Wissenschaftliche Beilage
des Königlichen Gymnasiums zu Meseritz
Ostern 1897.

Das zweite Jahr

des

geometrischen Unterrichtes

am Gymnasium

von

Ernst W. G. Schulze
Oberlehrer.

1897. Programm Nr. 165.

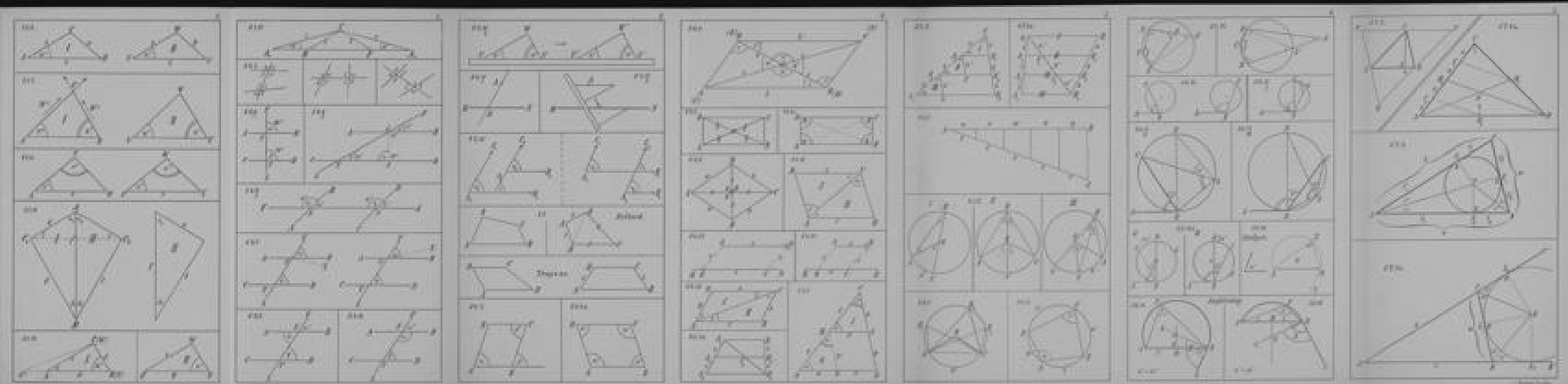
1897.
Buchdruckerei von P. Matthias in Meseritz.

qme
16 (1897)
1656

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Von der Kongruenz der Dreiecke.

1. Erklärung. Zwei (oder mehr) ebene Figuren heißen **kongruent,** wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihre Begrenzungen oder Umfänge einander genau und vollständig decken.

Die Seiten (oder die Winkel), die bei der Deckung aufeinander fallen, heißen entsprechende Seiten (entsprechende Winkel).

In kongruenten Dreiecken liegen entsprechenden Winkeln (Seiten) auch entsprechende Seiten (Winkel) gegenüber.

Das Zeichen für kongruent ist $\cong$, d. h. $=$ gleich und $\sim$ ähnlich; denn kongruente Figuren stimmen sowohl in der Größe als auch in der Form überein.

2. Folgerung: Wenn zwei Figuren einander kongruent sind, so sind je zwei entsprechende Seiten und je zwei entsprechende Winkel einander gleich.

3. Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, das mit einem gegebenen ABC übereinstimmt in zwei Seiten AB und AC und dem (von diesen) eingeschlossenen Winkel α. (Die Zeichnung ist auszuführen mit dem Maßstabe und mit dem Transporteur oder aber mit dem Zirkel allein nach § 15,13 des Quarta-Kursus.)

4. Erster Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und in dem eingeschlossenen Winkel.

Wenn $AB = UV$
und $AC = UW$
und $\angle A = \angle U$ ist,

so soll $\triangle I \cong \triangle II$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Da n. d. V. die Seite AB = UV ist, so läßt sich das △ II so auf das △ I legen, daß der Eckpunkt U auf den Eckpunkt A und der Eckpunkt V auf den Eckpunkt B fällt.*

Da ferner n. d. V. ∠ A = ∠ U ist, so müssen auch die beiden anderen Schenkel dieser beiden Winkel auf einander fallen; d. h. es fällt UW in die Richtung von AC.

Da endlich n. d. V. noch die Seite AC = UW ist, so fallen auch noch die beiden anderen Endpunkte dieser beiden Seiten aufeinander, d. h. es fällt der Eckpunkt W auf den Eckpunkt C.**

Von den beiden dritten Seiten x und y decken sich somit die Endpunkte, also decken sich auch diese beiden Seiten selbst; denn zwischen zwei Punkten ist nur eine Gerade möglich.

5. Folgerung: Es ist nun auch noch

x = y als entsprechende Seiten in kongruenten Dreiecken
∠ B = ∠ V " " Winkel " " "
∠ C = ∠ W " " " " " " .

6. Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, das mit einem gegebenen ABC übereinstimmt in einer Seite AB und in den beiden ihr anliegenden Winkeln α und β.

7. Zweiter Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und in den beiden anliegenden Winkeln.

Wenn AB = UV
und ∠ A = ∠ U
und ∠ B = ∠ V ist,

so soll △ I ≅ △ II sein.

Beweis: Da n. d. V. die Seite AB = UV ist, so läßt sich das △ II so auf das △ I legen, daß der Eckpunkt U auf den Eckpunkt A und der Eckpunkt V auf den Eckpunkt B fällt.***

Da nun ferner n. d. V. ∠ A = ∠ U ist, so fallen auch die beiden anderen Schenkel dieser Winkel aufeinander d. h. es fällt UW in die Richtung von AC. Bezeichnen wir dabei die neue Lage des Punktes W mit W', so muß W' auf dem Strahle AC liegen.

* Schreibe (U) bei A hin und (V) bei B hin. ** Schreibe (W) bei C hin. *** Schreibe (U) bei A und (V) bei B hin.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da schließlich n. d. V. noch $\angle B = \angle V$ ist, so fallen auch wieder die beiden anderen Schenkel dieser Winkel aufeinander, d. h. es fällt VW in die Richtung von BC; danach muß der Punkt W' auch auf dem Strahle BC liegen. Es kann somit W', d. h. der dritte Eckpunkt des Dreieckes II, nur auf den Punkt C gefallen sein; denn zwei gerade Linien (AC und BC) können sich nur in einem Punkte schneiden. Die beiden Dreiecke decken somit einander vollständig.

8. Folgerung: Es ist nun auch noch

UW = AC als entsprechende Seiten in kongruenten △ △

VW = BC " " " " " "

und $\angle C = \angle W$ " " Winkel " " " .

Dies letztere ist allerdings auch ohnehin der Fall nach § 12. 8,3 des Quarta-Kursus.

9. Zusatz zum zweiten Kongruenzsatze: Zwei Dreiecke sind auch kongruent, wenn sie übereinstimmen in einer Seite, einem anliegenden und in dem Gegenwinkel dieser Seite (siehe die Figur.)

Beweis: Stimmen nämlich zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so sind auch die beiden dritten Winkel einander gleich, d. h. $\angle B = \angle V$ als gleiche Reste von 2 R. In unserem Falle sind aber die beiden dritten Winkel die zweiten anliegenden Winkel. Hiermit ist der vorliegende Fall auf den Hauptfall zurückgeführt.

10. Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, das mit einem gegebenen ABC übereinstimmt in den drei Seiten.

11. Dritter Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in den drei Seiten.

1. Beweis: Siehe § 15,12 des Quarta-Kursus. (S. 39.)

2. Beweis: Wir denken uns wieder die beiden Dreiecke aneinander gelegt und zwar mit der längsten Seite und entsprechenden Eckpunkten (siehe die Figur).

Es sind dann α_1 und β_1 und ebenso α_2 und β_2 spitze Winkel, weil sie nicht der größten Dreiecksseite gegenüber liegen; die Winkel C_1AC_2 und C_1BC_2 sind also hohle. Die Hülfsgerade C_1C_2 ist somit die gemeinschaftliche Basis zweier nebeneinander liegender gleichschenkliger Dreiecke.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist daher $\varepsilon = \circ$ als Basiswinkel
und ebenso $\eta = \omega$ " " ;

folglich ist $\varepsilon + \eta = \circ + \omega$
oder $\angle AC_1B = \angle AC_2B$.
Da aber $AC_1 = AC_2$
und $BC_1 = BC_2$ ist,

so ist $\triangle$ I $\cong$ $\triangle$ II n. d. 1. Kongruenzsatze, w. z. b. w.

12. Folgerung: Stimmen zwei Dreiecke in den drei Seiten überein, so stimmen sie auch in den drei Winkeln überein; es ist also in unserer Figur auch noch $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$.

13. Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen, das mit einem gegebenen ABC übereinstimmt in zwei Seiten und in dem Gegenwinkel der größeren dieser beiden Seiten.

Anleitung: Man fange entweder mit der kleineren Seite oder mit dem Gegenwinkel der größeren Seite an.

14. Vierter Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und in dem Gegenwinkel der größeren Seite.

Wenn $AC = UW = s$
und $BC = VW = t$
und $s > t$
und $\angle B = \angle V$ ist,

so soll $\triangle$ I $\cong$ $\triangle$ II sein.

Beweis: Zwischen den dritten Seiten x und y dieser beiden Dreiecke sind nur zwei Größenbeziehungen denkbar: nämlich entweder ist $x = y$ oder es hätten x und y verschiedene Länge.

Wir werden nun zeigen, daß sich die letztere Annahme mit unserer Voraussetzung nicht verträgt und darum unzulässig ist.

Wäre nämlich vorgeblich etwa $y > x$, so legen wir das $\triangle$ II so auf das $\triangle$ I, daß das kleinere gleiche Seitenpaar mit den entsprechenden Endpunkten aufeinander fallen, d. h. daß der Eckpunkt W auf C und der Eckpunkt V auf B fällt.

Da nun n. d. V. $\angle B = \angle V$ ist,
so muß VU in die Richtung BA fallen, und wenn wirklich $y > x$ wäre, so müßte der Punkt U noch über A hinaus etwa in U' fallen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nun der Winkel α nicht der größten Dreiecksseite gegenüber liegt, so ist er ein spitzer; daher ist sein Nebenwinkel CAU' ein stumpfer und darum der größte Winkel des Dreiecks CAU'. Es ist somit seine Gegenseite U'C die größte Seite darin und demnach ist $U'C > AC$.

Da aber n. d. V. $UW = AC$ ist, so kann auch der Eckpunkt U nicht über A hinausgefallen sein, d. h. von den beiden dritten Seiten kann keine länger sein als die andere.

Es bleibt dann nur übrig, daß infolge unserer Voraussetzung auch die beiden dritten Seiten gleich lang sein müssen; dann sind aber die beiden Dreiecke kongruent nach dem dritten Kongruenzsatze.

15. Der vorstehende Beweis beruht wesentlich darauf, daß der Winkel α ein spitzer ist. Dies muß aber auch dann noch der Fall sein, wenn $s = t$ ist; denn die Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks sind stets spitze. Demnach gilt der

Zusatz: Zwei gleichschenklige Dreiecke sind kongruent wenn sie übereinstimmen in den Schenkeln und in dem einen Basiswinkel.

16. Folgerung: Wenn zwei Dreiecke den Bedingungen des vierten Kongruenzsatzes genügen, so stimmen sie auch in den dritten Seiten und in den beiden anderen Winkeln überein.

17. Bemerkung: Wenn zwei Dreiecke übereinstimmen in zwei Seiten und in dem Gegenwinkel der kleineren, so können die Gegenwinkel der beiden größeren Seiten ebenfalls einander gleich sein (und dann sind die beiden Dreiecke kongruent nach dem Zusatze des 2. Kongruenzsatzes z. B. $\triangle A_1BC$ und $\triangle A_2FC$ oder $\triangle A_1FC$ und $\triangle A_2BC$) oder diese beiden Winkel sind verschieden groß, ergänzen aber dann einander zu 2 R. Im letzteren Falle sind die beiden Dreiecke natürlich einander nicht kongruent z. B. die beiden Dreiecke A_1BC und A_2BC oder die beiden Dreiecke A_1FC und A_2FC.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Die allgemeinen Sätze über die Parallelen.

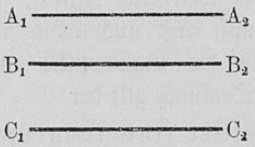
1. Erklärung: Zwei gerade Linien einer Ebene heißen **gleichlaufend** oder einander **parallel**, wenn sie einander nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängert.

Das Zeichen für parallel ist ||.

AB || CD heißt also: AB ist parallel zu CD.

2. Grundsatz: Durch einen Punkt (A) ist zu einer Geraden (BC) nur eine Parallele möglich.

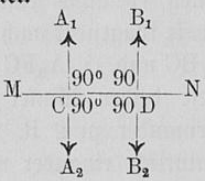
3. Lehrsatz: Zwei gerade Linien (A_1A_2 und B_1B_2) die derselben dritten Geraden (C_1C_2) parallel sind, sind auch einander parallel.



Wenn $A_1A_2 \parallel C_1C_2$
und auch $B_1B_2 \parallel C_1C_2$ ist,
so soll auch $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ sein.

Beweis: Wollte man annehmen, die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 schnitten einander in einem Punkte X, so gäbe es ja durch diesen vorgeblichen Schnittpunkt X zwei Parallelen zu der Geraden C_1C_2. Dies ist aber nach dem vorstehenden Grundsatze nicht möglich. Es bleibt also nur übrig, daß $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist, w. z. b. w.

4. Lehrsatz: Lote auf derselben Geraden sind einander parallel.



Wenn $A_1A_2 \perp MN$
und $B_1B_2 \perp MN$ ist,
so soll $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ sein.

Beweis: Wir klappen die eine Hälfte der Ebene um die Gerade MN herum. Dabei fallen die herumgeklappten Lote genau auf ihre ursprünglichen Verlängerungen. Hätten nun die beiden Lote auf der einen Seite von MN einen Schnittpunkt X, so müßten sie auch auf der anderen Seite von MN einen entsprechenden Schnittpunkt Y haben. Dann gäbe es aber zwischen diesen beiden angeblichen Schnittpunkten X und Y zwei Verbindungsgeraden,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die eine über den Punkt C, die andere über den Punkt D. Dies ist aber unmöglich. Es können somit die beiden Lote einander auf keiner Seite von MN schneiden, d. h. sie sind einander parallel, w. z. b. w.

(Das Vorstehende ist aus dem Quarta-Pensum wiederholt. Vergl. IV § 11.)

5. Erklärung: Werden zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten, so liegen an der schneidenden Geraden acht Winkel.

Man unterscheidet dabei

innere Winkel, zwischen den beiden geschnittenen Geraden:

β, γ, ε und ι

und äußere Winkel, außerhalb der beiden geschnittenen Geraden:

α, δ, ω und τ;

ferner, ob zwei Winkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen z. B. α und ε, oder ob sie auf entgegengesetzten Seiten der schneidenden Geraden liegen z. B. ε und γ.

Man faßt die Winkel an der schneidenden Geraden auf drei neue Arten paarweise zusammen:

a. Korrespondierende Winkel heißen je ein innerer und ein äußerer Winkel an derselben Seite der schneidenden Geraden (an verschiedenen Durchschnittspunkten) z. B. α und ε.

b. Wechselwinkel heißen je zwei innere **oder** je zwei äußere Winkel an entgegengesetzten Seiten der schneidenden Geraden (an verschiedenen Durchschnittspunkten) z. B. α und τ, β und ι.

c. Konjugierte Winkel* heißen je zwei innere **oder** je zwei äußere Winkel an derselben Seite der schneidenden Geraden z. B. α und ω, γ und ι.

6. Lehrsatz Ia: Wenn ein Paar korrespondierende Winkel einander gleich sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel.

Wenn $\omega = \tau$ ist,

so soll $AB \parallel CD$ sein.

Erster Beweisfall: Die beiden korrespondierenden Winkel sind rechte.

* Vgl. das Lehrbuch der ebenen Geometrie von Prof. Dr. Th. Spieker—Potsdam. August Stein.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Dann sind die beiden geschnittenen Geraden Lote auf derselben Geraden, nämlich auf der schneidenden Geraden FL und somit einander parallel. (Siehe unter 4).

Zweiter Beweisfall: Die beiden korrespondierenden Winkel sind spitze.

(Wir können leicht zeigen, daß dann ein beliebiges Lot auf der einen geschnittenen Geraden auch ein Lot auf der anderen ist.)

Wir fällen (z. B.) vom Scheitel des äußeren Winkels ω ein Lot auf die andere geschnittene Gerade, d. h. $\angle$ SJD = 90^0.

(Es fragt sich, ob auch $\angle$ JSB ein rechter ist.)

N. d. S. vom Außenwinkel ist

$$\angle JSF = \tau + \iota$$

oder $$x^0 + n^0 = n^0 + \iota$$

Es ist daher $$x^0 = \iota$$

Nun ist aber $$\iota = 90^0 \text{ als Winkel am Lot;}$$

folglich ist auch $$x^0 = 90^0$$

d. h. es ist $$JS \perp AB.$$

Es sind somit die beiden geschnittenen Geraden AB und CD Lote auf derselben Hülfsgeraden JS und daher einander parallel

$$AB \parallel CD, \text{ w. z. b. w.}$$

Dritter Beweisfall: Die beiden korrespondierenden Winkel sind stumpfe.

Wir nehmen zu Hülfe die Nebenwinkel auf derselben Seite der schneidenden Geraden ω' und τ'. Diese beiden Winkel sind spitze als Nebenwinkel stumpfer Winkel und sie sind beide einander gleich als gleiche Reste von 2 R (jeder beträgt $180^0 - n^0$.) Der Lage nach sind ω' und τ' wieder ein Paar korrespondierende Winkel; folglich ist nach dem zweiten Beweisfalle AB $\parallel$ CD, w. z. b. w.

7. Folgerung: Wenn wir zu τ an Stelle von ω irgend einen anderen korrespondierenden Winkel FSX nehmen, so muß dieser entweder größer oder kleiner als ω, also auch größer oder kleiner als τ sein. Da es nun durch einen Punkt S zu einer Geraden CD nur eine Parallele giebt und SB schon diese Parallele ist, so kann SX nicht mehr parallel zu CD sein. d. h. Wenn **ein** Paar korrespondierende Winkel **verschieden** groß sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander **nicht** parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. Lehrsatz Ib: Wenn ein Paar Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel.

Wenn $\omega = \tau$ ist,

so soll $AB \parallel CD$ sein.

Zum Beweise nehmen wir den korrespondierenden Winkel von τ, d. h. den Winkel ω' zu Hülfe.

Es ist nun n. d. V. $\tau = \omega$

und ferner $\omega = \omega'$ als Scheitelwinkel

folglich ist $\tau = \omega'$.

Da aber τ und ω' ein Paar korrespondierende Winkel sind, so ist n. d. S. Ia $AB \parallel CD$, w. z. b. w.

9. Ganz entsprechend wie unter 7. ergiebt sich hier die Folgerung: Wenn **ein** Paar Wechselwinkel **verschieden** groß sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander **nicht** parallel.

10. Lehrsatz Ic: Wenn ein Paar konjugierte Winkel zusammen 2 R betragen, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel.

Wenn $\omega + \tau = 2R$ ist,

so soll $AB \parallel CD$ sein.

Zum Beweise nehmen wir wieder den korrespondierenden Winkel von τ, d. h. den Winkel ω' zu Hülfe.

Es ist nun n. d. V. $\omega + \tau = 2R$

oder $\tau = 2R - \omega$.

Es ist ferner $\omega' = 2R - \omega$ als Nebenwinkel.

folglich ist $\tau = \omega'$

d. h. es sind wieder ein Paar korrespondierende Winkel einander gleich, und somit ist $AB \parallel CD$ n. d. S. Ia, w. z. b. w.

11. Ganz entsprechend wie unter 7. ergiebt sich hier die Folgerung: Wenn ein Paar konjugierte Winkel zusammen entweder mehr oder weniger als 2 R betragen, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander **nicht** parallel.

12. Aus der Folgerung des Satzes Ia ergiebt sich, daß bei Parallelität der beiden geschnittenen Geraden nicht zwei korrespondierende Winkel einander ungleich sein können, d. h.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Satz IIa: Wenn die beiden geschnittenen Geraden einander parallel sind, so sind je zwei korrespondierende Winkel einander gleich.

13. Aus der Folgerung des Satzes Ib ergiebt sich, daß bei Parallelität der beiden geschnittenen Geraden nicht zwei Wechselwinkel einander ungleich sein können, d. h.

Satz IIb: Wenn die beiden geschnittenen Geraden einander parallel sind, so sind je zwei Wechselwinkel einander gleich.

14. Aus der Folgerung des Satzes Ic ergiebt sich, daß bei Parallelität der beiden geschnittenen Geraden nicht zwei konjugierte Winkel zusammen mehr oder weniger als 2 R betragen können, d. h.

Satz IIc: Wenn die beiden geschnittenen Geraden einander parallel sind, so beträgt die Summe je zweier konjugierter Winkel 2 R.

15. Die vorstehenden Lehrsätze Ia bis IIc lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Ia. Wenn ein Paar korrespondierende Winkel einander gleich sind,
oder **b. Wenn ein Paar Wechselwinkel einander gleich sind,**
oder **c. Wenn ein Paar konjugierte Winkel zusammen 2 R betragen,**
so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel.

Umkehrung: II Wenn die beiden geschnittenen Geraden einander parallel sind,

a. so sind je zwei korrespondierende Winkel einander gleich.
b. „ „ je zwei Wechselwinkel „ „ .
c. so beträgt die Summe je zweier konjugierter Winkel 2 R.

16. Nutzanwendungen des Satzes Ia:

1. Wenn ein Winkel längs des einen Schenkels verschoben wird, so bleibt der andere Schenkel dabei sich selbst beständig parallel. (Die verstellbare Reißschiene.)

2. Wenn ein beliebiges Dreieck UVW längs einer Seite UV (richtiger: längs der Geraden UV) verschoben wird, so bleibt jede der beiden anderen Dreiecksseiten ihrer ursprünglichen Lage beständig parallel.

Praktisch verfährt man hierbei so, daß man an die eine Dreiecksseite (UV) ein Lineal genau anlegt und das Dreieck an

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Linealkante entlang verschiebt. Das Lineal bildet dabei die Gleitschiene, die benutzte Linealkante die schneidende Gerade (Leitlinie).

17. Aufgabe: Durch einen Punkt A zu einer Geraden MN die Parallele zu ziehen.

1. Ausführung: (mit dem Lineale und dem Zirkel.)

Wir ziehen durch den Punkt A eine beliebige Gerade, die MN im Punkte B schneidet. Dann tragen wir einen der vier Winkel bei B mit dem Zirkel, (siehe IV § 15,13) als korrespondierenden oder als Wechselwinkel bei A an. Der so erhaltene neue Schenkel ist dann parallel zu MN. (Beweis n. d. S. Ia oder Ib.)

2. Ausführung: (mit dem Lineale und einem Dreiecke.)

Wir legen das Dreieck mit einer Seite UV an die gegebene Gerade MN an. An eine andere Dreiecksseite legen wir wieder das Lineal an und verschieben nun das Dreieck an der Linealkante entlang, bis die Dreiecksseite UV den Punkt A trifft.*

Beweis n. d. S. Ia.

18. Lehrsatz: Winkel mit parallelen und gleichgerichteten Schenkeln sind einander gleich.

Wenn $A_1B_1 \uparrow\uparrow A_2B_2$
und $A_1C_1 \uparrow\uparrow A_2C_2$ ist,
so soll $\alpha_1 = \alpha_2$ sein.

Für den Beweis giebt es nur zwei wesentlich verschiedene Lagen der beiden Winkel zu einander: entweder liegt der Scheitel des einen im Winkelfelde des anderen oder er liegt im Nebenwinkel des anderen. In beiden Fällen können wir uns einen dritten Winkel $\circ$ verschaffen, der sowohl zu α_1 als auch zu α_2 ein korrespondierender ist.

Dann ist $\alpha_1 = \circ$ als korrespondierende Winkel an Parallelen,
und $\circ = \alpha_2$ " " " " "
folglich ist $\alpha_1 = \alpha_2$ w. z. b. w.

* Für den ungeübten und unerfahrenen Anfänger wird es freilich im allgemeinen am geratensten sein, das rechtwinklige Dreieck mit der einen Kathete an MN anzulegen und dann längs der anderen Kathete zu verschieben. Er läuft dann weniger Gefahr, mit dem Dreiecke seitwärts bei A vorbeizukommen, also den Punkt A zu verfehlen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Zeichen ↑↑ bedeutet: parallel und gleichgerichtet
" " ↑↓ " parallel und entgegengesetzt gerichtet.
Die Richtung eines Schenkels ist vom Scheitel aus zu nehmen.

19. Lehrsatz: Winkel mit parallelen, aber entgegengesetzt gerichteten Schenkeln sind einander gleich.

Wenn $A_1B_1 \downarrow\uparrow A_2B_2$
und $A_1C_1 \uparrow\downarrow A_2C_2$ ist,
so soll $\alpha_1 = \alpha_2$ sein.

Zum Beweise zeichnen wir uns oder denken uns nur von α_1 den Scheitelwinkel α_1' und nennen dessen Schenkel A_1B_1' und A_1C_1' (so, daß $\angle B_1A_1B_1' = 2$ R und $\angle C_1A_1C_1' = 2$ R ist);

Es ist dann $A_1B_1' \uparrow\uparrow A_2B_2$
und $A_1C_1' \uparrow\uparrow A_2C_2$
Es mithin $\alpha_1' = \alpha_2$ n. d. vorigen Satze.
Da aber $\alpha_1' = \alpha_1$ als Scheitelwinkel ist,
so ist auch $\alpha_1 = \alpha_2$ w. z. b. w.

§ 3. Von den Vierecken im allgemeinen.

1. Lehrsatz: In jedem Vierecke beträgt die Summe der vier Winkel 4 R.

Zum Beweise zerlege man das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke und benutze den Satz von der Summe der Winkel im Dreiecke (vgl. IV, § 12,10. S. 30).

2. Ein Viereck kann höchstens einen erhabenen (einspringenden) Winkel haben (vgl. IV, § 8,24. S. 16).

3. Man kann in einem Vierecke ABCD der Lage nach unterscheiden:

a. benachbarte Seiten (z. B. AB und AC) und
" Ecken (z. B. A und B) und
aufeinanderfolgende Winkel (z. B. $\angle$ A und $\angle$ B),
b. gegenüberliegende Seiten oder Gegenseiten (z. B. AB u. CD),
" Ecken " Gegenecken (z. B. A und C),
" Winkel " Gegenwinkel (z. B. $\angle$A u. $\angle$C).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Der **Rhombus** ist ein Viereck mit lauter gleichen Seiten oder ein gleichseitiges Viereck.

5. Das **Deltoid** ist ein drachenförmiges Viereck. Durch die Verbindungsgerade der beiden Seitenecken wird es in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt, deren Gipfel die beiden Spitzen des Drachens sind.

6. Das **Trapez** ist ein Viereck mit einem Paare paralleler Gegenseiten. Sind darin außerdem die beiden anderen Gegenseiten gleich lang, so heißt das Trapez gleichschenklig. — Die beiden parallelen Gegenseiten des Trapezes heißen auch wohl seine Grundlinien.

§ 4. Das Parallelogramm.

Erklärung: Ein Viereck mit zwei Paar parallelen Gegenseiten nennt man ein **Parallelogramm.**

1. Lehrsatz: Im Parallelogramme beträgt die Summe je zweier auf einander folgender Winkel 2 R.

Beweis: denn diese sind konjugierte Winkel an Parallelen und betragen daher (n. d. S. IIc) zusammen 2 R.

1 a) Umkehrung: Wenn in einem Vierecke je zwei aufeinander folgende Winkel zusammen 2 R betragen, so ist das Viereck ein Parallelogramm (von zwei Paar Parallelen begrenzt).

denn n. d. S. Ic ist dann jede Seite ihrer Gegenseite parallel.

2. Lehrsatz: Im Parallelogramme sind je zwei Gegenwinkel einander gleich.

1. Beweis: denn es sind Winkel mit parallelen und dabei entgegengesetzt gerichteten Schenkeln (n. § 2,19).

2. Beweis: Um zu beweisen, daß die beiden Gegenwinkel $\angle A$ und $\angle C$ einander gleich sind, nehmen wir einen dritten Winkel des Parallelogrammes zu Hülfe z. B. $\angle B$.

N. d. vorigen S. ist $\angle A + \angle B = 2R$ oder $\angle A = 2R - \angle B$
und ebenso $\angle C + \angle B = 2R$ „ $\angle C = 2R - \angle B$;

folglich ist $\angle A = \angle C$.

Entsprechend wird bewiesen, daß $\angle B = \angle D$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. Beweis: Wir zeichnen uns zu einem der beiden Winkel z. B. zu α einen korrespondierenden Winkel, etwa β'.

Es ist dann $\alpha = \beta'$ n. d. S. IIa
und wieder $\beta' = \gamma$ n. d. S. IIb,
folglich ist $\beta = \gamma$ w. z. b. w.

Folgerung: Durch einen Winkel sind die übrigen Winkel eines Parallelogrammes bestimmt.

Ist in einem Parallelogramme ein Winkel ein rechter, so sind es auch die übrigen.

Das Parallelogramm heißt dann ein **Rechteck.**

2a. Umkehrung: Wenn in einem Vierecke jeder Winkel seinem Gegenwinkel gleich ist, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

Wenn $\angle A = \angle C = n^0$
und $\angle B = \angle D = u^0$ ist,
so soll $AB \parallel DC$
und $AD \parallel BC$ sein.

Beweis: Es ist $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R$ n. § 3,1
oder $n^0 + u^0 + n^0 + u^0 = 360^0$
d. h. $2\,n^0 + 2\,u^0 = 360^0$
also $n^0 + u^0 = 180^0$.

Es ist daher n. d. S. Ic sowohl $AB \parallel DC$
als auch $AD \parallel BC$ w. z. b. w.

3. Wenn von einem Parallelogramme zwei benachbarte Seiten AB und BC gegeben sind, so ist dadurch auch der vierte Eckpunkt (D) bestimmt;
denn er muß liegen auf der Parallelen durch C zu AB und auch auf der Parallelen durch A zu BC, d. h. er ist der Schnittpunkt dieser beiden Geraden und somit eindeutig bestimmt.

Haben daher zwei Parallelogramme zwei benachbarte Seiten gemeinschaftlich, so decken sie einander (so sind sie identisch).

4. Eigenschaften eines Vierecks, dessen beide Diagonalen sich gegenseitig halbieren.

Nennen wir das Viereck ABCD und bezeichnen wir den Schnittpunkt der beiden Diagonalen mit O, so lautet unsere

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Voraussetzung: Es ist $AO = OC$
$BO = OD$
und $\angle AOC = 2R$
$\angle BOD = 2R$.

Würden wir nun dieses Viereck um den Schnittpunkt O eine Drehung von 180° ausführen lassen und die neue Lage der Eckpunkte A, B, C und D mit A,' B,' C' und D' bezeichnen, so läge A' in C, B' in D, C' in A und schließlich D' in B; nach der halben Umdrehung um den Schnittpunkt der beiden Diagonalen läge also das Viereck genau auf seiner alten Spur, aber mit Vertauschung der Gegenecken, der Gegenseiten und der Gegenwinkel.

Es gilt somit der

4a. Satz: Wenn sich die beiden Diagonalen eines Vierecks gegenseitig halbieren, so sind darin je zwei Gegenseiten und je zwei Gegenwinkel einander gleich.

Bezeichnen wir ferner einen beliebigen Punkt des Umfanges z. B. einen Punkt auf der Seite AB mit L, so muß dieser Punkt nach der halben Umdrehung um O auf A' B' d. h. auf CD liegen, und wenn diese neue Lage L' heißt,

so muß $\angle LOL' = 2R$
und $LO = OL'$ sein.

Jede beliebige Verbindungsgerade des Umfanges (Sehne), die durch den Punkt O geht, wird also in ihm halbiert. Es heißt dann O der Mittelpunkt des Vierecks.

Es gilt somit der

4b. Satz: Wenn sich die beiden Diagonalen eines Vierecks gegenseitig halbieren, so ist ihr Schnittpunkt der Mittelpunkt des Vierecks.

Erklärung: Eine Figur, die einen Mittelpunkt hat, d. h. einen Punkt, der jede durch ihn gehende Sehne halbiert, heißt eine **centrische Figur.**

Umkehrung: Wenn ein Viereck überhaupt einen Mittelpunkt hat, so kann dies nur der Schnittpunkt der beiden Diagonalen sein. oder: **In einem centrischen Vierecke halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig.**

Beweis: In einer beliebigen centrischen Figur schneidet jede beliebige Gerade, die man durch den Mittelpunkt X zieht, den Umfang in zwei Punkten Z und Z' so, daß $XZ = XZ'$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Läßt man also eine centrische Figur eine halbe Umdrehung um ihren Mittelpunkt X ausführen, so vertauschen je zwei centrische Gegenpunkte Z und Z' des Umfanges ihre Lage miteinander, so daß die Figur wieder genau auf ihre alte Spur fällt. — Soll dies bei einem Vierecke ABCD der Fall sein, so müssen je zwei Gegenseiten und somit auch je zwei Gegenecken A und C, B und D ihre Lage miteinander vertauschen. Dann muß die halbe Umdrehung des Vierecks sowohl um die Mitte der Diagonale AC als auch um die Mitte der Diagonale BD erfolgt sein. Dies ist aber nur möglich, wenn sich die beiden Diagonalen gegenseitig halbieren.

4c. Da $AL = A'L' = CL'$ ist, so gilt der

Satz: Zieht man durch den Mittelpunkt eines centrischen Vierecks eine Gerade, so schneidet diese auf zwei Gegenseiten, von den Gegenecken aus gemessen, gleiche Strecken ab.

Da die Punkte L und L' eindeutig bestimmt sind, so gilt auch die

Umkehrung: Eine Gerade, die auf zwei Gegenseiten eines centrischen Vierecks, von den Gegenecken aus gemessen, gleiche Strecken abschneidet, geht durch den Mittelpunkt des Vierecks (durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen).

Schließlich gilt auch noch der

4d. Lehrsatz: Wenn sich in einem Vierecke die beiden Diagonalen gegenseitig halbieren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

1. Beweis: Es sind dann in dem Vierecke (n. d. S. 4a) je zwei Gegenwinkel einander gleich; mithin ist es n. d. Umkehrung 2a ein Parallelogramm.

2. Beweis: Nach einer halben Umdrehung um den Punkt O kommt der Winkel ε zur Deckung mit dem Winkel ε'; folglich ist $\varepsilon = \varepsilon'$.

Der Lage nach sind dies aber ein Paar Wechselwinkel;

daher ist $BA \parallel DC$ n. d. S. Ib.

Ebenso ist $\angle \iota = \angle \iota'$;

daher ist auch $DA \parallel BC$ (wieder n. d. S. Ib), w. z. b. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. Lehrsatz: Wenn sich in einem Vierecke die beiden Diagonalen gegenseitig halbieren und außerdem gleich lang sind, so ist dieses Viereck ein Rechteck.

Wenn $AO = OC$
und $BO = CD$
und außerdem $AC = BD$ $(= s)$ ist,

so soll das Viereck ABCD lauter rechte Winkel haben.

Beweis: Da die beiden ganzen Diagonalen einander gleich sind, so sind auch die Hälften der einen Diagonale gleich den Hälften der anderen, d. h. es ist $AO = OB = OC = OD$ $(= \frac{1}{2}s.)$

Es ist somit O der Mittelpunkt des Kreises, der durch die vier Eckpunkte A, B, C und D geht. Es ist daher jeder einzelne Winkel des Vierecks ein Winkel im Halbkreise und deswegen ein Rechter.

5a. Umkehrung: Im Rechtecke halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig und sind gleichlang.

Wenn ABCD ein Rechteck ist,

so soll $AC = BD$
$AO = OC$
und $BO = OD$ sein.

Beweis: Aus der Umkehrung des Satzes „Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter" (vgl. IV, 14) ergiebt sich:

Weil $\angle A = R$ und $\angle C = R$ ist, so liegen die beiden Eckpunkte A und C auf dem Kreise, der BD zum Durchmesser hat.

Weil ferner $\angle B = R$ und $\angle D = R$ ist, so liegen die beiden Eckpunkte B und D auf dem Kreise, der AC zum Durchmesser hat.

Diese beiden Kreise sind aber identisch; denn sie haben die vier Punkte A, B, C und D gemeinsam. Zwei Kreise decken sich aber schon dann, wenn sie drei Punkte gemeinsam haben. (IV, § 16,8.)

Es sind somit die beiden Diagonalen AC und BD Durchmesser desselben Kreises und daher einander gleich. Da sich nun zwei Durchmesser eines Kreises nur in dessen Mittelpunkte schneiden können, so folgt hieraus noch weiter, daß sich die beiden Diagonalen des Rechtecks, AC und BD, auch noch gegenseitig halbieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Lehrsatz: Wenn sich in einem Vierecke die beiden Diagonalen gegenseitig halbieren und außerdem aufeinander senkrecht stehen, so ist dieses Viereck gleichseitig (ein Rhombus).

Wenn	$AO = OC$
und	$BO = OD$
und außerdem	$AC \perp BD$ ist,
so soll	$AB = BC = CD = DA$
oder	$x = y = z = w$ sein.

1. Beweis: Durch Herumklappen um die eine oder die andere Kathete kann jedes der vier rechtwinkligen Dreiecke zur Deckung mit jedem anderen gebracht werden; mithin stimmen sie auch in der Hypotenuse überein,

d. h. es ist $x = y = z = w$, w. z. b. w.

2. Beweis: N. d. S. vom Mittellote (IV § 15,1)

ist $x = y$; $y = z$; $z = w$;

also $x = y = z = w$, w. z. b. w.

3. Beweis: N. d. 1. Kongruenzsatze ist

$\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD \cong \triangle DOA$

folglich ist $x = y = z = w$, w. z. b. w.

6a. Umkehrung: Im gleichseitigen Vierecke (Im Rhombus) halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig und stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel, deren Scheitel sie verbinden.

Beweis: vgl. IV, § 14,10.

Es ist nämlich im Rhombus jede der beiden Diagonalen das Mittellot der anderen.

Es mag ein Parallelogramm ABCD gegeben sein. Es muß dann auch ein Viereck ABCX geben, dessen Diagonalen sich gegenseitig halbieren. Dieses Viereck ABCX ist aber n. d. S. 4d ebenfalls ein Parallelogramm.

Da nun diese beiden Parallelogramme zwei Seiten (AB und BC) gemeinschaftlich haben, so sind sie (n. d. S. 3) identisch.

Es hat also das Parallelogramm ABCD alle Eigenschaften des Vierecks ABCX.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es gilt somit der

7. Lehrsatz: Im Parallelogramme sind je zwei Gegenseiten einander gleich und je zwei Gegenwinkel einander gleich und seine beiden Diagonalen halbieren sich gegenseitig und ihr Schnittpunkt ist der Mittelpunkt des Parallelogramms.

Der erste Teil dieses Lehrsatzes läßt sich auch so ausdrücken:

Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Wird das eine Parallelenpaar von dem anderen rechtwinklig geschnitten, so ergiebt sich:

8. Lote zwischen denselben Parallelen sind einander gleich. (vgl. IV § 11.)

Die Länge eines Lotes zwischen zwei Parallelen heißt daher deren **Abstand.**

9. Folgerungen:

1. Parallelen haben überall denselben Abstand von einander.

2. **Soll ein Punkt X von einer Geraden MN den Abstand a haben, so muß er auf einer der beiden Parallelen liegen, die sich im Abstande a zu MN ziehen lassen.**

3. Sind in einem Parallelogramme zwei benachbarte gleichlang, so ist es gleichseitig.

10. Erklärung: Wenn ein Rechteck zugleich gleichseitig ist, so heißt es ein **Quadrat.**

11. Lehrsatz: Wenn in einem Vierecke zwei Paar Gegenseiten gleich lang sind, so sind sie auch einander parallel (so ist das Viereck ein Parallelogramm.)

Wenn	$AB = CD$ $(= s)$
und	$AD = BC$ $(= t)$ ist,
so soll	$AB \parallel CD$
und	$AD \parallel BC$ sein.

Zum Beweise ziehen wir eine Diagonale z. B. AC. Hierdurch erhalten wir zwei Dreiecke, die in den drei Seiten übereinstimmen;

denn es ist	$AD = BC$ n. d. V.
und	$CD = AB$ n. d. V;
es ist ferner	$AC = AC$.
Es ist mithin	$\triangle I \cong \triangle II$ n. d. 3. Kongruenzsatze.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es sind somit die Wechselwinkel an der Diagonale ($\circ$ und ι, ε und ω) paarweise einander gleich als entsprechende Winkel in kongruenten Dreiecken.

Wenn aber ein Paar Wechselwinkel einander gleich sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel (S. Ib).

Weil also $\circ = \iota$ ist, so ist CD ∥ AB;
und weil $\varepsilon = \omega$ „, so „ AD ∥ CB, w. z. b. w.

Zusatz: Das gleichseitige Viereck ist ein Parallelogramm.

12. **Konstruktionsaufgabe: Durch einen Punkt A zu einer Geraden MN die Parallele zu konstruieren.** (mit dem Zirkel)

Ausführung: Wir konstruieren uns ein Viereck mit zwei Paar gleichen Gegenseiten, das einen Eckpunkt in A und eine Seite auf MN hat.

d. h. wir machen AD = BC
und CD = AB.

(Am schnellsten geschieht dies, wenn man hierzu ein gleichseitiges Viereck wählt.)

Nach dem vorstehenden Satze ist dann

AD ∥ BC, also auch ∥ MN, was verlangt war.

13. **Lehrsatz: Wenn in einem Vierecke ein und dasselbe Paar Gegenseiten einander parallel und gleich sind, so sind auch die beiden anderen Gegenseiten einander parallel und gleich (so ist das Viereck ein Parallelogramm.)**

Wenn AB ∥ CD
und auch AB = CD ist,

so soll auch AD ∥ BC
und AD = BC
oder y = z sein.

1. Beweis: Als Hülfslinie ziehen wir wieder eine Diagonale z. B. AC. Hierdurch erhalten wir zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und in dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

denn es ist CD = AB n. d. V.
und AC = AC
und schließlich $\varepsilon = \tau$ als Wechselwinkel an Parallelen.

Es ist somit △ I ≅ △ II n. d. 1. Kongruenzsatze.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Als entsprechende Stücke in kongruenten Dreiecken sind nun

$$y = z$$

und $\iota = \circ$.

Da aber ι und $\circ$ ihrer Lage nach ein Paar Wechselwinkel sind, so sind die beiden geschnittenen Geraden einander parallel;

es ist also AD ∥ CD w. z. b. w.

2. Beweis: Das Viereck ABCD ist wegen der angegebenen Bedingungen identisch mit dem Parallelogramme ABCX.

Da nämlich CX ∥ und = AB ist, so fallen CX und CD der Richtung und der Länge nach zusammen; folglich sind auch die vierten Eckpunkte X und D identisch.

Es ist somit auch das Viereck ABCD ein Parallelogramm.

§ 5. Teilung einer Strecke in lauter gleiche Abschnitte.

1. Lehrsatz: Zieht man durch die Mitte einer Dreiecksseite eine Parallele zu einer anderen Seite, so halbiert diese Parallele auch die dritte Dreiecksseite.

Wenn AM = MC
und MS ∥ AB ist
so soll auch CS = SB
oder x = y sein.

Zum Beweise ziehen wir durch die Mitte der ersten Dreiecksseite auch noch die Parallele zur dritten Seite

MQ ∥ BC.

Hierdurch erhalten wir ein Parallelogramm MSBQ und zwei Dreiecke MSC und AQM.

Diese beiden Dreiecke sind einander kongruent;

denn es ist MC = AM n. d. V;
es ist ferner $\circ = \alpha$ als korrespond. W. an Parallelen
und ebenso $\gamma = \varphi$ " " " " " .

Es ist daher △ I ≅ △ II n. d. 2. Kongruenzsatze;

folglich ist x = y'; denn es sind entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da aber MSBQ ein Parallelogramm ist,
so ist wieder $y' = y$ als Gegenseiten darin.
Es ist somit $x = y' = y$;
also $x = y$, w. z. b. w.

1. Zusatz: Da jede Dreiecksseite nur eine Mitte hat und die Lage einer Geraden schon durch zwei Punkte bestimmt ist, so gilt auch die

Umkehrung: Eine Gerade, die zwei Seiten eines Dreiecks halbiert, ist der dritten Dreiecksseite parallel.

2. Zusatz: Weil $\triangle$ I $\cong$ $\triangle$ II (n. d. 2. Kongruenzs.) ist,
so ist $p = u$ als entsprechende Seiten.
Weil ferner MSBQ ein Parallelogramm ist,
so ist wieder $p = v$ als Gegenseiten darin.
Es ist daher auch $u = v$ also $= \frac{1}{2}$ AB;
mithin ist $p = \frac{1}{2}$ AB
d. h. Die Verbindungsgerade der Mitten zweier Dreiecksseiten ist halb solang, wie die dritte Seite.

1a. Lehrsatz: Wenn drei Parallelen (I, II und III) auf irgend einer Geraden (A) zwei gleiche Strecken abschneiden, so schneiden sie auch auf jeder anderen Geraden (B) zwei unter sich gleiche Strecken ab.

Wenn $A_1A_2 = A_2A_3$
und $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ ist,
so soll auch $B_1B_2 = B_2B_3$ sein.

Zum Beweise verbinden wir zwei äußerste Schnittpunkte der beiden Geraden mit einander z. B. A_1 mit B_3. Der Schnittpunkt dieser Verbindungsgeraden mit der zweiten Parallelen heiße C_2. Betrachten wir nun zunächst das Dreieck $A_1A_3B_3$, so ist n. d. S. 1. $A_1C_2 = C_2B_3$.

Betrachten wir jetzt das Dreieck $A_1B_3B_1$, so ist nach demselben Satze $B_1B_2 = B_2B_3$, w. z. b. w.

Bemerkung: Der Beweis läßt sich auch so führen, daß man durch A_1 die Parallele zu B_1B_2 zieht. Man wendet dann an den Satz 1) und den Satz „Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich".

Erklärung: A_2B_2 heißt die Mittellinie des Trapezes $A_1B_1B_3A_3$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bemerkung: Der Beweis würde ebenso geführt werden, wenn die beiden Strecken A_1A_3 und B_1B_3 einander schnitten.

1. Zusatz: Da jede Strecke nur eine Mitte hat und die Lage einer Geraden schon durch zwei Punkte bestimmt ist, so gilt auch die Umkehrung: Eine Gerade, die zwei von Parallelen begrenzte Strecken halbiert, ist den Parallelen parallel.

2. Zusatz: Die Mittellinie eines Trapezes ist gleich der halben Summe der beiden Grundlinien.

Es ist nämlich $A_2C_2 = \frac{1}{2}\ A_3B_3$ n. 1. Zusatz 2
und $C_2B_2 = \frac{1}{2}\ A_1B_1$

folglich ist $A_2B_2 = \frac{1}{2}\ A_1B_1 + \frac{1}{2}\ A_3B_3$;
d. h. es ist $A_2B_2 = \frac{1}{2}\ (A_1B_1 + A_3B_3)$.

2. Lehrsatz: Ist eine Dreiecksseite in lauter (n) gleiche Abschnitte geteilt und zieht man durch die Teilpunkte ein System von Parallelen zu einer anderen Seite, so wird die dritte Dreiecksseite in ebensoviele (n) unter sich gleiche Abschnitte zerlegt.

Wenn $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3\ (= t)$
und $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ ist,

so soll $CB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$
oder $x = y = z$ sein.

Zum Beweise ziehen durch jeden Teilpunkt der ersten Seite auch noch die Parallele zur dritten Seite (CB_3);

d. h. wir ziehen $A_1F \parallel CB_3$ und $A_2L \parallel CB_3$.

Hierdurch werden die Trapeze $A_1B_1B_2A_2$ und $A_2B_2B_3A_3$ in je ein Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt.

Es ist nun $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ n. d. V.;
es ist ferner $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ } als korrespond. W.
und ebenso $\gamma = \eta = \varphi$ } an Parallelen.

Es ist mithin $\triangle$ I $\cong$ $\triangle$ II $\cong$ $\triangle$ III n. d. 2. Kongruenzs.

daher sind x, y' und z' entsprechende Seiten kongruenter Dreiecke, und es ist somit $\underline{\underline{x = y' = z'}}$.

Andrerseits ist $y' = y$ } als Parallelen
und ebenso $z' = z$ } zwischen Parallelen;

es ist mithin $x = y = z$, w. z. b. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2a. Lehrsatz: Wenn ein System von Parallelen (etwa I, II, III und IV) **auf irgend einer Geraden (A) lauter gleiche Strecken abschneidet, so schneidet es auch auf jeder anderen Geraden (B) ebensoviele unter sich gleiche Strecken ab.**

Wenn $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$
und $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$ ist,

so soll auch $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$ sein.

Zum Beweise verbinden wir zwei äußerste Schnittpunkte der beiden Geraden miteinander z. B. A_1 mit B_4. Betrachten wir nun zunächst das Dreieck $A_1A_4B_4$, so ist nach dem vorigen Satze (2.) $A_1C_2 = C_2C_3 = C_3B_4$.

Betrachten wir dann das Dreieck $A_1B_1B_4$, so ist wieder nach demselben Satze $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

Bemerkung: Der Beweis läßt sich auch dadurch führen, daß man durch A_1 die Parallele zu B_1B_4 zieht u. s. w.

3. Aufgabe: Eine gegebene Strecke AB in n (z. B. 5) **gleiche Abschnitte zu teilen.**

Ausführung: Wir machen AB zur Seite eines Dreieckes, worin eine andere Seite AC das n-(5-)fache einer beliebigen Strecke t ist. Dann ziehen wir durch die Teilpunkte dieser zweiten Seite AC die Parallelen zur dritten Seite BC.

Nach dem vorstehenden Satze (2) wird hierdurch die Seite AB in n (hier in 5) unter sich gleiche Abschnitte zerlegt.

d. h. es ist $u = v = w = x = y$, also $= \frac{1}{5}$ AB, w. v. w.

§ 6. Sätze vom Kreise.

A. Wiederholungen aus dem Lehrgange der Quarta.

1. Es ist zu wiederholen § 5 „Der Kreis"*, ferner § 6 „Berührung zweier Kreise"** und § 14 „Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter".

* Zur Vervollständigung lassen sich daran anschließen die Sätze über die Vergleichung zweier Bogen und ihrer Sehnen, sowie zweier Sehnen und ihrer Abstände vom Kreismittelpunkte. ** Hier kann zur Ergänzung eine Übersicht gegeben werden über die verschiedenen Lagen, die zwei Kreise zu einander haben können.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Es sind schließlich zu wiederholen die Sätze über das Mittellot der Sehne (§ 16) und über die Tangente * (§ 17 u. 18).

B. Von den Winkeln im Kreise.

1. Erklärung: Mittelpunkts- oder **Centriwinkel** heißt ein Winkel, wenn sein Scheitel im Mittelpunkte (Centrum) des Kreises liegt, seine Schenkel also Radien des Kreises sind.

2. Satz: Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen und
umgekehrt: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel, vgl. IV. § 7,4 u. f.

3. Ein Centriwinkel hat ebensoviel Winkelgrade wie der Bogen zwischen seinen Schenkeln Bogengrade hat.

4. Bemerkung: Es ist immer wohl darauf zu achten, ob ein Centriwinkel als ein hohler oder als ein erhabener Winkel aufzufassen ist; jenachdem ist der zugehörige Bogen kleiner oder größer als ein Halbkreis (kleiner oder größer als 180°).

5. **Erklärungen:** Umfangs- oder **Peripheriewinkel** heißt ein Winkel, wenn sein Scheitel auf dem Kreisumfange (auf der Peripherie des Kreises) liegt und seine Schenkel Sehnen sind.

Man sagt, ein Peripheriewinkel stehe über dem Bogen, der zwischen seinen Schenkeln liegt.

Während zu einem Kreisbogen nur ein Centriwinkel gehört, stehen über demselben Kreisbogen unzählig viele Peripheriewinkel.

Die Peripheriewinkel sind immer hohle. Ihre Größe hat 180° zur nicht erreichbaren Grenze.

6. **Lehrsatz: Ein Centriwinkel ist doppelt so groß wie ein Peripheriewinkel, der mit ihm über demselben Bogen steht.**
oder: **Ein Peripheriewinkel ist halb so groß wie der zugehörige Centriwinkel.**

I. Beweisfall: Der eine Schenkel des Peripheriewinkels ist ein Durchmesser des Kreises.

---

* Hierbei mag der Schüler angeben, welcher Kongruenzsatz zum Beweise jedes einzelnen Lehrsatzes benutzt werden könnte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist n. d. S. vom Außenwinkel

$$\varepsilon = \alpha + \beta.$$

Nun ist $\alpha = \beta$ als Basiswinkel;

folglich ist $\varepsilon = 2\beta$

oder $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{n^0}{2}$

d. h. $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2}$, w. z. b. w.

II. Beweisfall: Der Mittelpunkt des Kreises liegt innerhalb des Peripheriewinkels.

Wir führen diesen Fall auf den vorigen zurück, indem wir vom Scheitel des Peripheriewinkels aus den Durchmesser ziehen. Hierdurch stellt sich der Peripheriewinkel ABC als Summe zweier anderer, β_1 und β_2, dar.

Es ist nun nach dem vorigen Beweise

$$\varepsilon_1 = 2\,\beta_1$$

und $\varepsilon_2 = 2\,\beta_2$;

also $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\,\beta_1 + 2\,\beta_2 = 2\,(\beta_1 + \beta_2)$

d. h. $\angle AOC = 2 \angle ABC$

oder $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2}$, w. z. b. w.

III. Beweisfall: Der Mittelpunkt des Kreises liegt außerhalb des Peripheriewinkels.

Wir führen auch diesen Fall wieder auf den ersten zurück, indem wir vom Scheitel des Peripheriewinkels aus wieder den Durchmesser ziehen.

Wir können nun den Peripheriewinkel β als Differenz der beiden Peripheriewinkel ABC' und CBC' betrachten.

Nach dem ersten Beweise ist nun

$$\angle AOC' = 2 \angle ABC'$$

oder $\varepsilon + \varepsilon' = 2\,(\beta + \beta') = 2\,\beta + 2\,\beta'$.

Es ist ferner $\varepsilon' = 2\,\beta'$;

also $\varepsilon = 2\,\beta$

d. h. $\angle AOC = 2 \angle ABC$

oder $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2}$, w. z. b. w.

7. Zusatz: Ein Peripheriewinkel hat halb soviel Winkelgrade, wie der Bogen zwischen seinen Schenkeln Bogengrade hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

8. **Folgerungen:**

a. Alle Peripheriewinkel über demselben Bogen (in demselben Kreisabschnitte) sind einander gleich;

denn sie sind alle gleich der Hälfte desselben Centriwinkels

$$\angle AB_1C = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2}$$

$$\angle AB_2C = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2}$$

$$\angle AB_3C = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{n^0}{2} \text{ u. s. w.}$$

folglich $\angle AB_1C = \angle AB_2C = \angle AB_3C$ u. s. w.

b. Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Peripheriewinkel;

denn sie sind die Hälften gleicher Centriwinkel.

und umgekehrt: Zu gleichen Peripheriewinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen;

denn die zugehörigen Centriwinkel sind auch einander gleich, und folglich sind auch die zugehörigen Bogen einander gleich.

c. **Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein rechter;**

denn der zugehörige Centriwinkel ist ein gestreckter.

9. Satz: Zwei Winkel AXB und ACB können nur dann einander gleich sein, wenn sie Peripheriewinkel desselben Kreisabschnittes oder zweier symmetrischer Kreisabschnitte sind.

Beweis mit Hülfe des Außenwinkelsatzes (vgl. IV. § 14.):

Liegt der Scheitelpunkt X innerhalb des Kreisabschnittes ACB, so ist $\angle AXB > \angle ACB$.

Liegt der Punkt X außerhalb des Kreisabschnittes, (dabei aber nicht jenseits von AB) so ist $\angle AXB < \angle ACB$.

Aus 8a und 9) ergiebt sich:

10. **Der geometrische Ort für den Scheitelpunkt X eines Winkels AXB von n^0 ist der Kreisbogen, der über der Sehne AB einen Winkel von n^0 als Peripheriewinkel faßt, und das Spiegelbild dieses Bogens** (AB als Symmetrieachse genommen).

oder: **Wenn sich ein Punkt X so bewegen soll, daß von ihm aus betrachtet eine** der Länge und der Lage nach **feste Strecke AB**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieselbe scheinbare Größe von n^0 behält, so muß er einen der beiden symmetrischen Kreisbogen durchlaufen, die über AB als Sehne einen Peripheriewinkel von n^0 fassen.

11. Lehrsatz: Im Sehnenvierecke beträgt die Summe je zweier Gegenwinkel 2 R.

Beweis: Nach dem Satze 6 und seinem Zusatze ist

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(u^0 + v^0) = \frac{u^0 + v^0}{2}$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}(w^0 + z^0) = \frac{w^0 + z^0}{2}$$

also $$\alpha + \gamma = \frac{u^0 + v^0}{2} + \frac{w^0 + z^0}{2}$$

$$= \frac{u^0 + v^0 + w^0 + z^0}{2}$$

Nun ist aber $u^0 + v^0 + w^0 + z^0 = 360^0$;

folglich ist $\alpha + \gamma = \frac{360^0}{2} = 180^0$

oder $\alpha + \gamma = 2\,R$, w. z. b. w.

12. Zusatz: Hat ein Viereck ABCD lauter hohle Winkel und liegt ein Eckpunkt A innerhalb (außerhalb) des Kreises, der durch die drei anderen Eckpunkte B, C und D geht, so ist

$\angle A + \angle C > 2\,R$, und es ist somit $\angle B + \angle D < 2\,R$.
($\angle A + \angle C < 2\,R$, „ „ „ „ $\angle B + \angle D > 2\,R$).

Zum Beweise bezeichnen wir einen beliebigen Punkt des Kreisbogens zwischen den Schenkeln des Winkels BCD mit A'. Es ist dann $\angle C + \angle A' = 2\,R$ n. d. vorigen Satze.
und $\angle A > \angle A'$ (resp. $\angle A < \angle A'$) vgl. d. S. 9.

folglich $\angle C + \angle A > 2\,R$ „ ($\angle C + \angle A < 2\,R$)
u. mithin $\angle B + \angle D < 2\,R$ ($\angle B + \angle D > 2\,R$)

Bemerkung: Hat ein Viereck einen einspringenden Winkel, so ist ohne weiteres klar, daß das eine Paar Gegenwinkel zusammen mehr, das andere zusammen weniger als zwei Rechte betragen. Der Scheitel des einspringenden Winkels liegt dabei innerhalb des Kreises, der durch die drei anderen Eckpunkte geht.

13. Umkehrung: Wenn in einem Vierecke ein Paar Gegenwinkel zusammen 2 R betragen, so läßt sich durch seine vier Eckpunkte ein Kreis legen.

Der Beweis ergiebt sich aus 11 und 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. Erklärung: Zieht man von einem Punkte **B** einer Kreislinie **eine Tangente BA und eine Sehne BC,** so heißt der Winkel **ABC** ein **Sehnen-Tangentenwinkel.**

15. Lehrsatz: Der Sehnen-Tangentenwinkel ist gleich dem Peripheriewinkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte.

Wir unterscheiden drei Beweisfälle:

I. Der Sehnen-Tangentenwinkel ist ein rechter.

Die Sehne BC ist dann ein Lot auf der Tangente AB und zwar in deren Berührungspunkte B und somit ein Durchmesser.

Es ist daher $\angle BLC = R$ als Winkel im Halbkreise;
folglich ist $\angle ABC = \angle BLC$, w. z. b. w.

II. Der Sehnen-Tangentenwinkel ist ein spitzer.

Als Hülfslinie ziehen wir vom Punkte B aus den Durchmesser BD. Es ist dann $\angle ABD = R$.

Es ist ferner wieder $\angle BLD = R$ als Winkel im Halbkreise.
Es ist somit $\angle ABC = 90^0 - n^0$
und $\angle BLC = 90^0 - u^0$.

Da aber $n^0 = u^0$ als Peripheriewinkel über demselben Bogen CD ist,
so ist $\angle ABC = \angle BLC$, w. z. b. w.

III. Der Sehnen-Tangentenwinkel ist ein stumpfer.

Als Hülfslinie ziehen wir wieder vom Berührungspunkte B aus den Durchmesser BD.
Es ist dann wieder $\angle ABD = R$
und $\angle BLD = R$ als Winkel im Halbkreise.

Es ist somit $\angle ABC = 90^0 + n^0$
und $\angle BLC = 90^0 + u^0$.

Nun ist aber $n^0 = u^0$ als Peripheriew. über demselben [Bogen CD;

also ist $\angle ABC = \angle BLC$, w. z. b. w.

15a. Der vorstehende Satz lautet in andrer Fassung:

Der Sehnen-Tangentenwinkel hat halbsoviel Winkelgrade, wie der Kreisbogen zwischen seinen Schenkeln Bogengrade hat.

Die Tangente heiße wieder AB, ihr Berührungspunkt B und die Sehne BC.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I. Der Sehnen-Tangentenwinkel beträgt 90^0.

Dann ist die Sehne BC als Lot im Berührungspunkte einer Tangente ein Durchmesser. Jeder der beiden Bogen BC ist ein Halbkreis und hat also $180^0 = 2.90^0$, w. z. b. w.

II. Der Sehnen-Tangentenwinkel hat weniger als 90^0, etwa $90^0 - n^0$.

Wir errichten auf der Tangente im Berührungspunkte B die lotrechte Sehne BD. Dann ist $\angle$ CBD $= n^0$ und BD ein Durchmesser. N. d. Zus. 7 hat nun der kleine Bogen CD $2n^0$.

Da nun der Bogen BCD ein Halbkreis ist, so hat der kleine Bogen BC $180^0 - 2n^0$ oder $(90^0 - n^0).\ 2$, w. z. b. w.

Es ist daher $\angle$ ABC $=$ $\angle$ BLC.

III. Der Sehnen-Tangentenwinkel hat mehr als 90^0, etwa $90^0 + u^0$.

Wir errichten wieder auf der Tangente im Berührungspunkte B die lotrechte Sehne BD. Dann ist $\angle$ CBD $= u^0$ und BD ein Durchmesser. N. d. Zus. 7 hat nun der kleine Bogen CD $2u^0$; mithin hat der Bogen BDC $180^0 + 2.\ u^0$ d. h. $(90^0 + u^0).\ 2$, w. z. b. w.

Es ist daher auch $\angle$ ABC $=$ $\angle$ BSC.

16. Aufgabe: Über einer Strecke AB einen Kreisbogen zu beschreiben, der einen Winkel von n^0 als Peripheriewinkel faßt.

oder: **einen Kreisbogen zu beschreiben, von dessen Punkten aus die Strecke AB die scheinbare Größe n^0 hat.**

Vorbetrachtung: Wir bezeichnen einen Punkt des verlangten Kreisbogens mit X, so daß $\angle$ AXB $= n^0$ wäre, und denken uns auf der anderen Seite der Sehne AB die Tangente BY gezogen.

Dann wäre $\angle$ ABY ein Sehnen-Tangentenwinkel, und es müßte daher n. d. vorigen Satze

$$\angle \text{ABY} = \angle \text{AXB d. h.} = n^0 \text{ sein.}$$

Wir sind demnach imstande, die Tangente BY zu ziehen, ohne den Kreis zu kennen.

Der Mittelpunkt Z dieses noch unbekannten Kreises muß nun liegen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. auf dem Mittellote der Sehne AB und

2. auf dem Lote, daß sich auf der Tangente BY im Berührungspunkte B errichten läßt. d. h. es ist $\angle ZBY = R$.

Ausführung: Wir tragen einen Winkel von n^0 an AB im Punkte B an:

$$\angle ABC = n^0$$

und errichten auf BC im Punkte B das Lot:

$$BL \perp BC.$$

Nun konstruieren wir das Mittellot von AB

d. h. wir machen $AM = BM$

und $OM \perp AB$.

Es ist dann O der Mittelpunkt der Kreislinie, zu der der verlangte Bogen gehört.

Beweis: Es ist nämlich $AO = BO$ n. d. S. v. Mittellote

und BC eine Tangente;

folglich ist n. d. vorigen Satze $\varphi = n^0$, w. v. w.

---

§ 7. Besondere Punkte des Dreieckes.

1. Die Mittellote der drei Seiten eines Dreieckes schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.

Beweis: Die Dreiecksseiten sind ja Sehnen des umgeschriebenen Kreises, und das Mittellot jeder einzelnen Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

Erklärung: Das Lot von einem Eckpunkte eines Dreiecks auf die Gegenseite nennt man die **Höhe** des Dreiecks über dieser Seite.

2. Die drei Höhenlote eines Dreieckes schneiden einander in einem und demselben Punkte.

Beweis: Wir weisen nach, daß die Höhenlote eines Dreieckes ABC zugleich die Mittellote der drei Seiten eines anderen Dreieckes UVW sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieses Hülfsdreieck verschaffen wir uns, indem wir durch jeden Eckpunkt die Parallele zu der Gegenseite ziehen:

$$UV \parallel AB$$
$$VW \parallel AC$$
$$UW \parallel BC.$$

(Hierdurch erhalten wir zugleich drei Parallelogramme, die zu je zweien eine Seite des bisherigen Dreieckes gemeinsam haben).

Es ist nun $UC = AB$ als Parallelen zwischen Parallelen
und ebenso $CV = AB$ „ „ „ „ ;
folglich ist $UC = VC$

d. h. Ein Eckpunkt C des gegebenen Dreieckes ist die Mitte einer Seite (UV) des Hülfsdreieckes (UVW).

Da ferner $CL \perp AB$ ist n. d. V.,
so ist auch $CL \perp UV$;

denn ein Lot auf der einen von zwei Parallelen ist auch ein Lot auf der anderen.

Das Höhenlot CL des gegebenen Dreieckes ist also zugleich das Mittellot einer Seite (UV) des Hülfsdreieckes (UVW).

Ebenso ist das Lot von A auf BC zugleich das Mittellot von UW und das Lot von B auf AC zugleich das Mittellot von VW.

Die drei Höhenlote des Dreieckes ABC sind also zugleich die Mittellote der Seiten desselben Hülfsdreieckes UVW und müssen deshalb n. d. vorigen Satze einander in einem und demselben Punkte schneiden, w. z. b. w.

3. Die drei Winkel halbierenden Eckstrahlen eines Dreieckes schneiden einander in einem und demselben Punkte, nämlich in dem Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises.

Beweis: vgl. IV. § 18,8.

Der eingeschriebene Kreis heißt auch kurzweg der Inkreis.

3a. Die Halbierungsgeraden zweier Außenwinkel eines Dreiecks schneiden einander auf der Halbierungsgeraden des dritten Dreieckswinkels (eigentlich: des Dreieckswinkels am dritten Eckpunkte).

Der Schnittpunkt dieser drei Halbierungsgeraden ist der Mittelpunkt eines Ankreises, d. h. eines Kreises, der eine Dreiecksseite und die Verlängerungen der beiden anderen berührt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Es ist $EL_3 = EL_1$ } n. d. S. IV. § 18,1
und ebenso $EL_2 = EL_1$ } oder n. d. 2. Kgrs. (Zus.);

folglich ist $EL_1 = EL_2 = EL_3$.

Es läßt sich daher um den Schnittpunkt E ein Kreis beschreiben durch die Punkte L_1, L_2 und L_3, der CC', BB' und BC berührt.

Da $EL_2 = EL_3$ ist,

so ist ferner n. d. S. IV. § 18,2 oder n. d. 4. Kgrs.

$$\angle EAL_2 = \angle EAL_3, \text{ w. z. b. w.}$$

I. Zusatz: Die Berührungspunkte des Inkreises.

Da die beiden Tangenten von einem Punkte an einen Kreis gleichlang sind (n. d. 4. Kongrs. vgl. auch IV § 17,7),

so ist
$$\left.\begin{array}{lll} AF_3 = AF_2 & \text{oder} & t_1 = t_1' \\ BF_3 = BF_1 & & t_2 = t_2' \\ CF_2 = CF_1 & & t_3 = t_3' \end{array}\right| \quad (1)$$

Hieraus geht hervor: Kennt man bei einem Dreiecke den einen Berührungspunkt des Inkreises, so kennt man damit auch seine beiden anderen Berührungspunkte.

Bezeichnen wir nun den Umfang des Kreises mit u,

so ist $u = a + b + c = t_1 + t_2 + t_2' + t_3' + t_3 + t_1'$
$= t_1 + t_1' + t_2 + t_2' + t_3 + t_3'$.

Es ist daher mit Rücksicht auf die Gleichungen (1)

$$u = 2.\,t_1 + 2.\,t_2 + 2.\,t_3$$

also $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{u}{2}$

und somit $t_1 = \frac{u}{2} - (t_2 + t_3)$

$= \frac{u}{2} - (t_2' + t_3')$

d. h. es ist $t_1 = \frac{u}{2} - a = t_1'$

ebenso ist $t_2 = \frac{u}{2} - b = t_2'$

und $t_3 = \frac{u}{2} - c = t_3'$

d. h. Bei einem Dreiecke kann man die Lage der drei Berührungspunkte des Inkreises aus der Länge der drei Seiten berechnen (konstruieren) und zwar auf eine sehr einfache Weise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Verlängert man nämlich die Seite AB über A hinaus um a und über B hinaus um b, so daß

$$A'A = a \text{ und } BB' = b, \text{ und somit } A'B' = u \text{ ist,}$$

so ist die Mitte von A'B' der eine Berührungspunkt des Inkreises.

II. Die Berührungspunkte eines Ankreises.

Wir berufen uns wieder auf die Gleichheit der beiden Tangenten von einem Punkte an einen Kreis.

Danach ist $\left.\begin{array}{l} AL_3 = AL_2 \\ CL_3 = CL_1 \\ BL_1 = BL_2 \end{array}\right| \quad (1)$

Es ist daher $AL_3 = AC + CL_3 = AC + CL_1$

und $AL_2 = AB + BL_2 = AB + BL_1$;

also $AL_3 + AL_2 = AC + AB + CL_1 + BL_1$;

$= b + c + a$ d. h. $= u$.

Da nun $AL_2 = AL_3$ ist, [siehe oben die Glchn. (1)

so ist $AL_2 = \frac{u}{2}$

und $AL_3 = \frac{u}{2}$

d. h. Trägt man auf jedem der beiden Schenkel eines Winkels (α) vom Scheitelpunkte (A) aus den halben Umfang des Dreieckes ab, so erhält man die beiden Berührungspunkte desjenigen Ankreises, der die Gegenseite (a) berührt.

III. Zusatz: Die beiden Berührungspunkte derselben Dreiecksseite mit dem Inkreise und mit dem Ankreise.

Da $AC + CL_3 = \frac{u}{2}$

und $CL_3 = CL_1$ ist,

so ist auch $AC + CL_1 = \frac{u}{2}$

also $CL_1 = \frac{u}{2} - AC = \frac{u}{2} - b.$

Nach dem Zusatze I ist nun $\frac{u}{2} - b = t'_2 = BF_1.$

Es ist somit $CL_1 = BF_1$

d. h. Jede Dreiecksseite wird durch den Berührungspunkt des Inkreises und durch den Berührungspunkt des Ankreises symmetrisch geteilt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. Erklärung: Die Gerade, welche die Mitte einer Dreiecksseite mit der Gegenecke verbindet, heißt eine **Mittellinie** des Dreiecks.

4a. Lehrsatz: Jede Mittellinie eines Dreiecks schneidet von den beiden anderen je ein Drittel ab.

Das abgeschnittene Drittel liegt dabei an der halbierten Seite.

Wenn $BM_1 = M_1C$
und $AM_2 = M_2C$
und $AM_3 = M_3B$ ist,

so soll $M_1S = \frac{1}{3} AM_1$ sein, u. s. w.

Zum Beweise ziehen wir zu der Mittelline BM_2 die Parallelen durch die Mitten der beiden anderen Seiten

d. h. wir ziehen $M_1V_1 \parallel BM_2$
und $M_3V_3 \parallel BM_2$.

Es ist dann $u = w = \frac{1}{2} CM_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2}\right) = \frac{1}{4} AC$

und ebenso $y = z = \frac{1}{2} AM_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{AC}{2}\right) = \frac{1}{4} AC$

Es ist somit $u = w = y = z$.

In dem Dreiecke AM_1V_1 ist also die Seite AV_1 in drei gleiche Abschnitte geteilt und durch die Teilpunkte gehen Parallelen zu der Seite V_1M_1. Mithin ist die dritte Seite (AM_1) dieses Dreiecks ebenfalls in drei gleiche Abschnitte geteilt

und es ist daher $M_1S = \frac{1}{3} AM_1$, w. z. b. w.

Wollten wir beweisen, daß die Mittellinie BM_2 von der Mittellinie CM_3 ebenfalls ein Drittel abschneidet, so müßten wir das Dreieck CM_3V_3 betrachten.

4b. Folgerung: Bezeichnen wir den Punkt, in dem die Mittellinie AM_1 von der Mittellinie CM_3 geschnitten wird, mit X, so muß nach dem vorstehenden Satze $M_1X = \frac{1}{3} AM_1$, also $= M_1S$ sein; folglich ist der Punkt X identisch mit dem Punkte S.

d. h. **Die drei Mittellinien eines Dreiecks schneiden einander in einem und demselben Punkte.**

Dieser Punkt heißt der **Schwerpunkt des Dreiecks.** Die Mittellinien heißen auch wohl die Schwerpunktslinien des Dreiecks.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nachwort.

Der vorstehende Entwurf eines Lehrganges für das zweite Jahr des geometrischen Unterrichts am Gymnasium bildet die Fortsetzung meiner vorjährigen Programmarbeit.*

Die Kongruenzsätze habe ich vorangestellt, um die allgemeinen Sätze über die Parallelen nicht zu sehr von dem Abschnitte über das Parallelogramm zu entfernen.

Von den drei Arten von Winkelpaaren, die bei den Sätzen von den Parallelen auftreten, führen nur die Wechselwinkel eine passende und allgemein gebräuchliche Bezeichnung. Was man im Dreiecke unter dem Gegenwinkel einer Seite oder im Vierecke unter zwei Gegenwinkeln zu verstehen hat, ist ohne weiteres klar. Dagegen sind bei den allgemeinen Sätzen über die Parallelen die Bezeichnungen „Gegenwinkel, entgegengesetzte Winkel und Ergänzungswinkel" an sich nicht verständlich und bisweilen sogar irreführend und den Thatsachen widersprechend. „Ergänzungswinkel" an nichtparallelen Geraden z. B. ergänzen einander nicht zu 2R. Um eine sichere Benennung zu haben, habe ich die „korrespondierenden Winkel" beibehalten und die dritte Art von Winkelpaaren mit Prof. Spieker—Potsdam als konjugierte Winkel bezeichnet. Ob die vereinfachte und sachliche Einteilung in gleichwendige und gegenwendige Winkel, wie Henrici und Treutlein sie in ihrem systematisch vorzüglichen, eigenartigen und erschöpfenden Lehrbuche der Elementar-Geometrie angewandt haben, auch dem Anfänger die Sache erleichtern, muß ich dahingestellt sein lassen.

Im Abschnitte vom Parallelogramme bin ich von der üblichen systematischen Anordnung der Sätze insofern abgewichen, als ich aus methodischen Gründen zunächst nur diejenigen Eigenschaften des Parallelogrammes ableitete, die aus der Parallelität der Gegenseiten sich ohne weiteres ergeben, sodann aber die Betrachtung des centrischen Vierecks einschob. Hierbei werden die Beweise anschaulicher und sozusagen geometrischer und tragen, wie mir scheint, mehr zur Schulung der Vorstellungskraft des Schülers bei, als die übliche Reihenfolge und Ableitung der Sätze. Daß sich die Eigenschaften des centrischen Vierecks entsprechend auf das centrische Vieleck übertragen lassen, ist leicht nachzuweisen und anzuschließen; ebenso, daß ein Dreieck, ein Fünfeck u. s. w. keinen

* Erster Lehrgang des geometrischen Unterrichts in Quarta.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mittelpunkt haben kann. Der Weg von bestimmten, einfachen geschlossenen Figuren zu ganz allgemeinen Sätzen scheint mir für den Anfänger methodisch richtiger zu sein. Das umgekehrte Verfahren, vom allgemeinen zum besonderen Einzelfalle, wie ihn Henrici und Treutlein eingeschlagen haben, ist zwar systematischer oder, wenn man will, wissenschaftlicher, dafür sind aber die allgemeinen Sätze, wenn man sie in den Eingang stellt, für den Anfänger inhaltlich und dem Wortlaute nach meist schwerer faßbar, als die Sätze über die geschlossenen Figuren.

Der Beweis des Satzes von den Mittellinien des Dreiecks findet sich schon bei Fenkner*. Es hat dieser Beweis den Vorteil, den Satz von der Teilung einer Strecke in gleiche Teile noch besonders in Anwendung zu bringen. Hierdurch wird der Lehre von der proportionalen Teilung zweier Strecken mehr vorgearbeitet.

In der Pfingstwoche des vorigen Jahres hielt der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften in Elberfeld seine Hauptversammlung ab. In seinem Vortrage** „Kritische Bemerkungen über die Mathematik der höheren Schulen" äußerte hier Prof. Buchdrucker—Elberfeld unter anderem folgendes: „Die Schulmathematik ist noch sehr jung. Sie hat sich in Anlehnung an die Alten entwickelt. Die Aufgabe der Schule ist kurz und bündig die Ausbildung des Raumsinnes und des Zahlensinnes. Ein gutes Unterrichtsverfahren und alles, was damit zusammenhängt, kann nur durch die Arbeit ganzer Geschlechter geschaffen werden." Nun die zahlreichen Abhandlungen und Aufsätze in Zeitschriften und in den Programmbeilagen,*** sowie die neuen Lehrbücher zeigen, wie emsig und allseitig an der Verbesserung der Methode gearbeitet wird. Möchte auch die vorliegende Arbeit dazu einen Beitrag liefern.

Meseritz, im März 1897.

Der Verfasser.

---

* Lehrbuch der Geometrie. Braunschweig bei Otto Salle.

** Siehe Unterrichtsblätter f. Mathematik u. Naturwissenschaften III. Nr. 1 (1897).

*** z. B. Das geometrische Pensum der Quarta, von Direktor Dr. Karl Breitsprecher—Breslau 1895. Evangelische Realschule 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Inhalt:

		Seite
§ 1.	Von der Kongruenz der Dreiecke	3
§ 2.	Die allgemeinen Sätze über die Parallelen . . .	8
§ 3.	Von den Vierecken im allgemeinen	14
§ 4.	Das Parallelogramm	15
	Das centrische Viereck	17
§ 5.	Teilung einer Strecke in lauter gleiche Abschnitte .	23
§ 6.	Sätze vom Kreise	26
§ 7.	Besondere Punkte des Dreieckes	33

Berichtigungen:

Es muß heißen
auf Seite 14. § 3,3.
a. benachbarte Seiten (z. B. AB und AD)
auf Seite 19, 5. Zeile
und BO = OD.

Zu § 6,12 ist zu bemerken, daß ich ursprünglich von einer Figur dazu Abstand genommen hatte. Da sich aber in den Tafeln noch Raum fand, so habe ich es vorgezogen, die Figuren noch zu bringen. Dem Punkte A' ist dabei nicht eine beliebige Lage gegeben, sondern die für den Beweis geeignetste. Unter dem Winkel A' ist gemeint der Winkel BA'D.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Seite

§ 1. 3
§ 2. 8
§ 3. 14
§ 4. 15
. 17
§ 5. . . . . schnitte . 23
§ 6. 26
§ 7. 33

Es

a. D)

ünglich von einer
Figur ber in den Tafeln
noch e Figuren noch zu
bringen bige Lage gegeben,
sondern dem Winkel A′ ist
gemein

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf