Combinationslehre.

Einleitung.

Die Combinationslehre oder Syntaktik giebt die Gesetze an, nach denen man beliebige gegebene Dinge zusammenstellen muss, so dass keine den jedesmaligen Bedingungen entsprechende Zusammenstellung fehlt oder mehrmals vorkommt.

Die gegebenen Dinge, hier Elemente genannt, können ganz beliebig, selbst ungleichartig sein. Jede einzelne Zusammenstellung nennt man eine Complexion.

Die Anwendung der betr. Gesetze wird erleichtert durch Einführung von Elementen, welche ihre Aufeinanderfolge sofort erkennen lassen: Buchstaben und Ziffern. die dann aber nicht als Product oder dekadische Zahl aufzufassen sind. Elemente, die man als idendisch auffasst, bezeichnet man mit demselben Zeichen und deutet das in der Aufgabe durch den Wiederholungs-Exponenten an.

Die erste Complexion enthält die Buchstaben lexicographisch, die Zahlen in natürlicher Ordnung. Hierbei nennt man jedes Element, welches in dieser natürlichen Reihenfolge vor einem andern steht, das niedere, das andere das höhere. In beliebigen Zusammenstellungen unterscheidet man sie dagegen als frühere und spätere.

Die Zusammenstellung der Elemente kann auf dreifache Weise geschehen:

1) Jede Form enthält gleich alle gegebenen Elemente. Dann können die einzelnen Formen sich nur durch die Stellung ihrer Elemente unterscheiden. Permutationen, Permutiren, Ordnungen.

$$P\,(abc) = abc,\ bac,\ cab,\ acb,\ bca,\ cba.$$

2) Man nimmt immer nur eine bestimmte Anzahl der gegebenen Elemente und stellt diese so zusammen, dass keine Form dieselben Elemente, wie eine andere, enthält. — Dabei darf kein niederes Element nach einem höhern stehen. — Die einzelnen Formen unterscheiden sich dann durch Zahl und Art ihrer Elemente. Combinationen, Combiniren, Klassen und Ordnungen.

$$C\,(abc) = a,\ ab,\ abc,\ b,\ ac,\ c,\ bc.$$

3) Man nimmt auch immer nur eine bestimmte Zahl der Elemente, aber stellt diese auf alle möglichen Arten zusammen. Verbindung der Combinationen mit ihren Per-

mutationen. — Die einzelnen Formen unterscheiden sich hierbei durch Zahl, Art und Stellung ihrer Elemente. Variationen, Variiren.

V (abc) = a, b, c; ab, ac, abc, acb,
ba, bc, bac, bca,
ca, cb, cab, cba.

Ausserdem zerfällt die ganze Combinationslehre noch in den construirenden und rechnenden Theil. Der construirende nämlich giebt die Regeln an, nach denen man wirklich alle möglichen Complexionen einer gestellten Aufgabe bilden kann; wobei man entweder mit der 1. Form anfängt, aus dieser die 2., hieraus die 3. u. s. f. bildet, recurrirendes Verfahren; oder gleich irgend eine bestimmte Form bildet, independentes Verfahren. Das letztere Verfahren hat allerdings den Vortheil der grösseren Unabhängigkeit, giebt aber keine Einsicht in den Zusammenhang des Ganzen.

Der rechnende Theil leitet Formeln ab, nach denen man sofort die Anzahl aller möglichen Complexionen einer bestimmten Aufgabe berechnen kann. Man deutet dies an durch N. P. (abc); N. C.; N. V. — Numerus Permutationum.—

I. Permutationen.

Permutationen sind die Zusammenstellungen gleich aller gegebenen Elemente. Es sind auch hier Permutationen ohne und mit Wiederholung möglich. Alle Permutationsformen einer Aufgabe, welche dasselbe Anfangs-Element haben, bilden eine Ordnung.

1) Permutationen ohne Wiederholung.

Die erste Form enthält die sämmtlichen Elemente in lexicographischer oder natürlicher Ordnung. Aus jeder Form erhält man dann die folgende, wenn man in ihr von rechts nach links bis zum ersten Elemente geht, welches als ein niederes vor einem höhern steht, dieses mit dem nächsthöheren der darauf folgenden vertauscht, links keine Veränderung vornimmt, rechts die noch fehlenden Elemente lexicographisch folgen lässt.

Z. B.: dbcfea u. bcafed,
dbeacf bcdaef.

P (abcd =

I. Ordn.	II. Ordn.	III. Ordn.	IV. Ordn.
abcd	bacd	cabd	dabc
abdc	badc	cadb	dacb
acbd	bcad	cbad	dbac
acdb	bcda	cbda	dbca
adbc	bdac	edab	dcab
adcb	bdca	cdba	dcbe

2) Numerus Permutationum ohne Wiederholung.

$$\text{N. P. } (ab..n) = 1.\ 2.\ 3...\ (n-1).\ n = n!$$

Jede Klasse der Permutationen enthält nämlich so viel Ordnungen, als Elemente gegeben sind, und jede Ordnung so viel Formen, als die ganze nächstvorhergehende Klasse.

Zhl. d. Elem.	Z. d. Ord.	Z. d. P. j. Ord.	Zahl aller Permutationen.		
1	1.	1. 1.	1.	1,	1!
2	2.	1	1. 2.	2.	2!
3	3	2.	1. 2. 3.	6.	3!
4	4	6.	1. 2. 3. 4.	12.	4!
:	:	. . . . .	. . .	. . .	. . .
n.	n.	1. 2. 3. .. (n—1).	1. 2. 3. . . . (n—1) n	. . n!	n!

Bkg. Das Product der natürlichen Zahlen von 1—n schreibt man n! und liest es n^{te} Facultät oder Facultät von n.

Aufgabe: Wie viel und welche vierstellige dekadische Zahlen lassen sich durch Permutiren der Ziffern 2, 4 7, 9 bilden.

3) Permutationen mit Wiederholung.

Das Bildungsgesetz ist dasselbe wie bei 1.

$$\text{Z. B. P } \left(\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 23 \end{smallmatrix}\right) = \begin{array}{llll} 11123 & 11321 & 13121 & \underline{23111} \\ 11132 & 12113 & \underline{13211} & 31112 \\ 11213 & 12131 & 21113 & 31121 \\ 11231 & 12311 & 21131 & 31211 \\ 11312 & 13112 & 21311 & 32111. \end{array}$$

4) Numerus Permutationum mit Wiederholung.

$$\text{N. P. } \left(\begin{smallmatrix} & 3 & & 2 \\ 1 & & 23 & \end{smallmatrix}\right) = \frac{6!}{3!\,2!}$$

Denken wir uns zunächst n Elemente und zwar alle ungleich, so wäre die Zahl ihrer Permutationen = n! Sind nun aber unter den Elementen g identische, so werden alle Permutations-Formen gleich sein, in denen diese g Elemente an derselben Stelle stehen. Solcher Permutations-Formen giebt es aber g!, daher wird die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen nur $\frac{n!}{g!}$ sein, u. s. f.

Aufgabe: Wie viel und welche fünfstellige dekadische Zahlen lassen sich aus den Ziffern 3, 3, 5, 7, 7 bilden.

Bkg. Man benutzt die Permutationen zur Bildung von Anagrammen, d. h. zu Umstellungen der Buchstaben eines Wortes oder der Worte eines Satzes, um so diejenigen zu erkennen, die wieder einen vernünftigen Sinn geben.

Z. B.:	roma	orma	mroa	arom
	roam	oram	mrao	armo
	rmoa	omra	mora	aorm
	rmao	omar	moar	aomr
	raom	oarm	maro	amro
	ramo	oamr	maor	amor

II. Combinationen.

Combinationen sind diejenigen Zusammenstellungen, bei denen immer nur eine bestimmte Anzahl der gegebenen Elemente zusammengestellt wird und zwar so, dass nie ein niederes Element nach einem höheren stehen darf.

Man unterscheidet ferner Combinationen mit und ohne — beschränkter und unbeschränkter — Wiederholung. Alle Combinations-Formen mit gleich viel Elementen bilden je eine Classe, wobei man benennt

die Combinationen der 1. Klasse: Unionen,
d. Comb. d. 2. Kl.: Binionen od. Amben,
d. Comb. d. 3. Kl.: Ternionen od. Ternen,
d. Comb. d. 4. Kl.: Quaternionen od. Quaternen.

1. Combinationen ohne Wiederholung.

a. Sämmtliche Combinationen gegebener Elemente nach dem recurrirenden Verfahren zu bilden.

Die Elemente einzeln in natürlicher Ordnung geschrieben, geben die 1. Klasse. Dann findet man allgemein jede folgende Klasse aus der nächstvorhergehenden, wenn man allen Formen dieser Klasse von der 2. Ordnung an das 1. Element, von der 3. Ordnung an das 2. Element u. s. f. vorsetzt.

Bkg. Die letzte Klasse, entsprechend der Anzahl der Elemente, enthält hierbei immer nur eine Form, nämlich die Elemente in natürlicher Ordnung.

$$C\,(1234) = \underline{1,2,3,4} = \text{I. Kl.: 4 Comb.}$$
$$12,13,14$$
$$\underline{23,24,34} = \text{II. Kl.: 6 Comb.}$$
$$123,124,134$$
$$\underline{234} = \text{III. Kl.: 4 Comb.}$$
$$1234 = \text{IV. Kl.: 1 Comb.}$$

b. Anzahl der Combinationen ohne Wiederholung von n Elementen in jeder Klasse.

$$N.\ Ck.\ (a \ldots n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-k+2)\,(n-k+1)}{k!}$$

Die erste Klasse enthält natürlich so viel Formen, als Elemente gegeben sind. Daher $N.\ C_1\ (ab.\ n) = n$.

Aus den Formen der 1. Klasse würde man auch die Formen der 2. Kl. erhalten, wenn man jede Form der I. Kl. mit allen Elementen, die sie nicht enthält, zu Combinationsformen verbände. Dann ergäbe jede Form der 1. Klasse n—1 Formen der 2. Die n Formen der 1. würden also n (n—1) Formen der 2. Kl. ergeben. Nach diesem Verfahren erhielte man jedoch jede Form der 2. Kl. zweimal, z. B. ac aus a mit c und c mit a u. s. f.

Die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen ist daher nur $n\,\frac{(n-1)}{1\,.\,2}$ d. h.

$$N.\ C_2\ (a\,..\,n) = n\,\frac{(n-1)}{1\,.\,2}$$ durch ähnliche

Berechnung erhielte man $N.\ C_3\ (a\,..\,n) = n\,\frac{(n-1)\,(n-2)}{1.\ 2.\ 3}$;

und endlich allgemein $N.\ Ck.\ (a\,..\,n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,..\,(n-k+2)\,(n-k+1)}{k!}$

Anzahl der Combinationen.

Klassen.

Elem.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	3	3	1	.	.	.	.	.	.	.
4	4	6	4	1	.	.	.	.	.	.
5	5	10	10	5	1	.	.	.	.	.
6	6	15	20	15	6	1	.	.	.	.
7	7	21	25	35	21	7	1	.	.	.
8	8	28	56	70	56	28	8	1	.	.
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1	.
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

An Eigenthümlichkeiten dieser Combinations-Zahlen stellen sich heraus:

1. Es sind gleich die Numeri der ersten und der letzten, der zweiten und der drittletzten Klasse jeder Aufgabe.

2. Bei gerader Zahl der Elemente kommt ein Mittelglied vor.

3. Der Numerus einer Klasse irgend einer Aufgabe ist gleich der Summe der Numeri derselben und der nächstvorhergehenden Klasse der vorhergehenden Aufgabe:

$$N.\ Ck\ (a\,..\,no) = N.\ Ck\ (a\,..\,n) + N.\ Ck{-}_1\ (a\,..\,n)$$

c. Gleich eine bestimmte Klasse der Combinationen ohne Wiederholung zu bilden. — Independes Verfahren.

Als erste Form schreibe man die ersten Elemente der Klasse entsprechend in natürlicher Ordnung hin; dann nehme man nur Veränderungen in der letzten Stelle vor, indem man dort nach einander die noch fehlenden höheren Elemente einsetzt. Ist so die letzte Stelle mit dem letzten Elemente besetzt, so setzt man in der vorletzten Stelle das nächsthöhere Element ein und besetzt die letzte Stelle wieder nach einander mit den noch fehlenden Elementen u. s. f. Sind so die beiden letzten Stellen mit den beiden höchsten Elementen besetzt, so setzt man in der drittletzten Stelle das nächsthöhere Element ein u. s. f. Die letzte Form endlich muss die letzten Elemente der Klasse entsprechend in natürlicher Ordnung enthalten

$C_4\,(12\,..\,67) =$	1234	1347	2357
	1235	1356	2367
	1236	1357	2456
	1237	1367	2457
	1245	1456	2467
	1246	1457	2567
	1247	1467	3456
	1256	1567	3457
	1257	2345	3467
	1267	2346	3567
	1345	2347	4567
	1346	2356	

$$N.\ C_4\ (1\,..\,7) = \frac{7.\ 6.}{1.\ 2.}\,\frac{5.\ 4}{3.\ 4} = 35.$$

2) Combinationen mit Wiederholung.

a. Sämmtliche Combinationen mit Wiederholung gegebener Elemente nach dem re-

currirenden Verfahren zu bilden. — Die unbeschränkte Wiederholung deutet man hierbei durch C^1 an.

Die erste Klasse bilden wieder die einzelnen Elemente in natürlicher Reihenfolge. Dann findet man allgemein jede folgende Klasse aus der vorhergehenden, wenn man an jede Form derselben zunächst ihr letztes und dann alle noch fehlenden höheren Elemente anhängt.

C^1 (abcd) = a,b,c,d, = 1 Kl. = 4 Comb.

aa,ab,ac,ad
bb,bc,bd
cc,cd
dd = II. Kl. = 10 Comb.

aaa,aab,aac,aad
abb,abc,abd,acc
acd,add,bbb,bbc
bbd,bcc,bcd,bdd
ccc,ccd,cdd,ddd = III. Kl. = 20 Comb.

b. Anzahl der Combinationen mit Wiederholung von n Elementen in jeder Klasse.

$$N.\ C^1_k\ (a \ldots n) = \frac{n\ (n+1)\ (n+2) \ldots (n+k-2)\ (n+k-1)}{k!}$$

Die erste Klasse enthält so viel Formen als Elemente gegeben. Also $N.\ C^1_1\ (a \ldots n) = n$. Aus der 1. Klasse würde man die 2. auch erhalten, wenn man jede Form der 1. Klasse mit allen Elementen und dann nochmals mit ihrem eigenen zu Combinationsformen verbände; dann gäbe jede Form der 1. Klasse $n + 1$ Formen der 2., die n Formen der 1. würden also $n\ (n + 1)$ Formen der 2. ergeben. Nach diesem Verfahren erhielte man aber wieder jede Form der 2. Klasse zweimal. Die Anzahl der wirklich von einander verschiedenen ist daher nur $\frac{n\ (n+1)}{1.\ 2}$. Durch ähnliche Betrachtung erhielte man: $N.\ C^1_3\ (a \ldots n) = \frac{n\ (n+1)\ (n+2)}{1.\ 2.\ 3}$;

und endlich allgemein: $N.\ C^1_k\ (a \ldots n) = \frac{n\ (n+1)\ (n+2) \ldots (n+k-2)\ (n+k-1)}{k!}$

Anzahl der Combinationen.

Klassen.

Elem.	I.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008
8	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448
9	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758
10	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378

c. Gleich eine bestimmte Klasse der Combinationen mit Wiederholung zu bilden. — Indepentendes Verfahren. —

Als erste Form schreibe man das erste Element so oft hin, als es der Klassen-Index fordert. Dann nehme man nur Veränderungen in der letzten Stelle vor, indem man dort nach einander die noch fehlenden höheren Elemente einsetzt. Ist so die letzte Stelle mit dem letzten Elemente besetzt, so setzt man in der vorletzten Stelle das nächsthöhere Element ein, in der letzten dasselbe und dann nach einander die fehlenden höheren u. s. f. Die letzte Form enthält nur das letzte Element dem Klassen-Index entsprechend.

C_4^1 (1234) =

1111	1224	2234
1112	1233	2344
1113	1234	2333
1114	1244	2334
1122	1333	2344
1123	1334	2444
1124	1344	3333
1133	1444	3334
1134	2222	3344
1144	2223	3444
1222	2224	4444
1223	2233	

$$N.\ C_4^1\ (1234) = \frac{4.\ 5.\ 6.\ 7}{1.\ 2.\ 3.\ 4} = 35.$$

Bedingte Combinationen.

Für die Bildung der Combinationen kann die beschränkende Bedingung gestellt sein, nicht alle Combinations-Formen, sondern nur diejenigen zu bilden, die einer bestimmten Bedingung genügen, z. B. dass je 2 auf einander folgende Elemente dieselbe Differenz oder denselben Quotienten ergeben.

1257	oder	1 2	4	8
2468		3 6	12	24
14710		1 3	9.	27
25811		2 6	18.	54

Eine der gewöhnlichsten Bedingungen ist, dass die Elemente, als Zahlen betrachtet, dieselbe Summe ergeben: Combinationen zu bestimmten Summen. Um solche Combinationen ohne oder mit Wiederholung zu bestimmten Summen zu bilden, besetze man die Stellen bis zur vorletzten (incl.) mit den niedrigsten Elementen, in die letzte Stelle setze man dann das sog. Ergänzungs-Element, d. h. dasjenige ein, welches die Summe der vorhergehenden zur verlangten Summe ergänzt. Dann erhöhe man, so lange es die Combinations-Regeln und die verlangte Summe erlauben, die vorletzte Stelle um 1 und vermindere ebenso die letzte um 1. Haben die beiden letzten Stellen die letzten Elemente, so gehe man in die vorletzte zurück u. s. f.

$10\,C_3\,(1\,.\,.\,7) = 127,\ 136,\ 145,\ 235.$

$15\,C_4\,(1\,.\,9) = 1239,\ 1248,\ 1257,\ 1347,\ 1356,\ 2346.$

$5\,C_4^1\,(01\,.\,5) = 0005,\ 0014,\ 0023,\ 0113,\ 0122,\ 1112.$

($15\,C_4^1\,(1—9)$ giebt 23 Formen; $24\,C_6^1\,(34—n)$ giebt 11 Formen.)

Bkg. Die Bildung dieser Combinationen wird unmöglich sein, sowohl wenn die höchste Combinations-Form der gegebenen Elemente die verlangte Summe nicht erreicht, als auch wenn die niedrigste Combinations-Form dieselbe schon übersteigt.

Variationen.

Auch bei den Var. wird immer nur eine bestimmte Anzahl der Elemente, aber diese auf alle möglichen Weisen, zusammengestellt. Die einzelnen Var.-Formen unterscheiden sich daher durch Zahl, Art und Stellung ihrer Elemente. — Sind Combinationen mit ihren Permutationen — (V. ohne und mit Wiederholung — Bezeichnung).

I. Variationen ohne Wiederholung.

a) Recurrirendes Verfahren.

Die erste Klasse besteht aus den einzelnen Elementen als Var.-Formen. Allgemein erhält man dann aus jeder Kl. die folgende, wenn man an jede ihrer Formen nach einander alle Elemente anhängt, die sie nicht enthält.

V (abcd) = a,b,c,d I. Kl. = 4

ab,ac,ad
ba,bc,bd
ca,cb,cd
da,db,dc II. Kl. = 12

abc,abd,acb,acd,adb,adc
bac,bad,bca,bcd,bda,bdc
cab,cad,cda,cbd,cda,cdb
dab,dac,dba,dbc,dca,dcb III Kl. = 24

u. s. f.

b) Numerus Variationum ohne Wiederholung.

1. Die Variat. der 1. Kl. ist gleich der Anzahl der gegebenen Elemente, also: $N\ V_1\ (a\,..\,n) = n$.

5. Aus der 1. Kl. erhielt man die 2., wenn man an jede Form der 1. Kl. alle Elemente anhängt, die sie nicht enthält. Da nun jede Form n—1 Elemente nicht enthält, so ergiebt sie n—1 Formen der 2. Kl. Die n Eormen der 1. Kl. daher n (n—1) Formen der 2. Kl.: $N.\ V_2\ (a\,..\,n) = n\ (n-1)$.

3. Auf ähnliche Weise ergeben sich für die 3. Kl. n (n—1) (n—2) Formen und allgemein: $N.\ Vk\ (a\,..\,n) = n\ (n-1)\ldots(n-k+2)\ (n-k+1)$

Bkg. Da die Variationen nichts sind als Combinationen mit ihren Permutationen, so muss sich der Num. Var. auch ergeben aus Num. Comb. x Num. Permut.

$$N.\ Ck\ (a\,..\,n) = n\ \frac{(n-1)\ (n-2)\ldots(n-k+2)\ n-k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots k}\ .\ 1.\ 2.\ 3.\,.\,k_1$$

$$= n\ (n-1)\,.\,(n-k+2)\ (n-k+1) = N.\ Vk\ (a\,..\,n).$$

c) Independentes Verfahren.

Soll man gleich eine bestimmte Klasse bilden, so ergeben die ersten Elemente, dem Klassen-Index entsprechend, in natürlicher Ordnung die erste Form. Dann setzt man nach einander in die letzte Stelle die noch fehlenden höheren Elemente ein. Ist die letzte Stelle mit dem höchsten Elemente besetzt, so setzt man in die vorletzte das nächsthöhere und in die letzte nach einander alle noch fehlenden ein u. s. f.

V_3 (abcd) =	abc	bac	cab	dab
	abd	bad	cad	dac
	acb	bca	cba	dba
	acd	bcd	cbd	dbc
	adb	bda	cda	dca
	adc	bdc	cdb	dcb

N. V_3 (abcd) = 4. 3. 2.

II. Variationen mit Wiederholung.

a) Recurrirendes Verfahren.

1. Die Elemente einzeln in natürlicher Ordnung ergeben die erste Klasse. Dann erhält man aus jeder Klasse die folgende, wenn man an jede Form derselben alle Elemente ohne Ausnahme anhängt.

V^1 (abcd): a, b, c, d. I Kl. = 4

aa,ab,ac,ad
ba,bb,bc,bd
ca,cb,cc,cd
da,db,dc,dd II Kl. $4 = 4.\ 4 = 4^2 = 16.$

aaa,aab,aac,aad
aba,abb,abc,abd
aca,acb,acc,acd
ada,adb,adc,add
baa,bab,bac,bad
bba,bbb,bbc,bbd
bca,bcb,bcc,bcd
bda,bdb,bdc,bdd. III. Kl. $= 4^3 = 64$

u. s. f.

b) Numerus Variationum ohne Wiederholung.

1. Die 1. Klasse enthält soviel Var.-Formen als Elemente gegeben sind: $N. V_1 (a..n) = n$.

2. Aus der 1. erhielt man die 2. Kl., wenn man an jede Form der 1. alle n Elemente anhängt, also giebt jede Form der 1. Kl. n Formen der 2., daher die n Formen der 1. n. n ad. n^2 Formen der 2. $N. V_2' (a..n) = n^2$.

3. Ebenso erhält man für die 3. Klasse n^3: $N. V_k^1 (a..n) = n^k$ u. s. f.

c) Independentes Verfahren.

Um gleich eine bestimmte Kl. der Var. mit Wiederholung zu bilden, setzt man das erste Element so oft hin, als es der Klassen-Index erfordert. Zunächst setzt man dann in die letzte Stelle alle noch folgenden Elemente ein. Darauf besetzt man die vorletzte Stelle mit dem nächsthöheren Elemente und die letzte nach einander mit allen Elementen ohne Ausnahme u. s. f.

V_3^1 (1234) =	111	211	311	411
	112	212	312	412
	113	213	313	413
	114	214	314	414
	121	221	321	421
	122	222	322	422
	123	223	323	423
	124	224	324	424
	131	231	331	431
	132	232	332	432
	133	233	333	433
	134	234	334	434
	141	241	341	441
	142	242	342	442
	143	243	343	443
	144	244	344	444

$$N. V_3^1 (1233) = 4^3 = 64.$$

Bedingte Variationen.

Auch bei Bildung der Variationen kann man ähnliche Bedingungen aufstellen, wie bei den Combinationen, z. B. Var. zu bestimmten Summen, wenn die Elemente Ziffern sind.

Das Bildungsgesetz dabei ist dasselbe, wie bei den Comb., nur kann natürlich hier auch ein niederes Element nach einem höheren stehen.

9 V_2 (1 . . 8) = 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81.

7 V_3 (1 . . 9) = 124, 142, 214, 241, 412, 421.

6 V_4' (12 . .) = 1113, 1122, 1131, 1212, 1221, 1311, 2112, 2121, 2211, 3111.

Bkg. Die Variationen der Elemente 0—9 mit unbeschränkter Wiederholung geben das dekadische Zahlensystem

Binomischer oder Newton'scher Lehrsatz.

Hülfssatz. Die Summe der Combinationen ohne Wiederholung der kt. Klasse der Elemente a—n vermehrt um die Comb. ohne Wiederholung der k—1. Kl. derselben Elemente, wenn man jeder der letzten Comb.-Formen ein neues Element q hinzufügt, giebt die Summe der Comb. der k. Kl. der Elem. a—nq.

Bkg. Die ersten Comb.-Formen der linken Seite enthalten k Elemente; die zweiten zunächst nur k—1; da aber jeder Form das Element q hinzugefügt werden soll, so werden es ebenfalls k Elemente, links stehen also nur Comb.-Formen der k. Klasse; da keine Wiederholung gestattet ist, werden alle Formen verschieden von einander sein. Ferner handelt es sich um die numeri:

$$N.\ Ck\ (a\,..\,n) = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ ..\ (n-k+1)}{1.\ 2.\ 3.\ ...\ k.}$$

$$N.\ Ck_{-1}\ (a\,..\,n)q = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ ..\ (n-k+2)}{1.\ 2.\ 3.\ ..\ k-1}$$

$$N.\ Ck\ (a\,..\,n) + N.\ Ck_{-1}\ (a\,..\,n)q = \frac{n\ (n-1)\ ..\ (n-k+1)}{1.\ 2.\ ..\ k} + \frac{n\ (n-1)\ ..\ (n-k+2)}{1.\ 2.\ \ k-1}$$

$$= \frac{n\ (n-1)\ ..\ (n-k+1) + n\ (n-1)\ ..\ (n-k+2)\ k}{1.\ 2.\ .\ k.}$$

$$= \frac{n\ (n-1)\ ..\ (n-k+2)\ [n-k+1+k]}{1.\ 2.\ ..\ k} = \frac{(n+1)\ n\ (n-1)\ ...\ (n-k+2)}{1.\ 2.\ 3.\ ..\ k}$$

$$N.\ Ck\ (a\,..\,n\ 9) = \frac{(n+1)\ n\ (n-1)\ ...\ (n-k+2)}{1.\ 2.\ 3.\ ..\ k}$$

1) Ein Product von n Binominal-Factoren: $(x + a)\ (x + b)\ (x + c)\ ...\ (x + n)$, welche den gemeinschaftlichen Posten x haben, zu entwickeln.

Auflösung: Man bilde zunächst das Product von 2, 3 u. s. f. Factoren:

1. $(x + a)(x + b) = x^2 + a\,x + b\,x + ab = x^2 \begin{array}{l|l} + a & x + ab. \\ + b & \end{array}$

2. $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + a\,x^2 + b\,x^2 + ab\,x = x^3 \begin{array}{l|l|l} + a & x^2 + ab & x + abc \\ + b & + ac & \\ + c & + bc & \end{array}$
$+ cx^2 + acx + bcx + abc =$

3. $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = x^4 \begin{array}{l|l|l|l} + a & x^3 + ab & x^2 + abc & x + abcd. \\ + b & + ac & + abd & \\ + c & + ad & + acd & \\ + d & + bc & + bcd & \\ & + bd & & \\ & + cd & & \end{array}$

u. s. f.

Aus der Analogie dieser 3 Werthe wird man schon den Werth des Productes ableiten können: Man erhält eine Reihe von $n + 1$ Gliedern und zwar geordnet nach fallenden Potenzen des gemeinschaftlichen Postens x, so dass der Exponent des 1. Gliedes gleich der Anzahl der Factoren, jeder folgende Exponent um 1 kleiner wird, das letzte Glied somit den Exponenten 0 hat. Ausserdem treten als Coefficienten vom 2. Gliede an hinzu nach einander die Summen der Comb. ohne Wiederholung der 1., 2., 3. u. s. f. bis n. Klasse der nicht gemeinschaftlichen Posten a b c . . . n.

Bkg. 1. Die Comb.-Formen sind entstanden durch Multiplikation der Binominalfactoren; sie können und müssen daher hier als Producte, die Elemente als ihre Factoren betrachtet werden.

2. In jedem Gliede der erhaltenen Reihe giebt der Exponent des gemeinschaftlichen Postens und der Klassen-Index des Comb.-Coefficienten eine constante Summe, nämlich die Anzahl der Binominal-Factoren.

§ 2.

Nach dem Gesagten können wir zunächst folgende Reihe als richtig annehmen:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\ldots(x+n) = x^n + S.C_1(a..n)x^{n-1} + S.C_2(a..n)x^{n-2} + \ldots + S.C_{n-1}(a..n)x + S.C^n(a..n)$$

Es ist nun nachzuweisen: dass man auch die entsprechende richtige Reihe bekommt, wenn man noch 1 Factor: $x + o$ hinzunimmt. Die linke Seite wird dann:

$$(x + a)(x + b)(x + c)\ldots(x + n)(x + o).$$

Die rechte geht — gleich geordnet — über in:

$$x^{n+1} + S.C_1(a..n)\,x^n + S.C_2(a..n)\,x^{n-1} + \ldots + S.C_{n-1}(a..n)\,x^2 + S.C^n(a..n)\,x^1$$
$$+ \quad o\,x^n + S.C_1(a..n)\,o\,x^{n-1} + \quad + S.C_{n-2}(a..n)\,o\,x^2 + S.C_{n-1}(a..n)\,o\,x + S.C^n(a..n)\,o.$$

Wendet man jedoch hierauf den Hülfssatz an, so geht diese Summe über in:

$$x^{n+1} + S.C_1(a..n.o)\,x^n + S.C_2(a..n.o)\,x^{n-2} + \ldots + S.C_{n-1}(a..n.o)\,x^2 + S.Cn(a..n.o)\,x + S.C_{n-1}(a..n.o)$$

d. h. in die entsprechende Reihe für n + 1 Faktoren.

Wir haben also hiermit bewiesen: Wenn die Reihe für n Factoren richtig ist, so ist sie auch richtig für n + 1 Factoren. Wirklich als richtig erwiesen durch Multiplication ist sie für 2, 3 und 4 Factoren, mithin muss sie auch richtig sein für 5, dann für 6, für 7 u. s. f. bis in's Unendliche.

Bkg. Die Reihe wird in ihrer allgemeinen Form nicht geändert werden, wenn einzelne der Factoren Differenzen sind, nur muss man dann eben die einzelnen Comb.-Formen als Producte betrachten und dann mit Rücksicht auf die Vorzeichen ihrer einzelnen Elemente das Vorzeichen jedes solchen Productes bestimmen.

$$\text{Z. B. } (x+4)(x+3)(x+5)(x+2) = \begin{array}{l|l|l|l} x^4 + 4 & x^3 + 4.3 = 12 & x^2 + 4.3.5 = 60 & x + 4.3.5.2. \\ \quad\;\; + 3 & \quad\;\; + 4.5 = 20 & \quad\;\; + 4.3.2 = 24 & \\ \quad\;\; + 5 & \quad\;\; + 4.2 = 8 & \quad\;\; + 4.5.2 = 40 & \\ \quad\;\; + 2 & \quad\;\; + 3.5 = 15 & \quad\;\; + 5.5.2 = 30 & \\ & \quad\;\; + 3.2 = 6 & & \\ & \quad\;\; + 5.2 = 10 & & \end{array}$$

$$= x^4 + 14\,x^3 + 71\,x^2 + 154\,x + 120.$$

§ 3

Ableitung der Reihe für $(x+a)_n$ geordnet nach fallenden Potenzen von x.

In § 2 haben wir bewiesen, dass:

$$(x+a)(x+b)..(x+n) = x^n + S.C_1(a..n)\,x^{n-2} + S.C_2(a..n)\,x^{n-1} + \ldots + S.C_{n-1}(a..n)\,x + S\,Cn(a..n).$$

Setzen wir in dieser Gleichung links für b, c . . . . n stets a ein, so geht die linke Seite über in: $(x + a)(x + a) \ldots (x + a) = (x + a)^n$. rechts bleibt zunächst das erste Glied unverändert: x_n.

Das 2. hat x^{n-1} und als Coefficient die $S.C_1$ (a . . n), da nun jetzt alle Glieder von b bis n = a angenommen sind, so geht diese Summe über in a + a + a + a + . . . d. h. in eine Summe von lauter unter sich gleichen Posten a; für diese Summe kann man das Product aus diesem Posten und ihrer Anzahl einsetzen. Die Anzahl wird aber be-

stimmt durch den N. C_1 (a . . n) d. h. durch $\frac{n}{1}$ daher ist der Coefficient $= \frac{n}{1}$ a, und das 2 Glied: $\frac{n}{1}$ a x^{n-1}

Das 3 hat zunächst x^{n-2} und als Coefficient S C_2 (a . . n). Hier wird jede Comb-Form übergehen in a a, oder, da wir sie nach dem früheren als ein Product betrachten müssen, in a^2. Wir haben daher wieder eine Summe von lauter unter sich gleichen Posten a^2, deren Anzahl = N. C_2 (a . . n) d. h $= \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}$. Für die Summe können wir also einsetzen: n (n—1) a^2; und das 2. Glied wird: n (n—1) a^2 x^{n-2} u s f. Das Endresultat wird daher:

$$(x+a)^n = x^n + \frac{n}{1}\, x^{n-1}\, a + \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}\, x^{n-2}\, a^2 + \ldots + \frac{n\,(n-1)}{1.\ 2}\, x^2\, a^{n-2} + \frac{n}{1}\, x\, a^{n-1} + a^n$$

Ist das 2. Glied des Binomens negativ, so behalten die einzelnen Glieder der Reihe ihren absoluten Werth bei, nur werden alle Glieder, in denen der Potenzexponent von a eine ungerade Zahl, selbst negativ, während die mit geradem Exponenten von a positiv bleiben.

$$(x+a)^n = x^n - n\, x^{n-1}\, a + n\,(n-1)\, x^{n-2}\, a^2 - \ldots .$$

Die im Vorigen in ihrer Allgemeinheit für positive und ganze Exponenten n abgeleitete Reihe jedes Binomens nennt man den Binomischen oder Newton'schen Lehrsatz oder die Binominal-Reihe.

Der Character der Reihe ist folgender:

1. Sie enthält n + 1 Glieder d. h. ein Glied mehr als der Exponent des Binomens Einheiten enthält.

2. Sie ist geordnet nach fallenden Potenzen des 1. und steigenden des 2. Gliedes des Binomens und zwar so, dass in jedem Gliede die Summe der Exponenten der beiden Binominal-Glieder = n, d. h. = dem Exponenten des Binomens. Sie fängt daher an mit den n. Potenz des 1. und 0. Potenzen des 2. Binominal-Gliedes und endet mit der o. Potenz des 1. und n. Potenz des 2. indem in jedem folgenden Gliede die Potenz des 1. um 1 fällt, des 2. um 1 steigt.

3. Zu den Potenzen treten noch Zahlen-Coefficienten hinzu, nämlich vom 2. bis zum (n+1). Gliede die Num. Comb. ohne Wiederholung der Klassen n bis 1 für n Elemente. Da nun die n. Klasse den Num. 1 hat, die (n—1), den Num. $\frac{n}{1}$ u. s. f. hat, so ergiebt sich, dass in der Binominal-Reihe die Coefficienten derjenigen Glieder, welche gleichweit vom Anfang und Ende entfernt sind, selbst einander gleich sind.

4. Ist n eine ungerade Zahl, so ist die Anzahl der Glieder (n+1) eine gerade; es

muss daher 2 Mittelglieder geben, welche gleiche Coefficienten und zwar die höchsten enthalten; ist n gerade, so giebt es nur einen mittleren höchsten Coefficienten.

4. Bilden wir die Coefficienten — immer Binominal-Coefficienten genannt — so ergiebt sich folgendes Schema:

Potz.	^{0}B	^{1}B.	^{2}B.	^{3}B.	^{4}B.	^{5}B.	^{6}B.	^{7}B.	^{8}B.	^{9}B.	^{10}B.
1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	1	2	1	.	.	.	.	.	.	.	.
3	1	3	3	1	.	.	.	.	.	.	.
4	1	4	6	4	1	.	.	.	.	.	.
5	1	5	10	10	5	1	.	.	.	.	.
6	1	6	15	20	15	6	1	.	.	.	.
7	1	7	21	35	35	21	7	1	.	.	.
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	.	.
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	.
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	18	1

Für die Binominal-Coefficienten ergeben sich folgende Eigenschaften:

a) Jeder Binominal-Coefficient irgend einer Potenz ist gleich der Summe des entprechenden und des nächstvorhergehenden der vorigen Potenz, z. B.: 4. B. C. d. 8. Potz. (56) = 4. + 3. d. 7. Potz. = 35 + 21.

b) Die Summen der Binominal-Coefficienten der einzelnen Potenzen ergeben die entsprechenden Potenzen der Zahl 2.

S. d. Bin.-Coeff. d. 1. Potz.: $1 + 1 = 2 = 2^1$
„ „ „ „ „ 2. „ $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$
„ „ „ „ „ 3. „ $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$
„ „ „ „ „ 4. „ $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 4^4$ u. s. f.

Dies Gesetz ergiebt sich allgemein, wenn man $x = a = 1$ setzt; die Gleichung geht dann über links in: $(1 + 1)^n = 2^n$, rechts gehen alle Potenzen der Posten in 1^1, 1^2, 1^3 u. s. f., d. h. 1 über, es bleiben also nur die Binominal-Coefficienten übrig, deren Summe daher $= 2^n$ sein muss.

c) Ist das Binomen eine Differenz, so ist die Summe der Binominal-Coefficienten = 0, denn für diesen Fall geht $(x + a)^n$ über in $(1-1)^n = 0^n = 0$.