Wissenschaftliche Beilage
des Königlichen Gymnasiums zu Meseritz
Ostern 1896.

Erster Lehrgang

des

geometrischen Unterrichtes

in Quarta

von

Ernst W. G. Schulze
Oberlehrer.

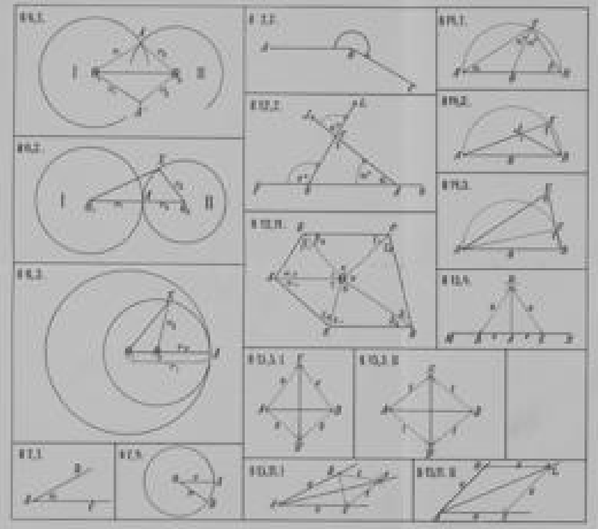
Meseritz 1896.
Buchdruckerei von P. Matthias, Meseritz.

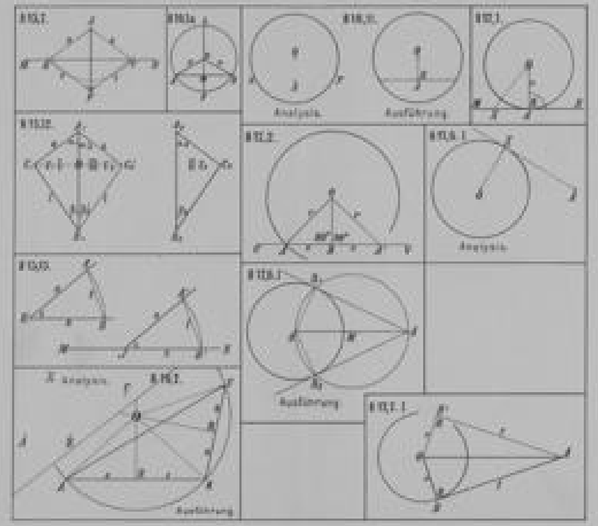
Gymne
16 (1896)
162b

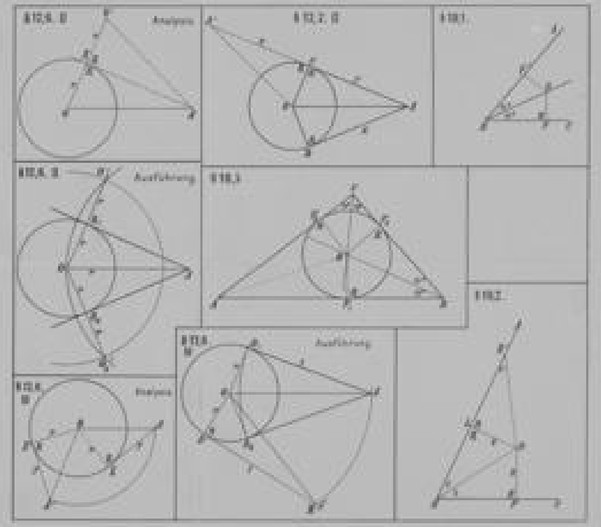
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

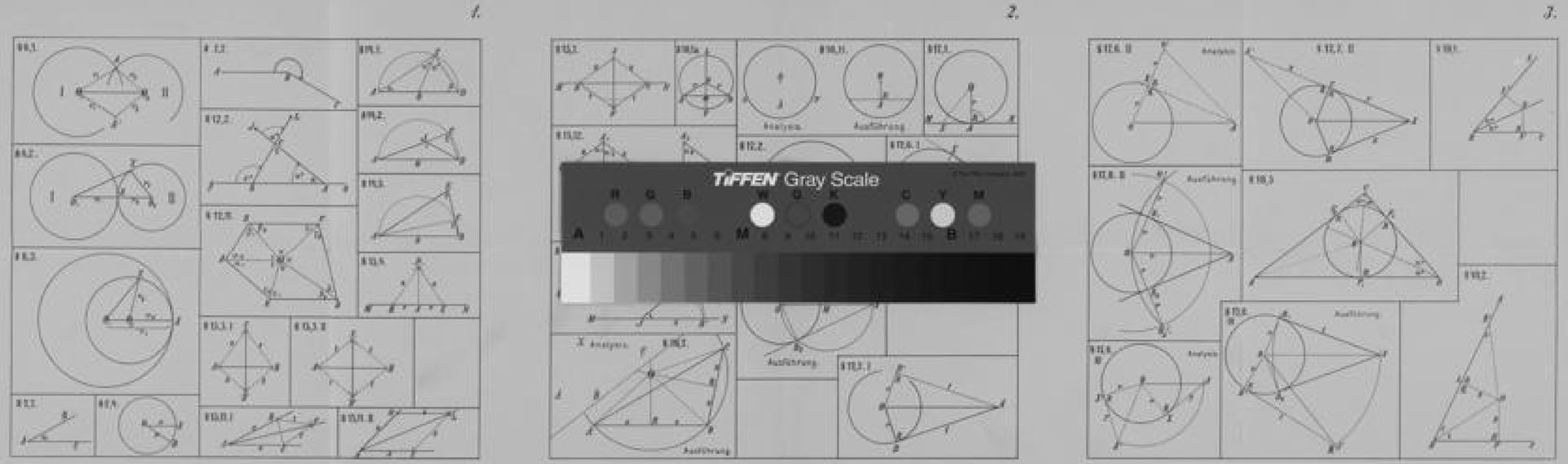
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf







Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Vorwort.

Der nachfolgende Lehrgang der Geometrie für Quarta verdankt seine Entstehung der Erfahrung, die ich während der Zeit von Michaelis 1875 bis Ostern 1890 (die beiden ersten Jahre am Realgymnasium zu Potsdam, die übrige Zeit am Realprogymnasium zu Strausberg) an Quartanern gemacht habe. Der Haupttrieb des Knabenalters ist weniger auf theoretisches Wissen oder auf formale geistige Schulung, als vielmehr auf Bethätigung gerichtet. Diesem Umstande habe ich Rechnung getragen bei der Abfassung meiner Vorschule für den geometrischen Unterricht (2 Hefte bei Velhagen und Klasing, Bielefeld und Leipzig). Meine Ansicht über diesen Unterrichtszweig habe ich ausführlich auseinandergesetzt in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen (Jahrgang 1889 S. 425 –434). Die praktische Erfahrung bestätigte die Richtigkeit meiner Auffassung, indem die Quintaner ohne Ausnahme mit regem Eifer sich bemühten, die Lösung der Aufgaben zu finden und vorzuzeigen. Kamen nun aber diese selben Schüler nach Quarta, so erlahmte der Eifer und die Strebsamkeit der meisten bei der Durchnahme der allgemeinen Sätze über die Parallelen und die drei neuen Arten von Winkelpaaren, die dabei auftreten. Dieses Thema in seiner Allgemeinheit und bei seiner Anfangsstellung ist für den Quartaner ziemlich schwierig und ermüdend und zwar reich an formaler logischer Schulung, aber zunächst leider arm an Ergebnissen, die sich praktisch verwerthen ließen. Gleichwohl ist es unthunlich, diese Sätze mehr mechanisch zu behandeln oder schnell darüber hinwegzugehen, gerade wegen ihrer Anfangsstellung und dann auch wegen ihrer Wichtigkeit für das spätere System.

Als nun das Strausberger Realprogymnasium Ostern 1893 eingegangen war, benutzte ich meine unfreiwillige Muße dazu, darüber nachzusinnen, ob jener Mißstand nicht etwa dadurch beseitigt werden könnte, daß man den Schüler lieber möglichst früh und anschaulich zu solchen wohlbegründeten Einsichten führe, aus denen er imstande wäre die sogenannten Fundamentalkonstruktionen abzuleiten. Das Ergebnis dieses Nachdenkens war erstens eine Zusammenstellung der Eigenschaften des Mittellotes und von Sätzen, die sich daran anschließen lassen, woraus sich dann die Fundamentalkonstruktionen von selbst ergaben; sodann kam ich zur Aufstellung des Abschnittes von den Parallelen und auf den Beweis für den Außenwinkelsatz. Dieser Beweis ist zwar nicht dem Prinzipe nach neu, aber doch vielleicht der Form nach.

Um indessen nicht allzusehr von der bisher üblichen Aufeinanderfolge der Sätze abzuweichen, habe ich den Abschnitt über das Mittellot nicht vorangestellt, obgleich seine Voraussetzungen eigentlich nur sind der Begriff des rechten Winkels, der Begriff von der Mitte einer Strecke und der Grundsatz, daß die gerade Linie die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist. Diese Zurückstellung geschah ferner noch in der Absicht, die Anwendungen auf den Kreis unmittelbar anschließen zu können. Ebenso hatte ich ursprünglich den Begriff der Tangente, sowie überhaupt den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

jetzigen Paragraphen 17 mit Ausnahme von 17,6, I und II sogleich an die Eigenschaft des Lotes (die kürzeste Verbindung eines Punktes mit einer Geraden zu sein) angeschlossen. Aber eben um dieser beiden Lösungen 6, I und II willen und um wiederum die Sätze von der winkelhalbierenden Geraden und dem Inkreise des Dreiecks angliedern zu können, habe ich schließlich dem Abschnitte von der Tangente seine jetzige Endstellung gegeben.

Die Sätze von den Parallelen (§ 11) glaubte ich für den Anfänger auf den Fall zweier Lote auf derselben Geraden und auf den Fall gleichen Abstandes zweier Geraden von einander beschränken zu können, diese aber auch nicht fortlassen zu sollen, da sich leichte Uebungsaufgaben mit dem rechten Winkel daran anschließen lassen. Für das System dagegen ist dieser Abschnitt zunächst belanglos, könnte also ausgelassen werden.

Vom Standpunkte der Systematik aus lag es nahe, in dem Abschnitte von den Parallelen (§ 11) jenen Dualismus zu vermeiden und den gleichen und gleichgerichteten Abstand zweier Punkte einer Geraden von einer anderen zu Grunde zu legen. Aus pädagogisch-didaktischen Erwägungen habe ich dies jedoch unterlassen; erstens glaube ich, daß die Lehre von den Parallelen durch den Anschluß an den vorhergehenden leichteren Abschnitt vom Lote (§ 10) dem Quartaner zugänglicher ist, und zweitens tritt der Dualismus bei der Lösung der Aufgabe, eine Parallele zu konstruieren, ja doch wieder auf. Allerdings hätte ich diesen Dualismus überbrücken können, wenn ich hinter dem 6. Satze etwa noch hinzugefügt hätte: Zwei Lote auf derselben Geraden haben überall denselben Abstand von einander. Eine Art von Überbrückung ist freilich schon vorhanden in dem zweiten Schlusse des Beweises von Satz 2 (S. 23. II).

Um die Verschiedenheit seiner Monaden annehmbarer zu machen, wies Leibniz darauf hin, daß nicht zwei Blätter eines Baumes völlig mit einander übereinstimmen. So wird auch wohl dieselbe Wahrheit von jedem einzelnen auf seine besondere Weise erfaßt. Diesem Umstande Rechnung zu tragen, dienen die verschiedenen Beweise bei einzelnen Sätzen. Bisweilen unterscheiden sich solche mehrfachen Beweise nur durch ihre Form oder Wortfassung (z. B. ist in § 10,5 in allen drei Beweisen das eigentliche Beweismittel der Grundsatz, daß zwischen zwei Punkten nur eine Verbindungsgerade möglich ist).

Welcher Wortlaut eines Beweises für die Auffassungskraft und die Klassenstufe eines Schülers die geeignetste und zusagendste ist, ist für den Lehrer nicht blos eine Aufgabe des Nachdenkens, sondern auch der Beobachtung und Erfahrung. Hierin gilt eben das docendo discimus. Ein in der sprachlichen Ausbildung noch zurückgebliebener Schüler wird meist versuchen, einen Beweis auf seine Weise abzukürzen, und wird dabei bisweilen nichts wesentliches fortlassen; z. B. gab ein Quartaner den Beweis von § 11,5 S. 25 ungefähr so wieder: Wenn im Punkte F auf FL ein Lot errichtet würde, so müßte es parallel zu AB sein. Da es nun durch F zu AB nur eine Parallele giebt, so muß (die schon vorhandene Parallele) FD (bereits) dieses Lot sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die allgemeinen Sätze über die Parallelen ist man jetzt zumeist geneigt dicht vor die Parallelogrammsätze zu verweisen, wie dies z. B. von Bensemann (Lehrbuch der ebenen Geometrie 1892) und von Scheidemantel (Programm des Gymnasiums zu Torgau 1893) sowie von Schwering & Krimphoff (Anfangsgründe der ebenen Geometrie 1894) geschehen ist. Die Gründe, aus denen ich mich dieser Ansicht anschließe, habe ich bereits oben angegeben

Ein anderes Bestreben, das sich allgemeiner bemerkbar macht, ist darauf gerichtet, auch der Schulgeometrie mehr und mehr den Charakter der Starrheit, der ihr von altersher mehr oder weniger anhaftete, zu nehmen und thunlichst Bewegung darin einzuführen. Wie einfach und anschaulich und vor allen Dingen wie fruchtbar die Methoden der Umklappung, Drehung, Parallelverschiebung u. s. w. bei der Lösung von Aufgaben sind, zeigt die vorzügliche Aufgabensammlung des Kopenhagener Petersen. (Von den systematischen Arbeiten dieses dänischen Mathematikers habe ich eine Einsicht bisher noch nicht genommen). Die gekennzeichnete Bestrebung macht sich auch bemerklich in den neueren Lehrbüchern, insofern viele Verfasser bei Beweisen die Berufung auf die Kongruenzsätze meist vermeiden, wenn sich die Deckung zweier Dreiecke ohne weiteres durch einfache Umklappung oder Drehung anschaulicher zeigen läßt. Das Schema der Beweisführung vermittelst der Kongruenzsätze läßt sich freilich für das System nicht entbehren, ist aber für die Bildung des Schülers mehr von formalem Werthe, da es dessen Anschauungsvermögen eigentlich nicht in Anspruch nimmt und somit auch zur Entwickelung der räumlichen Vorstellungskraft oder Phantasie nichts beiträgt. In dem vorliegenden ersten Lehrgange habe ich nur den sogenannten dritten Kongruenzsatz aus den drei Seiten für das Antragen eines Winkels und in § 17,6 III benutzt, diesen Satz aber auch bewiesen. Meiner Ansicht nach kann man bei Benutzung meines Lehrganges die Kongruenzsätze dahinter anfügen und auf den Gymnasien auch wohl für Tertia aufsparen, da die schematische Verwendung dieser Sätze bei Beweisen ein neues Moment enthält, das in einer neuen Klasse besser am Platze ist, als am Ende des Schuljahres in Quarta; außerdem habe ich ja das Tertiapensum durch Herübernahme von Sätzen aus der Kreislehre bereits entlastet. Den wenigen einzelnen Schülern, die ausnahmsweise die Anstalt wechseln sollten, ist durch einige private Unterweisungen leicht geholfen, wie ich aus Erfahrung in einem ähnlichen Falle weiß.

Wenn ich im § 5 über den Kreis und im § 7 über den Winkel etwas ausführlicher gewesen bin, als sonst üblich ist, so habe ich damit nicht einen größeren Wissens- oder gar Lernstoff zusammentragen wollen, sondern nur beabsichtigt, den Schüler mit diesen beiden Begriffen recht vertraut zu machen.

Habe ich mich in meiner Vorschule für den geometrischen Unterricht aller und jeder Vorwegnahme des Inhaltes von Lehrsätzen enthalten, so habe ich in diesem ersten Lehrgange des eigentlichen geometrischen Unterrichts jedes Plausibelmachen durch Hinweis und Anleitung zum Approbieren vermieden. Das mathematische Wissen muß eben ein Wissen mit Gründen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sein, darin liegt seine Eigenart. Das Ziel aber des mathematischen Unterrichtes, sofern ihm der erforderliche Zeitaufwand vergönnt ist, ist ein auf begründetem geordnetem Wissen beruhendes Können. Wo dieses Ziel nicht erreicht werden kann, vermag der mathematische Unterricht seine bildende und erziehliche Kraft auch nicht recht zu entfalten.

Der vorliegende Entwurf eines ersten geometrischen Lehrganges wird seine Aufgabe erfüllt haben, wenn der Quartaner aus ihm die allgemeine Lehre zieht, daß der Umfang der Praxis durch die Theorie erweitert wird, und wenn er dadurch geneigter gemacht wird, auch solchen Erörterungen, die zunächst unfruchtbar scheinen, mit entgegenkommender Aufmerksamkeit zu folgen.

Meseritz, im Januar 1896.

Ernst W. G. Schulze
Oberlehrer.

Inhalt.

§ 1. Einleitung: Körper, Fläche, Linie, Punkt. . . . . Seite 1
§ 2. Die gerade Linie und die Ebene. . . . . „ 2
§ 3. Krumme Linien und krumme Flächen. . . . . „ 4
§ 4. Die geometrische Figur und besonders das Dreieck. . . . „ 5
§ 5 Der Kreis. . . . . „ 6
§ 6. Berührung zweier Kreise. . . . . „ 10
§ 7. Der Winkel im allgemeinen. . . . . „ 12
§ 8. Nebenwinkel. . . . . „ 16
§ 9. Scheitelwinkel. . . . . „ 17
§ 10. Das Lot. . . . . „ 17
§ 11. Von den Parallelen. . . . . „ 21
§ 12. Die Winkel des Dreiecks im allgemeinen. . . . . „ 27
§ 13. Der Basiswinkelsatz. Die Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel. . . . . „ 31
§ 14. Der Winkel im Halbkreise. . . . . „ 34
§ 15. Das Mittellot. . . . . „ 35
§ 16. Anwendung der Sätze vom Mittellote auf das gleichschenklige Dreieck und den Kreis. . . . . „ 41
§ 17. Die Tangente. . . . . „ 44
§ 18. Die Winkel halbierende Gerade und der innere Berührungskreis des Dreiecks. . . . . „ 48

Berichtigung. Es muß heißen
auf Seite 33 Zeile 9: oder es ist schließlich $\alpha < b$;
Zeile 16: wenn auch $\alpha < b$ ist.

Die Figur auf Seite 32 ist zwar nicht genau, zeigt aber doch das, worauf es ankommt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 1. Einleitung: Körper, Fläche, Linie, Punkt.

1. Der **Raum** dehnt sich nach allen Richtungen aus.

2. Ein vollständig begrenzter Teil des Raumes heißt **Körper.**

3. Ein Körper läßt sich nach drei Hauptrichtungen (Dimensionen) ausmessen: nach Länge, Breite und Höhe oder Dicke.

4. Länge, Breite und Höhe oder Dicke heißen die drei Ausdehnungen des Körpers.

5. Ein Körper wird begrenzt von einer oder mehreren Flächen.

6. Die **Flächen** haben keine Dicke. Sie haben nur die beiden Ausdehnungen Länge und Breite.

7. Flächen werden begrenzt durch Linien und schneiden einander in Linien.

8. Die **Linien** sind weder breit noch dick. Sie haben nur eine Ausdehnung, nämlich die Länge.

9. Versinnbildlicht werden die Linien durch Striche, welche dazu der Breite nicht entbehren können.

10. Linien werden begrenzt durch Punkte und schneiden einander in Punkten.

11. Ein **Punkt** ist nur ein Ort im Raume und ohne jede Ausdehnung.

12. Versinnbildlicht wird ein Punkt durch einen kreisförmigen Fleck oder durch zwei einander kreuzende Striche.

13. Ein Punkt wird bezeichnet und namhaft gemacht durch einen Buchstaben des großen lateinischen Alphabetes, also durch A oder B oder C u. s. w.

14. Eine Linie wird vollständig durch zwei Punkte begrenzt.

15. Auf einer Linie liegen unzählig viele Punkte. Die Teile einer Linie sind dagegen immer wieder Linien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Die gerade Linie und die Ebene.

1. Es giebt gerade Linien und krumme Linien.

2. **Die Eigenschaften der geraden Linie oder der Geraden** sind folgende:

a) Wenn wir eine Gerade so drehen, daß zwei ihrer Punkte A und B nicht mit bewegt werden, so tritt sie nicht aus sich heraus.

b) Eine Gerade läßt sich in sich selbst verschieben. Es tritt dabei keiner ihrer Punkte aus ihr heraus, sofern wir nämlich die Gerade nach beiden Seiten hin als unbegrenzt betrachten.

c) **Zwischen zwei Punkten A und B ist nur eine einzige Gerade möglich** oder: **Durch zwei Punkte A und B läßt sich nur eine einzige Gerade legen.**

d) Haben zwei gerade Linien zwei Punkte gemeinsam, so liegen sie überhaupt aufeinander (so fallen sie zusammen, so sind sie identisch).

e) **Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung oder der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten.**

f) **Zwei gerade Linien können sich nur in einem einzigen Punkte schneiden.**

Aus dem vorstehenden ergiebt sich folgendes:

3. **Die Lage einer unbegrenzten Geraden ist durch zwei beliebige ihrer Punkte vollständig bestimmt.**

4. Eine Gerade wird daher durch zwei ihrer Punkte bezeichnet und namhaft gemacht. Die Gerade AB ist diejenige Gerade, welche durch die beiden Punkte A und B geht.

5. Eine beiderseits begrenzte Gerade heißt **Strecke.**

Die Lage und Größe einer Strecke wird durch ihre beiden Endpunkte bestimmt und bezeichnet. Die Strecke AB ist also die Verbindungsgerade der beiden Punkte A und B. Kommt es nur auf die Länge einer Strecke an und nicht auf deren Lage, so benutzt man zur Bezeichnung einen kleinen lateinischen Buchstaben, den man an die Mitte der Strecke setzt, z. B. a oder b oder c u. s. w.

6. **Erklärung:** Unter dem Abstande oder der Entfernung zweier Punkte A und B von einander ver-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

steht man die Länge ihrer Verbindungsgeraden d. h. die Strecke AB. Sie ist der kürzeste Weg zwischen den beiden Punkten A und B (vergl. 2, e).

7. Als **Strahl** bezeichnet man eine Gerade, wenn sie einseitig begrenzt ist. Der einseitige Grenzpunkt wird dabei als Anfangs- und Ausgangspunkt des Strahles angesehen.

Da wir nun nicht imstande sind, einen unbegrenzten Strich zu ziehen, sondern nur begrenzte Strecken, z. B. eine Strecke AB, so können wir das eine Ende z. B. bei B mit einer Pfeilspitze versehen; A wäre dann der Ausgangspunkt des Strahles A ——————→ B

8. Der Strahl giebt also nur eine Richtung an. In einer Geraden sind dagegen zwei entgegengesetzte Bewegungen möglich.

9. **Erklärung: Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene, wenn die Verbindungsgerade je zweier ihrer Punkte vollständig in ihr liegt.**

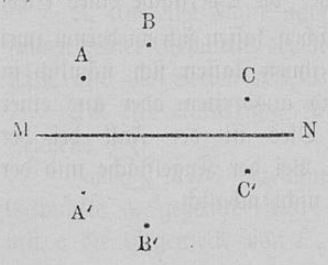
10. Eine Ebene läßt sich sowohl in sich selbst verschieben als auch um einen ihrer Punkte in sich selbst drehen. Es tritt dabei keiner ihrer Punkte aus ihr heraus.

11. Zwei Ebenen können immer so gelegt werden oder gelegt gedacht werden, daß sie zusammenfallen, d. h. daß jeder Punkt der einen Ebene auch ein Punkt der anderen ist.

12. **Die Lage einer Ebene ist durch drei ihrer Punkte bestimmt, die nicht derselben Geraden angehören.**

13. Haben zwei Ebenen drei Punkte gemeinsam, die nicht auf derselben Geraden liegen, so decken sie einander (so sind sie identisch) d. h. so haben sie alle Punkte gemeinsam.

14. Zieht man in einer Ebene eine Gerade MN, so läßt sich der eine Teil der Ebene so um diese Gerade herumklappen, daß er genau d. h. Punkt für Punkt auf den anderen Teil fällt. Einem Punkte A (oder B oder C) in dem einen Teil der Ebene entspricht dann jenseits der Geraden MN genau ein Punkt A′ (oder B′ oder C′). Ebenso entspricht dann einer Geraden oder Strecke AB auf der einen Seite von



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

MN eine Gerade oder Strecke A'B' auf der anderen Seite von MN.

15. **Zwei Ebenen schneiden einander in einer geraden Linie.**

Beweis: Zwei Flächen schneiden einander in Linien. Wenn nun zwei Ebenen I und II zwei Punkte A und B gemeinschaftlich haben, so gehört die Gerade AB sowohl der Ebene I als auch der Ebene II an, d. h. sie ist ihre Schnittlinie. Vergl. die Erklärung der Ebene unter 9.

§ 3. Krumme Linien und krumme Flächen.

1. Eine Linie heißt **krumm**, wenn sie keine geradlinigen Abschnitte besitzt.

2. Eine Linie, die teils gerade teils krumm ist, also aus geraden und krummen Abschnitten zusammengesetzt ist, heißt eine gemischte Linie.

3. Es giebt:

a) **ebene krumme Linien** oder **ebene Kurven**, deren sämtliche Punkte derselben Ebene angehören, z. B. der Kreis, die Ellipse, die Spirale oder Schneckenlinie, die Schlangenlinie.

b) **räumliche krumme Linien** oder **Raumkurven** deren Punkte nicht derselben Ebene angehören. z. B. die Schraubenlinie, ein Flußlauf auf einem Globus.

4. Eine **Fläche** heißt krumm, wenn sie keine ebenen Teile hat. Beispiele sind: die Kugelfläche, die Zylinder- oder Walzenfläche, die Kegel- oder Trichterfläche, die Oberfläche eines Eies.

5. Auch bei den krummen Flächen lassen sich wiederum zwei Arten unterscheiden. Manche von ihnen lassen sich nämlich in oder auf einer Ebene abrollen und ausbreiten oder aus einer Ebene durch Biegung herstellen. Dies ist der Fall bei der Cylinderfläche und der Kegelfläche. Bei der Kugelfläche und der Oberfläche eines Eies ist dies aber nicht möglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 4. Die geometrische Figur und besonders das Dreieck.

1. Erklärung: In der Geometrie versteht man unter **Figur** ein vollständig begrenztes Stück einer Fläche.

2 Es giebt demnach ebene Figuren und solche, welche nicht eben sind. Zu den ersteren gehören z. B. die Abbildungen der Länder auf einer Landkarte, während die Länder auf einem Globus unebene Figuren sind. Verbinden wir ferner auf einer Landkarte und auf einem Globus z. B. die drei Städte Königsberg, Metz und München durch kürzeste Linien, so erhalten wir im ersten Falle ein gewöhnliches ebenes Dreieck, im zweiten aber ein Kugeldreieck.

3. Derjenige Teil der Geometrie, der sich nur mit ebenen Figuren, sowie mit den Punkten und Linien einer Ebene (planum) befaßt, heißt **Planimetrie.**

Im folgenden werden wir uns nur mit ebenen Figuren befassen.

4. Eine ebene Figur heißt geradlinig, wenn sie nur von geraden Linien begrenzt wird.

5. Die begrenzenden geraden Strecken heißen die **Seiten,** die Punkte, in denen je zwei Seiten zusammentreffen, die **Eckpunkte** oder die **Ecken** der Figur.

6. Eine geradlinige Figur oder kurzweg eine Figur hat ebensoviel Seiten wie Ecken.

7. Nach der Anzahl der Seiten oder Ecken unterscheidet man Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, Sechsecke u. s. w., allgemein: Vielecke oder n-ecke.

8. Die wichtigste ebene Figur ist das Dreieck, denn jedes Vieleck läßt sich durch gerade Linien in Dreiecke zerlegen.

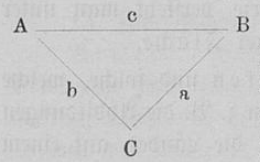
9. Um eine Figur namhaft zu machen, giebt man die Buchstaben seiner Eckpunkte der Reihe nach an. Das Fünfeck ABCDE hätte also die Seiten AB, BC, CD, DE und EA.

10. Als Abkürzung für das Dreieck bedient man sich des Zeichens $\triangle$.

Im $\triangle$ ABC bezeichnet man mit a die Seite, die dem Eckpunkte A gegenüberliegt; mit b die Gegenseite von B und mit c die Gegenseite von C.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

11. **Satz: Im Dreiecke ist jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderen** (als die beiden anderen zusammengenommen).



Beweis: Jede Seite eines Dreiecks ist als Verbindungsgerade zweier Eckpunkte der kürzeste Weg zwischen diesen beiden Punkten. Der gebrochene Weg über den dritten Eckpunkt ist also ein Umweg. oder ganz kurz: denn der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist ihre Verbindungsgerade.

Es ist also (mit Benutzung des Zeichens $<$ „kleiner als")

$$AB < BC + CA \quad \text{oder} \quad c < a + b$$
$$BC < AC + AB \qquad a < b + c$$
$$AC < AB + BC \qquad b < a + c$$

12. Sollen demnach drei angegebene Längen s, t und u Seiten eines Dreiecks sein, so muß jede einzelne dieser drei Längen kürzer sein als die Summe der beiden anderen.

Es genügt aber zu prüfen, ob dies für die größte der drei Längen der Fall ist.

13. **Satz: Jede einzelne Dreiecksseite ist größer als der Unterschied (die Differenz) der beiden anderen.**

Beweis: Wollen wir beweisen, daß eine Dreiecksseite (sie heiße a) größer ist als der Unterschied der beiden andern, so fügen wir zunächst die kleinere von diesen beiden (sie heiße b) zu a hinzu. Die erhaltene Summe (Gesamtlänge) $a + b$ ist dann größer als die dritte Seite c. $a + b > c$.

Subtrahieren wir nun b auf beiden Seiten, so muß der größere Rest auf derjenigen Seite der Ungleichung bleiben, wo bisher das Größere war. Es ist also $a > c - b$.

§ 5. Der Kreis.

1. Entstehung: Wenn sich in einer Ebene eine Gerade $AB = s$ um ihren Endpunkt A dreht, so beschreibt der andere Endpunkt B eine Kreislinie oder einen Kreis.

2. Erklärungen: Der feste Punkt A heißt dabei der **Mittelpunkt** oder das **Centrum** und die Strecke s der **Radius** oder der **Halbmesser des Kreises.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Kreislinie heißt auch der **Umfang** oder die **Peripherie** des Kreises.

Das Wort Kreis wird der Kürze wegen bald für die Kreislinie, bald für die Figur, also für den abgegrenzten eingeschlossenen Teil der Ebene gebraucht. Es ergiebt sich meist aus dem Zusammenhange, was damit gemeint ist. Wo Mißverständnisse entstehen können, müssen die besonderen Ausdrücke angewendet werden.

Ein Teil der Kreislinie heißt **Kreisbogen.**

Konzentrisch heißen zwei oder mehr Kreise, wenn sie den Mittelpunkt (das Centrum) gemeinschaftlich haben.

3. **Eigenschaften des Kreises:**

a) Alle Punkte einer Kreislinie haben von einem und demselben Punkte innerhalb (dem Mittelpunkte) dieselbe Entfernung, oder:

b) **Alle Radien desselben Kreises sind gleich lang.**

c) Wenn ein Kreis in seiner Ebene um den Mittelpunkt gedreht wird, so tritt kein Punkt seiner Peripherie aus ihr heraus. **Ein Kreis läßt sich also in sich selber drehen.**

d) Wenn ein Teil einer Kreislinie, ein Kreisbogen, um den Kreismittelpunkt gedreht wird, so bleibt er stets mit allen seinem Punkten auf der Peripherie des Kreises.

e) Gleichlange Bogen desselben Kreises lassen sich genau zum Decken bringen (sind einander kongruent).

Um uns die beiden letzten Eigenschaften des Kreises noch besonders klar zu machen, nennen wir die beiden Endpunkte eines Bogens A und B. Wir ziehen nun noch die beiden Radien OA und OB und erhalten dadurch einen Kreisausschnitt AOBA. Wenn nun dieser Kreisausschnitt um den Mittelpunkt O gedreht wird, so bleibt sein Bogen AB mit allen seinen Punkten beständig auf der Peripherie und nimmt dabei allmählich jede mögliche Lage (A'B', A"B" u. s. w.) ein, welche ein Bogen dieses Kreises bei derselben Länge nur haben kann.

f) **Ein Kreis hat überall dieselbe Biegung.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

4. **Ein Punkt X** (d. h. ein im übrigen noch unbekannter Punkt), **der von einem Punkte A eine vorgeschriebene Entfernung e haben soll, muß auf der Peripherie desjenigen Kreises liegen, der die Länge e zum Radius und den Punkt A zum Mittelpunkte hat, (kurz: auf dem Kreise mit e um A);** denn läge er außerhalb der Peripherie, so wäre seine Entfernung von A größer als der Radius e; läge er aber innerhalb der Peripherie, so wäre seine Entfernung von A kleiner als der Radius e.

Man sagt: **Der geometrische Ort eines Punktes X, der von einem Punkte A eine vorgeschriebene Entfernung e hat, ist die Kreislinie mit dem Radius e um A.**

Dies gilt eigentlich nur dann, wenn der Punkt X zugleich einer bestimmten Ebene angehören soll, die durch den Punkt A geht. Ist der Punkt X an diese Ebene nicht gebunden, so ist sein geometrischer Ort die Oberfläche einer Kugel, die A zum Mittelpunkte und e zum Radius hat.

5. Ein Kreis ist vollständig (d. h. seiner Größe und Lage nach) bestimmt
entweder durch den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie oder durch den Mittelpunkt und die Länge des Radius.

6. Die Größe eines Kreises, sowohl die Größe des Flächeninhaltes als auch die Länge des Umfanges, sind schon allein durch die Länge des Radius bestimmt.

7. Zwei Kreise einer Ebene sind identisch, wenn sie den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie gemeinsam haben oder wenn sie denselben Mittelpunkt und denselben Radius haben.

8. Zwei Kreise lassen sich zum Decken bringen, (sind kongruent), wenn sie gleichen Radius haben.

9. Erklärung: Zwei (oder mehr) Figuren heißen **kongruent,** wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß sie Punkt für Punkt zusammenfallen. Bei ebenen Figuren ist dies der Fall, wenn ihre Begrenzungen einander decken.

10. Kongruente Figuren haben also gleiche Form und gleiche Größe.

11. Satz: Ein Kreis wird durch eine beliebige Gerade, die durch den Mittelpunkt geht, in zwei kongruente Teile zerlegt. Diese heißen daher Halbkreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Wir klappen den einen Teil des Kreises um die zerlegende Gerade herum. Es muß dann jeder einzelne Punkt des bewegten Kreisbogens auf den andern Kreisbogen fallen, weil alle Radien desselben Kreises gleichlang sind und der Mittelpunkt auf der Umklappungsgeraden (der Drehungsachse) liegt.

Bemerkung: Liegt der Mittelpunkt des Kreises nicht auf der Drehungsachse, so ist der Beweis nicht mehr anwendbar.

12. Erklärungen:

a) Die Verbindungsgerade zweier Punkte einer Kreislinie nennt man **Sehne.**

b) Eine Sehne durch den Mittelpunkt eines Kreises heißt ein **Durchmesser.**

13. Jeder Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß wie der Radius. ($d = 2\ r$).

Aus diesem Grunde heißt der Radius auch der **Halbmesser** des Kreises.

14. Satz: Jede Sehne AB die nicht durch den Mittelpunkt O des Kreises geht, ist kleiner als der Durchmesser

oder: **Der Durchmesser ist die längste Sehne des Kreises.**

Behauptung: $AB < 2\ r$.

Beweis: Da nach der Voraussetzung AB nicht durch den Mittelpunkt O geht, so ist AOBA oder kürzer: AOB ein Dreieck. Im Dreiecke ist aber jede Seite kürzer als die Summe der beiden anderen.

Es ist demnach $AB < AO + OB$

oder $AB < r + r$

d. h. $AB < 2\ r$.

15. Aufgabe: Eine gegebene Strecke s als Sehne in einen gegebenen Kreis einzutragen.

Bemerkung: Diese Aufgabe ist natürlich nicht lösbar, wenn $s > 2\ r$ ist.

16. Satz: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Sehnen.

17. Umkehrung: Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Bogen, sofern man allemal den kleineren oder allemal den größeren der beiden Bogen nimmt, die zu derselben Sehne gehören und zusammen den vollen Umfang des Kreises bilden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Wenn wir es mit dem Bogen AB und der Sehne AB zu thun haben, so ziehen wir noch die beiden Radien OA und OB und drehen den Krreisausschnitt AOB um den Kreismittelpunkt O. Es nehmen dann allmählich der Bogen AB und zugleich die Sehne AB jede mögliche Lage ein, die ein Bogen von gleicher Länge oder eine Sehne von gleicher Länge in diesem Kreise nur haben kann.

Bemerkung: Auf der Umkehrung (17) beruht die mechanische Teilung des Kreisumfanges.

§ 6. Berührung zweier Kreise.

Erklärung: Unter der **Centrale zweier Kreise** versteht man die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte (Centra).

Im folgenden werden wir den Mittelpunkt des einen Kreises mit O_1, den des anderen mit O_2 und den Radius des ersteren mit r_1, den des anderen mit r_2 bezeichnen. Der erste Kreis (O_1, r_1) heiße einfach der Kreis I, der zweite (O_2, r_2) der Kreis II.

1. Satz: **Wenn zwei Kreise seitwärts der Centrale einen Punkt (A) gemeinsam haben, so haben sie auf der anderen Seite der Centrale noch einen zweiten Punkt (A′) gemeinsam.**

Beweis: Denken wir uns nämlich das Dreieck O_1AO_2 um die Centrale O_1O_2 herumgeklappt und bezeichnen die neue Lage des Punktes A mit A′, so ist $O_1A' = O_1A$ d. h. $= r_1$
und $O_2A' = O_2A$ d. h. $= r_2$
Es gehört also der Punkt A′ sowohl der Kreislinie I, als auch der Kreislinie II an. Die beiden Kreise schneiden also einander in den beiden Punkten A und A′. — AA′ ist ihre gemeinschaftliche Sehne. Das Bogenzweieck AA′ ist den beiden Kreisflächen gemeinsam.

1a. **Zwei Kreise schneiden einander, wenn ihre Centrale kleiner ist als die Summe der beiden Radien, aber größer als deren Differenz** d. h. wenn $r_1 + r_2 > O_1O_2 > r_1 - r_2$ oder $r_2 - r_1$ ist, je nachdem, r_1 oder r_2 der größte Radius ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Satz: **Wenn zwei Kreise auf der Centrale selbst einen Punkt (A) gemeinsam haben, so haben sie außerdem keinen Punkt weiter gemeinsam.**

Beweis: Wir zeigen, daß jeder andere Punkt X des zweiten Kreises außerhalb des ersten Kreises liegen muß, weil er von dessen Mittelpunkte um mehr als r_1 entfernt ist.

Es ist nämlich O_1XO_2 ein Dreieck;

daher ist $O_1X > O_1O_2 - XO_2$

oder $O_1X > r_1 + r_2 - r_2$

d. h. $O_1X > r_1$

Es liegt somit der Punkt X außerhalb des ersten Kreises.

Erklärung: Man sagt im vorliegenden Falle: Die beiden Kreise berühren einander von außen her (einander ausschließend). Der eine gemeinsame Punkt heißt der **Berührungspunkt.**

2a. **Zwei Kreise berühren einander äußerlich (ausschließend), wenn ihre Centrale gleich der Summe der beiden Radien ist** d. h. wenn $O_1O_2 = r_1 + r_2$ ist. **Der Berührungspunkt liegt dabei auf der Centrale selbst.**

3. Satz: **Wenn zwei Kreise auf der Verlängerung ihrer Centrale einen Punkt (A) gemeinsam haben, so haben sie außerdem keinen Punkt weiter gemeinsam.**

Beweis: Der Kreis I sei der größere. Wir zeigen, daß jeder ander Punkt X des kleineren Kreises innerhalb des größeren liegt, weil er um weniger als r_1 von O_1 entfernt ist.

Es ist nämlich O_1XO_2 ein Dreieck;

daher ist $O_1X < O_1O_2 + O_2X$

oder $O_1X < O_1O_2 + r_2$

also $O_1X < O_1A$

d. h. $O_1X < r_1$

Erklärung: Man sagt im vorliegenden Falle: Der größere Kreis (I) berührt den kleineren einschließend
oder: Der kleinere Kreis berührt den größeren von innen.

3a. **Von zwei Kreisen berührt der eine den anderen einschließend, wenn ihre Centrale gleich der Differenz der beiden**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Radien ist, d. h. wenn $O_1O_2 = r_1 - r_2$
oder $= r_2 - r_1$ ist,
jenachdem r_1 oder r_2 der größere Radius ist.

Der Berührungspunkt liegt dabei auf der Verlängerung der Centrale.

4. Aus den vorstehenden Sätzen folgt:

a) **Der Berührungspunkt zweier Kreise liegt stets mit den beiden Mittelpunkten auf derselben Geraden.**

b) **Wenn ein Kreis einen anderen ausschließend berühren soll, so muß die Länge der Centrale gleich der Summe der beiden Radien sein.**

c) **Wenn ein Kreis einen anderen einschließend oder aber von innen her berühren soll, so muß die Länge der Centrale gleich der Differenz der beiden Radien sein.**

§ 7. Der Winkel im allgemeinen.

Erklärungen: 1. Wenn von einem Punkte A zwei gerade Strecken oder zwei Strahlen AB und AC ausgehen, so sagt man: sie bilden miteinander den **Winkel** BAC oder CAB.

Der Punkt A heißt der **Scheitelpunkt** oder der **Scheitel,** die Strecken oder die Strahlen AB und AC heißen die beiden **Schenkel** des Winkels.

Die Benennung eines Winkels erfolgt so, daß zuerst ein Punkt (B) des einen Schenkels, dann der Scheitelpunkt (A) und schließlich ein Punkt (C) des anderen Schenkels genannt wird.

Das Zeichen für Winkel ist $\angle$.

Es ist also $\angle$ BAC $=$ $\angle$ CAB.

Wo keine Mißverständnisse möglich sind, kann man sich auch auf die Angabe des Scheitelpunktes beschränken; hier also genügt es $\angle$ A zu sagen.

Eine andere abgekürzte Bezeichnungsweise des Winkels besteht darin, daß man einen Buchstaben des kleinen griechischen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Alphabetes*) in ihn hineinschreibt; hier ist also $\angle \alpha$ gleichbedeutend mit $\angle$ BAC.

2. Für die (geometrische) Größe des Winkels ist es gleichgültig, wie lang die Schenkel sind, auch ist es nicht nötig, daß sie beide gleiche Länge haben. Es kommt vielmehr lediglich auf die Verschiedenheit ihrer Richtungen oder auf die Stärke ihrer Abweichung von einander an.

3. **Zwei Winkel sind gleich groß,** wenn sie sich so aufeinander legen lassen, daß ihre Schenkel der Richtung nach paarweise aufeinanderfallen (und die Winkelfelder dabei auf einander liegen).

4. Einen Winkel der von zwei Radien eines Kreises gebildet wird, nennt man einen **Centriwinkel,** weil sein Scheitel im Centrum oder Mittelpunkte des Kreises liegt. Der Kreisbogen zwischen den Schenkeln heißt **der zugehörige Bogen.**

5. Satz: Zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Bogen
und umgekehrt:

6. Satz: Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Centriwinkel.

Beweis: Wenn wir den Kreisausschnitt AOB um den Mittelpunkt O drehen, so nimmt der Centriwinkel AOB und zugleich der zugehörige Bogen allmählich jede mögliche Lage an, den ein gleichgroßer Centriwinkel oder ein gleichlanger Bogen dieses Kreises nur haben kann. Hiermit sind die beiden vorstehenden Sätze bewiesen.

7. Folgerung: Zu einem 2mal, 3mal (nmal) sogroßen Centriwinkel gehört auch ein 2mal, 3mal (nmal) sogroßer Bogen und umgekehrt.
oder allgemein: Centriwinkel verhalten sich zueinander wie die zugehörigen Bogen desselben Kreises.

Bemerkung: Für die zugehörigen Sehnen gilt dies nicht. Es gehören zwar zu gleichen Centriwinkeln AOB und BOC Sehnen von derselben Länge s. Die Sehne AC des doppelt

*) Am leichtesten zu merken sind α alpha, β beta, γ gamma, δ delta, ε epsilon ι jota, κ kappa, λ lambda, ν ni, ο omikron, σ sigma, τ tau, ϑ theta, υ ypsilon, ω omega.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sogroßen Centriwinkels AOC hat aber nicht etwa die Länge 2s, sondern ist kürzer, denn in dem Dreiecke ABC ist die Seite

$$AC < AB + BC \text{ d. h. } AC < 2s.$$

8. Auf den vorgehenden Sätzen beruht die Einrichtung des **Transporteurs,** des eigentlichen Winkelmaßes. Man teilt den Umfang eines Kreises in 360 gleiche Bogen. Ein einzelner solcher Bogen heißt dann ein Bogen von einem Grad (1°). Der zugehörige Centriwinkel heißt ein Winkel von einem Grad (1°).

Es giebt Transporteure mit vollständigem Kreisumfange aus durchscheinenden Stoffen. Die meisten sind aber halbkreisförmig.

9. Um einen gegebenen Winkel ABC zu messen, legt man den Transporteur so auf, daß der Mittelpunkt des Kreises auf Scheitel B fällt, d. h. so daß der gegebene Winkel die Lage eines Centriwinkels erhält. Der Nullstrich der Teilung muß über dem einen Schenkel liegen.

Winkelarten nach der Größe:

10. Ein Winkel von 90°, der also dem vierten Teile einer Umdrehung oder als Centriwinkel einem Viertelkreise entspricht, heißt ein **rechter Winkel** oder kurz ein **Rechter.** Als Zeichen für ihn gebraucht man R.

11. Winkel, welche kleiner sind als 1 R, also weniger wie 90° betragen, heißen **spitze Winkel.**

12. Winkel, welche größer sind als 90°, aber kleiner als 180°, die also der Größe nach zwischen 1 R und 2 R liegen, heißen **stumpfe Winkel.**

13. Spitze, rechte und stumpfe Winkel, also Winkel, welche kleiner sind als 180° oder 2 R, führen den gemeinschaftlichen Namen **hohle Winkel.**

14. Der gewöhnliche Sprachgebrauch kennt nur hohle Winkel. In der Geometrie giebt es außerdem noch gestreckte Winkel und erhabene Winkel.

15. Ein Winkel heißt ein **gestreckter,** wenn seine beiden Schenkel genau entgegengesetzte Richtungen haben, so daß sie derselben Geraden angehören.

Ein gestreckter Winkel ist gleich 180° oder gleich 2 R. Man sagt daher auch umgekehrt: Der rechte Winkel ist die Hälfte eines gestreckten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

16. Läßt man einen Winkel dadurch entstehen, daß eine Strecke (oder ein Strahl) AB sich um den Endpunkt A dreht und so allmählich in die Lage AB', AB'' u. s. w. übergeht, so ist der erhaltene Winkel zuerst spitz, dann ein rechter, dann stumpf, dann ein gestreckter und schließlich größer als ein gestreckter.

17. Ein Winkel, der größer als 2 R ist, heißt ein **erhabener Winkel.**

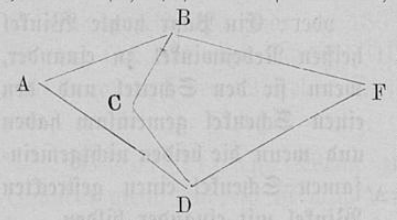
Erhabene Winkel enthalten mehr als 180° und weniger als 360°.

18. Zu einem erhabenen Centriwinkel gehört ein Kreisbogen, der größer ist als der halbe Kreisumfang.

19. Wie der rechte Winkel die Grenze bildet zwischen den spitzen und den stumpfen Winkeln, so bildet der gestreckte Winkel die Grenze zwischen den hohlen und den erhabenen Winkeln.

20. Für hohl sagt man auch **konkav** und für erhaben auch **konvex.**

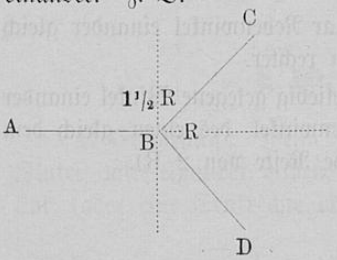
21. Ob ein Winkel als hohler oder als erhabener aufzufassen ist, muß sich aus dem Zusammenhange ergeben. Ohne besondere Veranlassung wird man einen Winkel niemals als erhaben ansehen, sondern stets als hohl.



22. In dem Vierecke BCDF ist der Winkel BCD ein hohler.

In dem Vierecke ABCD ist dagegen der Winkel BCD ein erhabener.

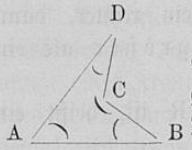
23. Auf Winkel von mehr als 180°, ja selbst von mehr als 360° kommt man auch durch Addition von Winkeln zu einander. z. B.



als Summe von ∠ ABC und ∠ CBD ist der ∠ ABD = 2½ R. Ist dagegen nichts darüber bestimmt, daß ∠ ABD als Summe jener beiden aufgefaßt werden soll, so werden wir den ∠ ABD als hohl ansehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

24. **Winkel in Figuren:**
Ein Dreieck kann nur hohle Winkel haben.
Ein Viereck hat höchstens einen erhabenen Winkel.



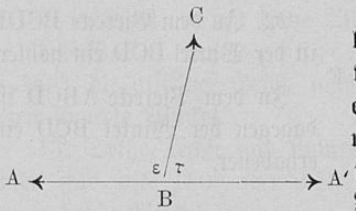
In dem nebenstehenden Vierecke ist DCB ein erhabener Winkel. Der gewöhnliche Sprachgebrauch hilft sich damit, daß er den hohlen Winkel DCB als **einspringend** bezeichnet.

Ein Fünfeck kann höchstens zwei erhabene (einspringende) Winkel haben. u. s. w.

25. **Schiefe Winkel** nennt man alle solche Winkel, die nicht rechte oder ganze Vielfache eines Rechten sind. Daher heißt im gewöhnlichen Leben der rechte Winkel auch das **Winkelmaß.**

§ 8. Nebenwinkel.

Erklärung: Wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so bildet diese Verlängerung mit dem andern Schenkel den Nebenwinkel des ursprünglichen Winkels.



oder: **Ein Paar hohle Winkel heißen Nebenwinkel zu einander, wenn sie den Scheitel und den einen Schenkel gemeinsam haben und wenn die beiden nichtgemeinsamen Schenkel einen gestreckten Winkel mit einander bilden.**

1. **Folgerung: Nebenwinkel betragen zusammen 2 R oder 180°** (ergänzen einander zu 2 R oder zu 180°).

2. Folgerung: Wenn ein Paar Nebenwinkel einander gleich sind, so ist ein jeder von ihnen ein rechter.

3. Folgerung: Wenn zwei beliebig gelegene Winkel einander gleich sind, so ist auch der Nebenwinkel des einen gleich dem Nebenwinkel des andern (als gleiche Reste von 2 R).

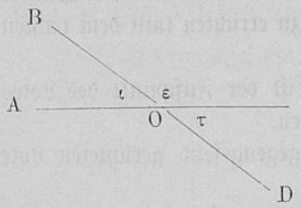
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9. Scheitelwinkel.

1. **Erklärung:** Wenn man die beiden Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus verlängert, so bilden diese beiden Verlängerungen miteinander den Scheitelwinkel des ersten Winkels.

oder: **Ein Paar hohle Winkel heißen Scheitelwinkel zu einander, wenn sie den Scheitel gemeinsam haben und wenn jeder Schenkel des einen Winkels mit einem Schenkel des anderen Winkels einen gestreckten Winkel bildet.**

2. **Lehrsatz: Scheitelwinkel sind einander gleich.**



Behauptung: Es soll $\iota = \tau$ sein.

1. Beweis: Wir nehmen einen gemeinschaftlichen Nebenwinkel zu Hülfe z. B. ε.

Es ist dann

$$\iota + \varepsilon = 2\,R \text{ oder } \iota = 2\,R - \varepsilon$$

und ebenso

$$\tau + \varepsilon = 2\,R \text{ oder } \tau = 2\,R - \varepsilon$$

hieraus folgt, daß $\iota = \tau$

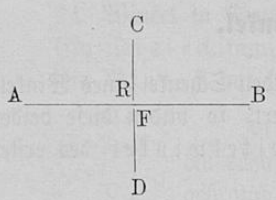
2. Beweis: Wir denken uns den Winkel τ um den Scheitel O herumgedreht und zwar um 180°. Es fällt dann der Schenkel OC auf OA und der Schenkel OD auf OB d. h. der Winkel τ fällt genau auf den Winkel ι. Diese beiden Winkel sind also einander gleich. w. z. b. w.

3. Folgerung: Wenn zwei beliebig gelegene Winkel einander gleich sind, so ist auch der Scheitelwinkel des einen gleich dem Scheitelwinkel des anderen; denn alle vier Winkel sind dann einander gleich.

§ 10. Das Lot.

1. **Erklärung:** Wenn zwei gerade Linien einen rechten Winkel mit einander bilden, so heißt eine jede von beiden ein **Lot** (oder eine Senkrechte oder ein Perpendikel) auf der andern

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



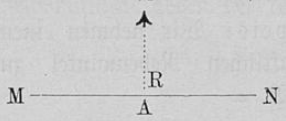
Der Scheitel des rechten Winkels heißt dabei der **Fußpunkt des Lotes.** (in der Figur also F)

Das Zeichen für Lot oder lotrecht oder rechtwinklich ist ⊥.

AB ⊥ CD (oder umgekehrt) heißt: AB ist ein Lot auf CD; oder: AB steht rechtwinklig, lotrecht oder senkrecht auf CD; oder AB und CD schneiden einander rechtwinklig.

2, Folgerung: Die Winkel am Fußpunkte eines Lotes (kurz: die Winkel am Lote) sind einander gleich als rechte Winkel.

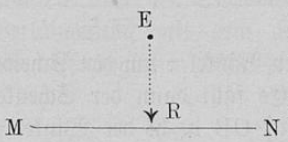
3. **Aufgabe: Auf einer Geraden MN in einem ihrer Punkte A das Lot zu errichten** (mit dem rechten Winkel).



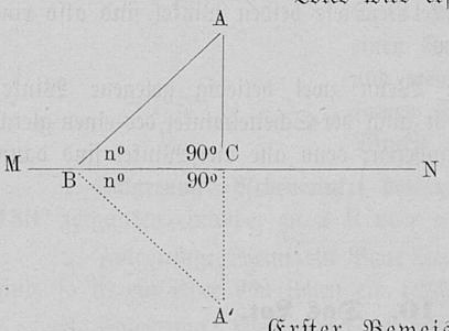
Hierbei ist der Fußpunkt des Lotes in A gegeben.

Die beiden in A möglichen, entgegengesetzt gerichteten Lote gelten für eines.

4. **Aufgabe: Von einem Punkte E aus auf eine Gerade MN ein Lot zu fällen.** (mit dem rechten Winkel)



Hierbei liegt der Punkt E außerhalb der Geraden und der Fußpunkt des Lotes wird erst gesucht.



5. **Lehrsatz:**

Von einem Punkte A aus läßt sich auf eine Gerade MN nur ein Lot fällen.

Erster Beweis:

Wenn AC ⊥ MN ist, (Voraussetzung)

so soll ∠ ABC < R sein (Behauptung)

oder n° < 90° „

Zum Beweise denken wir uns das Dreieck ABC um die Gerade MN herumgeklappt und bezeichnen die neue Lage des Punktes A mit A'.

Es ist dann $\angle ACA' = 180^0$, d. h. die drei Punkte A, C und A' liegen auf derselben Geraden (AA'). Es ist also die Figur ABA'CA wieder ein Dreieck und ACA' ist darin eine Seite. Nun kann ein Dreieck nur hohle Winkel haben;

daher ist auch $\angle ABA' < 2\ R$

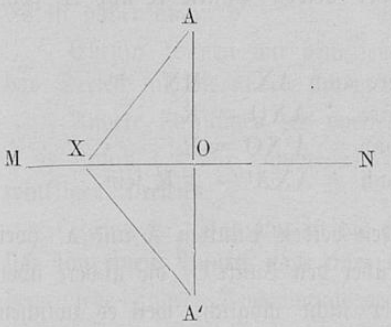
oder es ist $2\,n^0 < 180^0$

Es ist mithin $n^0 < 90^0$

d. h. $\angle ABC$ ist ein spitzer;

somit ist auch AB kein Lot auf MN. w. z. b. w.

Dies gilt solange, als der Punkt B neben dem Punkte C liegt.



Zweiter Beweis: Ich denke mir den Teil der Ebene, der den Punkt A enthält um die Gerade MN herumgeklappt und bezeichne die neue Lage von A (den Spiegel- oder Gegenpunkt von A) mit A'. Nun verbinde ich einen beliebigen Punkt X der Geraden MN mit A und mit A'.

Es ist dann $\angle OXA = \angle OXA'$,

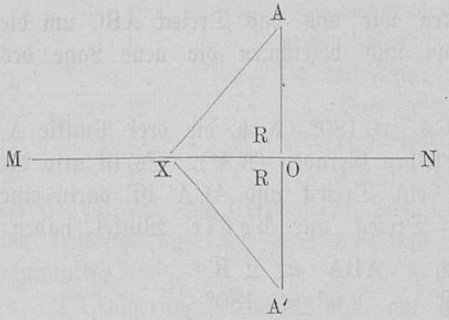
also $\angle AXO = \frac{1}{2} \angle AXA'$.

Solange nun $\angle AXA'$ kein gestreckter Winkel ist, so lange ist auch $\angle AXO$ kein rechter, d. h. AX kein Lot auf MN. Dies ist offenbar nur der Fall für den Punkt O, in dem die Gerade AA' die Gerade MN schneidet, so daß $\angle AOA'$ ein gestreckter und somit seine Hälfte AON ein rechter ist.

Da es nun zwischen zwei Punkten A und A' nur eine Verbindungsgerade giebt, so giebt es auch nur einen solchen Punkt O und nur ein Lot AO von A auf MN.

Dritter Beweis: Wollte jemand sagen, es gäbe zwei Lote vom Punkte A aus auf die Gerade MN, nämlich außer dem

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



wirklich konstruierten Lote AO wäre noch ein zweites Lot AX denkbar, so entgegnen wir ihm folgendes: Wir wollen das Dreieck AXO um MN herumklappen und dabei die neue Lage des Punktes A mit A' bezeichnen.

Da nun AO ⊥ MN ist, d. h. ∠ AON = R ist,
so ist auch ∠ A'ON = R,
also ∠ AOA' = 2 R

oder die Verbindungsgerade der beiden Punkte A und A' geht durch den Punkt O.

Nach deiner Angabe wäre auch AX ⊥ MN
d. h. es wäre ∠ AXO = R;
dann wäre auch ∠ A'XO = R;
es müßte demnach ∠ AXA' = 2 R sein

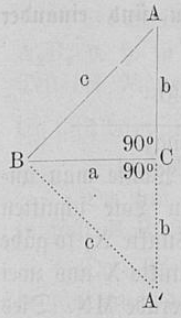
d. h. es gäbe dann zwischen den beiden Punkten A und A' zwei Verbindungsgeraden, die eine über den Punkt O, die andere über den Punkt X. Dies ist aber nicht möglich, weil es zwischen zwei Punkten nur eine Verbindungsgerade giebt. Dein Einwurf, es gäbe noch ein zweites Lot von A auf MN, ist daher falsch.

Der eben bewiesene Lehrsatz lautet als Dreiecksatz: **Im Dreieck kann nur ein Winkel ein rechter sein;** die beiden anderen Winkel sind dann spitze.

6. **Erklärung:** Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinklig.** Die Gegenseite des rechten Winkels heißt **die Hypotenuse,** die beiden anderen Seiten heißen die **Katheten** (eine einzelne: eine Kathete.)

7. **Lehrsatz: Im rechtwinkligen Dreiecke ist jede einzelne Kathete kürzer als die Hypotenuse.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Wenn $\angle ACB = 90^0$ ist (Voraussetzung)
so soll $a < c$ sein, (Behauptung).
und auch $b < c$ „

Beweis: Um zu beweisen, daß z. B. die Kathete b kleiner ist als die Hypotenuse c, klappen wir das rechtwinklige Dreieck um die andere Kathete a herum und bezeichnen die neue Lage des Eckpunktes A wieder mit A'. Es ist dann die Figur ABA'CA wieder ein Dreieck und ACA' eine Seite darin.

Nun ist jede Seite eines Dreiecks kleiner als die Summe der beiden anderen.

Es ist also $AA' < AB + BA'$

d. h. $2b < 2c$

Es ist daher auch $b < c$. w. z. b. w.

Ebenso können wir beweisen, daß $a < c$ ist, wenn wir das Dreieck um die andere Kathete herumklappen.

Andere Fassungen des vorstehenden Satzes sind:

Zusatz 1. **Die Hypotenuse ist die längste Seite des rechtwinkligen Dreiecks.**

Zusatz 2. **Das Lot ist die kürzeste Verbindungsgerade, die sich von einem Punkte nach einer Geraden ziehen läßt;** denn jede andere Verbindungsgerade ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, in dem das Lot eine Kathete ist.

8. **Erklärung:** Die Länge des Lotes von einem Punkte A auf eine Gerade MN nennt man den **Abstand** (die Entfernung) **des Punktes A von der Geraden MN.**

§ 11. Von den Parallelen.

Erklärung: Wenn zwei gerade Linien einer Ebene einander nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängert, so heißen sie **gleichlaufend** oder **einander parallel** (eigentlich: nebeneinander herlaufend).

Das Zeichen für parallel ist ||.

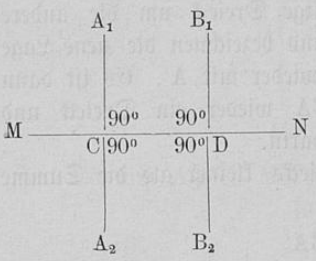
AB || CD heißt also: AB ist parallel zu CD.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Lehrsatz: Lote auf derselben Geraden sind einander parallel.

Wenn $A_1A_2 \perp MN$ ist und auch $B_1B_2 \perp MN$ ist, } (Voraussetzung)

so soll $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ sein. (Behauptung).

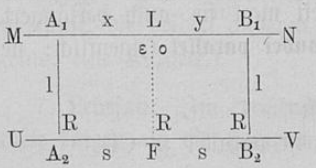


1. Beweis: Wollte man annehmen, die beiden Lote schnitten einander in einem Punkte X, so gäbe es ja von diesem Punkte X aus zwei Lote auf dieselbe Gerade MN. Dies ist aber nicht möglich, wie bewiesen ist. Es können also die beiden Lote auch keinen Schnittpunkt miteinander haben, d. h. sie sind einander parallel.

2. Beweis: Denken wir uns den oberen Teil der Ebene (in dem CA_1 und DB_1 liegen, um die Gerade MN herumgeklappt, so fällt CA_1 auf CA_2 und ebenso DB_1 auf DB_2. (Auf die Richtung kommt es hier allein an; denn CA_1, CA_2, DB_1 und DB_2 sind ja nur endliche, begrenzte Teile der unendlich langen Lote).

Wollte nun jemand behaupten, die beiden Lote schnitten einander in einem Punkte X_1, wenn man sie genügend weit über A_1 und B_1 hinaus verlängerte, so können wir ihm entgegnen, daß sie dann auf der anderen Seite von MN (also über A_2 und B_2 hinaus verlängert) ebenfalls einen entsprechenden Schnittpunkt X_2 haben müßten. Dann gäbe es aber zwischen diesen beiden angeblichen Schnittpunkten X_1 und X_2 zwei verschiedene Verbindungsgeraden, die eine über den Punkt C, die andere über den Punkt D. Dies ist aber unmöglich. Es können somit die beiden Lote A_1A_2 und B_1B_2 auf keiner Seite von MN einander schneiden d. h. sie sind einander parallel. w. z. b. w.

2. Lehrsatz: Haben zwei Punkte einer geraden Linie gleichlange und gleichgerichtete Abstände von einer anderen, so sind diese beiden geraden Linien einander parallel.



Wenn $A_1A_2 \perp UV$
und $B_1B_2 \perp UV$
und $A_1A_2 = B_1B_2$ ist,

so soll $MN \parallel UV$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Zum Beweise errichten wir in der Mitte von A_2B_2 d. h. in F auf UV das Lot FL und klappen den rechten Teil der Figur NLFV um dieses Hülfslot herum.

Es fällt dann, weil $LF \perp UV$ ist, FV in die Richtung von FU, und, weil $FA_2 = FB_2$ ist, der Punkt B_2 auf den Punkt A_2.

Da nun ferner n. d. V. $\angle FA_2A_1 = \angle FB_2B_1$ ist als R, so fällt B_2B_1 in die Richtung von A_2A_1.

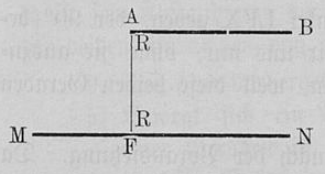
Da schließlich n. d. V. $B_2B_1 = A_2A_1$ ist, so fällt auch der Punkt B_1 auf den Punkt A_1 und somit LB_1 auf LA_1, also auch LN auf LM.

I. Hätten also die beiden Geraden MN und UV rechts einen Schnittpunkt X, so müßten sie auch links einen entsprechenden Schnittpunkt Y haben; dann gäbe es aber zwischen den beiden Punkten X und Y zwei verschiedene Verbindungsgeraden. Dies ist jedoch nicht möglich. Mithin können die beiden Geraden MN und UV überhaupt keinen Schnittpunkt haben d. h. sie sind einander parallel. w. z. b. w.

II. oder: Dann decken sich die Schenkel der beiden Winkel ε und $\circ$; folglich ist $\varepsilon = \circ$.
Da aber $\varepsilon + \circ = 2\,R$ ist, so ist jeder dieser beiden Winkel ein rechter. d. h. es ist $MN \perp LF$.
Nun ist aber auch $UV \perp LF$ durch die Hülfskonstruktion; folglich sind MN und UV Lote auf derselben Geraden (LF) und daher nach dem vorigen Satze einander parallel. w. z. b. w.

3. **Konstruktionsaufgabe: Zu einer Geraden MN durch einen Punkt A eine Parallele zu ziehen.**

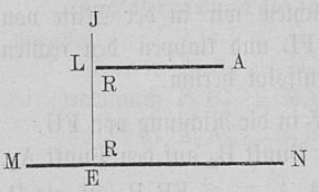
1. **Anleitung:** Wir ziehen uns eine Hülfsgerade, auf der MN ein Lot ist und ziehen dann durch A ein zweites Lot zu der Hülfsgeraden.



Ausführung: Wir fällen von A aus auf MN das Lot (AF) und errichten auf AF in A ein Lot AB.

Dann sind AB und MN beides Lote auf derselben Geraden AF und somit n. d. 1. Satze einander parallel.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



oder: Wir errichten in einem beliebigen Punkte E auf MN ein Lot EJ und fällen von A aus auf EJ das Lot AL. Dann sind MN und AL beides Lote auf derselben Geraden EJ und somit n. d. 1. Satze einander parallel.

2. **Anleitung:** Wir ermitteln den Abstand des Punktes A von MN und verschaffen uns dann einen zweiten Punkt, der von MN denselben Abstand hat wie A und mit ihm auf derselben Seite von MN liegt.

Ausführung: Wir fällen von A aus auf MN das Lot AT und errichten in einem beliebigen anderen Punkte T' der Geraden MN ein zweites Lot T'A', das mit dem ersteren AT gleiche Richtung und gleiche Länge hat,

sodaß also $AT \perp MN$

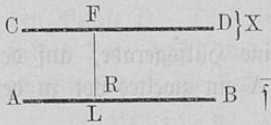
$T'A' \perp MN$

und $T'A' = AT$ ist.

Es ist dann n. d. 2. Satze $AA' \parallel MN$. w. v. w.

4. **Grundsatz: Durch einen Punkt (A) ist zu einer Geraden (BC) nur eine Parallele möglich.** Man sagt daher auch: die (nicht: eine) Parallele durch A zu BC.

5. **Lehrsatz: Ein Lot auf einer von zwei Parallelen ist auch ein Lot auf der anderen.** (vgl. 1).



Wenn $AB \parallel CD$ (Voraussetzung.)
und $FL \perp AB$ ist,
so soll auch $FL \perp CD$ sein. (Behauptung.)

Beweis: Mag der Winkel LFD ein Rechter sein oder nicht, jedenfalls muß es einen Winkel LFX geben, der 90° beträgt. (Die Gerade FX denken wir uns nur, ohne sie auszuziehen.) Dann muß $FX \parallel AB$ sein, weil diese beiden Geraden Lote auf derselben Strecke FL sind.

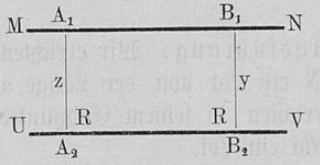
Es ist aber auch $FD \parallel LB$ nach der Voraussetzung. Da es nun durch einen Punkt (F) zu einer Geraden (LB) nur eine

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Parallele giebt, so müssen FD und FX der Richtung nach zusammenfallen. Es muß daher auch $\angle$ LFD = 90° sein.

oder es muß LF $\perp$ CD. w. z. b. w.

6. **Lehrsatz: Lote zwischen Parallelen sind einander gleich.**
oder: **Alle Punkte der einen Parallelen haben von der anderen denselben Abstand.**



Wenn MN || UV
und $A_1A_2 \perp$ UV
und $B_1B_2 \perp$ UV } Voraussetzung

so soll z = y sein. (Behauptung)

Beweis: Mag $B_1B_2 = A_1A_2$ sein oder nicht, jedenfalls muß es auf dem Lote B_1B_2 oder auf dessen Verlängerung über B_1 hinaus einen Punkt X geben, der so liegt, daß

$B_2X = A_2A_1$ ist.

Dann ist n. d. 2. Satze $A_1X \parallel A_2B_2$.
Nun ist n. d. V. auch $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
Da es aber (nach dem Grundsatze 4) durch einen Punkt (A_1) zu einer Geraden (A_2B_2) nur eine einzige Parallele giebt, so müssen die beiden Geraden A_1X und A_1B_1 identisch sein und somit auch X und B_1.
Da nun nach unserer Annahme $B_1X = A_2A_1$ ist,

so ist auch $B_2B_1 = A_2A_1$

oder z = y w. z. b. w.

7. **Erklärung: Unter dem Abstande zweier Parallelen von einander versteht man die Länge des Lotes zwischen ihnen.**

Dieses ist ihre kürzeste Verbindungsgerade.

Zusatz a) Liegt ein Punkt zwischen zwei Parallelen, so ist seine Entfernung von jeder einzelnen kleiner als der Abstand der beiden Parallelen von einander.

Zusatz b) Liegt ein Punkt außerhalb zweier Parallelen, so ist sein Abstand von der entfernteren größer als der Abstand der beiden Parallelen von einander.

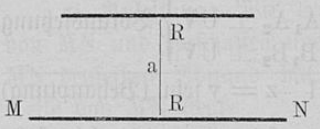
9. Aus dem vorhergehenden folgt:

a) **Bewegt sich ein Punkt in einer Ebene so, daß er von einer Geraden in ihr stets denselben Abstand behält, so ist seine Bahn eine Parallele zu jener Geraden.**

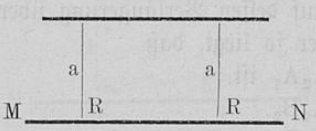
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) **Soll ein Punkt X von einer Geraden MN einen vorgeschriebenen Abstand a haben, so kann er nur auf einer der beiden Parallelen liegen, die sich im Abstande a zu jener Geraden ziehen lassen.**

10. **Aufgabe: Zu einer Geraden MN im Abstande a eine Parallele zu ziehen.**



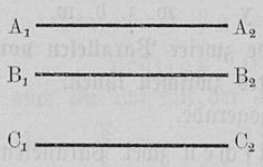
1. Ausführung: Wir errichten auf MN ein Lot von der Länge a und errichten in seinem Endpunkte wiederum ein Lot.



2. Ausführung: Wir errichten auf MN zwei gleichgerichtete Lote von der Länge a und verbinden deren Endpunkte durch eine Gerade.

Bemerkung: Es darf nicht übersehen werden daß sich stets zwei solche Parallelen ziehen lassen.

11. **Lehrsatz: Zwei gerade Linien A_1A_2 und B_1B_2 die derselben dritten Geraden (C_1C_2) parallel sind, sind auch einander parallel.**



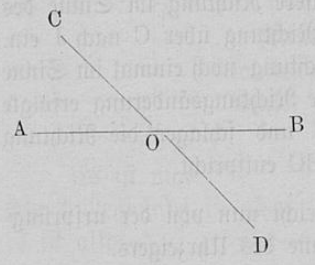
Wenn $A_1A_2 \parallel C_1C_2$ ist und auch $B_1B_2 \parallel C_1C_2$ ist, } Voraussetzung.

so soll $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ sein. (Behauptung.)

Beweis: Wollte man annehmen, die beiden Geraden A_1A_2 und B_1B_2 schnitten einander in einem Punkte X, so würde man damit zugleich behaupten, daß es durch diesen angeblichen Schnittpunkt X zu der Geraden C_1C_2 zwei Parallelen gäbe, was doch nach dem obenstehenden Grundsatze (4) nicht möglich ist. Es bleibt also nur übrig, daß $A_1A_2 \parallel B_1B_2$ ist. w. z. b. w.

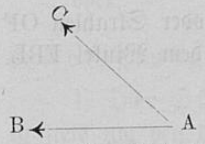
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 12. Die Winkel des Dreiecks im allgemeinen.



1. **Hülfsbetrachtung:**

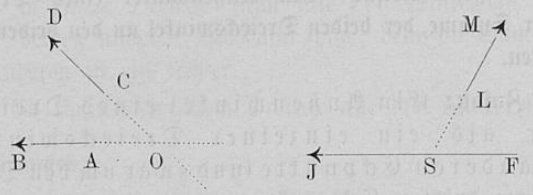
a) Zwei gerade Linien bilden mit einander stets vier Winkel. z. B. bilden die beiden Geraden AB und CD, deren Schnittpunkt wir mit O bezeichnen wollen, mit einander die Winkel AOC, COB, BOD und AOD.



b) Zwei Strahlen bilden dagegen nur einen Winkel mit einander; denn jeder Strahl stellt nur eine Richtung dar.

Der einfachste Fall ist der, wenn die beiden Strahlen AB und AC von demselben Punkte ausgehen. Ihre Richtungen weichen dann eben um den Winkel BAC von einander ab.

Gehen die beiden Strahlen dagegen von verschiedenen Punkten aus, so findet man den Winkel, um den ihre Richtungen von einander abweichen auf folgende Weise: Die beiden Strahlen liegen auf zwei verschiedenen Geraden; diese bilden mit einander vier Winkel. Darunter haben wir denjenigen Winkel zu nehmen, dessen Schenkel mit den beiden Strahlen, vom Scheitel aus betrachtet, gleiche Richtung haben.



Es bilden also die beiden Strahlen AB und CD mit einander den Winkel BOD und die beiden Strahlen FJ und LM mit einander den Winkel JSM.*

2. **Anwendung:** Drei gerade Linien (Wege) mögen einander so schneiden, daß sie ein Dreieck ABC einschließen. Wir ver-

* Der Fall, daß die beiden Strahlen derselben Geraden angehören oder aber einander parallel sind, hat für das folgende keine Bedeutung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

folgen nun von einem Punkte O aus die Richtung über A nach B. Im Punkte A ändern wir jedoch unsere Richtung im Sinne des Uhrzeigers um n^0 und schlagen die Richtung über C nach J ein. Im Punkte C ändern wir unsere Richtung noch einmal im Sinne des Uhrzeigers und zwar um u^0 (die Richtungsänderung erfolgte also beide male in demselben Sinne) und schlagen die Richtung CL ein, die der Verlängerung von BC entspricht.

Unsere jetzige Richtung CL weicht nun von der ursprünglichen OB ab um $n^0 + u^0$ im Sinne des Uhrzeigers.

Die Abweichung der beiden Richtungen oder Strahlen OF und CL ist uns aber unmittelbar gegeben in dem Winkel FBL.

Es ist daher $n^0 + u^0 = v^0$.
Nun ist $\gamma = u^0$ als Scheitelwinkel.
daher ist $\alpha + \gamma = \angle$ FBC d. h.

3. **Die Summe zweier Dreieckswinkel ist gleich dem Nebenwinkel des dritten.**

4. **Erklärung: Der Nebenwinkel eines Dreieckswinkels heißt ein Außenwinkel des Dreiecks.**

Es läßt sich nun der vorstehende Satz (3) ausdrücken als der sogenannte

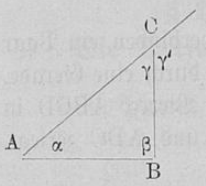
5. **Außenwinkelsatz: Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden Dreieckswinkel an den beiden anderen Eckpunkten.**

6. **Zusatz:** Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als ein einzelner Dreieckswinkel an einem anderen Eckpunkte (und zwar um den Dreieckswinkel am dritten Eckpunkte.)

oder: Ein Dreieckswinkel ist kleiner als der Außenwinkel an einem anderen Eckpunkte (und zwar um den Dreieckswinkel am dritten Eckpunkte).

7. **Lehrsatz: Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.** (180°).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Behauptung: Es soll $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ sein.

Zum Beweise nehmen wir einen Außenwinkel zu Hülfe z. B. γ' (d. h. den Nebenwinkel von γ).

Es ist nun $\gamma + \gamma' = 2\,R$
Als Außenwinkel ist aber $\gamma' = \alpha + \beta$;
es ist also $\gamma + \alpha + \beta = 2\,R$
oder $\alpha + \beta + \gamma = 2\,R$. w. z. b. w.

8. Folgerungen:

1. Die Summe zweier Winkel eines Dreiecks ist stets um den dritten kleiner als 180°, also ein hohler Winkel.

2. Wenn zwei Winkel eines Dreiecks gegeben oder vorgeschrieben sind, so ist damit auch der dritte Winkel gegeben oder vorgeschrieben.

3. Stimmen zwei Dreiecke in zwei Winkeln überein, so stimmen sie auch in dem dritten Winkel überein, also in allen drei Winkeln.

4. In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein stumpfer sein; die beiden anderen sind dann spitze; denn die Summe dieser beiden anderen ist ein spitzer.

5. In einem Dreiecke kann nur ein Winkel ein rechter sein, die beiden anderen sind dann spitze; denn die Summe dieser beiden anderen ist ein rechter.

6. Es können in einem Dreiecke alle drei Winkel spitze sein.

9. **Erklärungen:**

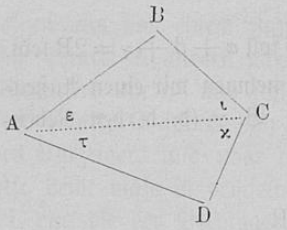
1. Ein Dreieck mit lauter spitzen Winkeln heißt **spitzwinklig.**

2. Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinklig.**

3. Ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel heißt **stumpfwinklig.**

10. **Aufgabe: Wie groß ist die Summe der Winkel eines Vierecks?**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Lösung: Wir verbinden ein Paar Gegenecken A und C durch eine Gerade. Hierdurch wird das Viereck ABCD in zwei Dreiecke ABC und ADC zerlegt.

Es ist nun nach dem Satze 7

$$\angle B + \varepsilon + \iota = 2\,R$$
$$\text{und} \quad \angle D + \tau + \varkappa = 2\,R$$

es ist daher $\angle B + \angle D + \varepsilon + \tau + \iota + \varkappa = 4\,R$

oder $\angle B + \angle D + \angle BAD + \angle BCD = 4\,R$

d. h. **Die Summe der Winkel im Vierecke beträgt vier Rechte.**

11. **Aufgabe: Wie groß ist die Summe der Winkel eines Fünfecks?**

Lösung: Wir ziehen von einem Punkte O innerhalb des Fünfecks gerade Linien nach den sämmtlichen Eckpunkten. Hierdurch wird das Fünfeck in fünf Dreiecke zerlegt und jeder seiner Winkel in zwei Winkel, die verschiedenen Dreiecken angehören.

Nach dem Satze 7 ist nun

$$\alpha_2 + \beta_1 + \iota = 2\,R$$
$$\beta_2 + \gamma_1 + \varkappa = 2\,R$$
$$\gamma_2 + \delta_1 + o = 2\,R$$
$$\delta_2 + \varepsilon_1 + \sigma = 2\,R$$
$$\varepsilon_2 + \alpha_1 + \tau = 2\,R$$

es ist also $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1 + \delta_2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \iota + \varkappa + o + \sigma + \tau = 2\,R.\,5$

oder, wenn wir die Winkel des Fünfecks einfach nach ihrem Scheitelpunkte bezeichnen,

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \iota + \varkappa + o + \sigma + \tau = 2.5\,R.$$

Nun ist aber $\iota + \varkappa + o + \sigma + \tau = 4\,R.$

es ist folglich $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 2.5\,R. - 4\,R.$

12. **Aufgabe: Wie groß ist die Summe der Winkel eines Vielecks von n Seiten?** Der Buchstabe n bedeutet hierbei eine beliebige ganze Zahl.

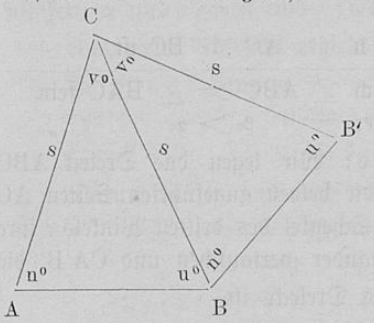
Lösung: Ganz entsprechend der Lösung der vorigen Aufgabe ergiebt sich: $2\,n\,R - 4\,R$ oder $(2\,n - 4)\,R$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 13. Der Basiswinkelsatz.
Die Dreiecksseiten und ihre Gegenwinkel.

1. **Erklärung:** Wenn in einem Dreiecke zwei Seiten gleich lang sind, so nennt man diese beiden Seiten die **Schenkel** und die dritte Seite die **Basis**. Das Dreieck heißt dann **gleichschenklig**. Die Gegenecke der Basis heißt **die Spitze** oder **der Gipfel** des gleichschenkligen Dreiecks. Der Winkel am Gipfel heißt der **Gipfelwinkel** und die beiden Winkel an der Basis heißen die **Basiswinkel**.

2. **Lehrsatz: Im gleichschenkligen Dreiecke sind die beiden Basiswinkel einander gleich.**



Wenn AC = BC ist,
so soll ∠ CAB = ∠ ABC sein
oder $n^0 = u^0$ „

Beweis: Wir drehen das gleichschenklige △ ABC in seiner Ebene um seinen Gipfel C, bis der Schenkel CA in die bisherige Lage des anderen Schenkels gelangt ist, so daß also A auf B fällt. Die neue Lage des anderen Schenkels heiße CB'. Nun klappen wir das Dreieck wieder um CB zurück. Es fällt dann genau auf seine alte Spur, weil ∠ BCB' = ∠ BCA und CB' = CA ist. Dabei haben nun die beiden Schenkel ihre Lage mit einander vertauscht. Dasselbe ist aber auch der Fall mit den beiden Basiswinkeln. Hieraus ergiebt sich, daß sie einander gleich sind.

Es ist also $n^0 = u^0$. w. z. b. w.

3. **Folgerungen:**

1. In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Basiswinkel spitze;
denn ihre Summe ist um den Gipfelwinkel kleiner als 180^0; da sie aber einander gleich sind, so ist jeder einzelne kleiner als 90^0 d. h. ein spitzer Winkel.

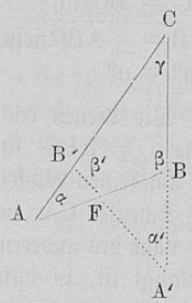
2. Wenn der Gipfelwinkel ein rechter ist, so ist jeder Basiswinkel $^1/_2$ R oder 45^0.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. **Im gleichseitigen Dreiecke sind alle drei Winkel einander gleich und jeder einzelne beträgt demnach $^2/_3$ R oder 60°;** denn im gleichseitigen Dreiecke kann man jede Seite als Basis ansehen und somit sind je zwei Winkel in ihm einander gleich, also sind alle drei Winkel einander gleich. Da sie nun zusammen 2 R oder 180° betragen, so beträgt jeder einzelne $^2/_3$ R oder 60°.

4. **Lehrsatz: Wenn zwei Dreiecksseiten einander ungleich sind, so liegt der größeren von beiden auch ein größerer Winkel gegenüber als der kleineren.**

oder: **Die größere von zwei Dreiecksseiten hat auch den größeren Gegenwinkel.**



Wenn AC > BC ist,

so soll auch ∠ ABC > ∠ BAC sein

oder β > α "

Beweis: Wir legen das Dreieck ABC so um, daß die beiden angeführten Seiten AC und BC als Schenkel des dritten Winkels γ ihre Lage mit einander vertauschen und CA'B' die neue Lage des Dreiecks ist.

Es ist dann $\alpha' = \alpha$ und $\beta' = \beta$.

Nun ist aber β' ein Außenwinkel des Dreiecks AB'F;

daher ist $\beta' > \alpha$.

Da aber $\beta' = \beta$ ist,

so ist auch $\beta > \alpha$ w. z. b. w.

5. **Folgerungen:**

1. Der größten Seite eines Dreiecks liegt auch der größte Winkel gegenüber.

2. Der Gegenwinkel einer Dreiecksseite, die nicht die größte ist, ist allemal ein spitzer; denn er ist nicht der größte in dem Dreiecke und zwei Winkel des Dreiecks sind immer spitze.

3. Die beiden Winkel, die der größten Seite eines Dreiecks anliegen, sind spitze.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. Nennen wir eine Seite eines Dreiecks a und ihren Gegenwinkel α und eine andere Seite b und ihren Gegenwinkel β, so ergiebt sich folgendes:

Zwischen zwei Seiten a und b eines Dreieckes und ihren Gegenwinkeln α und β finden nach den beiden Sätzen 2) und 4) folgende Beziehungen statt:

Es ist entweder $a > b$; dann ist auch $\alpha > \beta$.
oder es ist $a = b$; „ „ „ $\alpha = \beta$.
oder es ist schließlich $a > b$; „ „ „ $\alpha < \beta$.

Andere als diese drei Größenbeziehungen kann es weder zwischen den beiden Seiten a und b noch zwischen den beiden Winkeln α und β geben und eine davon muß stattfinden.

Aus dieser Übersicht ergiebt sich nun:

Es ist nur dann $\alpha > \beta$, wenn auch $a > b$ ist.
„ „ „ „ $\alpha = \beta$, „ „ $a = b$ „
„ „ „ „ $\alpha < \beta$, „ „ $a > b$ „

Darum dürfen wir auch umgekehrt behaupten:

Wenn $\alpha > \beta$ ist, so ist auch $a > b$.
„ $\alpha = \beta$ „ „ „ „ $a = b$.
„ $\alpha < \beta$ „ „ „ „ $a < b$.

d. h. wir dürfen jene beiden Lehrsätze 2) und 4) umkehren: d. h. es gelten die Sätze:

7. **Gleiche Winkel eines Dreiecks haben gleiche Gegenseiten.**

8. **Der größere von zwei Winkeln eines Dreiecks hat auch die größere Gegenseite.**

9. Folgerungen:

1. Ein Dreieck mit lauter gleichen Winkeln ist auch gleichseitig.

2. Der größte Winkel eines Dreiecks hat auch die größte Gegenseite; daher:

3. Im rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse die größte Seite. (siehe auch § 10,7 Seite 21)

10. Bemerkung: Der Satz (4) und die beiden Umkehrungen 7) und 8) lassen sich anschaulich aus der Figur des gleichschenkligen Dreiecks ableiten, wenn man unter Beibehaltung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Gipfelwinkels γ jenachdem den einen Schenkel oder den einen Basiswinkel wachsen oder abnehmen läßt und dabei bedenkt, daß die Summe der beiden Winkel an der Gegenseite von γ beständig $= 2\,R - \gamma$ ist, sodaß also der eine von ihnen immer um soviel Grad kleiner wird, als der andere zunimmt (und umgekehrt.)

§ 14. Der Winkel im Halbkreise.

1. **Lehrsatz: Zieht man von einem Punkte (C) der Kreislinie aus die zwei Strahlen durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers (AB), so bilden diese beiden Strahlen miteinander einen rechten Winkel.**

oder kurz: **Der Winkel im Halbkreise ist ein rechter.**

Wenn $AO = OC = OB$ (Voraussetzung)
und $\angle AOB = 2\,R$ ist,

---

so soll $\angle ACB = R$ sein. (Behauptung).

Beweis: N. d. V. ist $AO = OC$;
daher ist $\alpha = n^0$ als Basiswinkel.
Es ist ferner n. d. V. $OC = OB$;
daher ist $\beta = u^0$ als Basiswinkel.
Da schließlich n. d. V. $\angle AOB = 2\,R$ ist,
so ist die Figur ACBOA ein Dreieck
und daher $\alpha + \angle ACB + \beta = 180^0$ } als Summe der
oder $\alpha + n^0 + u^0 + \beta = 180^0$ } Winkel eines Dreiecks
Da aber $\alpha = n^0$ und $\beta = u^0$ ist,

---

so ist $n^0 + n^0 + u^0 + u^0 = 180^0$
oder $2.\,n^0 + 2.\,u^0 = 180^0$
also $n^0 + u^0 = 90^0$
d. h. $\angle ACB = R$ w. z. b. w.

2. **Lehrsatz: Zieht man von einem Punkte (J) innerhalb eines Kreises die zwei Strahlen durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers (AB), so bilden diese beiden Strahlen miteinander einen stumpfen Winkel.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Wir verlängern den einen Schenkel des Winkels ι bis zum Kreisumfange (d. h. bis C).

Es ist dann $\angle$ ACB = R n. d. vorig. S.

Nun ist ι ein Außenwinkel des Dreiecks JCB und daher

$$\iota > \gamma \text{ d. h. } > R$$

d. h. $\angle$ AJB ist ein stumpfer Winkel w. z. b. w.

Bemerkung: Wenn der Punkt J auf dem Durchmesser AB selbst liegt, so ist $\angle$ AJB sogar ein gestreckter. —

3. Lehrsatz: **Zieht man von einem Punkte (E) außerhalb eines Kreises die zwei Strahlen durch die beiden Endpunkte eines Durchmessers (AB), so bilden diese beiden Strahlen miteinander einen spitzen Winkel.**

Beweis: Wir bezeichnen den Punkt, in dem der eine Schenkel des Winkels AEB den Kreis schneidet, mit C.

Es ist ist dann $\angle$ ACB = R als Winkel im Halbkreise.

Nun ist γ ein Außenwinkel des Dreiecks ACE und daher ist

$$\gamma > \varepsilon$$

$$\text{oder } \varepsilon < \gamma \text{ d. h. } < R$$

d. h. $\angle$ AEB ist ein spitzer Winkel. w. z. b. w.

4. Aus den drei vorstehenden Sätzen ergiebt sich:

Ein Dreieckswinkel ACB muß und kann nur dann ein rechter sein, wenn sein Scheitel C auf der Kreislinie liegt, die seine Gegenseite AB zum Durchmesser hat.

oder: **Der geometrische Ort für die Gegenecke der Hypotenuse ist der Kreis, der die Hypotenuse zum Durchmesser hat** (kurz: sind die beiden Halbkreise über der Hypotenuse).

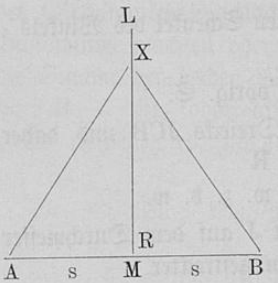
§ 15. Das Mittellot.

Erklärung: Das auf einer Strecke AB in ihrer Mitte M errichtete Lot heißt das **Mittellot.** von AB.

1. Lehrsatz: **Jeder einzelne Punkt X des Mittellotes einer Strecke AB hat von deren beiden Endpunkten A und B gleiche Abstände.**

oder als Dreiecksatz: **Wenn das Mittellot einer Dreiecksseite durch die Gegenecke geht, so sind die beiden anderen Seiten einander gleich.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Wenn AM = MB
und XM ⊥ AB ist,

so soll AX = BX sein.

Beweis: Wir klappen das Dreieck AMX um das Mittellot MX herum. Da nun n. d. V. ∠ AMX = ∠ BMX ist als R, so fällt hierbei MA in die Richtung von MB.

Da ferner n. d. V. AM = MB ist, so fällt AM auch der Länge nach mit MB zusammen d. h. der Punkt A fällt auf den Punkt B. Es ist damit auch AX auf BX gefallen, weil zwischen zwei Punkten X und B nur eine Gerade möglich ist, und somit ist auch AX = BX. w. z. b. w.

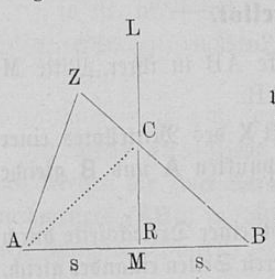
Aus der Deckung der beiden Dreiecke AXM und BXM folgt ferner, daß ∠ AXM = ∠ BXM ist. d. h.

1a. Zusatz: **Wenn man von einem beliebigen Punkte (X) des Mittellotes einer Strecke (AB) die zwei Strahlen durch die beiden Endpunkte der Strecke zieht, so bilden diese beiden Strahlen gleiche Winkel mit dem Mittellote.**

oder als Dreiecksatz: **Wenn das Mittellot einer Dreiecksseite durch die Gegenecke geht, so halbiert es dabei den Winkel an der Gegenecke.**

2. Lehrsatz: **Wenn ein Punkt Z nicht auf dem Mittellote einer Strecke AB liegt, so ist sein Abstand vom jenseitigen Endpunkte dieser Strecke größer als vom diesseitigen.**

oder als Dreiecksatz: **Wenn das Mittellot einer Dreiecksseite eine zweite Seite des Dreiecks schneidet, so ist diese zweite Seite länger als die dritte Seite.**



Wenn AM = BM
und LM ⊥ AB ist
u. das Mittellot LM die Strecke BZ schneidet,

so soll AZ < BZ sein.

Beweis: Wir bezeichnen den Schnittpunkt von BZ und LM mit C.

Es ist dann AZ < ZC + AC;

denn die gerade Linie ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Es ist ferner AC = BC n. d. vorigen Satze;
folglich ist AZ < ZC + CB
d. h. AZ < BZ. w. z. b. w.

Aus den beiden vorstehenden Lehrsätzen ergiebt sich: Ein Punkt X muß und kann nur dann von zwei Punkten A und B gleichweit entfernt sein, wenn er auf dem Mittellote von AB liegt. (Jeder Punkt des Mittellotes hat jene Eigenschaft und sonst giebt es weiter keine solche Punkte). Man sagt:

3. **Der geometrische Ort für einen Punkt X, der von zwei Punkten A und B gleichen Abstand hat, ist das Mittellot von AB.** oder als Dreiecksatz: **Der Gipfel des gleichschenkligen Dreiecks liegt auf dem Mittellote der Basis.**

4. **Konstruktionsaufgabe: Auf einer Geraden MN in einem Punkte A das Lot zu errichten** (mit dem Zirkel).

Ausführung: Wir verschaffen uns eine Strecke BC, die auf MN liegt und den Punkt A zur Mitte hat, indem wir von A aus auf MN nach beiden Seiten hin dieselbe Strecke (e) abschneiden: AB = AC (= e).

Dann errichten wir über BC ein gleichschenkliges Dreieck
BD = CD

Nach dem vorigen Satze (3) ist dann D ein Punkt des Mittellotes von BC.

Nun ist eine Gerade durch zwei ihrer Punkte bestimmt; folglich ist AD das Mittellot von BC;
also ist auch DA ⊥ MN, was verlangt war.

5. **Konstruktionsaufgabe: Das Mittellot einer Strecke AB zu konstruieren.**

1. Ausführung: Wir verschaffen uns zwei Punkte des verlangten Mittellotes, indem wir über der Strecke AB als Basis zwei beliebige gleichschenklige Dreiecke errichten

d. h. wir machen AC = BC = e
und AD = BD = s

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist nun nach dem letzten Satze (3) C ein Punkt des Mittellotes von AB und ebenso auch D. Es ist daher CD das Mittellot von AB.

2. Ausführung: Bequemer ist es bei den beiden gleichschenkligen Dreiecken dieselbe Schenkellänge t zu benutzen d. h.: Wir machen AB zur Diagonale eines gleichseitigen Vierecks

$$AC = AD = BC = BC = t$$

Es ist nun (wieder) C und ebenso auch D ein Punkt des Mittellotes von AB nach d. S. 3;

es ist daher CD das Mittellot von AB. w. v. w.

Unter **Diagonale** versteht man in geradlinigen Figuren die Verbindungsgerade zweier Eckpunkte, die nicht zugleich eine Seite der Figur ist.

6. **Konstruktionsaufgabe: Eine Strecke AB zu halbieren.**

Ausführung: Wir konstruieren uns das Mittellot von AB, wie unter 5,1 oder 5,2.

7. **Konstruktionsaufgabe: Von einem Punkte A aus auf eine Gerade MN das Lot zu fällen** (mit dem Zirkel).

1. Ausführung: Wir machen A zum Gipfel eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis auf MN liegt; dies geschieht, indem wir um A einen Kreis beschreiben, der MN schneidet (in den Punkten B und C)

$$AB = AC = s$$

Es ist dann A n. d. S. 3 ein Punkt des Mittellotes von BC.

Einen zweiten Punkt dieses Mittellotes finden wir, indem wir über der abgeschnittenen Sehne BC ein zweites gleichschenkliges Dreieck errichten, d. h. $BF = CF = t$ machen. (Es darf $t = s$ sein). Es ist dann auch F ein Punkt des Mittellotes von BC, ebenfalls n. d. S. 3. —

Es ist mithin AF das Mittellot von BC;
es ist also auch $AF \perp MN$. w. v. w. —

Aus dem Satze 3) und dem Zusatze 1a) ergiebt sich der

8. **Satz: Im gleichschenkligen Dreiecke geht das Mittellot der Basis durch den Gipfel und halbiert dabei den Gipfelwinkel.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. **Satz: Haben zwei gleichschenklige Dreiecke die Basis gemeinsam, so ist die Verbindungsgerade ihrer Gipfel das Mittellot der gemeinschaftlichen Basis und halbiert dabei die beiden Gipfelwinkel.**

Zum Beweise siehe 5,1 und 8.

Ein besonderer Fall hiervon ist der

10. **Satz: Im gleichseitigen Vierecke (Rhombus) ist jede Diagonale das Mittellot der anderen und halbiert dabei die beiden Winkel, deren Scheitel sie verbindet.**

11. **Konstruktionsaufgabe: Einen Winkel zu halbieren** (mit dem Zirkel).

1. Ausführung: Wir verfahren nach dem Satze 9; d. h. wir machen den gegebenen Winkel zum Gipfelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks, indem wir auf den beiden Schenkeln vom Scheitel aus dieselbe Strecke s abtragen,

$$AB = AC = s$$

und dann über der Basis BC ein zweites gleichschenkliges Dreieck errichten $BF = CF = t$.

Es ist nun n. d. S. 9

$$\angle BAF = \angle CAF \quad \text{w. v. w.}$$

2. Ausführung: Wir verfahren nach dem Satze 10. d. h. wir konstruieren uns ein gleichseitiges Viereck (einen Rhombus), von dem zwei Seiten auf den Schenkeln des gegebenen Winkels liegen:

$$AB = AC = BL = CL.$$

Es ist nun n. d. S. 10 $\angle BAL = \angle CAL.$ w. v. w.

12. **Lehrsatz: Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so lassen sie sich genau zum Decken bringen (so sind sie kongruent $\cong$) und stimmen somit auch in den gleichliegenden Winkeln überein.**

Wenn $A_1B_1 = A_2B_2$
$A_1C_1 = A_2C_2$
$B_1C_1 = B_2C_2$ ist,

so soll $\triangle I \cong \triangle II$ sein.

d. h. es soll auch $\alpha_1 = \alpha_2$
$\beta_1 = \beta_2$
und $\gamma_1 = \gamma_2$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis: Wir legen das eine Dreieck z. B. $\triangle$ II so neben das andere ($\triangle$ I), daß ein Paar gleiche Seiten z. B. A_1B_1 und A_2B_2 mit den entsprechenden Endpunkten aufeinander fallen, sodaß also der Punkt A_2 auf A_1 und der Punkt B_2 auf B_1 fällt.

Bezeichnen wir nun die neue Lage des Punktes C_2 mit C_2',

so ist $A_1C_1 = A_1C_2'$ n. d. V.

und $B_1C_1 = B_1C_2'$ n. d. V.

Es ist mithin A_1B_1 das Mitttellot von C_1C_2'

d. h. es ist $C_1O = OC_2'$

und $A_1B_1 \perp C_1C_2'$.

oder $\angle A_1OC_1 = \angle A_1OC_2'$ als R.

Wenn wir daher das $\triangle A_1B_1C_2'$ um A_1B_1 herumklappen,

so fällt C_2' auf C_1

also auch die Seite A_1C_2' auf die Seite A_1C_1

und „ „ B_1C_2' „ „ „ B_1C_1.

d. h. das Dreieck $A_1B_1C_2'$ ist genau auf das Dreieck $A_1B_1C_1$ gefallen;

Es ist daher auch $\alpha_1 = \alpha_2' = \alpha_2$

$\beta_1 = \beta_2' = \beta_2$

und $\gamma_1 = \gamma_2' = \gamma_2$ w. z. b. w.

13. **Konstruktionsaufgabe: Einen Winkel ε an eine Gerade MN in einem ihrer Punkte J anzutragen.**

d. h. einen Winkel zu konstruieren, der seinen Scheitel im Punkte J und den einen Schenkel auf MN zu liegen hat und dabei dem gegebenen Winkel ε gleich ist.

Ausführung: Wir machen ε zum Gipfelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und tragen dieses so an MN an, daß sein Gipfel in J und der eine Schenkel auf MN fällt.

$$EA = EB = JA' = JB'$$

$$AB = A'B'$$

Es ist dann n. d. vorigen S.

$$\triangle EAB \cong \triangle JA'B'$$

und daher $\iota = \varepsilon$ w. v. w.

Bemerkung: Der Lage nach giebt es vier verschiedene Lösungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 16. Anwendung der Sätze vom Mittellote auf das gleichschenklige Dreieck und den Kreis.

Verbindet man in einem Kreise die Endpunkte einer Sehne AB mit dem Mittelpunkte O, so erhält man ein gleichschenkliges Dreieck, worin die Sehne AB die Basis, der Mittelpunkt O der Gipfel und der Centriwinkel AOB der Gipfelwinkel ist. Für dieses Dreieck gelten also auch die Sätze über das gleichschenklige Dreieck; nämlich

1. **Satz: Das Mittellot der Basis geht durch den Gipfel und halbiert dabei den Gipfelwinkel.** vgl. § 15,8.

1a. **Satz: Das Mittellot einer jeden Sehne geht durch den Mittelpunkt des Kreises und halbiert dabei den zugehörigen Centriwinkel und** (somit auch) **die beiden zugehörigen Bogen.**

Wenn $AM = BM$
und $FL \perp AB$ ist,

so ist $\angle AOM = \angle BOM$
und $\widehat{AF} = \widehat{BF}$ vgl. § 7,5 S. 13.
und $\widehat{AL} = \widehat{BL}$

Diese beiden letzteren Bogen sind einander gleich, als gleiche Reste von den beiden Halbkreisen FAL und FBL. —

Vom Gipfel eines gleichschenkligen Dreiecks läßt sich auf die Basis, wie von jedem Punkte auf eine Gerade, nur ein Lot fällen. Dieses Lot muß daher n. d. S. 1 stets mit dem Mittellote der Basis zusammenfallen und somit auch seine Eigenschaften haben. Es gilt also der

2. **Satz: Das Lot vom Gipfel eines gleichschenkligen Dreiecks auf die Basis halbiert den Gipfelwinkel und die Basis.**

2a. **Satz: Das Lot vom Mittelpunkte eines Kreises auf die Sehne halbiert die Sehne und den zugehörigen Centriwinkel und die beiden zugehörigen Bogen.** —

Der Gipfelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks läßt sich, wie jeder Winkel, nur auf eine Weise halbieren. Da nun n. d. S. 1. das Mittellot der Basis dies thut, so gilt der

3. **Satz: Im gleichschenkligen Dreiecke ist die Halbierungsgerade des Gipfelwinkels zugleich das Mittellot der Basis.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Beweis läßt sich auch dadurch erbringen, daß man das eine Teildreieck um die Halbierungsgerade des Gipfelwinkels herumklappt.

3a. **Satz: Die Halbierungsgerade eines Centriwinkels halbiert auch die zugehörige Sehne und den zugehörigen Bogen und steht auf der Sehne senkrecht (oder: ist das Mittellot der zugehörigen Sehne und halbiert den zugehörigen Bogen. —**

Es liegt endlich der Gipfel des gleichschenkligen Dreiecks auf dem Mittellote der Basis. Zwischen dem Gipfel und der Mitte der Basis kann es nun aber, wie überhaupt zwischen zwei Punkten, nur eine einzige Verbindungsgerade geben. Diese muß daher mit dem Mittellote der Basis zusammenfallen (identisch sein) und somit auch seine Eigenschaften haben, d. h. es gilt der

4. **Satz: Die Gerade, die den Gipfel eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, halbiert den Gipfelwinkel und steht auf der Basis senkrecht.**

4a. **Satz: Die Gerade, die den Mittelpunkt eines Kreises mit der Mitte einer Sehne verbindet, halbiert den zugehörigen Centriwinkel (und den zugehörigen Bogen) und steht auf der Sehne senkrecht. —**

Aus dem Satze 1a (oder eigentlich schon aus dem Satze § 15,3) folgt:

5. **Satz: Die Mittellote aller Sehnen eines Kreises schneiden einander im Mittelpunkte des Kreises.**

6. **Geometrischer Ort: Soll ein Kreis durch zwei feste Punkte A und B gehen, so ist der geometrische Ort seines Mittelpunktes das Mittellot von AB.**

7. **Konstruktionsaufgabe: Durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks ABC einen Kreis zu legen (um das Dreieck einen Kreis zu beschreiben)**

oder: **einen Punkt X zu suchen, der von drei gegebenen Punkten A, B und C gleichweit entfernt ist.**

Vorbetrachtung (Analysis): Damit der Kreis durch die beiden Punkte A und B geht, muß sein Mittelpunkt X auf dem Mittellote von AB liegen. Damit andrerseits der Kreis durch die beiden Punkte B und C geht, muß sein Mittelpunkt X auf dem Mittellote von BC liegen. Es muß daher der gesuchte Mittelpunkt X der Schnittpunkt jener beiden Mittellote sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ausführung: Wir konstruieren uns das Mittellot von AB und das von BC und nennen deren Schnittpunkt O.

Es ist dann O der Mittelpunkt des Kreises, der durch die drei Punkte A, B und C geht.

Beweis: Es ist nämlich AO = BO n. § 15,1
und BO = CO " " "

Es ist also AO = BO = CO

d. h. der Punkt O hat von den drei Punkten A, B und C dieselbe Entfernung. w. v. w.

8. **Zusatz:** Durch drei Punkte läßt sich nur ein Kreis legen, da sich die beiden Mittellote, wie überhaupt zwei gerade Linien, nur in einem Punkte schneiden können.

Ein Kreis ist also durch drei seiner Punkte vollständig bestimmt.

Durch mehr als drei Punkte läßt sich in der Regel kein Kreis legen.

9. Bemerkung: Durch drei Punkte A, B und C, die derselben geraden Linie angehören, läßt sich kein Kreis legen; denn das Mittellot von AB und das Mittellot von BC sind dann Lote auf derselben Geraden und haben daher keinen Schnittpunkt, und somit giebt es auch keinen Punkt, der von den drei Punkten A, B und C dieselbe Entfernung hätte. —

10. **Satz: Die Mittellote der drei Seiten eines Dreiecks schneiden einander in demselben Punkte** (gehen durch denselben Punkt), **nämlich in dem Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.**

denn die Dreiecksseiten sind ja Sehnen des umgeschriebenen Kreises. (vgl. 7) und die Mittellote aller Sehnen eines Kreises schneiden einander im Mittelpunkte. (vgl. 5).

11. **Konstruktionsaufgabe: Durch einen Punkt A innerhalb eines Kreises diejenige Sehne zu ziehen, die in A ihre Mitte hat.**

Vorbetrachtung (Analysis): Wir wollen die verlangte Sehne XY nennen.

Es ist dann XA = AY
ferner XO = YO als Radien desselben Kreises.

es ist daher AO das Mittellot von XY. n. d. S. 4a.

Ausführung: Wir verbinden A mit O und ziehen durch A diejenige Sehne, die auf AO senkrecht steht. Diese hat dann in A ihre Mitte n. d. S. 2a.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 17. Die Tangente.

1. **Lehrsatz: Wenn eine gerade Linie (MN) durch einen Punkt (A) einer Kreislinie geht und dabei senkrecht auf dem zugehörigen Radius (AO) steht, so haben der Kreis und die Gerade nur diesen einen Punkt (A) gemeinsam.**

Voraussetzung: $OA \perp MN$.

Beweis: Verbinden wir irgend einen anderen Punkt X der Geraden MN mit dem Kreismittelpunkte O, so ist

$$OX > OA \text{ d. h. } > r;$$

denn das Lot ist die kürzeste Verbindung zwischen dem Punkte O und der Geraden MN.

Da nun OX größer ist als der Radius, so liegt der Punkt X außerhalb des Kreises.

Erklärung: Wenn ein Kreis und eine gerade Linie nur einen einzigen Punkt gemeinsam haben, so sagt man sie: berühren einander. Der eine gemeinsame Punkt (A) heißt der **Berührungspunkt.** Die berührende Gerade heißt die **Tangente** in jenem Punkte (A).

Sieht man den Mittelpunkt des Kreises d. h. den gemeinsamen Ausgangspunkt aller Radien auch als deren Anfangspunkt an, so hat jeder Radius seinen Endpunkt auf der Peripherie. Der vorstehende Satz läßt sich dann kürzer so ausdrücken:

Das Lot im Endpunkte eines Radius ist eine Tangente.

2. **Lehrsatz: Wenn eine Gerade UV durch den Endpunkt (A) eines Radius geht, ohne dabei ein Lot darauf zu sein, so schneidet die Gerade den Kreis (so ist sie eine Sekante).**

Beweis: Da nach der Voraussetzung OA kein Lot auf der Geraden UV ist, so fällen wir von O aus auf UV das Lot OB. Denken wir uns nun das rechtwinklige Dreieck AOB um die Kathete OB herumgeklappt und bezeichnen wir die neue Lage des Eckpunktes A mit A', so ist einerseits

$$\angle ABA' = 2 . 90^0 = 180^0$$

Es liegt also der Punkt A' mit den Punkten A und B auf derselben Geraden. d. h. A' ist ein Punkt der Geraden UV.

Andererseits ist $OA' = OA$ d. h. $= r$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist also A' auch ein Punkt der Kreislinie. Die Gerade UV schneidet somit den Kreis in den beiden Punkten A und A'.

3. Aus den beiden Sätzen 1) und 2) ergiebt sich:

Eine Gerade (MN) kann einen Kreis (O, r) in einem Punkte (A) nur dann berühren, wenn sie auf dem zugehörigen Radius (OA) senkrecht steht. d. h. wenn $\angle$ OAM $= 90^0$ ist.

4. **Folgerungen:**

a) Das Lot im Berührungspunkte einer Tangente geht durch den Mittelpunkt des Kreises.

b) Das Lot vom Mittelpunkte des Kreises auf die Tangente trifft diese im Berührungspunkte (ist also ein Radius).

c) Der Radius nach dem Berührungspunkte einer Tangende steht auf ihr senkrecht.

d) Eine Gerade, die vom Mittelpunkte eines Kreises um den Radius entfernt ist, ist eine Tangente.

e) Zwei Kreise, die einander berühren, haben in dem Berührungspunkte die Tangente gemeinsam; es liegen nämlich die beiden Mittelpunkte O_1 und O_2 mit dem Berührungspunkte A auf derselben Geraden; es ist daher das Lot in A auf AO_1 auch zugleich ein Lot auf AO_2. Dieses Lot ist somit eine Tangente für jeden der beiden Kreise. —

Aus dem Satze 3 folgt ferner

5. **Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines (jeden) Kreises, der eine Gerade MN in einem Punkte A berührt, ist das Lot in A auf MN.**

6. **Konstruktionsaufgabe: Von einem Punkte A außerhalb eines Kreises (O, r) an den Kreis eine Tangente zu ziehen.**

I. Vorbetrachtung (Analysis): Wir denken uns die verlangte Tangente gezogen und nennen ihren uns noch unbekannten Berührungspunkt X.

Es ist dann $\angle$ OXA $=$ R.

Nach den Sätzen vom Winkel im Halbkreise muß dann X ein Punkt derjenigen Kreislinie sein, die AO zum Durchmesser hat.

Ausführung: Wir halbieren AO und beschreiben den Kreis, der AO zum Durchmesser hat. Die beiden Punkte B_1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und B_2, in denen der Hülfskreis den gegebenen Kreis schneidet, sind die Berührungspunkte der beiden Tangenten vom Punkte A aus.

Beweis: Es ist $\angle AB_1O = R$ als Winkel im Halbkreise; folglich ist die Gerade AB_1 eine Tangente, weil sie ein Lot im Endpunkte des Radius OB_1 ist.

II. Vorbetrachtung (Analysis): Wenn wir den Berührungspunkt der verlangten Tangente mit X bezeichnen, so ist $\angle OXA = R$.

Wenn wir uns nun das rechtwinklige Dreieck OXA um die Kathete AX d. h. um die Tangente herumgeklappt denken und die neue Lage des Punktes O mit O' bezeichnen, so ist

$$\angle OXO' = 2R$$

also $$OO' = 2r$$

und es ist ferner $$O'A = OA.$$

Es liegt demnach der Punkt O' sowohl auf der Kreislinie mit 2 r um O als auch auf der Kreislinie mit OA um A.

Ausführung: Wir beschreiben mit 2 r einen Kreis um O und mit OA einen Kreis um A und verbinden dann die Schnittpunkte O'_1 und O'_2 dieser beiden Hülfskreise mit dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises. Die Punkte B_1 und B_2, in denen diese beiden Verbindungsgeraden den gegebenen Kreis schneiden, sind dann die Berührungspunkte der beiden Tangenten vom Punkte A aus.

Beweis: Durch die Konstruktion ist

$$OO'_1 = 2r,$$

also $$OB_1 = B_1O'_1;$$

und ferner $$OA = O'_1A.$$

Es ist daher AB_1 das Mittellot von OO'_1; folglich ist AB_1 ein Lot im Endpunkte des Radius OB_1 und somit eine Tangente.

III. Vorbetrachtung. Wir bezeichnen den Berührungspunkt der verlangten Tangente mit X. Es ist dann

$$\angle AXO = R.$$

Wenn nun das rechtwinklige Dreieck AXO um den Kreismittelpunkt gedreht wird, so bleibt die Kathete AX beständig eine Tangente und der Punkt A beschreibt einen Kreis um O.

Ausführung: Wir ziehen uns einen beliebigen Radius OB' und dann durch B' die Tangente. Hierauf suchen wir uns auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

dieser Tangente einen Punkt, der vom Kreismittelpunkte O um OA entfernt ist, indem wir mit OA um O einen Kreis beschreiben. Der Schnittpunkt dieses Hülfskreises mit der Tangente soll A' heißen. Denken wir uns nun das rechtwinklige Dreieck A'B'O um den Kreismittelpunkt O gedreht, bis die Hypotenuse OA' mit OA zusammenfällt, so ist die Kathete A'B' der Lage und Länge nach mit der Tangente, die sich vom Punkte A aus an den Kreis ziehen läßt, zusammengefallen.

d. h. es ist $AX = A'B'$.

Beschreiben wir also mit A'B' einen Kreis um A, so schneidet dieser Hülfskreis den gegebenen in den Berührungspunkten B_1 und B_2 der beiden Tangenten, die sich vom Punkte A aus an den Kreis ziehen lassen.

Beweis: Durch die Konstruktion ist

$$AO = A'O$$

$$\text{und } AB_1 = A'B'.$$

Es ist ferner $OB_1 = OB'$ als Radien desselben Kreises.

Es ist mithin $\triangle AOB_1 \cong \triangle A'OB'$ n. § 15, 12

folglich ist $\angle AB_1O = \angle A'B'O$ d. h. $= R$.

Es ist demnach AB_1 eine Tangente als Lot im Endpunkte des Radius OB_1. w. v. w.

7. **Lehrsatz: Die beiden Tangenten von einem Punkt (A) an einen Kreis (O, r) sind gleich lang.** (wenn man die Strecke vom Ausgangspunkte der Tangente bis zum Berührungspunkte als deren Länge betrachtet).

Beweis: Wir konstruieren uns die eine der beiden Tangenten, die sich vom Punkte A aus an den Kreis ziehen lassen, und bezeichnen den Berührungspunkt dieser Tangente mit B. Klappen wir nun das rechtwinklige Dreieck ABO um die Hypotenuse AO herum und bezeichnen die neue Lage des Punktes B mit B', so ist einerseits $OB' = OB$ d. h. $= r$;
der Punkt B' liegt also wieder auf der Kreislinie;

andrerseits ist $\angle AB'O = \angle ABO$ d. h. $= R$.

Die Gerade AB' ist somit die andere Tangente, die sich vom Punkte A aus an den Kreis ziehen läßt, und dabei ist

$AB' = AB$ w. z. b. w.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Beweis: Die beiden Tangenten vom Punkte A aus sollen den Kreis in den Punkten B und C berühren. Es sind dann die beiden Dreiecke AOB und AOC rechtwinklig und stimmen in der Länge der einen Kathete überein: (OC = OB als Radien desselben Kreises).

Wir drehen nun das △ AOB um den Eckpunkt O d. h. um den Mittelpunkt des Kreises, bis es in die Lage OCA' kommt. Dies ist möglich, weil OB = OC als Radien.

Es ist außerdem ∠ OBA = ∠ OCA als R.

und somit A'CA = 2 R,

d. h. der Punkt C liegt auf der Geraden AA'.

Da nun OA' = OA ist, so ist OACA'O ein gleichschenkliges Dreieck und OC darin das Lot vom Gipfel O auf die Basis AA'.

Es ist daher nach § 16,2. S. 14

AC = CA'

Da aber CA' = AB ist,

so ist AC = AB

oder y = x w. z. b. w.

§ 18. Die Winkel halbierende Gerade und der innere Berührungskreis des Dreiecks.

1. **Lehrsatz: Jeder einzelne Punkt der Halbierungsgeraden eines Winkels hat von dessen beiden Schenkeln die gleiche Entfernung.**

Wenn die Gerade BO den Winkel ABC halbiert

d. h. wenn ∠ ABO = ∠ CBO ist,

so soll der Punkt O von dem Schenkel BC dieselbe Entfernung haben, wie von dem anderen Schenkel BA.

Beweis: Wir fällen vom Punkte O aus auf den einen Schenkel BC das Lot OF und klappen nun das rechtwinklige Dreieck BOF um seine Hypotenuse BO d. h. um die Halbierungsgerade des Winkels ABC herum und nennen seine neue Lage OBF'.

Da nun n. d. V. ∠ CBO = ∠ OBA ist, so muß der Punkt F' auf dem anderen Schenkel BA liegen.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Da ferner $\angle BFO = R$ ist,
so ist auch $\angle BF'O = R$
d. h. OF' ist das Lot von O auf BA und dabei ist
$OF' = OF$ w. z. b. w.

2. **Lehrsatz: Wenn ein Punkt von den beiden Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, so liegt er auf der Halbierungsgeraden dieses Winkels.**

Wenn $OF \perp BC$
und $OL \perp BA$
und $OF = OL$ ist,

so soll $\angle OBC = \angle OBA$ sein.

Beweis: Zwei rechtwinklige Dreiecke, die in der einen Kathete übereinstimmen, lassen sich immer so aneinander legen, daß sie beide zusammen ein neues Dreieck bilden.

Wir drehen hier das rechtwinklige Dreieck BOF um den Eckpunkt O, bis es in die Lage OLB' kommt. Dies ist deshalb möglich, weil ja n. d. V. $OF = OL$ ist
und $\angle OFB = \angle OLA$ als rechte Winkel.
Es ist dann $\tau' = \tau$
und $OB' = OB$
Es ist somit wieder $\tau' = \varepsilon$ als Basiswinkel.
Da aber $\tau' = \tau$ ist,
so ist auch $\varepsilon = \tau$
d. h. $\angle OBA = \angle OBC$ w. z. b. w.

Aus den beiden vorstehenden Sätzen ergiebt sich:

3. **Der geometrische Ort für jeden Punkt, der von den beiden Schenkeln eines Winkels gleichen Abstand hat, ist die Halbierungsgerade dieses Winkels.**

Wenn ein Punkt von zwei geraden Linien gleichen Abstand hat, so kann man um ihn einen Kreis beschreiben, der die beiden Geraden berührt. Hieraus folgt:

4. **Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines jeden Kreises, der die beiden Schenkel eines Winkels berührt, ist die Halbierungsgerade dieses Winkels.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. **Der geometrische Ort für den Mittelpunkt eines jeden Kreises, der zwei parallele Gerade berührt, ist die zugehörige Mittelparallele.**

6. **Konstruktionsaufgabe: Einen Punkt anzugeben, der von den drei Seiten eines Dreiecks gleiche Abstände hat.**

Vorbetrachtung: Wir nennen den gesuchten Punkt X.

Damit nun der Punkt X von den beiden Seiten AB und BC gleichweit entfernt ist, muß er auf der Halbierungsgeraden des Winkels ABC liegen. n. d. S. 3.

Damit ferner der Punkt X von den beiden Seiten BC und CA gleichweit entfernt ist, muß er auf der Halbierungsgeraden des Winkels BCA liegen.

d. h. der verlangte Punkt X ist der Schnittpunkt zweier Winkel-halbierender Eckstrahlen (Transversalen) des Dreiecks.

Ausführung: Wir halbieren zwei Winkel des Dreiecks. Der Schnittpunkt O dieser beiden Halbierungsgeraden hat dann die verlangte Eigenschaft d. h. es ist $OF_1 = OF_2 = OF_3$.

7. **Konstruktionsaufgabe: In ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, der die drei Seiten berührt**

oder den inneren Berührungskreis oder den eingeschriebenen Kreis (Inkreis) eines Dreiecks zu beschreiben.

Vorbetrachtung und Ausführung ganz wie unter 6, nur mit Rücksicht auf 4, anstatt auf 3.

8. Folgerung aus 6 und 7: Da der Punkt O auch von den beiden Schenkeln des dritten Dreieckswinkels gleichweit entfernt ist, so liegt er auch auf der Halbierungsgeraden des dritten Dreieckswinkels (vgl. 2).

d. h. **Die drei Winkel-halbierenden Eckstrahlen (Transversalen) des Dreiecks gehen durch denselben Punkt, nämlich durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreis
Mitte

den d

BC g
des 2

und
gerad

Wink

Der
die v

beschr

Kreis

6, nu

von
entfer
dritte

versa
den

lpunkt eines jeden
ist die zugehörige

nzugeben, der von
e hat.

gesuchten Punkt X.
en Seiten AB und
Halbierungsgeraden

beiden Seiten BC
der Halbierungs=

Schnittpunkt zweier
) des Dreiecks.
Winkel des Dreiecks.
sgeraden hat dann
$OF_2 = OF_3$.
eck einen Kreis zu

den eingeschriebenen

ng ganz wie unter

der Punkt O auch
kswinkels gleichweit
bierungsgeraden des

Eckstrahlen (Trans=
punkt, nämlich durch

TIFFEN® Gray Scale
© The Tiffen Company, 2007
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf