2 \quad \text{geschehen soll.}$$

Gleichung h) läßt sich auch in die Form

$$i)\quad \sum_1^4{}^i \cos^2 \alpha_i = 1$$

bringen. (Sogen. Pythagoräischer Lehrsatz.)

Dann ist natürlich ebenfalls: $k)\ \sum_1^4{}^i (X_i - x_i)^2 = P^2$.

Hat man 2 Gerade: § 26.

$$a)\quad \frac{X_i - x_i}{\cos \alpha_i} = P$$

$$b)\quad \frac{X_i - y_i}{\cos \beta_i} = P' \,,$$

so nennt man φ den Winkel der beiden Geraden, wenn

$$c)\quad \cos \varphi = \sum_1^4{}^i \cos \alpha_i \cos \beta_i \,.$$

Die Gleichungen einer Ebene: § 27.

$$a)\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lassen sich, wie folgt, umformen:

$$\text{b)}\ X_i - x_i = \frac{\lambda}{1+\lambda+\mu}(y_i - x_i) + \frac{\mu}{1+\lambda+\mu}(z_i - x_i)\ .$$

Setzen wir wie oben:

$$\text{c)}\ \begin{cases} y_i - x_i = p_1 \cos\alpha_{1i} \\ z_i - x_i = p_2 \cos\alpha_{2i} \end{cases},$$

so wird d) $X_i - x_i = P_1 \cos\alpha_{1i} + P_2 \cos\alpha_{2i}$.

In obiger Gleichung d) ist die Ebene bestimmt durch: x_i, $\cos\alpha_{1i}$, $\cos\alpha_{2i}$ *) also:

1. Jede Ebene ist durch einen Punkt und 2 von diesem Punkte ausgehende Richtungen bestimmt.

Die Gerade:

$$\text{e)}\ X_i^{(\varkappa)} - x_i = P_\varkappa \cos\alpha_{\varkappa i} \qquad \varkappa = 1,\ 2$$

liegt in der Ebene d) und geht durch den Punkt x_i; $X_i^{(\varkappa)}$ sind Punkte auf dieser Geraden e), wir nennen sie die Projektionen von X_i auf die Gerade e); $P_\varkappa$ sind die Entfernungen dieser Projektionen von x_i. Wir haben deshalb den Satz:

2. Jeder Punkt einer Ebene ist bestimmt, durch seine Projektionen auf 2 durch einen Punkt gehende Gerade der Ebene.

§ 27. Die Gleichungen:

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1+\lambda+\mu} \quad \text{und}$$

$$\text{b)}\ X_i - x_i = P_1 \cos\alpha_{1i} + P_2 \cos\alpha_{2i}$$

stellen dieselbe Ebene dar. Im ersten Falle sind λ, μ, im zweiten Falle P_1, P_2 die Koordinaten eines Punktes in der Ebene. Im ersten Falle haben wir sog. Dreieckskoordinaten; im zweiten sog. schiefwinkelige Cartesische Koordinaten. Der

---

*) Obige Bestimmung könnte Anlass geben zur Einführung von Ebenenkoordinaten, entsprechend den Plückerschen Linienkoordinaten im Raume.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Uebergang von den einen zu den anderen wird hergestellt durch die Formeln

$$P_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda + \mu} p_1$$

$$P_2 = \frac{\mu}{1 + \lambda + \mu} p_2$$

und umgekehrt:

$$\lambda = \frac{P_1 p_2}{p_1 p_2 - P_1 p_2 - P_2 p_1}$$

$$\mu = \frac{P_2 p_1}{p_1 p_2 - P_1 p_2 - P_2 p_1} .$$

Wenn X_i ein Punkt der Ebene b), so ist: § 28.

a) $X_i - x_i = P \cos \beta_i$ irgend eine Gerade der Ebene durch x_i, also:

b) $P \cos \beta_i = P_1 \cos \alpha_{1i} + P_2 \cos \alpha_{2i}$

oder:

c) $\cos \beta_i = l_1 \cos \alpha_{1i} + l_2 \cos \alpha_{2i}$

das heißt: Die Richtungskosinuse aller durch einen Punkt (x_i) gehenden Geraden der Ebene sind vom ersten Grade abhängig von 2 beliebigen durch diesen Punkt gehenden Geraden der Ebene.

Anm. Da $\Sigma \cos^2 \beta_i = 1$ so ist:

d) $1 = l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos \varphi$

oder: entsprechend

e) $P^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2 P_1 P_2 \cos \varphi$.

Nehmen wir in der Ebene

f) $X_i - x_i = P_1 \cos \alpha_{1i} + P_2 \cos \alpha_{2i}$

2 Punkte u_i und v_i mit den bezw. ebenen Koordinaten: $p_1 | p_2 \cdot - p_1' | p_2'$ und legen durch diese eine Gerade, welche nach früherem in der Ebene liegen muß, so sind deren Gleichungen:

g) $$\frac{X_i - u_i}{v_i - u_i} = k$$

oder:

h) $X_i - u_i = k (v_i - u_i)$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist aber:

$$\text{i)}\quad v_i = x_i + p_1' \cos\alpha_{1i} + p_2' \cos\alpha_{2i} \quad \text{und}$$
$$u_i = x_i + p_1 \cos\alpha_{1i} + p_2 \cos\alpha_{2i}$$

daher

$$v_i - u_i = (p_1' - p_1) \cos\alpha_{1i} + (p_2' - p_2) \cos\alpha_{2i}$$

oder:

$$\text{k)}\quad X_i - u_i = k\,(p_1' - p_1) \cos\alpha_{1i} + k\,(p_2' - p_2) \cos\alpha_{2i}\ ,$$

oder wenn:

$$\text{l)}\quad X_i - u_i = P' \cos\gamma_i\ ,$$

so folgt durch einfache Umformung:

$$\cos\gamma_i = l_1 \cos\alpha_{1i} + l_2 \cos\alpha_{2i}$$

Da u_i, v_i beliebig gewählt, auch X_i ein beliebiger Punkt der Ebene, so ergibt sich:

In der Ebene gibt es eine einfache Mannigfaltigkeit von Richtungen, welche alle vom 1. Grade abhängig sind von 2 beliebig gewählten Richtungen dieser Ebene.

Anm. Gerade gibt es in der Ebene natürlich eine 2 fache Mannigfaltigkeit, da die Gerade außer der Richtung noch einen Punkt zu ihrer Bestimmung braucht.

§ 29. 4. Die Gleichungen des Raumes:

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}$$

lassen sich wie folgt umformen:

$$\text{b)}\quad X_i - x_i = P_1 \cos\alpha_{1i} + P_2 \cos\alpha_{2i} + P_3 \cos\alpha_{3i}\ .$$

Das ergibt folgende Sätze:

1. **Die Lage jedes Punktes eines Raumes ist bestimmt durch seine Projektionen auf 3 nicht in einer Ebene liegende beliebig gewählte Gerade (Axen), welche von demselben Punkte ausgehen.**
2. **Jeder Raum ist durch einen Punkt und 3 Richtungen bestimmt.**

Durch gleiche Ueberlegungen, wie oben, finden wir:

für jede Gerade eines Raumes gilt die Formel:

$$\text{c)}\quad \cos\beta_i = l_1 \cos\alpha_{1i} + l_2 \cos\alpha_{2i} + l_3 \cos\alpha_{3i}$$

(wenn l_i veränderliche Größen bedeuten) d. h. mit Worten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Jeder Raum enthält eine 2fache Mannigfaltigkeit von Richtungen, welche vom ersten Grade abhängig sind von 3 nicht in einer Ebene liegenden Richtungen des Raumes.

Setzen wir $X_i - x_i = P \cos \beta_i$, so wird:

d) $P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2 P_1 P_2 \cos \varphi_{12} + 2 P_1 P_3 \cos \varphi_{13} + 2 P_2 P_3 \cos \varphi_{23}$

(wobei $\cos \varphi_{12} = \sum_1^4 \cos \alpha_{1i} \cos \alpha_{2i}$

$\cos \varphi_{13} = \sum_1^4 \cos \alpha_{1i} \cos \alpha_{3i}$

$\cos \varphi_{23} = \sum_1^4 \cos \alpha_{2i} \cos \alpha_{3i}$) .

Anm. Letztere Formel d) ergibt die Entfernung 2 Punkte im Raum, dargestellt durch die Projektionen auf die Axen und die Axenwinkel.

5. Die Gleichungen des R_4 § 30.

a) $X_i = \dfrac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i + \rho v_i}{1 + \lambda + \mu + \nu + \rho}$

lassen sich auf folgende Form bringen:

b) $X_i - x_i = \sum_1^4 {}_\varkappa P_\varkappa \cos \alpha_{\varkappa i}$

d. h. **Jeder Punkt des R_4 lässt sich bestimmen durch seine Projektionen auf 4 nicht in einem R_3 gelegene, aber von einem beliebigen Punkte ausgehende Axen.**

Anm. Die beiden Gleichungsformen a), b) stellen eine Koordinatenveränderung dar von S(5)-Koordinaten auf schiefwinklige Cartesische Koordinaten.

Setzen wir $X_i - x_i = P \cos \beta_i$, so wird

$\cos \beta_i = \sum_1^4 {}_\varkappa l_\varkappa \cos \alpha_{\varkappa i}$

Der sich ergebende Satz:

Der 4fach ausgedehnte Raum hat eine 3fache Mannigfaltigkeit von Richtungen, die vom ersten Grad abhängen von 4 nicht in einem Raum gelegenen Richtungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bestätigt sich nochmals, da man β_i als gegeben vorausgesetzt, aus den 4 obigen Gleichungen ($i = 1, 2, 3, 4$) die 4 Werte $l_\varkappa$ berechnen kann.

Durch Anwendung des sog. Pyth. Lehrsatzes erhalten wir:

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + 2 P_1 P_2 \cos\varphi_{12} + 2 P_1 P_3 \cos\varphi_{13} + 2 P_1 P_4 \cos\varphi_{14} + 2 P_2 P_3 \cos\varphi_{23} + 2 P_2 P_4 \cos\varphi_{24} + 2 P_3 P_4 \cos\varphi_{34}$$

oder kürzer:

$$P^2 = \Sigma P_i^2 + 2 \Sigma P_i P_\varkappa \cos\varphi_{i\varkappa}$$

Anm. Dieses ist die Abstandsformel zweier Punkte in schiefwinkligen Cart. Koordinaten.

Anm. Zum Begriff der Richtung werden wir in dem nächsten Abschnitt nochmals auf anderem Wege gelangen.

§30*. Die Gleichungen:

$$\text{a)} \quad X_i = \frac{\sum_1^{d+1} {}^\varkappa \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^{d+1} {}^\varkappa \varphi_\varkappa}$$

eines R_d lassen sich auf die Form bringen:

$$\text{b)} \quad X_i - x_i = \sum_1^{d} {}^\varkappa P_\varkappa \cos\alpha_{\varkappa i} \; ;$$

d. h.: **jeder Punkt eines R_d lässt sich bestimmen durch seine d Projektionen (Koordinaten) auf d von einem gegebenen Punkte ausgehende, aber nicht in einem R_{d-1} gelegene Axen.**

Setzt man in b)

$$\text{c)} \quad X_i - x_i = P \cos\beta_i \; , \qquad \text{so wird}$$

$$\text{d)} \quad \cos\beta_i = \sum_1^{d} {}^\varkappa l_\varkappa \cos\alpha_{\varkappa i} \; ;$$

d. h.: die Richtungen eines R_d bilden eine $(d-1)$fache Mannigfaltigkeit, welche vom 1. Grade abhängig ist von d nicht einem R_{d-1} angehörigen Richtungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den Gleichungen b) erhalten wir entsprechend unseren früheren Betrachtungen die Abstandsformel zweier Punkte im R_d:

$$\text{e)}\quad P^2 = \sum_1^d P_i^2 + 2 \sum_1^d P_i\, P_\varkappa \cos \varphi_{i\varkappa} \qquad (i < \varkappa)\ ;$$

im R_n:

$$\text{f)}\quad P^2 = \sum_1^n P_i^2 + 2 \sum_1^n P_i\, P_\varkappa \cos \varphi_{i\varkappa} \qquad (i < \varkappa)\,.$$

IX. Parallele Raumgebilde.

Bei einem ganz allgemeinen Koordinatensystem entsprechen unendlich großen Koordinaten irgend welche Punkte des 4fach ausgedehnten Raumes, wie man auch für $\xi_i = \infty$ Räume durch den Koordinatenanfangspunkt erhält. § 31.

Bei der im vorigen Abschnitt getroffenen besonderen Wahl des Koordinatensystems entsprechen unendlich großen Koordinaten unendlich ferne Punkte des 4fach ausgedehnten Raumes. Für diesen Fall ist es wünschenswert, unsere Untersuchungen nochmals mit unendlich großen Koordinaten durchzuführen.

Im folgenden soll ω eine mit den positiven ganzen Zahlen ins unendliche wachsende Zahl bedeuten.

1. Die Gleichungen einer Geraden: § 32.

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$$

ergeben für $\lambda = -1$ unendlich große Werte von X_i. Wir erhalten daraus den Satz:

Die Gerade hat nur einen unendlich fernen Punkt.

Dieser unendlich ferne Punkt der Geraden hat also die Koordinaten

$$\text{b)}\quad X_i = (x_i - y_i)\ \omega\ ,$$

oder da nach vorigem Abschnitt:

$$\text{c)}\quad x_i - y_i = r \cos \alpha_i\ ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so gilt für den unendlich fernen Punkt:

d) $X_i = \cos \alpha_i \cdot \omega$;

d. h.: **die Richtungskosinuse einer Geraden sind den Koordinaten des unendlich fernen Punktes der Geraden proportional.**

§ 33. 2. Stellen wir uns nun die Aufgabe, durch einen endlichen Punkt z_i und den unendlich fernen Punkt einer gegebenen Geraden:

a) $X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda}$

eine neue Gerade zu ziehen, so stellt sich diese Aufgabe als folgende dar: Eine Gerade durch z_i und

b) $x_i' = (x_i - y_i)\,\omega$ zu ziehen.

Wir erhalten daher:

c) $X_i = \frac{(x_i - y_i)\,\omega + \mu' z_i}{1 + \mu'}$,

eine Gleichung, welche für jedes endliche μ' nur den einen unendlich großen Wert b) liefert, für $\mu' = \mu\omega$ dagegen wird aus c):

d) $X_i = \frac{x_i - y_i + \mu z_i}{\mu}$.

Dies sind demnach die Gleichungen einer Geraden, welche durch z_i geht und die Gerade a) in ihrem unendlich fernen Punkte trifft.

Diese Gleichungen d) lassen sich durch einfache Umformungen noch in folgende Formen bringen:

e) $X_i - z_i = \lambda\,(x_i - y_i)$ und (wenn $x_i - y_i = r \cos \alpha_i$)

f) $X_i - z_i = R' \cos \alpha_i$.

§ 34. 3. 2 Gebilde 1. Ordnung, welche die Höchstzahl der ihnen möglichen Punkte gemein haben, heißen parallel, wenn diese gemeinsamen Punkte sämtliche unendlich fern gelegen sind.

In § 31 sind also Gerade a) und f) parallel, und daraus folgt der Satz: **Gerade mit gleichen Richtungskosinusen sind parallel**; oder: **parallele Gerade sind gleich gerichtet.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Ebene durch die 3 Punkte x_i, y_i, z_i, hat die Gleichungen:

$$\text{a) } X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu} \quad .$$

Setzen wir hierin $\lambda = -1$, so erhalten wir § 33 d); setzen wir $\lambda = o$, so ergibt sich § 33 a. — Also:

parallele Gerade liegen in der gleichen Ebene.

4. Gegeben 2 Gerade: § 35.

$$\text{a) } X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda} \text{ und b) } X_i = \frac{z_i + \mu u_i}{1 + \mu} ,$$

man ziehe durch die unendlich fernen Punkte beider eine neue Gerade. Die Gleichungen dieser neuen Geraden werden:

$$\text{c) } X_i = \frac{(x_i - y_i) + \nu (z_i - u_i)}{1 + \nu} \cdot \omega$$

Diese Gerade c) enthält nur unendlich ferne Punkte: wir erhalten daher den Satz:

Eine Gerade mit 2 unendlich fernen Punkten liegt ganz unendlich fern.

Nehmen wir beide gegebene Gerade a) und b) durch den gleichen Punkt x_i (also in derselben Ebene gelegen), so wird aus c):

$$\text{d) } X_i = \frac{(x_i - y_i) + \nu (x_i - u_i)}{1 + \nu} \cdot \omega$$

oder:

$$\text{e) } X_i = \big((x_i - y_i) + \nu (x_i - u_i)\big) \cdot \omega \ .$$

Diese Gerade e) liegt in der Ebene:

$$\text{f) } X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu u_i}{1 + \lambda + \mu} ;$$

denn setze ich in f) $\lambda = -\frac{1}{1 + \nu}$, $\mu = -\frac{\nu}{1 + \nu}$, so geht f) in e) über. Daher gilt der Satz:

Eine unendlich ferne Gerade, welche 2 Punkte mit einer Ebene gemein hat, liegt ganz in der Ebene.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 36. 5. Gegeben eine Ebene:

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu},$$

so erhält man deren unendlich ferne Punkte, wenn man

$$\text{b)}\ 1 + \lambda + \mu = o \quad \text{oder}$$

$$\text{c)}\ \mu = -1 - \lambda \text{ setzt.}$$

Die Gleichungen dieser Punkte sind dann:

$$\text{d)}\ X_i = \big((x_i - z_i) + \lambda (y_i - z_i)\big)\ \omega\ .$$

Diese Gleichungen d) entsprechen völlig den Gleichungen § 35 e) d. h.:

1. **Die unendlich fernen Punkte einer Ebene liegen in einer unendlich fernen Geraden.**
2. **Ist eine Ebene bestimmt durch 2 sich schneidende Gerade, so ist ihre unendlich ferne Gerade bestimmt durch die unendlich fernen Punkte der gegebenen 2 Geraden.**

Aus obigen Gleichungen d) erhält man durch die bekannte Umformung

$$\text{e)}\ X_i = (\cos \alpha_i + \lambda \cos \beta_i)\ \omega\ ;$$

d. h. die unendlich fernen Punkte einer Ebene sind durch 2 Richtungen der Ebene bestimmt.

Hieraus könnte man wieder den bereits erhaltenen Satz (§ 28)

$$\text{f)}\ \mu \cos \gamma_i = \cos \alpha_i + \lambda \cos \beta_i \quad \text{ableiten.}$$

§ 37. 6. Eine Ebene zu errichten, die durch eine Gerade geht und einer zweiten Geraden parallel ist.

Die gegebenen 2 Geraden seien:

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i}{1 + \lambda} \quad \text{und} \quad \text{b)}\ X_i = \frac{u_i + \mu v_i}{1 + \mu}$$

Damit die Ebene durch die Gerade a) hindurchgeht, muß sie die beiden Punkte x_i und y_i enthalten; und damit die Ebene der Geraden b) parallel ist, muß sie den Punkt:

$$\text{c)}\ x_i' = (u_i - v_i)\ \omega \quad \text{enthalten;}$$ ihre Gleichungen sind also:

$$\text{d)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu' (u_i - v_i)\ \omega}{1 + \lambda + \mu'}\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man in d) $\mu' \omega = \mu$; so werden

$$\text{e)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu (u_i - v_i)}{1 + \lambda}$$

die Gleichungen der verlangten Ebene. Bringen wir die Gleichungen b) auf die Form:

$$\text{f)}\ X_i - u_i = R \cos \alpha_i \quad , \quad \text{so wird aus e)}$$

$$\text{g)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \rho \cos \alpha_i}{1 + \lambda} \quad ;$$

d. h. jene gesuchte Ebene enthält die Richtung $\cos \alpha_i$.

Mit Worten:

Eine Ebene ist einer Geraden parallel, wenn in der Ebene eine Gerade parallel der gegebenen Geraden gezogen werden kann.

7. Eine Ebene zu suchen, welche durch einen gegebenen Punkt u_i geht und einer gegebenen Ebene parallel ist. § 38.

Die gegebene Ebene sei:

$$\text{a)}\ X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu} \quad .$$

Die unendlich ferne Gerade dieser Ebene a) ist:

$$\text{b)}\ X_i = \Big((x_i - z_i) + \lambda' (y_i - z_i)\Big) \omega \ .$$

Die gesuchte Ebene muß diese Gerade ganz enthalten außerdem noch den Punkt u_i, ihre Gleichungen werden daher:

$$\text{c)}\ X_i = \frac{u_i + \mu' \Big((x_i - z_i) + \lambda' (y_i - z_i)\Big) \omega}{1 + \mu'}$$

oder

$$\text{d)}\ X_i = u_i + \mu_1 (x_i - z_i) + \lambda_1 (y_i - z_i) \quad .$$

Setzen wir:

$$\text{e)}\ x_i - z_i = r \cos \alpha_i \text{ und } y_i - z_i = r' \cos \beta_i \quad ,$$

so werden die Gleichungen der gegebenen Ebene a)

$$\text{f)}\ X_i - z_i = P_1 \cos \alpha_i + P_2 \cos \beta_i$$

und die der gesuchten (parallelen) Ebene d)

$$\text{g)}\ X_i - u_i = Q_1 \cos \alpha_i + Q_2 \cos \beta_i \ ;$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. **2 Ebenen sind parallel, wenn zu 2 beliebigen (unter sich nicht parallelen) Geraden der einen Ebene parallele Gerade in der anderen Ebene vorhanden sind.**

Aus den Gleichungen f) und g) folgt wie in § 28 c

$$\text{h)}\quad \cos\gamma_i = l\cos\alpha_i + m\cos\beta_i$$

$$\text{i)}\quad \cos\delta_i = l'\cos\alpha_i + m'\cos\beta_i$$

d. h. **2 parallele Ebenen haben die gleichen Richtungen.**
Oder: **Sind 2 Ebenen parallel, so gibt es zu jeder Geraden der einen Ebene eine parallele Gerade in der anderen Ebene.**

§ 39. 8. Die Ebene:

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

und die zu ihr parallele Ebene

$$\text{b)}\quad X_i = u_i + \mu'(x_i - z_i) + \lambda'(y_i - z_i)$$

liegen in dem durch die Punkte x_i, y_i, z_i, u_i bestimmten Raume:

$$\text{c)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}\ .$$

Denn setze ich in c) $\nu = o$, so erhalte ich die Gleichungen a); setze ich dagegen

$$\nu = \frac{1}{\mu'}\ ;\quad \mu = 1 - \lambda \text{ und } \lambda = \frac{\lambda'}{\mu'}\ ,$$

so erhalte ich aus c) die Gleichungen b); also liegen beide Ebenen im gleichen Raume.

2 parallele Ebenen liegen im gleichen Raume.

§ 40. 9. Wollen wir nun die Gleichungen des durch 2 parallele Ebenen

$$\text{a)}\quad X_i = x_i + \rho_1\cos\alpha_i + \rho_2\cos\beta_i$$

$$\text{b)}\quad X_i = y_i + \nu_1\cos\alpha_i + \nu_2\cos\beta_i$$

bestimmten Raumes aufstellen, so wird:

$$\text{c)}\quad \sum_1^5{}^i A_i X_i = o\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gleichung c) muß erfüllt sein durch alle Punkte der beiden Ebenen a) und b), setzen wir daher die Werte von X_i aus jenen Gleichungen a) und b) in c) ein, so muß die Gleichung c) unabhängig von ρ und ν erfüllt sein; es ist also:

$$\text{d)}\quad \sum_1^5{}^i A_i x_i = o\ ; \quad \sum_1^5{}^i A_i y_i = o\ ; \quad \sum_1^4{}^i A_i \cos\alpha_i = o\ ;$$

$$\sum_1^4{}^i A_i \cos\beta_i = o\ .$$

Hieraus und aus c) erhalten wir durch Elimination:

$$\text{e)}\quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4 & 0 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\beta_4 & 0 \end{vmatrix} = o\ ,$$

als Gleichung des Raumes, welcher beide parallele Ebenen enthält; oder als Gleichung eines durch 2 Punkte und 2 Richtungen bestimmten Raumes.

10. Wir wollen nunmehr noch die Aufgabe lösen durch 3 unendlich ferne Punkte, welche nicht in einer unendlich fernen Geraden liegen, eine Ebene zu legen: § 41.

Die 3 unendlich fernen Punkte seien:

$$\text{a)}\quad X_i = (y_i - x_i)\,\omega\ \cdot - X_i' = (z_i - u_i)\,\omega\ \cdot - X_i'' = (v_i - w_i)\,\omega\ ,$$

dann werden die Gleichungen der durch sie bestimmten Ebene:

$$\text{b)}\quad X_i = \frac{(y_i - x_i) + \lambda(z_i - u_i) + \mu(v_i - w_i)}{1 + \lambda + \mu} \cdot \omega\ ,$$

welche also selbst unendlich fern gelegen ist. Gehen die 3 Geraden, deren unendlich ferne Punkte die Gleichungen a) angeben, von einem Punkte x_i aus, so werden die Gleichungen der unendlich fernen Ebene b)

$$\text{c)}\quad X_i = \big((y_i - x_i) + \lambda(z_i - x_i) + \mu(v_i - x_i)\big)\,\omega\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 42. 11. 2 Ebenen, welche sich nur in einem unendlich fernen Punkte schneiden (sonst in endlichen Punkten oder gar nicht) heißen halbparallel.

Anm. 2 Ebenen, welche sich in einer endlichen Geraden schneiden sind also auch halbparallel.

Suchen wir zur Ebene:

$$\text{a) } X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i}{1 + \lambda + \mu}$$

eine halbparallele Ebene durch die Punkte u_i und v_i, so ist das die Ebene, welche einer Richtung der Ebene a) parallel ist. Die unendlich ferne Gerade von a) ist:

$$\text{b) } X_i = \big((x_i - z_i) + \lambda (y_i - z_i)\big)\,\omega\,;$$

ein Punkt dieser Geraden b) aber ist:

$$\text{c) } X_i = \big((x_i - z_i) + a\,(y_i - z_i)\big)\,\omega\,;$$

die halbparallele Ebene geht durch diesen Punkt, hat also die Gleichungen:

$$\text{d) } X_i = \frac{u_i + \lambda v_i + \mu' \big((x_i - z_i) + a\,(y_i - z_i)\big)\,\omega}{1 + \lambda + \mu'}$$

oder:

$$\text{e) } X_i = \frac{u_i + \lambda v_i + \mu \big((x_i - z_i) + a\,(y_i - z_i)\big)}{1 + \lambda}$$

oder:

$$\text{f) } X_i = \frac{u_i + \lambda v_i + \mu \cos \gamma_i}{1 + \lambda}\,,$$

wenn $\cos \gamma_i = a'\,(x_i - z_i) + b'\,(y_i - z_i)$; oder wenn $\cos \gamma_i = a \cos \alpha_i + b \cos \beta_i$.

2 Ebenen sind halbparallel, wenn eine Gerade der einen Ebene einer Geraden der anderen Ebene parallel ist.

§ 43. 12. Gegeben ein Raum:

$$\text{a) } X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}\,,$$

so erhalten wir dessen unendlich ferne Punkte, wenn wir:

$$\text{b) } 1 + \lambda + \mu + \nu = 0 \quad \text{setzen;}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

deren Gleichungen sind dann:

c) $X_i = \big((x_i - u_i) + \lambda (y_i - u_i) + \mu (z_i - u_i)\big)\,\omega$;

d. h. die Gleichungen § 41 c).

Wir erhalten deshalb das Ergebnis:

Die unendlich fernen Punkte eines Raumes liegen in einer unendlich fernen Ebene.

Die unendlich ferne Ebene eines Raumes ist bestimmt durch die 3 unendlich fernen Punkte von 3 (nicht in einer Ebene liegenden und unter sich nicht parallelen) Geraden des Raumes.

Auf ähnliche Weise wie oben können wir folgende Sätze beweisen, deren Beweis jedoch, um Gleichförmigkeit zu vermeiden, wegbleiben soll:

1. **Eine Gerade ist einem Raum parallel, wenn sie einer Geraden des Raumes parallel ist.**
2. **Eine Ebene ist einem Raum parallel, wenn sie 2 (nicht parallele) Gerade enthält, die 2 Geraden des Raumes parallel sind.**
3. **2 Räume sind parallel, wenn einer von ihnen 3 (nicht unter sich parallele) Gerade enthält, die 3 Geraden des anderen Raumes parallel sind.**

1. **Ein R_δ ist einem R_d parallel ($\delta \leqq d$), wenn δ (unter sich nicht parallele) Gerade des R_δ δ Geraden des R_d parallel sind.** § 43*.
2. **Ein R_δ ist einem R_d parallel, wenn δ Richtungen des R_δ auch im R_d enthalten sind.**
3. **Jedes R_d enthält unendlich ferne Punkte, welche einen unendlich fernen R_{d-1} (einen sog. U_{d-1}) bilden.**
4. **Ein R_δ ist einem R_d $\frac{a}{\delta}$ parallel ($a < \delta \leqq d$), wenn a nicht in einem R_{a-1} gelegene Richtungen von R_δ auch im R_d enthalten sind.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 44. 13) Wollen wir noch folgende Aufgaben lösen:

Zu einem gegebenen Raum:

$$\text{a)}\quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i}{1 + \lambda + \mu + \nu}$$

durch den Punkt v_i den parallelen Raum zu legen.

Die Gleichungen dieses parallelen Raumes sind:

$$\text{b)}\quad X_i = v_i + \lambda (y_i - x_i) + \mu (z_i - x_i) + \nu (u_i - x_i) ;$$

während die Gleichungen des Raumes a) auch auf die Form:

$$\text{c)}\quad X_i - x_i = \lambda' (y_i - x_i) + \mu' (z_i - x_i) + \nu' (u_i - x_i)$$

gebracht werden können. Man kann deshalb statt c) auch schreiben:

$$\text{d)}\quad X_i - x_i = P_1 \cos \alpha_i + P_2 \cos \beta_i + P_3 \cos \gamma_i$$

und statt b)

$$\text{e)}\quad X_i - v_i = Q_1 \cos \alpha_i + Q_2 \cos \beta_i + Q_3 \cos \gamma_i ,$$

was zugleich den Beweis liefert für § 43,3. Eliminieren wir aus den 4 Gleichungen d) und e) bezw. die Größen $P_\varkappa$ und $Q_\varkappa$, so erhalten wir die Gleichungen der beiden parallelen Räume in der Form:

$$\text{f)}\quad \begin{vmatrix} X_1 - x_1 & X_2 - x_2 & X_3 - x_3 & X_4 - x_4 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & \cos \alpha_4 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 & \cos \beta_4 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 & \cos \gamma_4 \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\text{g)}\quad \begin{vmatrix} X_1 - v_1 & X_2 - v_2 & X_3 - v_3 & X_4 - v_4 \\ \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 & \cos \alpha_4 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 & \cos \beta_4 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 & \cos \gamma_4 \end{vmatrix} = 0$$

Hieraus erhält man die Gleichungen 2 paralleler Räume in der Form:

$$\text{h)}\quad A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + A_5 = 0$$

$$\text{i)}\quad A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 + A_4 X_4 + B_5 = 0$$

Das heißt: **die Gleichungen 2 paralleler Räume unterscheiden sich nur im konstanten Glied** (mit Ausnahme eines Faktors).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man in

$$\text{k)} \quad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 & \cos\alpha_4 & 0 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 & \cos\beta_4 & 0 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 & \cos\gamma_4 & 0 \end{vmatrix} = o$$

für x_i die Koordinaten immer wieder anderer Punkte, so erhält man alle dem gegebenen Raum parallele Räume.

Da 2 Räume sich immer in einer Ebene schneiden, so haben je 2 Räume eine unendlich ferne Gerade gemein, d. h.: alle nicht völlig parallelen Räume sind $^2/_3$ parallel.

14. Hat man die Gleichungen des 4 fach ausgedehnten Arbeitsraumes: § 45.

$$\text{a)} \quad X_i = \frac{x_i + \lambda y_i + \mu z_i + \nu u_i + \rho v_i}{1 + \lambda + \mu + \nu + \rho}$$

und setzt man:

$$\text{b)} \quad 1 + \lambda + \mu + \nu + \rho = o \ ,$$

so erhält man alle unendlich fernen Punkte in der Form:

$$\text{c)} \quad X_i' = \big(\lambda\,(y_i - x_i) + \mu\,(z_i - x_i) + \nu\,(u_i - x_i) + \rho\,(v_i - x_i)\big)\,\omega \ .$$

Dies sind alle möglichen unendlich fernen Punkte unseres Arbeitsraumes; denn setzen wir:

$$\text{d)} \quad X_i' = a_i\,\omega \ ,$$

wobei a_i beliebige Größen sind, so wird:

$$\text{e)} \quad a_i = \lambda\,(y_i - x_i) + \mu\,(z_i - x_i) + \nu\,(u_i - x_i) + \rho\,(v_i - x_i) \ ;$$

das sind aber 4 Gleichungen ($i = 1, 2, 3, 4$) mit 4 Unbekannten λ, μ, ν, ρ, welche also immer berechnet werden können. Obige Gleichungen c) sind aber die Gleichungen eines unendlich fernen Raumes (R_3); es ergibt sich daraus der Satz:

Alle unendlich fernen Punkte unseres 4 fach ausgedehnten Arbeitsraumes liegen in einem unendlich fernen 3 fach ausgedehnten Raum (U_3).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der vorliegende Abschnitt hat gezeigt, daß für endliche und unendlich ferne Punkte die gleichen Gesetze gelten, daß deshalb unendlich ferne Punkte oder Richtungen ebenso zur Bestimmung eines R_d verwendet werden können, wie endlich gelegene Punkte.

§45*. Z. B.: Einen R_d zu suchen, der durch x Punkte geht und $d - x + 1$ Richtungen enthält:

$$X_i = \frac{\sum_1^x {}^{\varkappa} \varphi_\varkappa x_i^{(\varkappa)} + \sum_1^{d-x+1} {}^{\varkappa} \psi_\varkappa \cos \alpha_i^{(\varkappa)}}{\sum_1^x {}^{\varkappa} \varphi_\varkappa + \sum_1^{d-x+1} {}^{\varkappa} \psi_\varkappa} .$$

X. Büschel, von parallelen Räumen.

§ 46. 1. Nach vorigem Abschnitt sind 2 Räume parallel, wenn sich ihre Gleichungen nur im konstanten Glied unterscheiden. So sind z. B. folgende 2 Räume parallel:

$$\text{a)}\ L_a \equiv \sum_1^4 {}^i A_i X_i + A_5 = o$$

$$\text{b)}\ L_b \equiv \sum_1^4 {}^i A_i X_i + B_5 = o$$

Ebenso sind alle Räume, deren Gleichungen die Form:

c) $a L_a + b L_b = o$ haben, jenen Räumen a) und b) parallel; denn ihre Gleichungen werden:

$$\text{d)}\ \sum_1^4 {}^i A_i X_i + \frac{a A_5 + b B_5}{a + b} = o ,$$

unterscheiden sich also nur im konstanten Glied von den Gleichungen a) und b).

Setzt man in Gleichung c)

e) $b = - a$, so wird aus der Gleichung c):

f) $A_5 - B_5 = o$.

Die Differenz $A_5 - B_5$ ist aber nicht null, da a) und b) 2 verschiedene Räume darstellen, also kann Gleichung f) auch in der scheinbar widersinnigen Form geschrieben werden:

g) $1 = o$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gleichung nennt man die Gleichung des unendlich fernen Raumes, für welchen alle endlichen Entfernungen als verschwindend klein betrachtet werden können.

2. Wenn also ein Raum: § 47.

a) $L_a = o$

gegeben ist, und die zu jenem Raum parallelen Räume gesucht werden sollen, so bilden alle diese Räume ein Büschel, dessen Träger die unendlich ferne Ebene von a) ist, die Gleichungen der letzteren sind aber:

b) $L_a = o \; ; \quad 1 = o$.

Hieraus wird die Gleichung des Büschels der zum Raum a) parallelen Räume:

c) $a L_a + b = o$;

wobei a und b beliebige veränderliche Größen darstellen.

3. Alle Räume, welche einer gegebenen Ebene § 48.

a) $L_a = o \, , \quad L_b = o$

parallel sind, gehen durch die unendlich ferne Gerade der gegebenen Ebene, nämlich durch:

b) $L_a = o \, , \quad L_b = o \, , \quad 1 = o$.

Sie bilden deshalb ein Bündel mit der Gleichung:

c) $a L_a + b L_b + c = o$.

Dieses Bündel enthält:

1. alle Räume des Büschels

d) $a L_a + b L_b = o$

und 2. zu jedem dieser Räume das Parallelraumbüschel.

§ 47 und 48 liefern uns nun folgende Sätze:

1. **Alle einem Raum parallelen Räume bilden ein Raumbüschel.**

2. **Alle einer Ebene parallelen Räume bilden ein Raumbündel.**

3. **Ein Raum ist einer Ebene parallel, wenn er einem durch die Ebene gehenden Raume parallel ist.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Obige Gleichung c) kann auch wie folgt ausgedrückt werden:

Ein Raum: e) $\sum_1^5{}^i A_i X_i = o$ ist einer Ebene:

$$\text{f)}\ \sum_1^5{}^i B_i^{(1)} X_i = o \ ; \quad \sum_1^5{}^i B_i^{(2)} X_i = o$$

parallel, wenn g) $a A_i = b_1 B_i^{(1)} + b_2 B_i^{(2)}$ (für $i = 1, 2, 3, 4$)
und wenn: h) $a A_5 = b_1 B_5^{(1)} + b_2 B_5^{(2)} + b_3$ ist.

§ 49. 4. Alle Räume, welche einer gegebenen Geraden:

$$\text{a)}\ L_a = o\ , \quad L_b = o\ , \quad L_c = o$$

parallel sind, gehen durch den unendlich fernen Punkt der Geraden, also durch den Punkt mit den Gleichungen:

$$\text{b)}\ L_a = o\ , \quad L_b = o\ , \quad L_c = o\ , \quad 1 = o\ .$$

Sie bilden daher ein Raumgebüsch mit der Gleichung:

$$\text{c)}\ a L_a + b L_b + c L_c + d = o\ .$$

Man erhält dieses Gebüsch, wenn man zu jedem Raum durch die Gerade die parallelen Räume zieht. Dies Ergebnis läßt sich in folgende 2 Sätze zusammenfassen:

1. **Alle einer Geraden parallelen Räume bilden ein Raumgebüsch.**
2. **Ein Raum ist einer Geraden parallel, wenn er einem durch die Gerade gehenden Raume parallel ist.**

Obige Gleichung c) läßt sich auch in folgender Form ausdrücken:

Ein Raum d) $\sum_1^5{}^i A_i X_i = o$ ist einer Geraden:

$$\text{e)}\ \sum_1^5{}^i B_i^{(\varkappa)} X_i = o \qquad \varkappa = 1, 2, 3\ . \quad \text{parallel, wenn}$$

$$\text{f)}\ a A_i = \sum_1^3{}^\varkappa b_\varkappa B_i^{(\varkappa)} \qquad (\text{für } i = 1, 2, 3, 4) \quad \text{und}$$

$$\text{g)}\ a A_5 = \sum_1^4{}^\varkappa b_\varkappa B_5^{(\varkappa)} \qquad (\text{wobei } B_5^{(4)} = 1)\ .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Gegeben 2 Ebenen: § 50.

$$\text{a)}\ L_a \equiv \sum_1^5{}^i A_i X_i = o\ ; \quad L_b \equiv \sum_1^5{}^i B_i X_i = o \quad \text{und:}$$

$$\text{b)}\ L_{a'} = \sum_1^5{}^i A_i' X_i = o\ ; \quad L_{b'} = \sum_1^5{}^i B_i' X_i = o\ .$$

Diese 2 Ebenen sind halbparallel, wenn sie einen unendlich fernen Punkt gemein haben; d. h. wenn:

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1' & A_2' & A_3' & A_4' \\ B_1' & B_2' & B_3' & B_4' \end{vmatrix} = o\ .$$

Diese Bedingung erhält auch die Form:

$$\text{d)}\ \begin{cases} a A_i + b B_i + a' A_i' + b' B_i' = o \\ (i = 1, 2, 3, 4) \text{ und} \\ a A_5 + b B_5 + a' A_5' + b' B_5' = k\ . \end{cases}$$

Oder:

$$\text{e)}\ a L_a + b L_b + a' L_{a'} + b' L_{b'} - k \equiv o\ .$$

Dies läßt sich mit Worten, wie folgt, aussprechen:

2 Ebenen sind halbparallel, wenn durch eine von ihnen ein Raum gezogen werden kann, der einem durch die andere Ebene gezogenen Raum parallel ist.

In obiger Gleichung e) ist k eine beliebige Zahl, setzen wir $k = o$, so erhalten wir die Gleichung e) des § 19, d. h. die halbparallelen Ebenen schneiden sich dann in einer Geraden.

6. Suchen wir nun die Bedingung, unter welcher die beiden § 51.
Ebenen a) und b) des § 50 völlig parallel werden, so erhalten wir folgende: Die beiden Ebenen sind parallel, wenn jeder durch die Ebene b) gehende Raum die unendlich ferne Gerade der Ebene a) enthält. Also wenn:

$$\text{c)}\ a' L_{a'} + b' L_{b'} \equiv a L_a + b L_b + c = o\ ,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unabhängig davon, welche Werte a' und b' besitzen, also wenn:

$$\text{d)} \begin{cases} -a' L_{a'} \equiv a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 = o \quad \text{und} \\ -b' L_{b'} \equiv a_2 L_a + b_2 L_b + c_2 = o \end{cases}$$

oder wenn:

$$\text{e)} \begin{cases} a' L_{a'} + a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 \equiv o \quad \text{und} \\ b' L_{b'} + a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 \equiv o \end{cases}$$

oder wenn:

$$\text{f)} \begin{cases} a_1' L_{a'} + b_1' L_{b'} + a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 \equiv o \quad \text{und} \\ a_2' L_{a'} + b_2' L_{b'} + a_2 L_a + b_2 L_b + c_2 \equiv o \quad . \end{cases}$$

D. h. wir erhalten die Bedingung des Halbparallelseins doppelt:

2 Ebenen sind parallel, wenn durch eine von ihnen 2 Räume gezogen werden können, von denen jeder einem durch die andere Ebene gehenden Raum parallel ist.

Anders ausgedrückt: 2 Ebenen § 50 a) b) sind parallel, wenn die Gleichungen:

$$\text{g)} \begin{cases} a A_i + b B_i + a' A_i' + b' B_i' = o \\ (\text{für } i = 1, 2, 3, 4) \text{ und} \\ a A_5 + b B_5 + a' A_5' + b' B_5' + c' = o \quad \text{erfüllt} \end{cases}$$

sind für 2 Wertesysteme:

$$\text{h)} \begin{cases} a_1 \mid b_1 \mid a_1' \mid b_1' \mid c_1 \quad \text{und} \\ a_2 \mid b_2 \mid a_2' \mid b_2' \mid c_2 \quad . \end{cases}$$

Anm. Dann sind sie auch erfüllt für jedes Wertesystem

$$\text{i)} \; a_1 + n a_2 \mid b_1 + n b_2 \mid a_1' + n a_2' \mid b_1' + n b_2' \mid c_1 + n c_2 \; .$$

§ 52. 7. Eine Ebene:

$$\text{a)} \; L_a = o \quad , \qquad L_b = o$$

ist einer Geraden:

$$\text{b)} \; L_{a'} = o \quad , \qquad L_{b'} = o \quad , \qquad L_{c'} = o$$

parallel, wenn die Ebene a) durch den unendlich fernen Punkt der Geraden b) geht; dies ist aber der Fall, wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

jeder die Ebene bestimmende Raum durch jenen Punkt hindurch geht; also wenn:

$$c) \begin{cases} a L_a \equiv a_1' L_{a'} + b_1' L_{b'} + c_1' L_{c'} + d_1' \quad \text{und} \\ b L_b \equiv a_2' L_{a'} + b_2' L_{b'} + c_2' L_{c'} + d_2' \end{cases}$$

oder wenn:

$$d) \begin{cases} a_1 L_a + b_1 L_b + c_1 + a_1' L_{a'} + b_1' L_{b'} + c_1' L_{c'} \equiv o \quad \text{und} \\ a_2 L_a + b_2 L_b + c_2 + a_2' L_{a'} + b_2' L_{b'} + c_2' L_{c'} \equiv o \quad . \end{cases}$$

Dies ist nach § 20 zugleich die Bedingung, daß die unendlich ferne Gerade von a) die gegebene Gerade schneidet.

Eine Ebene ist einer Geraden parallel, wenn durch die Ebene 2 Räume gezogen werden können, von denen jeder einem durch die Gerade gezogenen Raum parallel ist.

Oder:

Eine Ebene ist einer Geraden parallel, wenn die unendlich ferne Gerade der Ebene die gegebene Gerade schneidet.

Oder: **wenn durch die Gerade eine Ebene parallel der gegebenen gezogen werden kann.**

8. 2 Gerade: § 53.

a) $L_a = o$, $L_b = o$, $L_c = o$

b) $L_{a'} = o$, $L_{b'} = o$, $L_{c'} = o$

sind parallel, wenn die Gerade a) und mithin jeder ihrer Bestimmungsräume durch den unendlich fernen Punkt der Geraden b) geht.

Dies gibt durch ähnliche Ableitung wie oben die Bedingung, daß:

c) $a_\varkappa L_a + b_\varkappa L_b + c_\varkappa L_c + a_\varkappa' L_{a'} + b_\varkappa' L_{b'} + c_\varkappa' L_{c'} + d_\varkappa \equiv o$ für $\varkappa = 1, 2, 3$.

Oder: **2 Gerade sind parallel, wenn durch eine von ihnen 3 nicht in einem Büschel gelegene Räume gezogen werden können, von denen jeder einem Raum durch die andere Gerade parallel ist.**

Es zeigt sich hiebei, daß die in den letzten beiden Abschnitten entwickelten Sätze sich dual entsprechen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§53*. Auf die gleiche Weise läßt sich der allgemeine Satz beweisen:

Ein R_d ist einem R_δ parallel ($d \geqq \delta$), wenn durch den R_d $(n-d)$ Räume gezogen werden können, welche nicht einem Büschel $(n-d-1)^{ter}$ Mannigfaltigkeit angehören, und von denen jeder einem durch den R_δ gezogenen Raum parallel ist.

Da die vorliegende Arbeit den herkömmlichen Umfang eines Gymnasialprogrammes weit überschreiten würde, so habe ich mich entschlossen, die Abschnitte über das Senkrechtstehen, über Projektion, Abstand und Winkel und über das Koordinatensystem und seine Veränderungen einem zweiten demnächst folgenden Teile vorzubehalten.

Seite 10 letzte Zeile ist R_{d+1} statt R_{d+2} zu lesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§53*. Auf die gleic z beweisen:

Ein Rd ist durch den Rd (n—d) elche nicht einem Büse angehören, und von der enen Raum parallel ist.

Da die hen Umfang eines Gymr würde, so habe ich m r das Senkrechtstehen el und über das Koordi ngen einem zweiten der en.

Seite + 2 zu lesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf