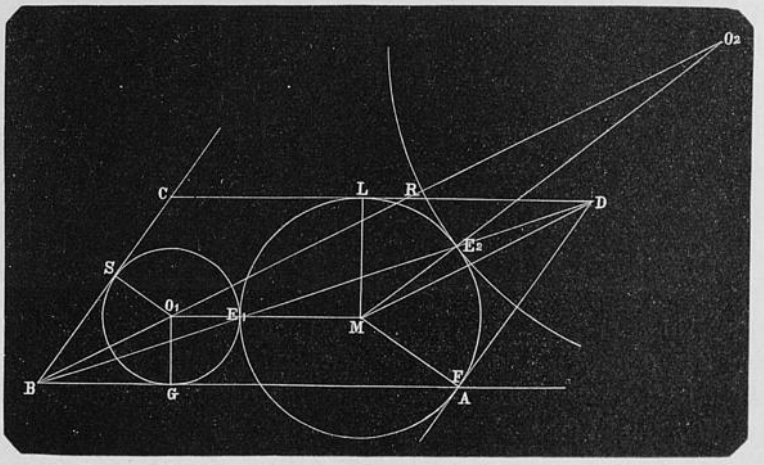
In der nachfolgenden Abhandlung bringe ich die Lösungen und Beweise einer Reihe von Aufgaben aus der in den letzten 8 Auflagen von mir besorgten »Dr. Wöckel's Geometrie der Alten« und zwar habe ich nur solche Aufgaben gewählt, über welche mehrfache Anfragen betreffs der Lösungen und Beweise, welche durch die von mir beigefügten Zahlen angedeutet sein sollen, an mich gelangt sind, so dafs ich schon vor längerer Zeit zur Ansicht gekommen bin, es bedürften auch diese Aufgaben ebenso sehr einer näheren Erläuterung, wie solche für eine sehr grofse Zahl von Aufgaben des sechsten Abschnitts der genannten Aufgabensammlung vom ersten Herausgeber veröffentlicht worden sind.

Ich beginne mit Nr. **761**, nämlich mit der Aufgabe »Die Kreislinien O zu zeichnen, welche die beiden Schenkel BA und BC eines gegebenen Winkels ABC sowohl, als einen (zwischen diesen) ge

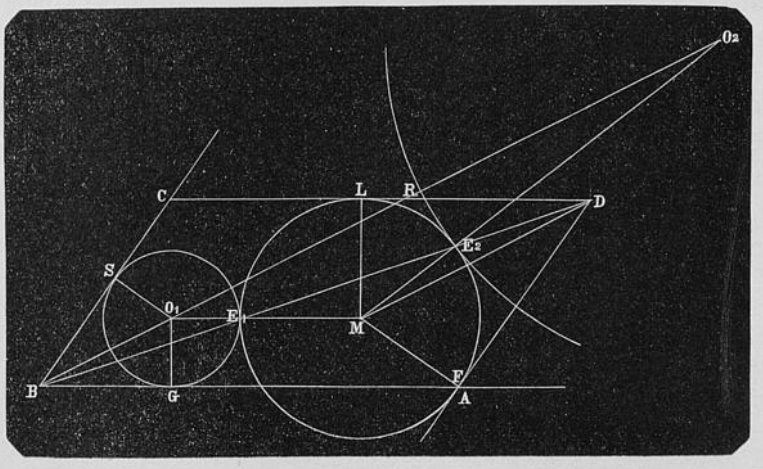


gebenen Kreis M berühren, und zwar so, dafs dieser aufserhalb der gesuchten Kreislinie O liegt.« Durch die von mir beigefügten Nummern der zweiten Zahlenreihe ist folgende Konstruktion angedeutet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man zieht an den gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt M die Tangenten AD und CD, welche mit den Schenkeln BC und BA des gegebenen Winkels ABC parallel laufen und einander in D schneiden; diesen Schnittpunkt D verbindet man mit dem Scheitel B des gegebenen Winkels, wodurch man auf der gegebenen Kreislinie M die Schnittpunkte E_1 und E_2 erhält, welche man mit dem Mittelpunkt M des gegebenen Kreises verbindet und über E_1 und E_2 hinaus verlängert; halbiert man nun den gegebenen Winkel ABC durch den Strahl BO_1, so sind die Schnittpunkte O_1 und O_2 dieser Halbierungslinie mit den verlängerten Radien ME_1 und ME_2 die gesuchten Mittelpunkte O_1 und O_2 der Kreise mit den Radien O_1E_1 und O_2E_2.

Zum Beweis fällt man aus dem gefundenen Mittelpunkt O*) die zum Schenkel BA Normale OG und verbindet die Berührungspunkte F und L der Tangenten AD und CD mit dem Mittelpunkt M des gegebenen Kreises, so ist Winkel $CDA = ABC$, weil in jedem Parallelogramm $ABCD$ die gegenüberliegenden Winkel einander



gleich sind, und da nach Konstruktion Winkel $ABO = \frac{1}{2} ABC$ und, wie aus den kongruenten Dreiecken DML und DMF folgt, auch Winkel $MDF = \frac{1}{2} CDA$ ist, so folgt durch Substitution in $\frac{1}{2} CDA = \frac{1}{2} ABC$, dafs Winkel

$$1)\ MDF = OBG$$

ist; weiter kommt zu dieser Gleichung noch Winkel $MFD = OGB$

*) Unter O kann in der weiteren Entwicklung entweder stets der Punkt O_1 oder stets der Punkt O_2 verstanden werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

(der letztere Winkel ist nach Konstruktion $= 90^0$ und der erstere ebenfalls, weil die Tangente DF zum Berührungsradius MF normal steht), also sind die Dreiecke MDF und OBG ähnlich, weil sie zwei Winkel bezüglich gleich haben und es verhält sich

$$2)\ \frac{OG}{MF} = \frac{OB}{MD}.$$

Nach Konstruktion ist ferner Winkel $CBO = OBG$ und dann Winkel $OBG = CRB$, weil diese Wechselwinkel an den Parallelen AB und CD sind, welche von der Geraden BR geschnitten werden, schliefslich kann, wie oben die Gleichung 1), bewiesen werden Winkel $CBO = CDM$, so dafs man nun nach dem Substitutionsgrundsatz $CRB = CDM$ erhält; also laufen die Geraden BR und DM, an welchen die zwei letzten Winkel als korrespondierende liegen, zu einander parallel und es sind die Wechselwinkel EMD und EOB an diesen Parallellinien, welche von der Geraden OM geschnitten werden, einander gleich; da hiezu die Gleichung Winkel $MED = OEB$ kommt, weil diese Winkel Scheitelwinkel sind, so müssen die Dreiecke MED und OEB, welche zwei Winkel bezüglich gleich haben, ähnlich sein und es verhält sich weiter $\frac{OE}{ME} = \frac{OB}{MD}$ und durch Vergleich mit 2) findet man $\frac{OE}{ME} = \frac{OG}{MF}$. Nun sind aber die Radien ME und MF des Kreises um M einander gleich, also ist auch $OE = OG$, das heifst die zur AB Normale OG ist ein Radius des Kreises um O, und da AB zu ihm in seinem Endpunkt G normal steht, ist AB eine Tangente an diesen Kreis; weil ferner der Mittelpunkt O desselben auf der Halbierungslinie BR des Winkels ABC liegt, so berührt der Kreis um O auch den Schenkel BC. Schliefslich gehen die beiden Kreislinien um O und M durch denselben Punkt E ihres Zentralabstands OM, den sie in die Summe ihrer Radien OE und ME zerlegen, weshalb sich dieselben in diesem Punkt E (von aufsen) berühren.

Bemerkung. Die Analysis, welche mich zu obiger Lösung führte, läfst sich leicht aus dem eben entwickelten Beweis erkennen. Soll die gesuchte Kreislinie die gegebene so berühren, dafs letztere innerhalb der gesuchten liegt (innere Berührung), so zieht man die Tangenten AD und CD so, dafs der gegebene Kreis nicht innerhalb des Parallelogramms $ABCD$, sondern im Scheitelwinkelraum des Winkels ADC liegt; dann mufs man natürlich die Diagonale BD

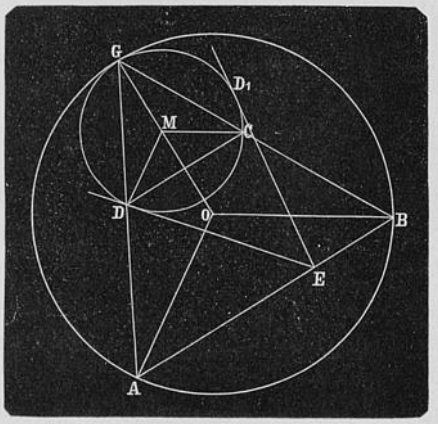
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

über die Ecke D verlängern, um die Schnittpunkte E_1 und E_2 zu erhalten.

Die Ziffern der zweiten Zahlenreihe zu Nr. **765** »Die Kreislinien O zu zeichnen, welche eine gegebene Kreislinie M berühren und eine der Gröfse und Lage nach gegebene gerade Linie AB als Sehne aufnehmen (oder durch zwei gegebene Punkte A und B gehen)« ergeben folgende

Konstruktion. Man bestimmt zunächst auf der Peripherie des gegebenen Kreises M einen Punkt G so, dafs seine Verbindungslinien GA und GB mit den gegebenen Punkten A und B den Umfang des Kreises um M in zwei Punkten C und D schneiden, deren Verbindungslinie CD zur gegebenen Strecke AB parallel ist; dann verbindet man den gefundenen Punkt G sowie den einen Endpunkt D der Sehne CD mit dem Mittelpunkt M des gegebenen Kreises und zieht durch den entsprechenden Punkt A der zwei gegebenen Punkte die zur DM parallele Gerade AO, welche die nötigenfalls verlängerte GM im gesuchten Mittelpunkt O des zu suchenden Kreises schneidet; beschreibt man um diesen Schnittpunkt O eine Kreislinie, welche durch den gegebenen Punkt A geht, so ist diese die gesuchte.

Bemerkung. Da es zwei Punkte G der verlangten Art gibt, so erhält man zwei Kreise, welche den Bedingungen entsprechen und von welchen der eine den gegebenen Kreis einschliefsend, der zweite aber ihn von aufsen berührt.



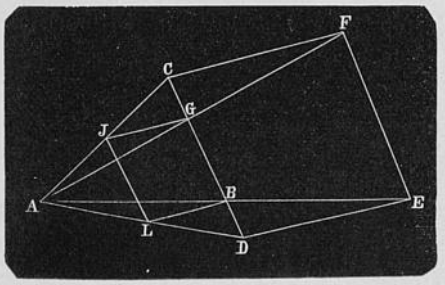
Zum Beweis zieht man noch die Strecken BO und CM; nun ist in den Dreiecken AOG und DMG Winkel $AGO = DGM$ und Winkel $GAO = GDM$, da letztere korrespondierende Winkel an den parallelen Geraden AO und DM sind, welche von der AG geschnitten werden; diese Dreiecke haben also zwei Winkel bezüglich gleich, sind deshalb ähnlich und es verhält sich in ihnen

$$1)\ \frac{AG}{DG} = \frac{OG}{MG} \text{ sowie } \frac{DM}{MG} = \frac{AO}{OG}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

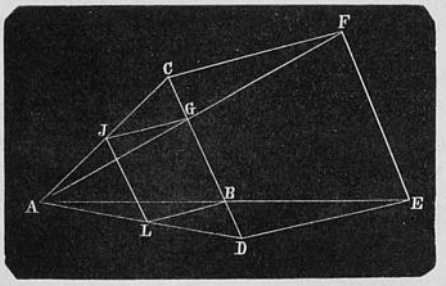
und weil $DM = MG$ ist, so mufs auch $AO = OG$ sein d. h. auf der Kreislinie, welche um O so gezeichnet ist, dafs sie durch den Punkt A geht, liegt auch der Punkt G. Weiter ist in die Dreiecken ABG und DCG Winkel $AGB = DGC$ und Winkel $GAB = GDC$, da diese korrespondierende Winkel an den Parallelen AB und DC sind, welche von der Geraden GA geschnitten werden, also sind diese Dreiecke, welche 2 Winkelpaare gleich haben, einander ähnlich und es verhält sich in ihnen $\frac{AG}{DG} = \frac{BG}{CG}$; aus dieser Gleichung und der Proportion 1) folgt nun $\frac{OG}{MG} = \frac{BG}{CG}$; demnach stehen in den Dreiecken BGO und CGM zwei Seitenpaare in gleichem Verhältnis und da diese Seiten die gleichen Winkel BGO uud CGM einschliefsen, so sind auch diese Dreiecke ähnlich und es ergibt sich $\frac{OG}{OB} = \frac{MG}{MC}$, und weil die Radien MG und MC des Kreises um M gleich sind, so mufs auch $OG = OB$ sein d. h. die Kreislinie um O, auf welcher die Punkte A und G liegen, geht auch durch den Punkt B, und da die zwei Kreislinien um M und O die Zentrallinie OM in demselben Punkt G schneiden, so dafs der Zentralabstand MO der Differenz der Radien jener Kreise gleich ist, so berühren die beiden Kreislinien einander (von innen).

Da auch die Bedeutung der Nummern, welche ich in der 14. Auflage als weitere Zahlenreihe bei Nr. **781** beifüge, Schwierigkeiten bereiten könnte, will ich auch die gedachte Lösung hier sogleich angeben. Die Aufgabe lautet: »In den zwei Nebenseiten AC und BC eines Dreiecks ABC zwei Punkte J und G so zu bestimmen, dafs deren Verbindungslinie GJ und die von den Nebenseiten gegen die Grundlinie AB zu abgeschnittenen Stücke AJ und BG gleich grofs sind.« Die neue Lösung dieser Aufgabe wäre folgende: Man verlängert die kleinere Nebenseite CB über den nicht gemeinschaftlichen Endpunkt B der zwei Nebenseiten AC und BC so, dafs die verlängerte Strecke CD der andern Nebenseite AC gleich wird, beschreibt um den erhaltenen Punkt D mit $CD = AC$ einen Kreisbogen, welcher die über den oben bezeichneten B ver-



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

längerte Grundlinie AB in E trifft, konstruiert mit CD als Seite und Winkel CDE als dem in D an CD anliegenden Winkel den Rhombus $CDEF$ und verbindet dessen vierten erhaltenen Eckpunkt F mit dem Anfangspunkt A der Grundlinie AB, so schneidet diese Verbindungslinie AF die kleinere Nebenseite BC in einem Punkte G, durch welchen man die zur Rhombusseite CF parallele Gerade GJ zieht, dann ist diese GJ die gesuchte Gerade.



Zum Beweis zieht man noch durch den Endpunkt B der Nebenseite BC die zur Rhombusseite DE parallele Gerade BL und verbindet den erhaltenen Schnittpunkt L mit dem Endpunkt J der gesuchten Geraden GJ, so erhält man, da nach Konstruktion CF und JG parallel sind, die einander ähnlichen Dreiecke AGJ und ACF und aus ihnen

$$1)\ \frac{JG}{CF} = \frac{AG}{AF},$$

ferner, weil die Rhombus-Seiten BG und EF parallel, also die Dreiecke AFE und AGB ähnlich sind,

$$2)\ \frac{AG}{AF} = \frac{BG}{EF} = \frac{AB}{AE}$$

und schliefslich, da nach Konstruktion BL parallel zu DE und deshalb das Dreieck ADE dem Dreieck ABL ähnlich ist,

$$3)\ \frac{AB}{AE} = \frac{BL}{DE};$$

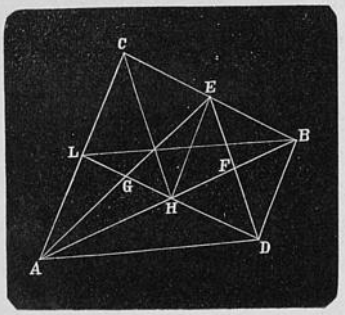
nun ist in den aus 1), 2) und 3) abgeleiteten Proportionen $\frac{JG}{CF} = \frac{BG}{EF} = \frac{BL}{DE}$ nach Konstruktion $CF = EF = DE$, da diese Seiten des Rhombus $CDEF$ sind, also mufs auch $JG = BG = BL$ sein. Da nun im Viereck $BGJL$ die Gegenseiten JG und BL gleich und parallel sind, weil sie zu den nach Konstruktion parallelen Seiten CF und DE parallel laufen, so ist $BGJL$ ein Parallelogramm und deshalb sind auch die Gegenseiten JL und BG gleich und parallel, folglich die Dreiecke ACD und AJL einander ähnlich und es verhält sich $\frac{AJ}{JL} = \frac{AC}{CD}$ und weil nach Konstruktion $AC = CD$ ist, mufs auch $AJ = JL = GB = JG$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

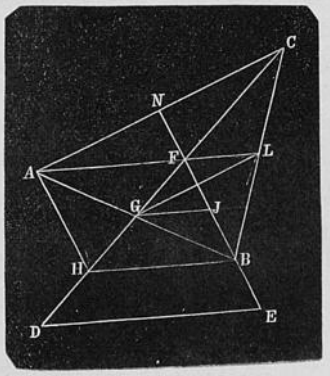
Bemerkung. Die Analysis, welche mich auf die obige Lösung führte, gründet sich, wie man schon aus der Betrachtung der Figur sieht, hauptsächlich auf die Methode der ähnlichen Figuren. (S. mein Lehr- und Übungs-Buch der ebenen Geometrie. Vierte Auflage. Nürnberg. Korn. I. Teil, Seite 92 u. 93).

Auch über die Lösungen der Aufgabe Nr. **833** »Ein Dreieck ABC aus seinen drei Mittellinien zu konstruieren« wurde ich vielfach gefragt.

Die Konstruktion, welche durch die erste Zahlenreihe schon in den ersten Auflagen angegeben wurde, ist bekannt. Eine zweite Lösung wäre folgende. Man zeichnet aus den drei gegebenen Mittellinien m_1, m_2 und m_3 als Seiten das Dreieck ADE, zieht in diesen zwei Mittellinien AF und DG, welche einander in H schneiden, verlängert diese Mittellinien AF und DG über ihre Endpunkte F und G je um ihren unteren Abschnitt FH und GH bis B und L, verbindet die erhaltenen Punkte B und L mit den Ecken E und A und verlängert diese Geraden BE und AL, bis sie einander im Punkte C schneiden, so ist Dreieck ABC das gesuchte.



Eine dritte Lösung lautet wie folgt. Man zeichnet zunächst wieder aus den drei gegebenen Mittellinien m_1, m_2 und m_3 als Seiten das Dreieck DEF, teilt aber eine Seite DF in den Punkten G und H in drei gleiche Teile $FG = GH = HD$, zieht durch die erhaltenen Teilungspunkte G und H die zur anstofsenden Seite DE parallelen Geraden GJ und HB, welche die dritte Seite EF in den Punkten J und B schneiden, verbindet den letzten Schnittpunkt B mit dem ersten Teilungspunkt G durch die Strecke BG, verlängert diese über ihren Endpunkt G um ihre eigene Länge bis A und den oberen Teil GF der geteilten Seite DF über F um ihre doppelte Länge FH bis C und verbindet diesen erhaltenen Punkt C mit den Punkten A und B, so hat man das gesuchte Dreieck ABC.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis zur ersten angegebenen Konstruktion. Nach derselben ist $EF = FD$ und $HF = FB$ also das Viereck $EHDB$ ein Parallelogramm, weil in ihm die Diagonalen DE und BH einander gegenseitig halbieren, und es läuft

1) EH parallel zu BD und 2) DH parallel zu BE.

Da nun die Mittellinien AF und DG eines Dreiecks ADE einandor so schneiden, dafs der obere Abschnitt einer jeden dem doppelten unteren Abschnitt derselben gleich wird, so ist $HD = 2.GH$ und $AH = 2.HF$ und noch der Konstruktion

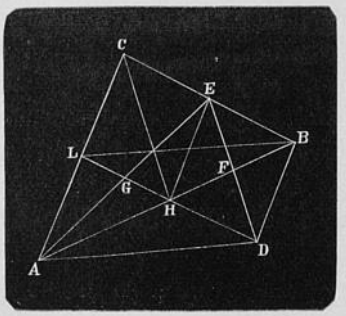
3) $HD = HL$ und 4) $AH = BH$;

deshalb ist auch das Viereck $ADBL$, dessen Diagonalen AB und DL einander halbieren, ein Parallelogramm und

5) AL parallel zu BD.

Nach 5) und 1) sind nun die Geraden AC und EH zur dritten Geraden BD parallel also läuft auch CL parallel zu EH, hiezu kommt nach 2) DL parallel zu BC also ist auch das Viereck $CLHE$ im Parallelogramm und es sind

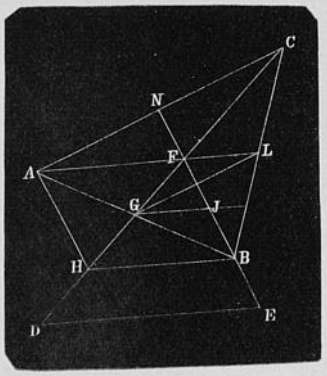
6) seine Gegenseiten LH und CE einander gleich;



nach 3) ist aber auch $LH = HD$ und im Parallelogramm $EHDB$ (1) und (2) ist $HD = EB$; aus diesen drei letzten Gleichungen erhält man jetzt durch Substitution $CE = EB$ d. h. AE ist eine Mittellinie des Dreiecks ABC und nach Konstruktion $= m_3$ und wegen 4) ist CH eine zweite Mittellinie dieses Dreiecks. Da nun nach 6) $CE = HL$ und nach 3) $HL = HD$ also $CE = HD$ und wegen 2) CE auch parallel zu HD ist, so sind im Viereck $CEDH$ zwei einzelne Seiten einander parallel und gleich, folglich auch die beiden andern d. h. die zweite Mittellinie CH ist gleich DE oder wegen der Konstruktion $= m_2$. Nach 5) und 2) ist LC parallel zu BD und DL parallel zu BC also $LDBC$ ein Parallelogramm und in ihm $CL = BD$ und im Parallelogramm $ADBL$ (5) ist $BD = AL$ folglich $CL = AL$ d. h. BL ist die dritte Mittellinie des Dreiecks ABC und weil in diesem Parallelogramm $ADBL$ die Seite $BL = AD$ ist, so findet man, dafs nach Konstruktion diese dritte Mittellinie BL die Länge m_1 hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um die Richtigkeit der zweiten angegebenen Lösung zu beweisen, zieht man durch den ersten Teilungspunkt G der in drei gleiche Teile geteilten Seite DF die zur Seite AC des gesuchten Dreiecks ABC parallele Gerade GL, welche dessen zweite Seite BC in L durchschneidet, verbindet diesen Schnittpunkt L mit der Ecke F des zuerst gezeichneten Dreiecks DEF und diesen Eckpunkt F mit der Ecke A, welche der eben erwähnten Seite BC gegenüber liegt, und verlängert über jenen Eckpunkt F die Seite BF bis zum Schnittpunkt N mit der Seite AC des gefundenen Dreiecks ABC, dann ist GC eine Mittellinie dieses Dreiecks ABC, weil nach Konstruktion $AG = GB$ ist. Weil ferner in diesem Dreieck ABC zur Seite AC die Gerade GL parallel läuft, so stehen die Seiten des Dreiecks BGL zu den entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC in gleichem Verhältnis, so dafs $\frac{AB}{BG} = \frac{BC}{BL}$ ist und da nach Konstruktion $\frac{AB}{BG} = 2$ ist, so ist auch $\frac{BC}{BL} = 2$ oder



$$1)\ CL = LB.$$

Beachtet man weiter, dafs nach Konstruktion $GF = GH$ und $BG = AG$ ist, so erkennt man, dafs im Viereck $AHBF$ die Diagonalen AB und HF einander halbieren, und dafs also dieses ein Parallelogramm oder AF parallel zu BH ist. Im Dreieck BCH, in welchem wegen 1), und weil nach Konstruktion $HF = FC$ ist, zwei Seiten CH und BC in gleichem Verhältnis geteilt sind, läuft die Verbindungslinie FL der Teilungspunkte F und L zur dritten Seite BH parallel; weil man aber durch einen Punkt F zu einer Geraden BH nur eine Gerade parallel ziehen kann, so bilden die Linien AF und FL nur eine einzige Gerade AFL und diese Gerade AL ist wegen 1) eine zweite Mittellinie des Dreiecks ABC, dessen dritte Mittellinie durch die Gerade BN dargestellt ist nach dem Lehrsatz: Durch den Schnittpunkt F zweier Mittellinien GC und AL eines Dreiecks ABC mufs auch die dritte Mittellinie BN hindurchgehen. Da ferner nach Konstruktion $GC = 3 . GF$ und $GF = \frac{1}{3}\ DF = \frac{1}{3}\ m_3$ ist, so ergibt sich durch Substitution, dafs die Mittellinie GC der gegebenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

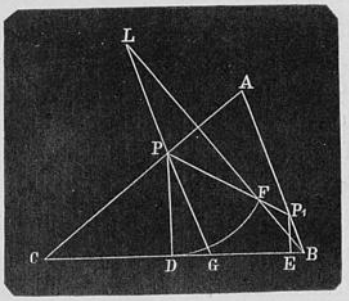
Strecke m_3 gleich ist. Nach dem Lehrsatz »Wenn man eine Seite DF eines Dreiecks DEF in n gleiche Teile teilt und durch die Teilungspunkte G und H Parallellinien GJ und HB mit einer zweiten Seite DE zieht, so teilen diese die dritte Seite EF in den Punkten J und B ebenfalls in n unter sich gleiche Teile FJ, JB und BE und geben selbst, soweit sie in das Dreieck DEF fallen, die einzelnen $n$tel derjenigen Seite DE an, zu welcher sie parallel sind, und zwar die entfernteste $\frac{1}{n}$, die folgende $\frac{2}{n}$ u. s. f.« ist weiter $BH = \frac{2}{3}\ DE$ und somit auch $\frac{2}{3}\ m_1$ und $BF = \frac{2}{3}\ EF = \frac{2}{3}\ m_2$; jene BH ist aber auch gleich AF, weil diese Seiten im Parallelogramm $AHBF$ einander gegenüber liegen, deshalb ist auch $AF = \frac{2}{3} m_1$ und da die Mittellinien AL und BN eines Dreiecks ABC einander so teilen, dafs die nach den Mittelpunkten L und N der Seiten BC und AC hin liegenden Teile FL und FN halb so grofs sind, als die nach den gegenüber liegenden Spitzen A und B hin liegenden Stücke AF und BF, so ist $FL = \frac{1}{2}\ AF = \frac{1}{3}\ m_1$ und $FN = \frac{1}{2}\ BF = \frac{1}{3}\ m_2$ und hieraus ergibt sich durch Addition, dafs die ganze Mittellinie $AL = m_1$ und die andere Mittellinie $BN = m_2$ ist.

Die Ziffern der zweiten Zahlenreihe zu Nr. **845** ergeben folgende Konstruktion für die Aufgabe »In einer Seite AC eines Dreiecks ABC ist ein Punkt P gegeben; man soll in der andern Seite AB einen Punkt P_1 bestimmen, dessen Entfernung P_1P vom gegebenen Punkte P so grofs ist, als die Summe der Entfernungen PD und P_1E beider Punkte P und P_1 von der Grundlinie BC.«

Man zieht durch den in der Seite AC gegebenen Punkt P die zur andern Seite AB parallele Gerade PG, welche die Grundlinie BC im Punkte G schneidet, und trägt auf ihr das in das gegebene Dreieck ABC fallende Stück PG derselben vom gegebenen Punkt P aus in der PG entgegengesetzten Richtung als PL ab, verbindet den erhaltenen Punkt L mit dem der Seite AC gegenüberliegenden Eckpunkt B, fällt aus dem gegebenen Punkt P die zur Grundlinie BC Normale PD, welche diese BC im Punkte D trifft, beschreibt um den gegebenen Punkt P mit der Normalen PD einen Kreisbogen DF, welcher die Verbindungslinie BL in F durchschneidet, verbindet diesen Schnittpunkt F mit dem gegebenen Punkt P und verlängert diese Strecke PF bis zum Schnittpunkt P_1 mit der andern Seite AB, so ist dieser Schnittpunkt P_1 der gesuchte Punkt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Fällt man aus dem gefundenen Punkt P_1 die zur Grundlinie BC Normale P_1E, so ist der entstandene Winkel $P_1EB = PDG$ ferner Winkel $P_1BE = PGD$, weil sie korrespondierende Winkel an den Parallellinien P_1B und PG sind, welche von der Geraden BC geschnitten werden, also sind die Dreiecke P_1EB und PDG ähnlich, da sie zwei Winkelpaare gleich haben, und es verhält sich

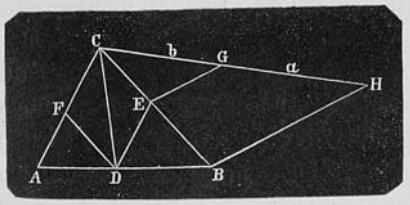


$$\frac{PD}{P_1E} = \frac{PG}{P_1B}$$

und wegen der Konstruktion auch $= \frac{PL}{P_1B}$. Weiter sind die Scheitelwinkel LFP und BFP_1 ferner die Wechselwinkel FPL und FP_1B an den parallelen Geraden PL und P_1B, welche von der Geraden PP_1 geschnitten werden, einander gleich und deshalb die zwei Dreiecke LFP und BFP_1, welche zwei Winkel bezüglich gleich haben, ähnlich und aus denselben ergibt sich $\frac{PL}{P_1B} = \frac{PF}{P_1F}$ und durch Komparation mit der oben begründeten Gleichung $\frac{PD}{P_1E} = \frac{PL}{P_1B}$ auch $\frac{PD}{P_1E} = \frac{PF}{P_1F}$. Da nun nach Konstruktion $PD = PF$ ist, mufs auch $P_1E = P_1F$ und $PP_1 = PF + P_1F = PD + P_1E$ sein.

Die zwei eigentlich nicht wesentlich verschiedenen Lösungen der Nummern der zweiten und dritten Zahlenreihe der Aufgabe **846** »Aus zwei Seiten a und b und der Halbierungslinie w des eingeschlossenen Winkels eines Dreiecks ABC dieses zu konstruieren« sind folgende.

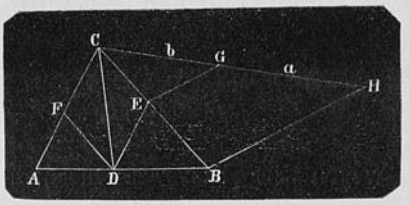
Konstruktion. Man teilt die gegebene Seite $a = CB$ im Punkte E so, dafs sich die Strecken CE und EB wie $b : a$ verhalten, konstruiert mit CE als Seite und der gegebenen Winkelhalbierenden $w = CD$ als Diagonale den Rhombus $CEDF$ und trägt entweder auf der genügend verlängerten anstofsenden Seite CF des Rhombus die andere gegebene Dreiecks-Seite b als CA ab und verbindet den Endpunkt D der Diagonale CD mit den Endpunkten A und B der



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gegebenen Seiten, so wird ADB eine einzige Gerade oder man verbindet diesen Endpunkt D mit dem Endpunkt B der geteilten Seite CB und verlängert diese Verbindungslinie BD bis zum Schnittpunkt A mit der genügend verlängerten Rhombusseite CF, so ist stets Dreieck ABC das gesuchte.

Beweis. Da im Rhombus $CEDF$ jede Diagonale z. B. CD den Winkel FCE halbiert, durch welchen sie geht, so weifs man, dafs diese Gerade CD im Dreieck ABC dessen Winkel ACB halbiert und nach Konstruktion ist diese CD der gegebenen Halbierungslinie w dieses Winkels ACB gleich. Im ersten Fall beweist man, dafs die Verlängerung von BD in die Richtung der DA fällt. Schnitte nämlich die verlängerte BD die Seite CA in einem Punkte A_1, so könnte man, wie folgt, schliefsen. Nach Konstruktion verhält sich $CE : EB = b : a$ oder auch, weil $CE = DE$ ist, $\frac{DE}{EB} = \frac{b}{a} = \frac{CA}{CB}$; da nun im Dreieck A_1CB die DE zur Seite A_1C parallel läuft, so ist das Dreieck BDE dem Dreieck A_1BC ähnlich und es verhält sich $\frac{DE}{EB} = \frac{CA_1}{CB}$; vergleicht man diese Proportion mit der vorhergehenden, so sieht man, dafs beide in drei Paaren von Gliedern übereinstimmen, dafs also auch die vierten Paare CA_1 und CA gleich sein müssen oder die verlängerte BD geht durch den Punkt A und fällt mit der Verbindungslinie DA zusammen. Im andern Fall mufs man dagegen beweisen, dafs die durch die verlängerte BD abgegrenzte Seite $CA = b$ ist, was eben schon gezeigt wurde.

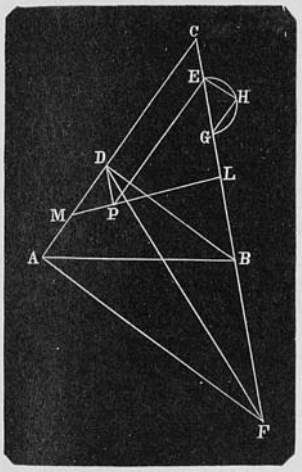


In der Aufgabe **847** »Ein Dreieck ABC so zu halbieren, dafs die Halbierungslinie LM durch einen gegebenen Punkt P innerhalb des Dreiecks ABC geht,« führen die Ziffern der zweiten Zahlenreihe zu folgender Konstruktion. Man zieht durch den gegebenen Punkt P zu den zwei Seiten BC und AC, von welchen die Halbierungslinie LM des Dreiecks ABC begrenzt werden, die Parallellinien PD und PE, welche jene Seiten BC und AC in den Punkten E und D schneiden, verbindet einen dieser Schnittpunkte etwa den Punkt D auf der Seite AC mit der Gegenecke B dieser Seite, zieht durch die Gegenecke A der andern BC der oben genannten Seiten zur Verbindungslinie DB die parallele Gerade AF, welche diese

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite BC, wenn man sie verlängert, in F trifft, teilt die so erhaltene Strecke CF in vier gleiche Teile, so dafs $CG = \frac{1}{4}\ CF$ wird, beschreibt über EG als Durchmesser den Halbkreis EHG und trägt in diesen von E aus die Strecke EC als Sehne EH ein, zieht von dem erhaltenen Punkt H aus in dem Halbkreis EHG nach dem zweiten Endpunkt G des Durchmessers EG die Sehne GH und trägt diese Sehne von G aus auf der Seite BC als GL ab, verbindet den erhaltenen Punkt L mit dem gegebenen Punkt P und verlängert diese Verbindungslinie LP bis zum Schnittpunkt M mit der andern Seite AC, so ist das Dreieck CLM die Hälfte des gegebenen Dreiecks ABC.

Beweis. Verbindet man die Schnittpunkte D und F miteinander durch die Gerade DF, so kann man auf die Dreiecke CDF und EPL, weil in denselben Winkel $DCF = PEL$ ist, da sie korrespondierende Winkel an den parallelen Geraden AC und PE sind, welche von der dritten Geraden BC geschnitten werden, den Lehrsatz anwenden »Wenn zwei Dreiecke CDF und EPL einen Winkel DCF beziehungsweise PEL gleich haben, so stehen sie im zusammengesetzten Verhältnis der Seiten, welche diesen Winkel einschliefsen« und erhält $\frac{\text{Dreieck } CDF}{\text{Dreieck } EPL} = \frac{CD.CF}{EP.EL}$; da aber im Parallelogramm $DPEC$ die Gegenseiten DC und EP einander gleich sind, so vereinfacht sich die angegebene Proportion in



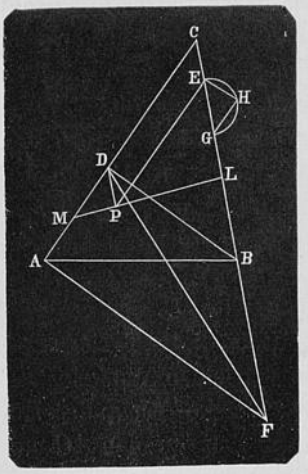
$$1)\ \frac{\text{Dreieck } CDF}{\text{Dreieck } EPL} = \frac{CF}{EL}.$$

Ferner sind die Dreiecke EPL und CML einander ähnlich, weil sie zwei Winkelpaare ELP und CLM sowie PEL und MCL gleich haben, und da sich ähnliche Dreiecke EPL und CML ihrem Flächeninhalte nach wie die Quadrate über entsprechenden Seiten verhalten, so findet man weiter $\frac{\text{Dreieck } EPL}{\text{Dreieck } CML} = \frac{EL^2}{CL^2}$; multipliziert man diese Proportion mit 1), so ergibt sich, wenn man den Bruch der linken Seite mit EL kürzt,

$$2)\ \frac{\text{Dreieck } CDF}{\text{Dreieck } CML} = \frac{CF.EL}{CL^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da weiter Dreieck $BDF = BDA$, weil beide die Seite BD gemeinschaftlich haben und die Verbindungslinie AF der gegenüberliegenden Spitzen A und F zu dieser Seite BD parallel läuft, und auch Dreieck $BDC =$ BDC also nach dem Additionsgrundsatz Dreieck $CDF = ABC$ und nach Konstruktion $CF = 4.CG$ ist, so geht die Gleichung 2) in die Proportion



$$3)\quad \frac{\text{Dreieck } ABC}{\text{Dreieck } CML} = \frac{4.CG.EL}{(CE+EL)^2}$$

über. Nun ist aber $(CE + EL)^2 = CE^2 + 2.CE.EL + EL^2$, und weil $CE = EH$ und nach dem Pythagoreischen Lehrsatz $EH^2 = EG^2 - GH^2 = EG^2 - GL^2$ ist, so wird $(CE + EL)^2 = EG^2 - GL^2 + 2.CE.EL + EL^2$, und da $EG^2 - GL^2 + EL^2 = (EL - GL)^2 - GL^2 + EL^2 = EL^2 - 2.EL.GL + GL^2 - GL^2 + EL^2 = 2.EL^2 - 2.EL.GL$, so erhält man aus der Gleichung 3) die Proportion $\frac{\text{Dreieck } ABC}{\text{Dreieck } CML} = \frac{4.CG.EL}{2.EL(CE+EL-GL)} = \frac{2.CG}{CG} = \frac{2}{1}$ d. h. die Behauptungsgleichung Dreieck $ABC = 2.CML$.

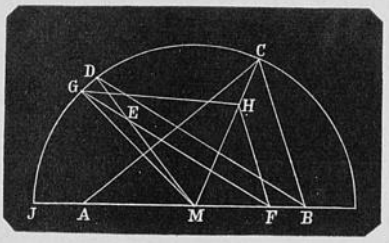
Die Konstruktion der Aufgabe **852** »Ein Dreieck ABC zu konstruieren aus einer Seite c, der ihr zugehörigen Mittellinie m und der Differenz δ der Winkel β und α an jener Seite« lautet, wie folgt.

Man trägt auf einem Strahl AB von seinem Anfangspunkt A aus die gegebene Seite c als AB ab, legt im einen Endpunkt B den gegebenen Differenzwinkel δ an diese Seite AB als Winkel ABD an, beschreibt um ihren Mittelpunkt M mit der gegebenen Mittellinie $m = MJ$ einen Halbkreis, welcher den Endschenkel BD des angelegten Winkels ABD im Punkte D schneidet; diesen Schnittpunkt D verbindet man mit der Mitte M der gegebenen Seite AB und trägt auf dieser Verbindungslinie MD vom Endpunkt M aus die Hälfte MB jener Seite AB als ME ab, zieht durch den erhaltenen Punkt E die zum Endschenkel BD des angelegten Winkels ABD parallele Gerade EF, welche in ihrer Verlängerung über E den Halbkreis im Punkte G durchschneidet; verbindet man nun diesen Schnittpunkt G ebenfalls mit dem Mittelpunkt M der gegebenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite AB und halbiert den so erhaltenen Winkel GMB durch die Gerade MC, so ist der Schnittpunkt C dieser Winkelhalbierenden MC mit dem Halbkreis JGD der dritte Eckpunkt C des gesuchten Dreiecks ABC, welchen man noch mit A und B verbindet.

Zum Beweis trägt man die Hälfte MB der gegebenen Seite AB auf der Winkelhalbierenden MC von der Mitte M dieser Seite AB aus als MH ab und verbindet den erhaltenen Punkt H mit den Schnittpunkten F und G der zum Endschenkel BD des angelegten Winkels ABD parallelen Geraden FG und betrachtet zunächst das Dreieck MBD, in welchem nach Konstruktion zur Seite BD die Parallellinie EF gezogen ist, wodurch das dem Dreieck MBD ähnliche Dreieck MFE entsteht, so dafs sich also



$$1)\ \frac{MB}{MF} = \frac{MD}{ME}$$

verhält; nach Konstruktion ist aber $MD = MC$ und $ME = MB = MH$, folglich ergibt sich durch Substitution $\frac{MB}{MF} = \frac{MC}{MH}$; also sind im Dreieck MBC die zwei Seiten MB und MC in den Punkten F und H in gleichem Verhältnis geteilt und es läuft demnach die Verbindungslinie FH der Teilungspunkte mit der dritten Seite BC dieses Dreiecks parallel. Da ferner nach Konstruktion $MH = MB = ME$ und $MD = MG$ ist, so geht die Gleichung 1) durch Substitution in die Proportion $\frac{MH}{MF} = \frac{MG}{MH}$ über. Diese Strecken sind aber Seiten der Dreiecke MHF und MGH, in welchen auch der Winkel HMF dem Winkel GMH gleich ist, weil die Gerade MH den Winkel BMG halbiert, also stehen in den Dreiecken MHF und MGH zwei Seiten bezüglich in gleichem Verhältnis und diese Seiten schliefsen einen gleichen Winkel ein, folglich sind diese Dreiecke ähnlich und in ihnen ist weiter

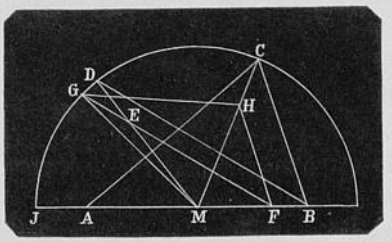
$$2)\ \text{Winkel } HFM = GHM \text{ und } \frac{GH}{HF} = \frac{GM}{MH};$$

nun ist aber $GM = CM$ und $MH = AM$, also findet man durch Substitution

$$3)\ \frac{GH}{FH} = \frac{CM}{AM}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. in den Dreiecken GHF und CMA stehen zwei Seiten bezüglich in gleichem Verhältnis; der von dem einen dieser Seitenpaare im Dreieck CMA eingeschlossene Winkel CMA erscheint als Aufsenwinkel in Bezug auf das Dreieck HMF und ist also so grofs als die Summe $MHF + MFH$ der von ihm getrennt liegenden Innenwinkel, deshalb ist wegen 2) Winkel $CMA = MHF + GHM = GHF$, also schliefsen die in der Proportion 3) vorkommenden Seiten der Dreiecke GHF und CMA je einen gleichen Winkel ein und in diesen deshalb ähnlichen Dreiecken ist weiter Winkel $GFH = CAM$; da aber Winkel $GFH = DBC$ als Winkel mit parallelen Schenkeln, so ist auch Winkel $CAB = DBC$ und Winkel $ABC - CAB = ABC - DBC = ABD$ und weil dieser Winkel ABD gleich dem gegebenen Differenzwinkel δ konstruiert wurde, so ist auch die Differenz der Winkel ABC und CAB an der gegebenen Seite AB dem gegebenen Differenzwinkel δ gleich.

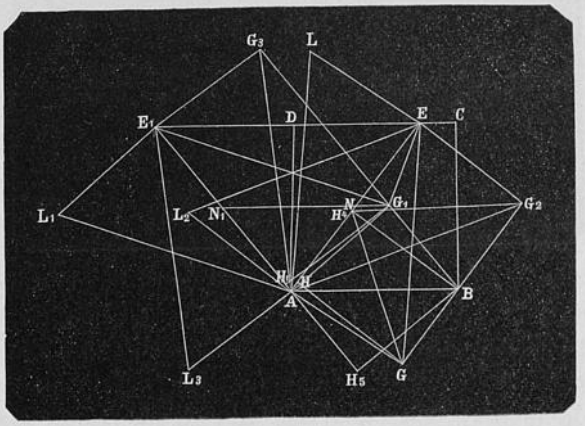


In den Aufgaben **286**, **288** und **289**, von welchen die zwei ersten Aufgaben lauten »Ein Quadrat in einen Rhombus von gegebener Diagonale zu verwandeln« und »Parallelogramme zu zeichnen, deren eine Seite und Diagonale gegeben sind und welche einem gegebenen Quadrat an Inhalt gleich sind« fiel häufig die grofse Anzahl der für die Beweise angegebenen Lehrsätze auf; nun ist in den Aufgaben **286** und **289** durch den Druck schon angedeutet, dafs im ersten Fall die zwei erhaltenen Rauten und im zweiten Fall die vier gefundenen Parallelogramme zu je zweien einander kongruent sind, woraus dann folgt, dafs diese Kongruenz bewiesen werden mufs und in der Aufgabe **288** ist beigefügt, dafs die entstandenen vier Parallelogramme zu je zweien kongruent sind, was natürlich ebenfalls bewiesen werden mufs. Da nun diese Entwickelungen nicht ganz einfach sind, will ich bei dieser Gelegenheit angeben, auf welche Weise etwa dieselben geführt werden. Um die Bedingungen, welche für die Beweise benützt werden können, festzustellen, mufs ich wohl die Konstruktion ebenfalls angeben.

Bei der Aufgabe **289** »Ein Quadrat $ABCD$ in ein gleichgrofses Parallelogramm $ALEG$ zu verwandeln, dessen beide Diagonalen e und f gegeben sind« konstruiert man folgendermafsen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

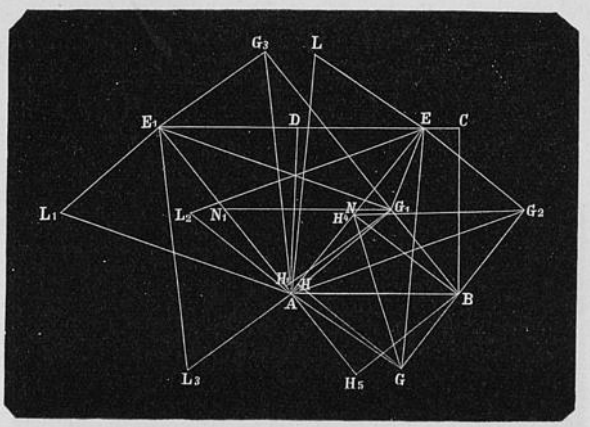
Zuerst verwandelt man das gegebene Quadrat $ABCD$ in ein gleichgrofses Parallelogramm $ABEF$ oder ABE_1F_1, deren Seite AE oder AE_1 der einen gegebenen Diagonale e gleich ist, indem man um A mit der Diagonele e einen Kreisbogen beschreibt, welcher die über C und D verlängerte CD in E und E_1 schneidet u. s. w.; dann beschreibt man um die Mitten N (N_1) der erhaltenen AE (AE_1) mit der Hälfte der gegebenen zweiten Diagonale f einen Kreisbogen, welcher die zur AE (AE_1) durch den Punkt B parallel gezogene Gerade GG_2 (G_1G_3) in den Punkten G und G_2 (G_1 und G_3) schneidet, und ergänzt die erhaltenen Dreiecke AGE und AG_2E (AG_1E_1 und AG_3E_1) zu den Parallelogrammen $AGEL$ und AG_2EL_2 ($AG_1E_1L_1$ und $AG_3E_1L_3$).



Beweis. Um zunächst die Kongruenz der Dreiecke AGE und AG_1E_1 darzuthun, beachtet man, dafs im gleichschenkligen Dreieck AEE_1 Winkel $AEE_1 = AE_1E$ ist, dafs ferner die Geraden AB und EE_1 parallel sind, und deshalb Winkel $AEE_1 = EAB$ und, wenn man E_1A bis zum Fufspunkt H_5 der auf sie aus dem Ecktpunkt B gefällten Normalen BH_5 verlängert, Winkel $EE_1A = BAH_5$ also durch Substitution Winkel $BAE = BAH_5$ ist. Fällt man weiter aus demselben Eckpunkt B des Ouadrats $ABCD$ zur AE die Normale BH_4, so ist in den Dreiecken BAH_4 und BAH_5, wie eben gefunden wurde, Winkel $BAH_4 = BAH_5$ ferner $BA = BA$ und $BH_4A = BH_5A$ deshalb ist auch $BH_4 = BH_5$; weil aber Parallellinien GG_2 und AE sowie AE_4 und G_1G_3 überall gleichweit von einander abstehen, ist, wenn man aus den Eckpunkten G und G_1 die zu den Diagonalen AE und AE_1 Normalen GH und G_1H_1 fällt, $BH_4 = GH$ und $BH_5 = G_1H_1$, folglich $GH = G_1H_1$. Zu dieser

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichung kommt für die Dreiecke NGH und $N_1G_1H_1$ noch $NG = N_1G_1 = \frac{1}{2}f$ und Winkel $NHG = N_1H_1G_1$, also ist in diesen auch Winkel $HNG = H_1N_1G_1$. Diese gleichen Winkel gehören aber auch als Winkel zu den Dreiecken ANG und AN_1G_1, in welchen noch $NA = N_1A = \frac{1}{2}e$ und $NG = N_1G_1$, folglich ist in diesen Dreiecken weiter Winkel $GAN = G_1AN_1$ und $GA = G_1A$ und da zu diesen Gleichungen auch $AE = AE_1$ kommt, so ist die Kongruenz



der Dreiecke GAE und G_1AE_1 und weiter der Parallelogramme $GAEL$ und $G_1AE_1L_1$ erwiesen. Aber auch die Dreiecke AGE und AG_2E sind kongruent, denn im gleichschenkligen Dreieck NGG_2 ist Winkel $NGG_2 = NG_2G$ und an den Parallellinien AE und GG_2 ist Winkel $NGG_2 = ANG$ und Winkel $NG_2G = G_2NE$; daraus folgt durch Substitution $ANG = ENG_2$. Aus dieser Winkelgleichung folgt dann in ganz gleicher Weise, wie oben aus der Winkelgleichung $HNG = H_1N_1G_1$ die Kongruenz der Parallelogramme $GALE$ und $G_1AL_1E_1$ erwiesen wurde, hier die Kongruenz der Parallelogramme $GALE$ und G_2AL_2E und weil man ebenso findet, dafs auch die Parallelogramme $AG_1E_1L_1$ und $AG_3E_1L_3$ kongruent sind, so folgt, dafs es nur ein Parallelogramm der verlangten Art gibt.

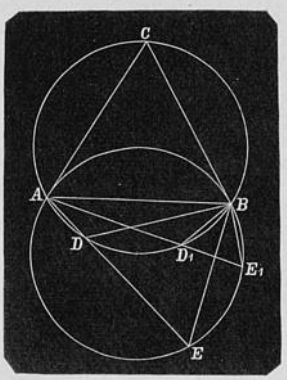
Die Kongruenzbeweise in den Nr. **286** und **288** unterscheiden sich von dem eben entwickelten nicht wesentlich und deshalb ist es wohl nicht nötig, dieselben nach ihrem Gang noch besonders anzugeben.

Bei Nr. 806 d. h. bei der Aufgabe »Über der Seite etwa AB eines in einen Kreis beschriebenen regulären Dreiecks ABC in den kleineren Abschnitt ADD_1B ein Dreieck ADB zu zeichnen, von welchem die Summe s der beiden andern Seiten AD und DB gegeben ist« wurde die gröfsere Zahl von Beweisnummern, nach deren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedeutung ich öfter gefragt wurde, ebenfalls deshalb nötig, weil auch hier noch bewiesen werden mufs, dafs die zwei erhaltenen Dreiecke kongruent sind. Wenn man nämlich über jener Seite AB einen Kreisbogen AEE_1B gezeichnet hat, welcher einen Winkel von 60^0 fafst, so durchschneidet der Kreisbogen, welcher um den einen Endpunkt A jener Seite AB mit der gegebenen Summenstrecke s beschrieben wird, den Kreisbogen AEB in zwei Punkten E und E_1 und die Durchschnittspunkte D und D_1 der erhaltenen Sehnen AE und AE_1 mit der gegebenen Kreislinie ABC liefern die dritten Eckpunkte zweier Dreiecke ABD und ABD_1, deren Kongruenz sich beweisen läfst, wie folgt.

Weil nach Konstruktion die Sehne $AE = AE_1$ ist und in demselben Kreis zu gleichen Sehnen gleiche Bögen gehören, so folgt



$arc\ AE = arc\ ABE_1$, und da $arc\ ABE_1 + E_1EA = 360^0$ ist, so ist auch $arc\ AE + E_1EA = 360^0$; nun sind aber Peripheriewinkel eines Kreises halb so grofs, als die Zentriwinkel, welche auf denselben Bögen stehen, also ist, wenn man die Punkte E und E_1 mit dem Endpunkt B der Seite AB verbindet,

1) Winkel $ABE + ABE_1 = 180^0$.

Weil ferner nach Konstruktion der Winkel $AEB = 60^0$ ist und in jedem Dreieck AEB die Summe der Innenwinkel 180^0 liefert, so ergibt sich weiter, dafs Winkel $EAB + ABE = 120^0$ oder, wenn man hierin statt ABE seinen Wert $180^0 - ABE_1$ aus 1) einsetzt, dafs

2) Winkel $EAB = ABE_1 - 60^0$

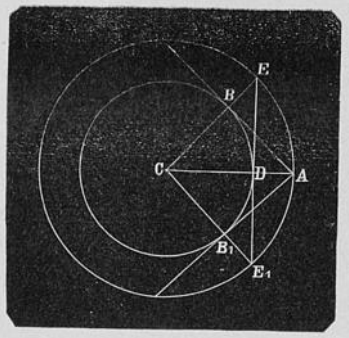
ist. Im regelmäfsigen d. h. gleichseitigen Dreieck ABC sind nun die Winkel z. B. der Winkel $ACB = 60^0$, also folgt, da in jedem einem Kreis einbeschriebenen Viereck $ACBD_1$ die Summe zweier einander gegenüber liegender Winkel 180^0 beträgt, dafs der Winkel AD_1B eine Gröfse von 120^0 hat. Nach Konstruktion ist weiter der Winkel $D_1E_1B = AE_1B = 60^0$, und weil in jedem Dreieck D_1E_1B der Aufsenwinkel AD_1B der Summe der getrennt liegenden Innenwinkel D_1E_1B und D_1BE_1 gleichkommt, so findet man, dafs der Winkel D_1BE_1 60^0 beträgt und durch Verwendung in 2), dafs der Winkel $EAB = ABE_1 - D_1BE_1$ oder dafs der Winkel $DAB = D_1BA$ ist; aufserdem ist in den Dreiecken DAB und D_1BA auch $AB = AB$ und Winkel $ADB = BD_1A$, weil sie im Kreis $ACBD_1D$ Peripheriewinkel auf demselben

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bogen ACB sind, folglich sind diese Dreiecke DAB und D_1BA, welche eine Seite und zwei Winkel bezüglich gleich haben, kongruent.

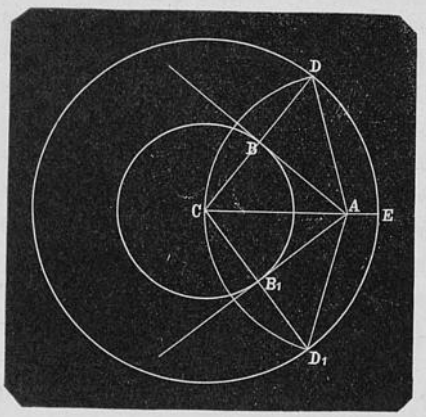
Zur Aufgabe **405** »Von einem aufserhalb eines Kreises C gegebenen Punkte A aus die (zwei) Tangenten AB und AB_1 an den Kreis zu ziehen« werden durch die weiteren Zahlenreihen folgende Konstruktionen angedeutet.

I. Lösung. Man verbindet den gegebenen Punkt A mit dem Zentrum C des gegebenen Kreises, beschreibt mit der erhaltenen Strecke CA um den Mittelpunkt C einen Kreis, errichtet im Schnittpunkt D der gegebenen Kreislinie und der Strecke CA die zu ihr Normale DE, welche die Hilfskreislinie in den Punklen E und E_1 schneidet, verbindet diese Schnittpunkte E und E_1 mit dem Zentrum C sowie die Schnittpunkte B und B_1 der letzten Strecken CE und CE_1 und der gegebenen Kreislinie mit dem gegebenen Punkt A, so sind diese erhaltenen Geraden AB und AB_1 die gesuchten Tangenten.



Beweis. In den Dreiecken ABC und CDE (oder AB_1C und CDE_1) ist $AC = CE$ ferner $BC = CD$ und Winkel $BCA = DCE$, also sind diese Dreiecke kongruent und es ist auch der Winkel $CBA = CDE = 90^0$ und deshalb AB Tangente an den gegebenen Kreis, weil sie zum Radius CB in seinem Endpunkt B normal steht.

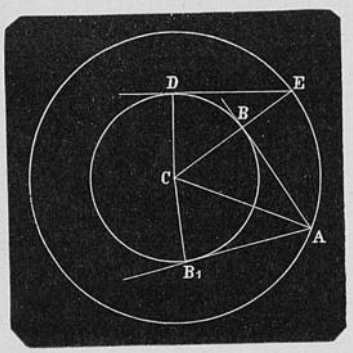
II. Lösung. Man beschreibt um den Mittelpunkt C des gegebenen Kreises mit seinem Durchmesser CE und um den gegebenen Punkt A mit seiner Entfernung AC vom Mittelpunkt C je eine Kreislinie, verbindet deren Schnittpunkte D und D_1 mit dem Mittelpunkt C der gegebenen Kreislinie, welche von diesen Geraden DC und D_1C in den Punkten B und B_1 geschnitten wird, und zieht vom gegebenen Punkt A durch diese Schnittpunkte B und B_1 die Geraden AB und AB_1, so sind diese die gesuchten Tangenten.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

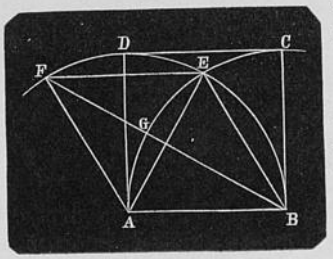
Beweis. Verbindet man noch den gegebenen Punkt A mit den Schnittpunkten D und D_1 der Hilfskreislinien, so ist in den erhaltenen Dreiecken ABC und ABD (AB_1C und AB_1D_1) $AB = AB$ ferner $AC = AD$ und $BC = BD$ also sind diese Dreiecke kongruent und in ihnen auch Winkel $ABC = ABD$ und da diese Winkel Nebenwinkel sind, ist jeder $= 90^0$, folglich AB (AB_1) eine Tangente an den gegebenen Kreis.

III. Lösung. Man zeichnet an den gegebenen Kreis eine beliebige Tangente DE, beschreibt um seinen Mittelpunkt C eine Kreislinie, welche durch den gegebenen Punkt A geht, und um diesen Punkt A mit der begrenzten Tangente DE einen Kreisbogen, welcher die gegebene Kreislinie in den Punkten B und B_1 schneidet und verbindet die erhaltenen Schnittpunkte B und B_1 mit dem gegebenen Punkt A, so sind diese Geraden AB und AB_1 die gesuchten Tangenten.



Beweis. Zieht man noch die Radien CB und CB_1 nach den Schnittpunkten B und B_1 und verbindet den Mittelpunkt C mit den Endpunkten D und E der begrenzten Tangente DE, so ist in den erhaltenen Dreiecken CDE und CBA (CB_1A) $CE = CA$, ferner $CD = CB$ und $DE = AB$, also sind diese Dreiecke kongruent, woraus folgt, dafs der Winkel $CBA = CDE$ ist. Da aber die Gerade DE den gegebenen Kreis berührt, so bildet sie mit dem Berührungsradius CD rechte Winkel, also ist auch der Winkel CBA ein rechter und AB Tangente an den gegebenen Kreis.

Die letzte Zahlenreihe der Nr. **185** d. h. der Aufgabe »Über einer Strecke AB ein Quadrat $ABCD$ zu beschreiben« ergibt folgende Konstruktion.

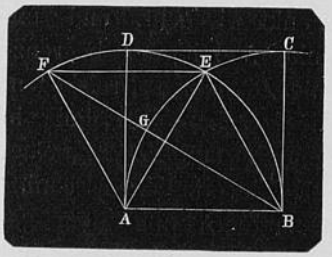


Man beschreibt um die Endpunkte A und B der gegebenen Strecke AB mit dieser Kreisbögen BEF und AEC, welche einander in E schneiden, trägt von diesem Schnittpunkt E aus in den einen Kreisbogen BEF die gegebene

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Strecke AB als Sehne EF ein, verbindet ihren Endpunkt F mit dem Anfangspunkt B dieses Bogens BEF durch die Gerade BF, welche den andern Kreisbogen AEC in G schneidet, beschreibt um den ersten Schnittpunkt E mit seiner Entfernung EG von dem eben erhaltenen Schnittpunkt G einen Kreisbogen, welcher die zwei ersten Bögen in den Punkten C und D durchschneidet und verbindet diese Schnittpunkte C und D mit einander und mit A und B, so ist $ABCD$ das gesuchte Quadrat.

Beweis. Da in den Dreiecken ABE und AEF die drei Seiten AB, AE und BE, sowie AE, AF und FE gleich sind, so



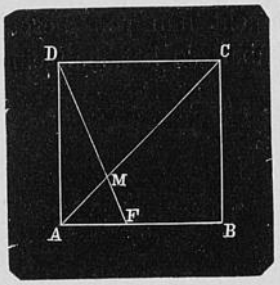
betragen in jedem die Winkel z. B. der Winkel ABE und der Winkel FAE je 60^0, also ist der Winkel $ABF = 120^0$. Nun sind im Dreieck FAB die zwei Seiten AB und AF einander gleich, also sind auch ihre Gegenwinkel AFB und ABF gleich grofs und nach dem Satz von der Summe der Winkel im Dreieck mifst jeder dieser Winkel z. B. FBA 30^0. Weiter stimmen die Dreiecke ABF und EBF in den drei Seiten ($AB = BE$, $AF = EF$ und $BF = BF$) überein, deshalb auch in den Winkeln und es ist der Winkel $EBF = FBA = 30^0$. Ebenso haben die Dreiecke GBE und CBE drei bezüglich gleiche Seiten ($GB = BC$, $EG = EC$ und $BE = BE$), folglich ist in ihnen auch der Winkel $EBC = EBG = EBF = 30^0$ und der Winkel $ABC = 90^0$. Da auch in den Dreiecken AED und BEG die drei Seiten gleich sind, nämlich $AE = (AB =)\ BE$ ferner $ED = EG$ und $AD\ (= AB) = BG$, so mufs auch der Winkel $EAD = EBG$ also auch $= 30^0$ und deshalb der Winkel $BAD = 90^0$ sein. Nun weifs man, dafs die beiden Geraden BC und AD auf derselben dritten Geraden AB normal stehen und deshalb parallel laufen, dafs also im Viereck $ABCD$ die einander gegenüber liegenden Seiten AD und BC gleich und parallel sind, also dieses Viereck ein Parallelogramm ist, in welchem die Gegenseiten AB und CD gleiche Gröfse haben, so dafs alle vier Seiten AB, BC, CD und DA dieses Parallelogramms gleiche Länge haben und weil in ihm auch die Winkel ABC und BAD rechte sind, ist das Viereck $ABCD$ ein Quadrat.

Auch über die Bedeutung der zweiten und dritten Zahlenreihe der Aufgabe Nr. **189** »Ein Quadrat $ABCD$ zu zeichnen, wenn die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

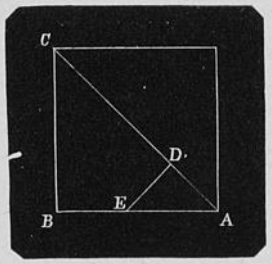
Differenz AM der Diagonale und Seite gegeben ist« mufste ich schon mehrfach Aufschlufs erteilen und obwohl ich glaube, dafs die Lösungen ohne grofse Mühe aus den angegebenen Nummern zu finden sind, will ich doch den Gedankengang, der zu diesen Lösungen führt, kurz angeben.

Wenn man auf der Diagonale AC eines Quadrats $ABCD$ die Seite BC als CM abträgt, wodurch man die Differenz AM der beiden erhält und den erhaltenen Punkt M mit der getrennt liegenden Ecke D (oder B) verbindet und diese DM bis zum Schnittpunkt F mit der Seite AB verlängert, so ist im gleichschenkligen Dreieck CDM, in welchem der Winkel $DCM = 45^0$ ist, der Winkel $CDM = 67\frac{1}{2}^0$ also auch der Winkel $AMF = 67\frac{1}{2}^0$ und man findet ferner, dafs im Dreieck AMF, in welchem $MAF = CAB = 45^0$ ist, nach dem Satz von der Winkelsumme im Dreieck der Winkel $MFA = 67\frac{1}{2}^0$ also auch $= AMF$ und deshalb $AM = AF$ ist.



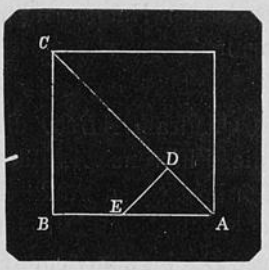
Mit dieser eben besprochenen Aufgabe Nr. **189** ist die Nr. **143** »Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC aus der Differenz AM der Hypotenuse AC und der Kathete BC zu zeichnen« eigentlich identisch. In der siebenten Auflage der Geometrie der Alten ist dieser Aufgabe eine dritte und der Nr. **142** »Ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ABC aus der Summe der Hypotenuse AC und der Kathete BC zu zeichnen« eine zweite Zahlenreihe beigefügt, um deren Deutung ich schon häufig Auskunft geben mufste.

Die Lösung nach diesen Zahlen folgt aus der Betrachtung der Figur, mit welcher man gewöhnlich nachweist, dafs die Diagonale und Seite eines Quadrats zu einander inkommensurabel sind. Bekanntlich trägt man zu diesem Zweck auf der Diagonale AC die Seite BC als CD ab und errichtet im erhaltenen Endpunkt D die zur Diagonale AC Normale DE, welche die Seite AB in E schneidet, dann wird, wie man leicht beweisen kann, $BE = ED = DA$ also ist die Kathete AB des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ABC der Summe aus der Hypotenuse AE und der



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kathete DE des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ADE gleich. Für die Lösung der Aufgabe Nr. **142** beginnt man demnach mit der Konstruktion des Dreiecks ABC, dann erhält man das gesuchte Dreieck ADE, wenn man etwa beachtet, daſs das Viereck $BEDC$ ein Deltoid ist, dessen Diagonale CE den Winkel BCD halbiert. Beginnt man aber die Konstruktion mit dem Dreieck ADE und geht nun von diesem zum Dreieck ABC über, so hat man eine weitere Lösung der Aufgabe **143**.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ka kligen Dreiecks ADE gleich.
Fü beginnt man demnach mit
n des Dreiecks ABC, dann
s gesuchte Dreieck ADE,
beachtet, daſs das Viereck
toid ist, dessen Diagonale
l BCD halbiert. Beginnt
Konstruktion mit dem
und geht nun von diesem
BC über, so hat man eine
wei

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf