Sehnenviereck und elliptische Funktionen.

Von Professor P. Kokott.

Die Beziehungen des ebenen Sehnenvierecks zum Kugeldreieck sind zuerst von Herrn E. Study erkannt und kürzlich von Herrn E. Eckhardt in einer bei Teubner erschienenen, äußerst wertvollen Schrift weiter durchforscht worden. Da nun das sphärische Dreieck längst als der Träger wichtiger Eigenschaften der elliptischen Funktionen bekannt ist, so liegt es nahe, auch das Sehnenviereck in den Dienst dieses wichtigen Zweiges der Analysis zu stellen. Die vorliegende Arbeit soll diesen Zweck erfüllen; es wird sich herausstellen, daß die Additionstheoreme der elliptischen Funktionen durch einfache Relationen zwischen Linien und Winkeln wiedergegeben werden, so daß die Beweise nicht schwerer sind als bei den gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen. Zum Schluß wird noch eine scheinbar elementare Aufgabe gestellt, die durch die Dreiteilung der Argumente leicht gelöst werden kann.

§ 1.

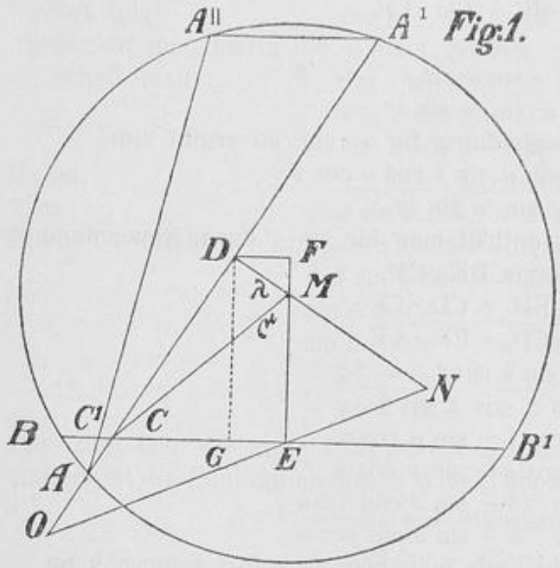


Fig. 1.

Wenn sich im Kreise M, dessen Radius gleich Eins sein möge, zwei Sehnen AA^1 und BB^1 schneiden, so entsteht eine dreieckähnliche Figur ABC mit den Winkeln α, β, γ, deren Summe offenbar größer als zwei Rechte ist. Man wähle nun eine Größe $\varkappa$ so, daß

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\gamma} = -\cos\gamma$$

wird. Es ergibt sich dann

$$\varkappa^2 = \frac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

oder, da $MD = \cos\alpha$ und $ME = \cos\beta$ ist,

$$\varkappa^2 = \frac{\sin^2\gamma - MD^2 - ME^2 - 2\,MD\cdot ME\cdot\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma} = \frac{\sin^2\gamma - ED^2}{\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß sich um CEMD ein Kreis mit dem Durchmesser CM zeichnen läßt, so erkennt man leicht, daß $ED = CM\sin\gamma$ sein muß. Man erhält dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $\varkappa^2$ den Wert $\frac{1 - CM^2}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$; offenbar ist der Zähler die Potenz P des Punctes C inbezug auf den Kreis M, so daß als einfachster Ausdruck entsteht

$$\varkappa^2 = \frac{P}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}.$$

Man führe nun eine elliptische Funktion $\varphi = \text{am}(u)$ ein, definiert durch die Gleichung

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$

dann besteht zwischen den Argumenten (a), (b) und (c) der Winkel α, β und γ die Beziehung $(a) + (b) + (c) = 2\,K$, wo K das vollständige Integral zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bedeutet. Für $EMD = \sigma$ ist dann $\sigma = \text{am}(a + b)$. Die Linie CM teilt σ in die Teile λ und μ, deren Eigenschaften die Additionstheoreme vermitteln werden. Vorher ist es noch nötig, die Linien CD und CE auszudrücken. Da $AD = A^1D = \sin\alpha$ ist, so kann die Potenz P auch durch $(\sin\alpha + CD)(\sin\alpha - CD)$ dargestellt werden. Man erhält also $\varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta = \sin^2\alpha - CD^2$ oder $CD = \sin\alpha \triangle\beta$, ebenso $CE = \sin\beta \triangle\alpha$. Für CM ergibt sich in gleicher Weise $CM = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$. Bildet man jetzt $\sin\sigma = \sin\lambda \cos\mu + \sin\mu \cos\lambda$, so erhält man

$$\sin\sigma = \frac{CD \cdot ME + CE \cdot MD}{CM^2}$$

oder

$$\sin\sigma = \frac{\sin\alpha \cos\beta \triangle\beta + \sin\beta \cos\alpha \triangle\alpha}{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta};$$

ebenso

$$\cos\sigma = \frac{MD \cdot ME - CD \cdot CE}{CM^2}$$

oder

$$\cos\sigma = \frac{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \triangle\alpha \triangle\beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta};$$

setzt man den letzten Wert in die Definitionsgleichung für $\varkappa^2$ ein, so ergibt sich

$$\triangle\sigma = \frac{\triangle\alpha \triangle\beta - \varkappa^2 \sin\alpha \sin\beta \cos\alpha \cos\beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}.$$

Andere weniger gebräuchliche Formeln enthält man für $\sin\sigma$ durch Anwendung des Ptolemäischen Satzes auf das Diagonalverhältnis DE : CM,

$$\sin\sigma = \frac{DM \cdot EM + CD \cdot CE}{DM \cdot CD + EM \cdot CE}$$

$$= \frac{\cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \triangle\alpha \triangle\beta}{\cos\alpha \sin\alpha \triangle\beta + \cos\beta \sin\beta \triangle\alpha},$$

für $\cos\sigma$ aus der Identität

$$\cos\sigma = \frac{\sin\lambda \cos\lambda - \sin\mu \cos\mu}{\sin\lambda \cos\mu - \sin\mu \cos\lambda}$$

$$\cos\sigma = \frac{\sin\alpha \cos\alpha \triangle\beta - \sin\beta \cos\beta \triangle\alpha}{\sin\alpha \cos\beta \triangle\beta - \sin\beta \cos\alpha \triangle\alpha}.$$

Im folgenden Paragraphen wird gezeigt, wie man hieraus sofort folgern kann

$$\triangle\sigma = \frac{\sin\alpha \triangle\alpha \cos\beta - \sin\beta \triangle\beta \cos\alpha}{\sin\alpha \cos\beta \triangle\beta - \sin\beta \cos\alpha \triangle\alpha}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2.

Es soll nunmehr das System von 16 Formeln, das Jakobi in seiner berühmten Schrift über die Rotation eines festen Körpers aufgestellt hat, soweit es irgend geht, geometrisch entwickelt werden. Zunächst mögen jedoch einige Bemerkungen Platz finden, die für die Umwandlung einer Form in die andere wichtig sind.

Wegen der Relation (a) + (b) + (c) = 2 K ist es algebraisch klar, daß in jeder irgendwie erhaltenen Formel die Winkel α, β und γ mit einander vertauscht werden können. Die Figur 1. veranschaulicht diese Symmetrie. Zieht man nämlich $A^1A^{\|}$ parallel BB^1, so entsteht ein Sektor ABC^1 mit den Winkeln γ, β und α, also mit denselben Winkeln wie früher, nur in anderer Lage. Ebenso gibt es noch auf AA^1 einen Punkt $C^{\|}$ mit analogen Eigenschaften.

Man denke sich ferner durch C zwei Sehnen gezogen, deren Entfernungen vom Mittelpunkte $\triangle\alpha$ und $\triangle\beta$ sind. Solche Sehnen gibt es stets, da $\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$, d. h. CM, kleiner als $\triangle\alpha$ und $\triangle\beta$ ist. Es entsteht dann ein Sektor mit den Winkeln α^1, β^1 und γ^1, der mit dem ersten so zusammenhängt, daß $\cos\alpha^1 = \triangle\alpha$, $\cos\beta^1 = \triangle\beta$, $\sin\alpha^1 = \varkappa \sin\alpha$, $\sin\beta^1 = \varkappa \sin\beta$, $\lambda^2 = \dfrac{P}{\sin^2\alpha^1 \sin^2\beta^1} = \dfrac{1}{\varkappa^2}$, $\triangle\alpha^1 = \cos\alpha$, $\triangle\beta^1 = \cos\beta$ ist. Für die Argumente gelten die Beziehungen $(a^1) = \varkappa(a)$, $(b^1) = \varkappa(b)$, $(c^1) = \varkappa(c)$. Da nun die geometrischen Eigenschaften aller Sektoren dieselben sind, so kann man jede auf Grund der unmittelbaren Anschauung gewonnene Formel durch die vorstehenden Substitutionen von einem Sektor auf den andern übertragen.

Die Figur zeigt nun sofort, daß ME + MF = CD $\sin\gamma$ ist.

Daraus folgt
$$\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma = \triangle\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$
Vertauscht man hierin die Winkel zyklisch mit einander und ersetzt $\cos\gamma$ durch $-\cos\sigma$, so erhält man
$$\sin\alpha \sin\beta \triangle\sigma + \cos\sigma = \cos\alpha\cos\beta$$
$$\cos\beta\cos\sigma + \triangle\alpha \sin\beta \sin\sigma = \cos\alpha$$
$$\cos\alpha\cos\sigma + \triangle\beta \sin\alpha \sin\sigma = \cos\beta.$$
Es ist
$$CG = CE - DF$$
oder
$$\triangle\beta \sin\alpha\cos\gamma = \triangle\alpha \sin\beta - \cos\alpha \sin\gamma.$$
Hieraus entsteht
$$\triangle\alpha \sin\beta\cos\sigma - \cos\beta \sin\sigma = -\sin\alpha\triangle\beta$$
$$\triangle\beta \sin\alpha\cos\sigma - \cos\alpha \sin\sigma = -\sin\beta\triangle\alpha$$
$$\sin\alpha\cos\sigma - \triangle\beta\cos\alpha \sin\sigma = -\sin\beta\triangle\sigma$$
$$\sin\beta\cos\sigma - \triangle\alpha\cos\beta \sin\sigma = -\sin\alpha\triangle\sigma$$
$$-\sin\alpha\cos\beta\triangle\sigma + \triangle\alpha \sin\sigma = \cos\alpha \sin\beta$$
$$-\sin\beta\cos\alpha\triangle\sigma + \triangle\beta \sin\sigma = \cos\beta \sin\alpha.$$
Überträgt man die erste Gruppe von Formeln auf den Sektor mit den Winkeln α^1, β^1, γ^1 und ersetzt die Funktionen dieser Winkel durch die Funktionen von α, β und γ, so ergibt sich
$$\triangle\sigma + \varkappa^2 \sin\alpha \sin\beta\cos\sigma = \triangle\alpha\triangle\beta$$
$$\triangle\beta\triangle\sigma + \varkappa^2\cos\alpha \sin\beta \sin\sigma = \triangle\alpha$$
$$\triangle\alpha\triangle\sigma + \varkappa^2\cos\beta \sin\alpha \sin\sigma = \triangle\beta.$$
Die noch fehlenden 4 Gleichungen enthalten in einem Gliede den Faktor $\varkappa'^2$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man leitet sie am einfachsten algebraisch her, indem man in der ersten Gleichung der letzten Gruppe mit $\cos\sigma$, jedoch $\triangle\sigma$ mit dem gleichwertigen Ausdruck $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\triangle\sigma$ multipliziert. Man erhält dann

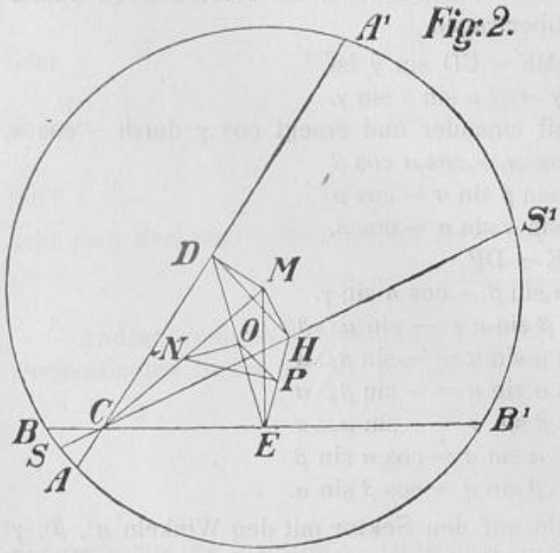
$$\cos\alpha\cos\beta\triangle\sigma - \triangle\alpha\triangle\beta\cos\sigma = \varkappa'^2\sin\alpha\sin\beta$$
$$\triangle\alpha\cos\beta\cos\sigma + \varkappa'^2\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha\triangle\beta\triangle\sigma$$
$$\triangle\beta\cos\alpha\cos\sigma + \varkappa'^2\sin\alpha\sin\sigma = \cos\beta\triangle\alpha\triangle\sigma.$$

Die einzige, noch übrig bleibende Gleichung ergibt sich durch Multiplikation von $\triangle\beta\triangle\sigma + \varkappa^2\cos\alpha\sin\beta\sin\sigma = \triangle\alpha$ mit $\triangle\alpha$, wenn man berücksichtigt, daß $\triangle\alpha\sin\beta\sin\sigma = \cos\alpha - \cos\beta\cos\sigma$ ist. Sie lautet

$$\triangle\alpha\triangle\beta\triangle\sigma - \varkappa^2\cos\alpha\cos\beta\cos\sigma = \varkappa'^2.$$

§ 3.

In den Fundamenta nova hat Jakobi 33 Formeln entwickelt, in denen Beziehungen zwischen am (a + b) und am (a − b) ausgedrückt werden. Alle diese Formeln herzuleiten, liegt kein Anlaß vor, besonders weil Greenhill in seinem Werke über elliptische Funktionen (Seite 204 ff.) auf der Basis eines sphärischen Dreiecks eine Darstellung gegeben hat, die an Einfachheit und Klarheit nichts zu wünschen übrig läßt. Die dort auftretenden Winkel F und G sind hier durch λ und μ zu ersetzen. Wichtiger ist es, eine Methode anzugeben, die gewissermaßen eine unerschöpfliche Quelle von Relationen ist. Zu diesem Zwecke muß die Figur weiter ausgebaut werden:



Man ziehe durch C die gegen den Mittelpunkt M zu AA^1 symmetrisch gelegene Sehne SS^1 und fälle von N, dem Centrum des durch die Punkte C, D, M, H und E gehenden Kreises, die Lote NO und NP auf DE und HE. Es entstehen dann die beiden Dreiecke DHE und NOP, deren Seiten und Winkel genauer untersucht werden sollen. Bezeichnet man NM mit r, so ist $2r = \sqrt{1 - \varkappa^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}$, $DE = 2r\sin\sigma$, $DH = 2r\sin 2\lambda$, $EH = 2r\sin\delta$, wobei unter δ die Größe am (a − b) verstanden sein soll. In dem Sektor BCS ist nämlich $B = \beta$, der stumpfe Winkel $S = \pi - \alpha = \text{am}\,(2K - a)$, also $BCS = \text{am}\,(a - b)$. Von da aus überträgt sich δ auf EMH und EDH. Winkel DHE ist offenbar gleich σ, endlich $DEH = \pi - 2\lambda$.

Im Dreieck NOP ist $NO = -r\cos\sigma$, $NP = r\cos\delta$, $OP = r\sin 2\lambda$, $\sphericalangle ONP = \pi - 2\lambda$, $\sphericalangle OPN = \sigma - \frac{\pi}{2}$, $\sphericalangle NOP = \frac{\pi}{2} + \delta$.

Die elementare Dreiecksgeometrie hat nun eine Menge von Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks aufgestellt und, da hier zwei wesentlich verschiedene

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecke zur Verfügung stehen, und jede Beziehung ein Additionstheorem im Gebiete der elliptischen Funtionen darstellt, so hat man hier in der Tat eine reichlich fließende Quelle vor sich, aus der Gleichungen zwischen am (a + b), am (a − b) und den Amplituden der einfachen Argumente (a) und (b) geschöpft werden können. An einigen Beispielen möge dies Verfahren gezeigt werden.

Wendet man auf △ DEH die Formel $ab = 4r^2 (\cos^2 \frac{\delta}{2} - \sin^2 \frac{\gamma}{2})$ an, wobei natürlich die in der elementaren Mathematik üblichen Bezeichnungen gemeint sind, so erhält man

$$\sin \sigma \sin \delta = \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu;$$

da aber $\cos \lambda = \frac{\cos \alpha}{2r}$ und $\cos \mu = \frac{\cos \beta}{2r}$

ist, so entsteht $$\sin \sigma \sin \delta = \frac{\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Dieselbe Formel auf △ NOP angewendet, gibt

$$- r^2 \cos \sigma \cos \delta = r^2 (\sin^2 \lambda - \cos^2 \mu)$$

oder $$\cos \sigma \cos \delta = \frac{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \triangle^2 \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Einfacher heißt die Gleichung

$$1 + \cos \sigma \cos \delta = \cos^2 \mu + \cos^2 \lambda = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Der Sektor mit den Winkeln α^1, β^1 und γ^1 liefert die gleichwertige Form

$$1 + \triangle \sigma \triangle \delta = \frac{\triangle^2 \alpha + \triangle^2 \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Es ist $a + b = 4r \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\delta}{2}$. Daraus folgt nach einigen Reduktionen

$$\sin \sigma + \sin \delta = \frac{2 \sin \alpha \cos \beta \triangle \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Auf das andere Dreieck NOP angewendet lautet die Relation

$$\cos \sigma + \cos \delta = \frac{2 \cos \alpha \cos \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta};$$

hieraus wieder entsteht $$\triangle \alpha + \triangle \beta = \frac{2 \triangle \alpha \triangle \beta}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}.$$

Es wird dem Leser nicht schwer fallen, aus den vielen Beziehungen gerade diejenige herauszufinden, die irgend einer der Jakobi'schen Gleichungen zu Grunde liegt. Ja, es ist sogar leicht, weit über die Zahl 33 hinauszugehen. Man denke nur an die vielen Relationen zwischen den ϱ = Größen der Elementarmathematik, die Größen a + b + c, a + b − c in allen ihren Variationen, die Beziehungen der Höhen untereinander, jede einzelne gibt ein Additionstheorem. Dieselben sind nicht immer voneinander verschieden, geben oft selbstverständliche Gleichheiten, oft sprechen sie nichts anderes aus, als was schon vorher durch eine andere Form erhalten worden ist. Sicher ist, daß hier auch dem Anfänger Gelegenheit geboten ist, auf dem Gebiete der elliptischen Funktionen selbständig zu forschen.

Es braucht wohl nur flüchtig angedeutet zu werden, daß trotz ihrer Vorzüge die entwickelte Methode prinzipiell sich nicht von der Greenhill'schen unterscheidet; im Grunde

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

genommen handelt es sich hier um identische Beziehungen zwischen 3 Winkeln, die sich zu zwei Rechten ergänzen, während dort nur 2 voneinander unabhängige Winkel genommen sind. Um den Unterschied vor Augen zu führen, möge ein Beispiel, das sich überdies nicht unter den Jakobi'schen Gleichungen vorfindet, nach dem andern Verfahren durchgerechnet werden.

Es ist identisch $\cos\frac{\sigma}{2}\cos\lambda + \sin\frac{\sigma}{2}\sin\lambda = \cos\frac{\delta}{2}$;

daraus folgt das System:

$$\cos\alpha\cos\frac{\sigma}{2} + \sin\alpha\triangle\beta\sin\frac{\sigma}{2} = 2r\cos\frac{\delta}{2}$$

$$\cos\beta\cos\frac{\sigma}{2} + \sin\beta\triangle\alpha\sin\frac{\sigma}{2} = 2r\cos\frac{\delta}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\frac{\delta}{2} + \sin\alpha\triangle\beta\sin\frac{\delta}{2} = 2r\cos\frac{\sigma}{2}$$

$$\cos\beta\cos\frac{\delta}{2} + \sin\alpha\triangle\beta\sin\frac{\delta}{2} = 2r\cos\frac{\sigma}{2}.$$

Eliminiert man aus den ersten beiden Gleichungen $\cos\frac{\delta}{2}$, aus den beiden letzten $\cos\frac{\sigma}{2}$,

so entsteht:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha\triangle\beta - \sin\beta\triangle\alpha} = \frac{\sin\alpha\triangle\beta + \sin\beta\triangle\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha\triangle\beta + \sin\beta\triangle\alpha} = \frac{\sin\alpha\triangle\beta - \sin\beta\triangle\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}.$$

Das sind die von Schellbach mit Hülfe von Thetafunktionen gefundenen Formeln; sie sind nur ein Spezialfall einer allgemeineren Gleichung.

Aus der Identität $\frac{\delta}{2} + \varepsilon = \frac{\sigma}{2} + \varepsilon - \lambda$, in welcher ε eine beliebige Größe sein kann,

folgt

$$\cos\alpha\cos\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right) + \sin\alpha\triangle\beta\sin\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right) = 2r\cos\left(\frac{\delta}{2} + \varepsilon\right)$$

$$\cos\beta\cos\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right) + \sin\beta\triangle\alpha\sin\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right) = 2r\cos\left(\varepsilon - \frac{\delta}{2}\right).$$

Durch eine einfache Rechnung erhält man hieraus

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta + (\sin\alpha\triangle\beta + \sin\beta\triangle\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right)}{\cos\beta - \cos\alpha - (\sin\alpha\triangle\beta + \sin\alpha\triangle\beta)\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2} + \varepsilon\right)} = \cot\frac{\delta}{2}\cot\varepsilon.$$

Setzt man ε gleich 0 oder $\frac{\pi}{2}$, so entstehen die Schellbach'schen Formeln; denkt man sich für ε den Wert $-\frac{\sigma}{2}$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Geometrisch lassen sich die Schellbach'schen Gleichungen leicht folgendermaßen entwickeln. Man verlängere in Fig. 1. DM um ME, so stellt DN den Wert $\cos\alpha + \cos\beta$ dar. Verbindet man weiter N mit E und bringt es mit DC zum Schnitt, so ist CE = CO, daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$DO = \sin\alpha \triangle\beta + \sin\beta \triangle\alpha$. Da offenbar $N = \frac{\sigma}{2}$ ist, so erkennt man sofort, daß

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\alpha \triangle\beta + \sin\beta \triangle\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

sein muß. Trägt man ME nach der entgegengesetzten Seite ab, so ergibt sich ebenso

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\sin\alpha \triangle\beta - \sin\beta \triangle\alpha}.$$

Man wird nach dem Vorhergehenden zugeben müssen, daß die ausführlich auseinandergesetzte Figur das sphärische Dreieck, das bisher fast allein zur Veranschaulichung der Eigenschaften der elliptischen Funktionen diente, an Einfachheit erheblich übertrifft. Man wende nicht ein, daß die Relationen nur Gültigkeit haben, solange $\varkappa^2$ an die Bedingung $\frac{P}{\sin^2\alpha \sin^2\beta}$ gebunden ist. Beim Kugeldreieck ist es keineswegs anders; dort muß $\varkappa = \frac{\sin A}{\sin\alpha}$ sein. Überdies kann man α und β, sowie die Lage des Punktes C, also die Potenz P, in mannigfacher Weise abändern, ohne daß $\varkappa$ seinen Wert ändert.

Die Betrachtungen bleiben dieselben für imaginäre Moduln. Verlegt man C auf den Außenraum des Kreises, so wird $\varkappa^2$ negativ.

Auch aus folgender Betrachtung ergibt sich, daß der Gültigkeitsbereich des Sektors mit dem des sphärischen Dreiecks übereinstimmt. Man denke sich eine Kugel und ein Dreieck auf ihrer Oberfläche, das mit einer Ecke den Scheitel der Kugel, gewissermaßen den Nordpol, darstellt. Legt man nun die Äquatorebene und verbindet alle Punkte des sphärischen Dreiecks mit dem Südpol, so bilden sich offenbar die Scheitelkreise in geraden Linien, die dritte Seite aber in einem Kreise auf der Ebene ab; der betrachtete Sektor ist also das stereographische Bild des Kugeldreiecks. Bekanntlich ist die Abbildung isogonal und wird durch die Funktion $w = \frac{1}{z}$ vermittelt.

§ 4.

Folgende Aufgabe läßt sich mit den Mitteln, die in den vorangegangenen Paragraphen auseinandergesetzt sind, leicht lösen. „Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt gegeben; man soll durch ihn 2 Sehnen so zeichnen, daß der entstehende Sektor gleiche Winkel hat". Es ist $(a) = (b) = (c) = \frac{2K}{3}$. Wendet man die Formel für sn 3u an, indem man sich für u den Wert $\frac{2K}{3}$ denkt, und setzt $\sin\alpha = x$, so entsteht

$$\varkappa^4 x^8 - 6\varkappa^2 x^4 + 4(1+\varkappa^2)x^2 - 3 = 0.$$

Da $\varkappa^2$ den Wert $\frac{P}{x^4}$ annimmt, so erhält man schließlich die einfache Gleichung

$$4x^4 - x^2(3 + 6P - P^2) + 4P = 0.$$

Aus ihr ergeben sich 2 reelle Werte für x, der eine gilt für den spitzwinkeligen Sektor ABC, der andere für einen stumpfwinkeligen A^1CB^1. Verlegt man C in die Peripherie

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Kreises, so ist $P = 0$, also $x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; der Winkel muß also 60^0 sein. Der Sektor ABC geht nämlich dann in ein unendlich kleines gleichseitiges Dreieck über. Ist $P = 1$, d. h. liegt C im Mittelpunkt, dann ist $x = 1$, d. h. $\sphericalangle \alpha = 90^0$, wie es ohne Rechnung klar ist.

Die Gleichung für x nimmt eine noch einfachere Gestalt an, wenn man bedenkt, daß

$$P \sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$$

ist. Da $\alpha = \beta = \gamma$ sein soll, so entsteht

$$P \sin^2 \alpha = 1 - 3 \cos^2 \alpha - 2 \cos^3 \alpha,$$

oder

$$2 \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha) = \sin^2 \alpha (1 - P).$$

Befreit man diese Gleichung von dem überflüssigen Faktor $1 + \cos \alpha$, so erhält man

$$2 \cos^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)(1 - P).$$

Hier sind die beiden reellen Werte für $\cos \alpha$ isoliert; der eine ist positiv und liefert einen spitzen Winkel, der andere negativ mit einem stumpfen Winkel. Selbstverständlich muß die Gleichung mit der aus der Dreiteilung der elliptischen Funktionen gewonnenen Form übereinstimmen. Das ist in der Tat der Fall; setzt man $\cos \alpha = \sqrt{1 - x^2}$, so erhält man wieder

$$4 x^4 - x^2 (3 + 6 P - P^2) + 4 P = 0.$$

Die Gleichung für $\cos \alpha$ kann also als die einfachste Bedingung angesehen werden, der $\operatorname{sn} \frac{2K}{3}$ genügt.

Man kann die Aufgabe allgemeiner stellen, nämlich verlangen, daß $\alpha = \beta = n \gamma$ ist. Für jeden Sektor, in welchem $\alpha = \beta$ ist, der also gewissermaßen gleichschenklig ist, gilt die Gleichung

$$\cos \alpha = \sin \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - P},$$

wie man leicht aus dem Werte von $\varkappa^2$ oder auch rein geometrisch erkennt. Ist also $\alpha = n\gamma$, so hat man

$$\cos n\gamma = \sin \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 - P}.$$

Für $n = \frac{1}{2}$ z. B. ergibt sich $\cot \frac{\gamma}{2} = \sqrt{1 - P}$, von deren Richtigkeit man sich überzeugen kann, wenn man den Punkt C in die Mitte oder an den Rand des Kreises verlegt.

Wesentlich anders liegt die Sache, wenn $(a) = (b) = n(c)$ ist. Dann hat man die Gleichung

$$\operatorname{sn} \frac{2K}{2n + 1} = 0$$

aufzulösen, deren Koeffizienten ganze Funktionen von $\varkappa^2$ sind. Der Wert von $\varkappa^2$ ist mittels der Gleichung

$$\varkappa^2 = \frac{P}{\operatorname{sn}^4 (nc)}$$

zu eliminieren. Der für $\operatorname{sn} c = x$ resultierende Ausdruck ist schon bei $n = 2$ von sehr hohem Grade.

Ist $n = \frac{1}{2}$, so entfällt auf das Argument (c) der Wert K; daraus folgt, daß $\sphericalangle \gamma = \frac{\pi}{2}$ ist. Legt man demnach durch Punkt C den Durchmesser und zeichnet dann die beiden unter Winkeln von 45^0 gegen den Durchmesser geneigten Sehnen, so erhält man den Sektor, für welchen $(a) = (b) = \frac{1}{2}(c)$ sein muß. Die Basiswinkel des Sektors sind bestimmt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch die Gleichung $$\sin\alpha = \mathrm{sn}\left(\frac{K}{2}, \frac{4P}{(1+P)^2}\right).$$

Man kann sie auch mittels der aus der Zeichnung folgenden Relation

$$\cos\alpha = \triangle\alpha \sin\alpha$$

finden. Es ergibt sich $$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1+P}{2}}.$$

Nimmt man $(a) = \frac{K}{3}$ an, so ist $(c) = \frac{4K}{3}$. Nun genügt $\mathrm{sn}\frac{K}{3}$ der Gleichung

$$1 - 2x + 2\varkappa^2 x^3 - \varkappa^2 x^4 = 0.$$

Aus ihr entsteht durch Einführung von P

$$2x^2 - x(1-P) = 2P.$$

Der Fall $(a) = \frac{K}{4}$, $c = \frac{6K}{4}$ erfordert eigentlich die Anwendung einer Formel für $\mathrm{sn}\,6u$; man kann jedoch einen kürzeren Weg einschlagen.

Setzt man in $$\mathrm{sn}\,2u = \frac{2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{1 - \varkappa^2\,\mathrm{sn}^4 u}$$

für u den Wert $\frac{K}{4}$, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{1+\varkappa'} = \frac{4x^2(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}{(1-P)^2}.$$

Bezeichnet man noch vorübergehend den Zähler der rechten Seite mit Z, so ist

$$-\varkappa^2 Z^2 = (1-P)^4 - 2Z(1-P),$$

woraus durch Elimination von $\varkappa^2$ entsteht

$$-16P(1-x^2)^2(x^2-P)^2 = (1-P)^4 x^4 - 8(1-P)^2 x^4 (1-x^2)(x^2-P).$$

Geht man auch hier zur Grenze über, indem man $P = 0$ setzt, so ergibt sich für x die Gleichung $$8x^4 - 8x^2 + 1 = 0.$$

Ihr genügt, wie es sein muß, $x = \sin\frac{\pi}{8}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch die Gleichung

Man kann sie auch mittels d elation

finden. Es ergibt sich

Nimmt man $(a) = \frac{K}{3}$ an, der Gleichung

Aus ihr entsteht durch Einfi

Der Fall $(a) = \frac{K}{4}$, $c = \frac{6K}{4}$ e einer Formel für sn 6 u;
man kann jedoch einen kürz

Setzt man in

für u den Wert $\frac{K}{4}$, so erhäl

Bezeichnet man noch vorübe ite mit Z, so ist

woraus durch Elimination vo

$$-16P(1-x^2)^2(\qquad (1-x^2)(x^2-P).$$

Geht man auch hier zur G , so ergibt sich für x die Gleichung

Ihr genügt, wie es sein muß

© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf