III. Der Kreis.

§ 17. Definition und Gleichung des Kreises.

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte (einer Ebene), welche von einem gegebenen Punkt (in ihr), dem Mittelpunkt, gleiche Entfernung haben.

1. Die Gleichung eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt mit dem Coordinatenanfang zusammenfällt.

Ist der Radius des Kreises $= r$, so ergiebt sich (Fig. XXI) für die Coordinaten des Punktes P des Umfanges sofort die Gleichung:

$$1, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Da diese Gleichung auch für jeden beliebigen anderen Punkt des Umfanges gilt, (für Q ist z. B. $x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2 = r^2$), so ist sie die Gleichung des Kreises. Mittelpunktsgleichung des Kreises.

Aus der Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ ergeben sich leicht die beiden neuen:

$$x = \pm \sqrt{r^2 - y^2}, \quad y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

d. h., es giebt nur so lange zusammengehörige reelle Werte von x und y, als diese Grössen zwischen $+ r$ und $- r$ liegen. Die grössten (absoluten) Werte, welche x und y annehmen können, sind bezw. $\pm r$, d. h., der Kreis liegt ganz innerhalb des Quadrates, das durch die Parallelen im Abstande $\pm r$ zu den Achsen begrenzt wird. Da ferner zu jedem Werte von x zwei gleiche, aber entgegengesetzte von y gehören und umgekehrt, so ist der Kreis in Bezug auf jeden der beiden Durchmesser symmetrisch, da wir jedes zu einander senkrechte Durchmesserpaar als Achsenkreuz wählen können. Da endlich mit stetig sich änderndem Werte der einen Unbekannten auch die andere Unbekannte sich stetig ändert, so ist der Kreis eine geschlossene Curve.

Aus $x^2 + y^2 = r^2$ lassen sich noch leicht die Proportionen $r + x : y = y : r - x$ und $r + y : x = x : r - y$ herleiten, die einen bekannten Satz der Planimetrie darstellen.

2. Die Gleichung eines Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt die Coordinaten a und b hat.

Ist (Fig. XXII) $OS = a$, $MS = b$, so ergiebt sich für die Coordinaten des Punktes P des Kreises offenbar die Gleichung:

$$2, \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Da auch für den beliebigen Punkt Q des Kreises $(a - x)^2 + (b - y)^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ist, so ist diese Gleichung in diesem Falle die Gleichung des Kreises. Allgemeine Gleichung des Kreises.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine entsprechende Untersuchung dieser Kreisgleichung wie unter 1, ergiebt ein entsprechendes Ergebnis.

Die Gleichungen 1, und 2, werden allemal dann und nur dann erfüllt, wenn der Punkt (x, y) auf dem Kreise liegt. Für jeden Punkt innerhalb des Kreises ist $x^2 + y^2$, bezw. $(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$, für jeden Punkt ausserhalb $> r^2$.

Schreiben wir die Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ in der Form $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$, so ergiebt sich, da $\sqrt{a^2 + b^2}$ die Entfernung e des Mittelpunktes des Kreises vom Coordinatenanfang bedeutet, dass letzterer ausserhalb des Kreises, auf dem Kreise, innerhalb des Kreises liegt, jenachdem $a^2 + b^2 \lesseqgtr r^2$ ist.

Aus der allgemeinen Kreisgleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ergiebt sich nun noch eine Reihe besonderer Formen je nach der Lage des Kreismittelpunktes. Liegt dieser auf der X-Achse, so erhält man wegen $b = 0$ die Gleichung: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$; berührt der Kreis ausserdem die Y-Achse, ist also $a = r$, so folgt $x^2 + y^2 - 2rx = 0$. Entsprechende Bedeutungen von $x^2 + (y - b)^2 = r^2$ und $x^2 + y^2 - 2ry = 0$! Berührt der Kreis beide Achsen, so ist $x^2 + y^2 - 2rx - 2ry + r^2 = 0$; ist $a^2 + b^2 = r^2$, d. h. geht der Kreis mit dem Mittelpunkt (a, b) durch den Coordinatenanfang, so ist $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$; ist endlich $a = b = 0$, so ergiebt sich wieder die Mittelpunktsgleichung.

Setzen wir zur Abkürzung $-2a = c$, $-2b = d$, $a^2 + b^2 - r^2 = e$, so nimmt die allgemeine Gleichung die Form an $x^2 + y^2 + cx + dy + e = 0$; auf diese Form kann aber auch jede Gleichung mit gleichen (von Null verschiedenen) Coeffizienten von x^2 und y^2 und ohne Glied mit xy gebracht werden, und wir gewinnen hieraus den

Lehrsatz: Die allgemeine Gleichung eines Kreises ist eine in Bezug auf x und y quadratische Gleichung, in welcher x^2 und y^2 denselben Coeffizienten haben und das Glied mit xy fehlt, sie lautet somit:

$$mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0.$$

Umkehrung: Jede Gleichung von dieser Form kann als die Gleichung eines Kreises angesehen werden; denn dividieren wir die vorige Gleichung durch m, so erhalten wir:

$$x^2 + y^2 + \frac{n}{m}x + \frac{p}{m}x + \frac{q}{m} = 0 \text{ oder auch}$$

$$\left(x + \frac{n}{2m}\right)^2 + \left(y + \frac{p}{2m}\right)^2 = \frac{n^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{q}{m}.$$

Setzen wir endlich $\frac{n}{2m} = -a$, $\frac{p}{2m} = -b$, $\frac{n^2}{4m^2} + \frac{p^2}{4m^2} - \frac{q}{m} = r^2$, so erhalten wir wieder:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

also die Gleichung eines Kreises. Es ist demnach $mx^2 + my^2 + nx + py + q = 0$ die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $\left(-\frac{n}{2m}, -\frac{p}{2m}\right)$ und dem Radius $\frac{\sqrt{n^2 + p^2 - 4mq}}{2m}$. Der Kreis ist reell, reduziert sich auf einen Punkt, ist imaginär, je nachdem $n^2 + p^2 \gtreqless 4\,mq$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben: 1; Wie heisst die Gleichung des Kreises mit dem Mittelpunkt (3, 4) und dem Radius 5? Wo liegt der Coordinatenanfang in Bezug auf diesen Kreis?

2; Ein Kreis geht durch den Coordinatenanfang und hat den Mittelpunkt (8, — 15), wie heisst seine Gleichung?

3; Mittelpunktscoordinaten und Radien der Kreise $9x + 9y^2 - 18x - 54\,y + 9 = 0$ und $7x^2 + 7y^2 + 49x + 84y - 5\frac{1}{4} = 0$ zu bestimmen.

4; Die Schnittpunkte des Kreises $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 40$ mit den Achsen zu bestimmen. Welche Beziehung besteht zwischen dem Produkte der X-Abschnitte und dem der Y-Abschnitte?

§ 18. Der Kreis und die Gerade.

Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = r^2$, die einer Geraden $y = mx + n$; es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen der Kreis von der Geraden geschnitten wird. Sollen beide Örter gemeinsame Punkte haben, so müssen deren Coordinaten beiden Gleichungen genügen, wir finden sie also, wenn wir das System der beiden Gleichungen nach den Unbekannten auflösen. Setzen wir die aus beiden Gleichungen für y^2 sich ergebenden Werte einander gleich, so erhalten wir $r^2 - x^2 = (mx + n)^2$, woraus sich ergiebt:

$$x = \frac{-mn \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - n^2}}{1 + m^2}.$$

Setzen wir diesen für x gefundenen Wert in die zwischen x und y bestehende Gleichung ersten Grades ein, so folgt:

$$y = \frac{n \pm \sqrt{r^2(1 + m^2) - n^2}}{1 + m^2}.$$

Die beiden Wertepaare (x_1, y_1), (x_2, y_2) sind nur so lange reell, als $r^2(1 + m^2) - n^2 \geqq = 0$ ist, d. h. nur in diesem Falle haben Kreis und Gerade wirklich gemeinsame Punkte. Jenachdem also $r^2(1 + m^2) \gtreqless n^2$ ist, haben Kreis und Gerade zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam.

Setzen wir nun noch für m seinen Wert $tg\alpha$, so geht die vorige Bedingung über in $r^2(1 + tg^2\alpha) \gtreqless n^2$, woraus $r^2 \frac{1}{cos^2\alpha} \gtreqless n^2$, $r \gtreqless n cos\alpha$ folgt.

Aus Fig. XXIII ergiebt sich nun, dass das vom Coordinatenanfang auf die Gerade $y = mx + n$ gefällte Lot $OP = n cos\alpha$ ist. Es haben also Kreis und Gerade zwei, einen, keinen Punkt gemeinsam, jenachdem der Radius grösser, ebenso gross oder kleiner ist als das vom Coordinatenanfang, d. h. in unserm Falle vom Mittelpunkt, auf die Gerade gefällte Lot.

Hat die Gerade zwei reelle Schnittpunkte mit dem Kreise gemeinsam, so sind die Coordinaten x, y des Mittelpunktes der zugehörigen Sehne bestimmt durch:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{mn}{1+m^2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{n}{1+m^2}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt $y = -\frac{1}{m}x$; diese Gleichung ist von n ganz unabhängig, gilt also für die Mittelpunkte sämtlicher paralleler Sehnen, deren Richtungsbestimmende $= m$ ist, d. h. diese liegen sämtlich auf der durch $y = -\frac{1}{m}x$ bestimmten Geraden. Nun ist aber das Produkt der beiden Richtungsbestimmenden m und $-\frac{1}{m} = -1$, es steht also diese Gerade $y = -\frac{1}{m}x$ auf den Sehnen senkrecht. Da sie aber auch durch den Coordinatenanfang hindurchgeht, so gewinnen wir den Satz: Die Mittelpunkte paralleler Sehnen liegen auf dem von Kreismittelpunkte auf sie gefällten Lote.

Aufgaben: Wie heissen die Schnittpunkte: 1; des Kreises $x^2 + y^2 = 10$ und der Geraden $y = -x + 12{,}4$? (Antwort: $x_1 = 9{,}6$ $y_1 = 2{,}8$, $x_2 = 2{,}8$, $y_2 = 9{,}6$).

2; des Kreises $x^2 + y^2 = 13^2$ und der Geraden $y = 3x - 3$? ($x_1 = 5$, $y_1 = 12$, $x_2 = -3{,}2$, $y_2 = -12{,}6$).

3; des Kreises $x^2 + y^2 = 5^2$ und der Geraden $y = \sqrt{3}x + 10$? ($x_1 = x_2 = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$, $y_1 = y_2 = \frac{5}{2}$).

4; des Kreises $x^2 + y^2 = 50$, und der Geraden $y = 7x - 50$? ($x_1 = x_2 = 7$, $y_1 = y_2 = -1$).

§ 19. Die Tangente in einem Punkte des Kreises.

1. Im vorigen § ergab sich, dass die Gerade $y = mx + n$ Tangente des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ ist für $n\cos\alpha = r$ oder $n = \frac{r}{\cos\alpha}$; soll sie den Kreis in einem bestimmten Punkte (x_1, y_1) berühren, so muss also auch $y_1 = mx_1 + \frac{r}{\cos\alpha}$ sein. Nun ist (Fig. XXIV) $\cos\alpha = \frac{y_1}{r}$, also $\frac{r}{\cos\alpha} = \frac{r^2}{y_1}$, demnach $y_1 = mx_1 + \frac{r^2}{y_1}$ oder $y_1^2 = mx_1y_1 + r^2$; da nun $x_1^2 + y_1^2 = r^2$ ist, so ist $mx_1y_1 = -x_1^2$ und somit endlich $m = -\frac{x_1}{y_1}$. Setzen wir diese für m und n gefundenen Werte in die Gleichung $y = mx + n$ ein, so erhalten wir als Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) des Kreises: $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{r^2}{y_1}$ oder

$$xx_1 + yy_1 = r^2.$$

Wir erhalten aus der Gleichung des Kreises $xx + yy = r^2$ die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1), wenn wir in der Kreisgleichung je eine der veränderlichen (laufenden) Coordinaten x, y durch die des Berührungspunktes ersetzen.

2. Die Gleichung des Radius, der durch den Punkt (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ geht, hat die Form $\frac{y - y_1}{y_1} = \frac{x - x_1}{x_1}$ (wegen $x_2 = y_2 = 0$);

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daraus ergiebt sich leicht $\frac{y}{y_1} = \frac{x}{x_1}$ oder $y = \frac{y_1}{x_1} x$. Demnach lautet die Gleichung der Tangente in diesem Punkt, da sie auf dem Radius (der Normalen) senkrecht steht: $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ oder $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$ oder $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$.

3. Die Gleichung der Tangente im Punkte (x_1, y_1) des Kreises $x^2 + y^2 = r^2$ lässt sich aber auch auf folgende Weise bestimmen. Sind (x_1, y_1), (x_2, y_2) die Coordinaten zweier Punkte des Kreises, so lautet die Gleichung der durch sie bestimmten Sekante $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$; lassen wir nun die beiden Punkte (etwa durch Drehung der Sekante um P_1 (Fig. XXIV)) einander bis zum Zusammenfallen nähern, so geht die Sekante über in die Tangente, es lautet also deren Gleichung, da $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ geworden ist: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{0}{0}$. Die rechte Seite $\frac{0}{0}$ dieser Gleichung ist scheinbar unbestimmt, es muss daher versucht werden, ihren wahren Wert zu finden. Das gelingt auf folgende Weise. Da (x_1, y_1), (x_2, y_2) Punkte des Kreises sind, so gelten die beiden Gleichungen $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = r^2$; hieraus ergeben sich der Reihe nach die Beziehungen $x_1^2 - x_2^2 = y_2^2 - y_1^2$, $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = -(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)$, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$. Die letzte Gleichung gilt für jede Lage von (x_1, y_1), (x_2, y_2), also auch dann noch, wenn diese beiden Punkte zusammenfallen, also $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ist; sie geht dann über in $\frac{0}{0} = -\frac{2x_1}{2y_1} = -\frac{x_1}{y_1}$ und dieser letzte Wert ist demnach der wahre Wert des scheinbar unbestimmten Bruches $\frac{0}{0}$. Setzen wir ihn in die oben gefundene Gleichung der Tangente ein, so nimmt sie die Form an: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = -\frac{x_1}{y_1}$, woraus wieder $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = r^2$ folgt.

Die Richtungsbestimmende der Tangente im Punkte (x_1, y_1) ist also $-\frac{x_1}{y_1}$, die Gleichung der in diesem Punkte zur Tangente Senkrechten (der Normalen) lautet demnach: $y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$, woraus sich leicht $y = \frac{y_1}{x_1} x$ ergiebt. Die Normale geht also durch den Coordinatenanfang. (Vgl. No. 2.).

§ 20.

Die Coordinaten des Berührungspunktes der durch den Punkt (ξ, η) an den Kreis $x^2 + y^2 = r^2$ gelegten Tangente zu bestimmen.

Bezeichnen wir den Berührungspunkt mit (x_1, y_1) so ist die allgemeine Form der Gleichung der durch ihn gehenden Tangente $xx_1 + yy_1 = r^2$, es muss also, da (ξ, η) ein Punkt dieser Tangente ist, auch $\xi x_1 + \eta y_1 = r^2$ sein, während gleichzeitig $x_1^2 + y_1^2 = r$ ist. Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich die Werte von x_1 und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

y_1 berechnen. Die Durchführung der Rechnung ergiebt:

$$x_1 = \frac{r^2\xi \pm r\eta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y_1 = \frac{r^2\eta \mp r\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - r^2}}{\xi^2 + \eta^2},$$

wobei die oberen, bezw. unteren Vorzeichen einander entsprechen.

Da sich für x_1 und y_1 je 2 Werte ergeben, so ersehen wir hieraus wieder die bekannte Thatsache, dass sich von jedem Punkt an einen Kreis 2 Tangenten legen lassen. Ferner lehren uns die Formeln, dass die beiden Tangenten reell sind, zusammenfallen, imaginär sind, jenachdem $\xi^2 + \eta^2 \gtreqless r^2$ ist, d. h. jenachdem (ξ, η) ausserhalb des Kreises auf ihm, in ihm liegt.

§ 21.

Aufgaben: 1; Wie lauten die Gleichungen der Tangenten, welche bezw. in den Punkten $x_1 = 4$, $y_1 = 15$, $x_1 = 9$, $y_1 > 0$, $x_1 = -7$, $y_1 < 0$ die Kreise $x^2 + y^2 = 241$, $x^2 + y^2 = 130$, $x^2 + y^2 = 625$ berühren?

2; Wie heissen die Berührungspunkte der durch die Punkte (7,6), (9,8), (9,7) bezw. an die Kreise $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$ gelegten Tangenten?

3; (Fig. XXIV). Die Längen der Tangente AP, der Subtangente AC, der Normalen P_1O, der Subnormalen CO und des zwischen den Achsen gelegenen Tangentenstückes AB zu bestimmen.

Aus der Fig. folgt unmittelbar $P_1O = r$, $CO = x_1$; bezeichnen wir ferner die Abscisse des Punktes A mit x_0, so ergiebt sich aus der Gleichung der Tangente: $x_0x_1 = r^2$, also $x_0 = \frac{r^2}{x_1}$; es ist demnach die Subtangente $AC = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1}$; ferner ist $AP_1^2 = x_0\frac{y_1^2}{x_1} = \frac{r^2y_1^2}{x_1^2}$, also $AP_1 = \frac{y_1}{x_1}r$; analog ist $BP_1 = \frac{x_1}{y_1}r$, demnach $AB = r\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{r^3}{x_1y_1}$.

Zahlenbeispiel hierzu: Die Gleichung eines Kreises sei $x^2 + y^2 = 100^2$, der Berührungspunkt P_1 einer Tangente habe die Coordinaten (96, 28), dann ist: $P_1O = 100$ $CO = 96$, $AC = 8\frac{1}{6}$, $AP_1 = 29\frac{1}{6}$, $BP_1 = 342\frac{6}{7}$, $AB = 372\frac{1}{42}$.

IV. Die Parabel.

§ 22. Definition und Gleichung der Parabel.

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, welche von einem festen Punkt F und einer festen Geraden L gleiche Entfernung haben oder der Ort der Mittelpunkte aller Kreise, die durch den gegebenen Punkt F gehen und die gegebene Gerade L berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf