y_1 berechnen. Die Durchführung der Rechnung ergiebt:

$$x_1 = \frac{r^2\xi \pm r\eta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y_1 = \frac{r^2\eta \mp r\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2},$$

wobei die oberen, bezw. unteren Vorzeichen einander entsprechen.

Da sich für x_1 und y_1 je 2 Werte ergeben, so ersehen wir hieraus wieder die bekannte Thatsache, dass sich von jedem Punkt an einen Kreis 2 Tangenten legen lassen. Ferner lehren uns die Formeln, dass die beiden Tangenten reell sind, zusammenfallen, imaginär sind, jenachdem $\xi^2 + \eta^2 \gtreqless r^2$ ist, d. h. jenachdem (ξ, η) ausserhalb des Kreises auf ihm, in ihm liegt.

§ 21.

Aufgaben: 1; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche bezw. in den Punkten $x_1 = 4$, $y_1 = 15$, $x_1 = 9$, $y_1 > 0$, $x_1 = -7$, $y_1 < 0$ die Kreise $x^2 + y^2 = 241$, $x^2 + y^2 = 130$, $x^2 + y^2 = 625$ berühren?

2; Wie heissen die Berührungspunkte der durch die Punkte (7,6), (9,8), (9,7) bezw. an die Kreise $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ gelegten Tangenten?

3; (Fig. XXIV). Die Längen der Tangente AP, der Subtangente AC, der Normalen P_1O, der Subnormalen CO und des zwischen den Achsen gelegenen Tangentenstückes AB zu bestimmen.

Aus der Fig. folgt unmittelbar $P_1O = r$, $CO = x_1$; bezeichnen wir ferner die Abscisse des Punktes A mit x_0, so ergiebt sich aus der Gleichung der Tangente: $x_0x_1 = r^2$, also $x_0 = \frac{r^2}{x_1}$; es ist demnach die Subtangente $AC = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}$; ferner ist $AP_1^2 = x_0\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{r^2y_1^2}{x_1^2}$, also $AP_1 = \frac{y_1}{x_1}r$; analog ist $BP_1 = \frac{x_1}{y_1}r$, demnach $AB = r\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{r^3}{x_1y_1}$.

Zahlenbeispiel hierzu: Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = 100^2$, der Berührungspunkt P_1 einer Tangente habe die Coordinaten (96, 28), dann ist: $P_1O = 100$ $CO = 96$, $AC = 8\frac{1}{6}$, $AP_1 = 29\frac{1}{6}$, $BP_1 = 342\frac{6}{7}$, $AB = 372\frac{1}{42}$.

IV. Die Parabel.

§ 22. Definition und Gleichung der Parabel.

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem festen Punkt F und einer festen Geraden L gleiche Entfernung haben oder der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch den gegebenen Punkt F gehen und die gegebene Gerade L berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bewegt sich also ein Punkt so, dass er in jedem Augenblick seiner Bewegung von einem festen Punkt F und einer festen Geraden L gleiche Entfernung hat, so beschreibt er eine Parabel.

Der feste Punkt F heisst der Brennpunkt (focus), die feste Gerade L die Leitlinie oder Direktrix, die vom Brennpunkt nach einem Parabelpunkt gezogene Gerade Brennstrahl oder Radiusvector der Parabel. Ist (Fig. XXV) F der gegebene Punkt, L die gegebene Gerade, FA das von F auf L gefällte Lot, so ist offenbar der Mittelpunkt O von FA ein Punkt der Parabel.

Um für die Parabel eine Gleichung abzuleiten, wählen wir OF als X-Achse, die Senkrechte darauf in O als Y-Achse und bezeichnen ferner den Abstand AF durch p.

Ist nun P ein beliebiger Punkt der Parabel, so ist, wenn $PB \perp L$, $FP = BP$, ferner $FP^2 = FR^2 + RP^2 = (OR - OF)^2 + RP^2 = (x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2$, $BP^2 = (BC + CP)^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$.

Wir erhalten somit für den Punkt P der Parabel die Coordinatenbeziehung: $(x - \frac{1}{2}p)^2 + y^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2$, woraus sich leicht $y^2 = 2px$ ergiebt. Unter Zugrundelegung unseres Coordinatensystemes gilt also diese Gleichung für jeden Parabelpunkt, es ist somit:

$$y^2 = 2px$$

die Gleichung der Parabel und zwar die sogenannte Scheitelgleichung.

Dass der Coordinatenanfang ein Punkt der Parabel ist, haben wir schon oben erwähnt; ferner muss der Gleichung der Parabel zufolge x stets positiv sein (da sich nur dann reelle Werte für y ergeben), d. h., die Parabel liegt ganz auf der rechten Seite der Y-Achse und tritt nur im Punkt O an sie heran. Weiter ergiebt sich aus $y = \pm \sqrt{2px}$, dass zu jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von y gehören, die X-Achse ist also eine Symmetrieachse der Parabel. Sie wird kurz die Achse, ihr Anfangspunkt O der Scheitel der Parabel genannt, während die beiden Teile, in welche die Parabel durch sie geteilt wird, Äste der Parabel heissen. Mit wachsendem x wächst auch y, aber nur wie die Quadratwurzel aus x ($\sqrt{2p}$ konstant); wächst x über alle Grenzen, so wird auch y unendlich gross, die Parabel erstreckt sich also bis ins Unendliche und ist eine offene Curve.

Die Gerade, welche einen Punkt (x_1, y_1) der Parabel mit dem Coordinatenanfang verbindet, hat die Gleichung: $y = \frac{y_1}{x_1} x$, oder $y = x tg\alpha$, wenn α den Winkel zwischen der Geraden und der Achse der Parabel bedeutet. Nun ist aber wegen $y_1^2 = 2px$, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{2p}{y_1}$, es nimmt also $tg\alpha = \frac{2p}{y_1}$, also auch α selbst mit wachsendem Werte von y_1 stetig ab, um mit unendlich gross werdendem y_1 unendlich klein zu werden.

Daraus geht hervor, dass der Parabelast immermehr der Achse parallel wird.

Für $x = \frac{p}{2}$ erhalten wir aus der Parabelgleichung die beiden zum Brennpunkt gehörenden Ordinaten $y = \pm p$. Man bezeichnet die doppelte Brennpunktsordinate $2p$ als den Parameter der Parabel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser, welcher gleichzeitig die doppelte Entfernung Brennpunkt-Leitlinie angiebt, bestimmt vollständig die Gestalt der Parabel.

Wählen wir als Anfangspunkt des Coordinatensystems nicht den Scheitel, sondern den Brennpunkt der Parabel, so erhalten wir aus Fig. XXV leicht: $FP^2 = FR^2 + RP^2 = x^2 + y^2$, $BP^2 = (x + p)^2$, woraus sich

$$y^2 = 2px + p^2$$

als Gleichung der Parabel ergiebt. Brennpunktsgleichung.

§ 23. Konstruktionen der Parabel.

Aus der Gleichung der Parabel, bezw. aus der Lage des Brennpunktes und der Leitlinie ergiebt sich eine Anzahl von Konstruktionen, von denen hier einige Platz finden mögen.

1; Aus $y^2 = 2px$, folgt $2x : y = y : p$, es ist also y mittlere Proportionale zwischen $2x$ und p. Darauf gründet sich folgende Konstruktion (Fig. XXVI): $OS = OR = x$, $RT = p$, Kreis über ST, $PRP' \perp OR$, dann sind P und P' Punkte der Parabel. Da S die Abscisse $-x$, T die Abscisse $x + p$ hat, so ist die Abscisse des Kreismittelpunktes $= \frac{(x+p)-x}{2} = \frac{p}{2}$, d. h., der Mittelpunkt fällt mit dem Brennpunkt zusammen, was die Konstruktion wesentlich vereinfacht.

2; Da (Fig. XXV) $FP = AR = x + \frac{1}{2}p$, so erhält man 2 Punkte der Parabel, wenn man in einem Punkt R auf der X-Achse das Lot errichtet und mit dem Abstande RA des Fusspunktes von der Leitlinie um F den Kreis beschreibt, dessen Schnittpunkte mit dem Lote eben 2 Parabelpunkte sind.

3; Da (Fig. XXV) Dreieck FPB gleichschenklig ist, so ergeben sich als Örter für einen Punkt der Parabel 1, das Lot in B auf L, 2, die Mittelsenkrechte auf BF.

4; Ist (Fig. XXVII) L die Leitlinie, F der Brennpunkt, O der Scheitel der Parabel und macht man $OG = 2p$, errichtet darauf in G die Senkrechte, nimmt auf ihr einen Punkt H beliebig an, zieht OH und errichtet auf GH in H, auf HO in O Lote, so ist der Schnittpunkt P derselben ein Punkt der Parabel.

Beweis: Es ist einerseits $OP^2 = x^2 + y^2$, andrerseits $= PH^2 - OH^2 = (x + 2p)^2 - y^2 - 4p^2 = x^2 + 4px - y^2$; daraus folgt $y^2 = 2px$, d. h. der Punkt P liegt so, dass er der Gleichung der Parabel genügt, ist also ein Punkt der letzteren.

5; Alle diese Konstruktionen lassen die Parabel punktweise entstehen; als zusammenhängenden Linienzug erhält man sie unter Benutzung des sogenannten Parabolographen, dessen Einrichtung leicht verständlich ist und dessen Beschreibung hier daher übergangen werden möge.

§ 24. Aufgaben zu § 22 und § 23.

1; Für die Punkte einer Parabel ist $y^2 = 2px$, für welche Punkte ist $y^2 \gtrless 2px$?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2; Wie weit sind Scheitel und Leitlinie, bezw. Scheitel und Brennpunkt der Parabel $y^2 = 9x$ von einander entfernt?

3; Die Coordinaten des Scheitels einer Parabel vom Parameter $2p$ sind a und b, wie lautet die Gleichung der Parabel? $(y - a)^2 = 2p\,(x - b)$. Beispiel: $a = 7$, $b = 4$, $p = 5$.

4; Die Parabeln $y^2 = \frac{1}{9}\,x$, $y^2 = \frac{1}{4}x$, $y^2 = x$, $y^2 = 4x$, $y^2 = 9x$ zu zeichnen!

5; Von einer Parabel kennt man die Achse, den Scheitel und einen Punkt (x_1, y_1). Wie heisst ihre Gleichung? $y^2 = \frac{y_1^2}{x_1}\,x$. Beispiel: $x_1 = 6\frac{1}{4}$, $y_1 = 5$.

6; Wie lautet die Gleichung des Brennstrahls der Parabel $y^2 = 2px$, der durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgeht? $y = \frac{y_1}{x_1 - \frac{1}{2}p}\,(x - \frac{1}{2}p)$. Beispiel: $p = 2$, $x_1 = 9$, $y_1 = 6$.

§ 25. Parabel und Gerade.

Gegeben ist eine Parabel $y^2 = 2px$ und eine Gerade $y = mx + n$, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen Parabel und Gerade Punkte gemeinsam haben.

Da die Coordinaten der Schnittpunkte beiden Gleichungen genügen müssen, so sind sie die gemeinsamen Wurzeln derselben. Durch Auflösung der Gleichungen erhalten wir:

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m}, \quad x = \frac{p - nm \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m^2},$$

wobei die oberen, bezw. unteren Wurzelzeichen einander entsprechen.

Aus dem Wurzelausdruck ergiebt sich also, dass die Gerade mit der Parabel zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam hat, jenachdem $\frac{p}{2} \gtreqless mn$ ist. Ist (Fig. XXVIII) G die Gerade, welche die Y-Achse in N trifft und errichten wir auf ihr in N das Lot NK bis zur X-Achse, so ist $OK = tga\,ON = mn$, andrerseits ist $OF = \frac{p}{2}$, und somitergiebt sich der Satz:

Eine Gerade schneidet eine Parabel in zwei Punkten, berührt sie, trifft sie nicht, jenachdem das auf ihr im Schnittpunkt mit der Y-Achse errichtete Lot die X-Achse zwischen Scheitel und Brennpunkt, im Brennpunkt oder über den Brennpunkt hinaus trifft oder auch jenachdem das vom Brennpunkt einer Parabel auf eine Gerade gefällte Lot diese auf der Parabelseite der Y-Achse, auf dieser oder auf der der Parabel abgewendeten Seite derselben trifft, schneidet die Gerade die Parabel in 2 Punkten, berührt sie oder trifft sie nicht.

Ist in der Gleichung der Geraden $m = 0$, sie also der X-Achse parallel, so erhalten wir scheinbar nur einen einzigen Schnittpunkt mit den Coordinaten $y_1 = n$, $x_1 = \frac{n^2}{2p}$. Bringen wir aber die Gleichung $y = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2pnm}}{m}$ auf die Form $y = \frac{2np}{p \mp \sqrt{p^2 - 2pnm}}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so erkennen wir für $m = 0$ einen im Endlichen und einen im Unendlichen liegenden Schnittpunkt zwischen Parabel und Geraden.

Hat die Gerade 2 reelle Schnittpunkte mit der Parabel gemeinsam mit den Coordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), so sind die Coordinaten des Mittelpunktes der Sehne bezw. $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p - mn}{m^2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{m}$. Der Wert von y ist unabhängig von n, d. h. offenbar, alle parallelen Sehnen einer Parabel haben dieselbe Mittelpunktsordinate und wir erhalten somit den Satz:

Die Mittelpunkte paralleler Sehnen einer Parabel liegen auf einer zur X-Achse parallelen Geraden.

Jede solche der X-Achse parallele Gerade heisst ein Durchmesser der Parabel.

Jede zur Y-Achse parallele Gerade $x = a$ schneidet die Parabel in den beiden symmetrisch zur X-Achse gelegenen Punkten $x = a$, $y = \pm \sqrt{2pa}$; ist $x = 0$, so fallen beide Punkte mit dem Anfangspunkt zusammen, d. h., die Y-Achse ist Tangente der Parabel im Scheitel. Scheiteltangente.

§ 26. Tangente und Normale der Parabel.

1; Aus der im vorigen § dafür, dass die Gerade $y = mx + n$ Tangente der Parabel $y^2 = 2px$ sei, hergeleiteten Bedingung $mn = \frac{p}{2}$ ergiebt sich $n = \frac{p}{2m}$, die Gerade $y = mx + \frac{p}{2m}$ ist also eine Tangente der Parabel. Soll sie nun die Parabel in dem bestimmten Punkte (x_1, y_1) berühren, so muss auch $y_1 = mx_1 + \frac{p}{2m}$ sein; ferner ist $y_1^2 = 2px_1$, und aus diesen beiden Gleichungen lässt sich der für die bestimmte Tangente geltende Wert der bisher noch unbestimmten Grösse m finden. Es ist $2my_1 = 2m^2x_1 + p$, $2mpy_1 = 2m^2px_1 + p^2 = m^2y_1^2 + p^2$, also $m^2y_1^2 - 2mpy_1 + p^2 = 0$, woraus sich $m = \frac{p}{y_1}$ ergiebt. Setzen wir diesen für m gefundenen Wert in die vorher für die Tangente aufgestellte Gleichung ein, so erhalten wir:

$$y = \frac{p}{y_1} x + \frac{p}{2\frac{p}{y_1}} = \frac{p}{y_1} x + \frac{y_1}{2} \text{ oder } yy_1 = px + \frac{y_1^2}{2} = px + px_1$$

Es ist demnach:

$$yy_1 = p\ (x + x_1)$$

die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $yy = p\ (x + x)$.

Wir erhalten somit aus der Gleichung der Parabel $yy = p\ (x + x)$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1), wenn wir in der Parabelgleichung je eine der laufenden Coordinaten x, y durch die des Berührungspunktes ersetzen. (Vgl. § 19).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus der Gleichung der Tangente: $y = \frac{p}{y_1} x + \frac{y_1}{2}$ ergiebt sich unmittelbar als Gleichung der Normalen: $y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1)$ oder $p(y - y_1) = y_1(x_1 - x)$.

2; Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) der Parabel $y^2 = 2px$ lässt sich aber auch ähnlich wie beim Kreise in folgender Weise ableiten. Die Gleichung der durch 2 Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) der Parabel gehenden Sekante lautet: $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}$; lassen wir nun die beiden Punkte einander unendlich nahe rücken, die Sekante zur Tangente werden, so folgt als Gleichung derselben $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{0}{0}$. Den Wert $\frac{0}{0}$ bestimmen wir wieder analog, wie beim Kreise. Da die beiden Punkte der Parabel angehören, so gelten die beiden Gleichungen $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$, es ist also $y_1^2 - y_2^2 = 2p(x_1 - x_2)$ oder $\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \frac{y_1 + y_2}{2p}$, woraus beim Zusammenfallen der Punkte $\frac{0}{0} = \frac{y_1}{p}$ folgt; die Gleichung der Tangente lautet also $\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{y_1}{p}$ oder $yy_1 - y_1^2 = p(x - x_1)$ oder endlich (wegen $y_1^2 = 2px_1$): $yy_1 = p(x + x_1)$.

§ 27.

Die Coordinaten (x_1, y_1) des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an die Parabel $y^2 = 2px$ gelegten Tangente zu bestimmen.

Wie beim Kreise (§ 20) erhalten wir hier die beiden Gleichungen $\eta y_1 = p(\xi + x_1)$ und $y_1^2 = 2px_1$, aus welchen sich für die Unbekannten y_1 und x_1 die Werte

$$y_1 = \eta \pm \sqrt{\eta^2 - 2p\xi}, \quad x_1 = \frac{\eta^2 - p\xi \pm \eta\sqrt{\eta^2 - 2p\xi}}{p}$$

ergeben, wobei einander die oberen, bezw. unteren Wurzelvorzeichen entsprechen.

Daraus geht hervor, dass sich von jedem Punkt an die Parabel zwei, eine, keine Tangente legen lassen, jenachdem $\eta^2 \gtreqless 2p\xi$ ist, d. h., jenachdem der Punkt ausserhalb, auf, innerhalb der Parabel liegt.

§ 28. Aufgaben zu § 26 und § 27.

1; Welche Coordinaten haben die Schnittpunkte der Parabel $y^2 = 16x$ und der Geraden $y = 3x + 1$, $y = x + 4$, $y = 2x + 5$? Antwort: bezw. $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{9}$, $y_2 = 1\frac{1}{3}$, $x_1 = x_2 = 4$, $y_1 = y_2 = 8$, $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-6}$, $y = 4 \pm 2\sqrt{-6}$.

2; Durch den Punkt (x_1, y_1) wird eine Sehne der Parabel $y^2 = 2px$ halbiert, wie heisst deren Gleichung? Antwort: In der allgemeinen Gleichung einer durch den Punkt (x_1, y_1) hindurchgehenden Geraden $y - y_1 = m(x - x_1)$ ist in diesem Falle $m = \frac{p}{y_1}$ (wegen $y_1 = \frac{p}{m}$) und demnach lautet die Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Sehne $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1)$. Beispiel: $y^2 = \frac{1}{4}x$, $x_1 = 16$, $y_1 = 1$, giebt: $y - 1 = \frac{1}{8}(x - 16)$, $y = \frac{1}{8}x - 1$.

3; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche an die Parabeln: $y^2 = 8x$, $y^2 = \frac{1}{8}x$, $y^2 = 12x$ bezw. in den Punkten $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $x_1 = 8$, $y_1 = -1$, $x_1 = 3$, $y_1 < 0$ gelegt werden können?

Wie lauten die Gleichungen der zugehörigen Normalen?

4; Die Längen der Subtangente TR, der Subnormalen NR, der Tangente TP und der Normalen NP zu berechnen.

Für den Punkt T (Fig. XXIX) ist in der Gleichung der Tangente $y = 0$, also $p(x + x_1) = 0$, demnach $x = -x_1$, die Länge der Subtangente ist also $2x_1$ und es liegt der Schnittpunkt der Tangente einer Parabel mit der Achse ebenso weit links von dem Coordinatenanfangspunkt, als der Fusspunkt der Ordinate rechts davon liegt.

Für N ist in der Gleichung der Normalen $y = 0$, also $-py_1 = y_1(x_1 - x)$ demnach $x = x_1 + p$; da nun $OR = x_1$ ist, so ist $RN = p$. Die Subnormale ist konstant und zwar gleich dem Halbparameter. Ferner ist die Tangente $TP = \sqrt{4x_1^2 + y_1^2}$, die Normale $NP = \sqrt{y_1^2 + p^2}$.

§ 29.

Da (Fig. XXIX) $TF = x_1 + \frac{1}{2}p = AR = QP = FP = QT$ ($AT = FR$) ist, so ist $TFPQ$ ein Rhombus, demnach halbiert TP den Winkel QPF, d. h., die Tangente einer Parabel halbiert den Winkel zwischen dem zum Berührungspunkt gehörigen (verlängerten) Durchmesser und dem Brennstrahl. Ferner halbieren TP und FQ einander und stehen auf einander senkrecht, d. h., das Lot vom Brennpunkt auf eine Tangente halbiert das von der Parabelachse und dem Berührungspunkt begrenzte Stück derselben. Endlich liegt der Fusspunkt G dieses Lotes auf der Scheiteltangente, weil OG Mittelparallele des durch F, A und Q bestimmten Rechtecks ist. Die Scheiteltangente einer Parabel ist der geometrische Ort der Fusspunkte der von ihrem Brennpunkt auf die Tangenten gefällten Lote.

Aus der Lage der Normalen gegen die Tangente ergiebt sich sofort, dass sie den Winkel zwischen Brennstrahl und Durchmesser halbiert. Parallel der Achse einer Parabel einfallende Lichtstrahlen kreuzen einander nach der Zurückwertung im Brennpunkt (Name!) und umgekehrt alle vom Brennpunkt einer Parabel ausgehenden Strahlen werden durch Reflexion an ihr parallel der Achse. (Parabolische Hohlspiegel.)

§ 30.

Aus den Gleichungen $yy_1 = p(x + x_1)$, $yy_2 = p(x + x_2)$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zweier Tangenten einer Parabel ergiebt sich als Ordinate y_0 ihres Schnittpunktes:

$$y_0 = p\,\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = p\,\frac{y_1^2 - y_2^2}{2p(y_1 - y_2)} = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Das ist aber zugleich die Ordinate des Mittelpunktes der Berührungssehne, also: Zwei Tangenten einer Parabel schneiden einander auf dem Durchmesser, der zum Mittelpunkt ihrer Berührungssehne gehört. (Fig. XXX).

Die Abscisse des Schnittpunktes ist gegeben durch $x_0 = \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{y_1 - y_2} = \frac{y_1^2 y_2 - y_1 y_2^2}{2p(y_1 - y_2)} = \frac{y_1 y_2}{2p}$. Der Halbierungspunkt der Verbindungslinie „Schnittpunkt zweier Tangenten — Mittelpunkt der Berührungssehne" hat demnach die Abscisse $\xi = \frac{\frac{y_1 y_2}{2p} + \frac{x_1 + x_2}{2}}{2} = \frac{(y_1 + y_2)^2}{8p}$; nun ist aber die entsprechende Ordinate $\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$, demnach $\eta^2 = 2\xi p$, d. h., (ξ, η) ist ein Punkt der Parabel. Die Verbindungslinie „Schnittpunkt zweier Tangenten — Mittelpunkt der Berührungssehne" wird durch die Parabel halbiert.

Die Tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ schneidet die Leitlinie im Punkte S, für welchen $\xi = -\frac{p}{2}$, $\eta = \frac{p}{y_1}\left(-\frac{p}{2} + x_1\right) = \frac{y_1^2 - p^2}{2y_1}$ ist. Legen wir durch diesen Punkt (Fig. XXIX) an die Parabel die zweite Tangente, so ist deren Berührungspunkt U durch die Gleichungen in § 27 bestimmt. Setzen wir in diese die Werte für ξ und η ein, so erhalten wir: $y_2 = -\frac{p^2}{y_1}$, $x_2 = \frac{y_2^2}{2p} = \frac{p^3}{2y_1^2} = \frac{p^2}{4x_1}$. (Das andere Wurzelpaar ist (x_1, y_1)).

Die Gleichung der Tangente in diesem Punkte (x_2, y_2) lautet also: $y\left(-\frac{p^2}{y_1}\right) = p\left(x + \frac{p^2}{4x_1}\right)$. Die Richtungsbestimmende ist $-\frac{y_1}{p}$, während sie für die erste Tangente $\frac{p}{y_1}$ war; es ist also das Produkt der beiden Richtungsbestimmenden $= -1$, die Tangenten stehen auf einander senkrecht.

Die Leitlinie einer Parabel ist der geometrische Ort der Schnittpunkte je zweier auf einander senkrechter Tangenten der Parabel.

§ 31. Tangentenkonstruktionen.

Unter Benutzung der gefundenen Eigenschaften der Parabel lassen sich nun leicht folgende Aufgaben lösen:

a; in einem Punkte P einer Parabel an sie eine Tangente zu ziehen.

Lösungen: (Fig. XXIX) 1; $FT = FP$, also T und damit PT bekannt;

2; PT ist Halbierungslinie des bekannten Winkels FPQ;

3; $PT \perp PN$, wo N durch $RN = p$ bestimmt ist;

4; $PT \perp FQ$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b; von einem Punkt P' an die Parabel eine Tangente zu legen.

1; Da $\sphericalangle FGP' = R$, so ist G durch die beiden Örter „Scheiteltangente und Halbkreis über FP'“ gegeben.

2; $P'Q = P'F$, also Q und dadurch P bezw. G bekannt. Da der Halbkreis über FP' die Scheiteltangente, bezw. der Kreis mit FP' um P' die Leitlinie im allgemeinen in 2 Punkten schneidet, so lassen sich durch einen Punkt an eine Parabel im allgemeinen auch 2 Tangenten legen. Wann sich nur eine, wann keine Tangente ziehen lässt, ist leicht zu übersehen.

§ 32. Quadratur eines Parabelstückes.

Es seien P und P_1 (Fig. XXX) Die Berührungspunkte zweier Tangenten, T ihr Schnittpunkt, M der Mittelpunkt der Berührungssehne, Q der Schnittpunkt des zugehörigen Durchmessers und der Parabel. Jede zu PP_1 parallele Sehne wird durch MT halbiert, also auch diejenige, die nur noch 2 zusammenfallende Punkte mit der Parabel gemeinsam hat, das ist aber die Tangente der Parabel in Q, die also PP_1 parallel ist. Da nach dem vorigen $TQ = MQ$, so ist die Tangente $RS = \frac{1}{2} PP_1$, demnach der Inhalt des dem Parabelsegment eingeschriebenen Dreiecks PQP_1 doppelt so gross als der des angeschriebenen RTS. Wendet man dies Verfahren wiederholt auf die Segmente PQ und P_1Q an, so ist jedesmal das eingeschriebene Dreieck doppelt so gross, als das entsprechende angeschriebene. Setzt man dies Verfahren ins Unendliche fort, so bilden alle eingeschriebenen Dreiecke zusammen das Parabelsegment, alle angeschriebenen das von den beiden Tangenten PT und P_1T und dem Parabelbogen begrenzte Stück. Das Parabelsegment ist also doppelt so gross als dieses Stück, demnach $\frac{2}{3}$ vom Dreieck PTP_1.

Ein von einer Sehne abgeschnittenes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ der Fläche des von der Sehne und den Tangenten der Parabel in den Endpunkten der Sehne begrenzten Dreiecks.

Ist die Sehne parallel der Scheiteltangente, so schneiden die Tangenten einander in einem Punkte der Achse, dessen Abscisse absolut genommen gleich der des Berührungspunktes ist. Sind demnach die Coordinaten der Berührungspunkte x und $\pm y$, so ist der Inhalt des Dreiecks $= 2xy$, der des Parabelsegments $= \frac{4}{3} xy$. Ein von einer zur Scheiteltangente parallelen Sehne abgeschnittenes Parabelsegment ist $\frac{2}{3}$ des Rechtecks aus dieser Sehne und dem zugehörigen Achsenstück.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf