Einiges über die Anwendung der ähnlichen Abbildung.

Von

P. Michels,

Oberlehrer.

Beilage zum Programm des Königlichen Gymnasiums zu Meseritz. Ostern 1911.

Q mie 16 (1911)

Meseritz.
Buchdruckerei von P. Matthias.
1911.

1911. Progr. Nr. 236 b.

Bibliothek des Städt. Gymnasiums Düsseldorf

236 b

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I.

Die direkt ähnliche Abbildung.

Bei der Bearbeitung des vorliegenden Schriftchens hat es dem Verfasser fern gelegen, die Anzahl von Sammlungen gelöster und ungelöster Konstruktionsaufgaben noch um eine vermehren zu wollen, — an solchen Sammlungen ist wahrhaftig kein Mangel, — er will vielmehr die Aufmerksamkeit des Lesers auf eine Methode lenken, die seines Erachtens bei der Lösung geometrischer Aufgaben immer weniger beachtet wird als sie es verdient, auf die Methode der ähnlichen und umgekehrten Abbildung, deren Vorzüge an einigen ausgewählten Aufgaben hervorgehoben werden sollen. Die vorzüglichsten Anregungen bei der Abfassung der vorliegenden Zeilen verdankt der Verfasser Petersen's Methoden und Theorien und Schwering's 100 Aufgaben aus der niederen Geometrie. Eine eingehende Theorie der ähnlichen und umgekehrten Abbildung zu geben liegt nicht im Rahmen der vorliegenden kleinen Arbeit; sie bietet ja auch jedes ausführlichere Lehrbuch der niederen Geometrie; ich verweise nur auf Schwering und Krimphoff: Ebene Geometrie, sowie auf Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik Band II. Dagegen dürfte es wohl angebracht sein, die benutzten Sätze kurz zu skizzieren. Die ähnliche Abbildung, von Petersen als Multiplikation von Kurven bezeichnet, ist ein spezieller Fall der perspektivischen Beziehungen, wie sie uns die projektive Geometrie liefert, soweit wenigstens, als es sich um die ähnliche Abbildung von Geraden handelt.

Um zur ähnlichen Abbildung einer Kurve zu gelangen, hat man diese durch einen Strahlenbüschel O zu schneiden und alsdann zu jedem Kurvenpunkte A den auf dem gleichen Strahl des Büschels O liegenden zugeordneten Punkt A_1 in der Weise aufzusuchen, daß $OA : OA_1 = m$, wo

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

m eine konstante Größe ist. Man kann dieses konstante Verhältnis m der Entfernungen zugeordneter Punkte vom Scheitel O des Büschels als Ähnlichkeitsfaktor und den Scheitel als Augenpunkt oder Bildpunkt bezeichnen. Zur ähnlichen Abbildung eines beliebigen Punktes der Ebene oder einer Kurve müssen also der Bildpunkt, von dem aus die Abbildung erfolgen soll, und der Ähnlichkeitsfaktor gegeben sein, der letztere etwa in der Weise, daß einem bestimmten Punkte A ein ebenfalls bestimmter Punkt A_1 als Abbildung zugeordnet wird. Auf diese Weise läßt sich dann die ganze unbegrenzte Ebene in sich selber abbilden. Dabei decken sich, unter der Voraussetzung, daß $m \gtrless +1$ ist, nur der Augenpunkt selbst und die unendlich ferne Gerade der Ebene mit ihrem Bilde. Für den Augenpunkt ist $m = \frac{0}{0}$, für die unendlich ferne Gerade ist $m = \frac{\infty}{\infty}$. In dem oben erwähnten Ausnahmefall, wo $m = +1$ ist, würde sich jeder Punkt der Ebene mit seinem Bilde decken. Bei der ähnlichen Abbildung einer Geraden erhalten wir, wie sich mittels des Strahlensatzes leicht nachweisen läßt, als Bild eine zur ersteren parallele Gerade und daher als Bild eines Winkels einen gleichen Winkel mit gleich gerichteten Schenkeln. Daraus folgt wieder, daß die Abbildung eines Dreiecks (allgemein n Ecks) ein ähnliches und in Bezug auf den Bildpunkt ähnlich liegendes Dreieck (n Eck) ist. Die ähnliche Abbildung eines Kreises ist wiederum ein Kreis, und der Bildpunkt ist der äußere oder innere Ähnlichkeitspunkt beider Kreise.

Soll ein Kreis mit m multipliziert werden, wie Petersen die ähnliche Abbildung mit m als Ähnlichkeitsfaktor kurz bezeichnet, so muß man den Mittelpunkt und den Radius oder den Mittelpunkt und einen Punkt der Peripherie multiplizieren. Praktisch läßt sich die Konstruktion wohl am einfachsten so durchführen, daß man zunächst das Bild M_1 für den Mittelpunkt M des gegebenen Kreises aufsucht, an den gegebenen Kreis vom Augenpunke aus die Tangente legt und von M_1 aus auf diese Tangente die Senkrechte fällt. Beschreibt man mit dieser Senkrechten um M_1 den Kreis, so ist er die gesuchte ähnliche Abbildung. Bedingung für diese Konstruktion ist natürlich, daß der Augenpunkt außerhalb des abzubildenden Kreises liegt. Für den speziellen Wert $m = -1$ ist das Bild einer Geraden eine parallele Gerade im absolut gleichen aber entgegengesetzten Abstand vom Augenpunkt. Das zwischen den beiden Geraden liegende Stück jedes beliebigen Ähnlichkeitsstrahls wird also durch den Augenpunkt halbiert. Ein gegebener Kreis und seine Abbildung liegen für $m = -1$ zentrisch symmetrisch bezüglich des Augenpunktes und haben gleiche Radien. Der Augenpunkt halbiert natürlich auch hier die Verbindungsstrecken zugeordneter Punkte, speziell also auch die Zentrale, ein Umstand, der die Konstruktion der Abbildung eines Kreises für $m = -1$ sehr vereinfacht.

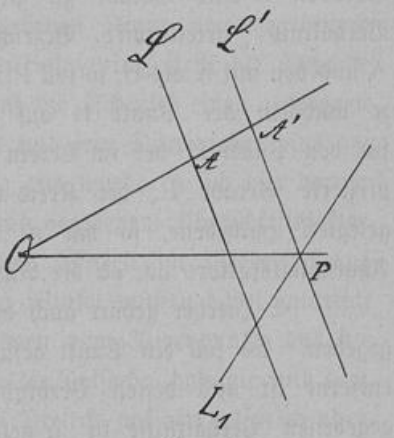
Liegt der Augenpunkt auf der abzubildenden Geraden, so fallen die Gerade und ihr Bild für jeden Wert von m zusammen, mit anderen Worten: Jeder Ähnlichkeitsstrahl ist seine eigene ähnliche Abbildung. Liegt der Augenpunkt im Mittelpunkt des abzubildenden Kreises, so wird das Bild des Kreises für jeden Wert von m ein konzentrischer Kreis; ein Fall, der uns beispielsweise bei denjenigen Aufgaben begegnet, bei denen außer den zur Konstruktion des ähnlichen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dreiecks nötigen Stücken noch der Radius des In- oder Umkreises gegeben ist. Liegt der Augenpunkt auf der Peripherie des abzubildenden Kreises, so berühren sich der gegebene Kreis und der Bildkreis von innen oder außen, je nachdem m einen positiven oder negativen Wert hat, denn in beiden Fällen haben der gegebene Kreis und sein Bildkreis den Augenpunkt gemeinsam, da dieser sich, wie oben angedeutet, mit seinem Bildpunkte deckt. Ferner liegen beide Kreismittelpunkte auf einem durch den Augenpunkt gehenden Ähnlichkeitsstrahl, so daß beide Kreise einen Punkt auf der Zentrale, respektive auf deren Verlängerung, gemeinsam haben, sich also in diesem Punkte berühren müssen. Von besonderem Interesse ist der häufiger vorkommende Fall, daß $m = +2$ ist, wenn gleichzeitig der Augenpunkt auf einen Punkt der Peripherie fällt. Der Mittelpunkt des Bildkreises liegt dann auf dem Pfeilpunkt des gegebenen Kreises, d. h. auf dem Punkte, in dem der durch den Augenpunkt gehende Durchmesser den gegebenen Kreis zum zweitenmal schneidet. Für $m = \frac{1}{2}$ liegt umgekehrt der Mittelpunkt des gegebenen Kreises auf dem Pfeilpunkte der Abbildung. Nach diesen einleitenden Bemerkungen möge nunmehr die Anwendung der erwähnten Sätze auf einige Aufgaben folgen.

1. Eine naheliegende Aufgabe ist zunächst die, durch einen gegebenen Punkt O eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene gerade Linien L und L_1 so schneidet, daß die Abstände der Durchschnittspunkte von O aus sich wie m : n verhalten.

Nimmt man hier O als Augenpunkt der ähnlichen Abbildung und zieht einen beliebigen Ähnlichkeitsstrahl, der die Gerade L im Punkte A trifft, so läßt sich mit Hülfe des Strahlensatzes auf diesem Ähnlichkeitsstrahl ein Punkt A′ finden, der die ähnliche Abbildung von A im Verhältnis von m : n von O als Augenpunkt aus darstellt. Die Parallele L′ zu L durch A′ ist dann die ähnliche Abbildung von L. Damit hat man in L_1 und L′ die gesuchten geometrischen Örter für den Punkt P, und OP leistet das Verlangte. Ist der Ähnlichkeitsfaktor negativ, so hat man in analoger Weise A′ auf der Verlängerung von OA zu suchen.

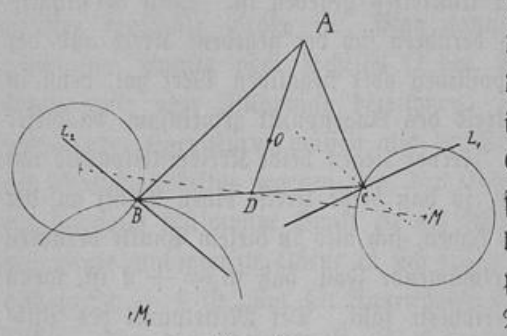


Figur 1.

2. Identisch mit der soeben behandelten Aufgabe ist die: In einem gegebenen Dreieck eine Linie durch den Eckpunkt A so zu ziehen, daß die Abschnitte derselben von A bis an die Höhen h_b und h_c in einem gegebenen Verhältnis $\frac{m}{n}$ stehen. Die ähnliche Abbildung der einen Höhe mit A als Augenpunkt und $\frac{m}{n}$ als Ähnlichkeitsfaktor legt auf der zweiten respektive deren Verlängerung einen Punkt fest, der mit A verbunden die verlangte Linie liefert.

3. Für die Konstruktion eines Dreiecks sind gegeben der Schwerpunkt desselben O, ein Eckpunkt A und zwei gerade Linien L_1 und L_2, auf welche die beiden anderen Eckpunkte fallen sollen (Fig. 2). Durch A und O ist die Mitte D der gesuchten Dreiecksseite BC bestimmt, da $OD = \frac{1}{2}\,OA$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 2.

Die obige Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, durch den gefundenen Punkt D eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen L_1 und L_2 liegende Stück der Geraden in D halbiert wird. Man hat also eine der gegebenen Geraden, etwa L_2, vom Augenpunkte D aus mit dem speziellen Wert $m = -1$ zu multiplizieren. Das erhaltene Bild dieser Geraden legt dann auf L_1 den Eckpunkt C fest, und DC bestimmt auf L_2 den Eckpunkt B. Die Aufgabe stellt also einen Spezialfall der vorigen Aufgabe dar.

4. Auf der Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD soll ein Punkt X so bestimmt werden, daß $DX : XY = m : n$, wenn unter Y der Punkt verstanden ist, in dem DX die Seite AB schneidet. Da $DX : XY = \frac{m}{n}$, so ist $\frac{DY}{DX} = \frac{m+n}{m}$. Der erste geometrische Ort für den gesuchten Punkt X ist die Diagonale AC, der zweite die ähnliche Abbildung von AB im Verhältnis $\frac{m}{m+n}$ von D als Augenpunkt aus.

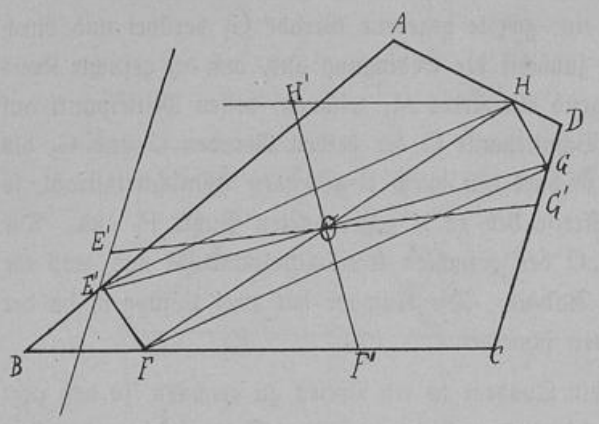
5. Eine gleiche Lösung gilt für die Aufgabe: Von einem Punkte P aus nach einer gegebenen Geraden L eine Gerade zu ziehen, welche von der Peripherie eines gegebenen Kreises K im Verhältnis $\frac{m}{n}$ geteilt wird. Bezeichnet man nämlich den Schnittpunkt der gesuchten Geraden mit L als A und den mit K als B, so soll $PB : AB = m : n$, also $PB : PA = \frac{m}{m \pm n}$ oder $PA : PB = \frac{m \pm n}{m}$ sein, je nachdem der Punkt B auf PA oder auf dessen Verlängerung liegt. Ein geometrischer Ort für den Punkt B, der im Verein mit P die gesuchte Gerade festlegt, ist also die mit $\frac{m}{m \pm n}$ multiplizierte Gerade L; der Kreis bildet den zweiten. Liegt P mit K in der gleichen durch L festgelegten Halbebene, so hat m negativen Wert. In allen Fällen hängt es von der Wahl des Ähnlichkeitsfaktors ab, ob die Aufgabe zwei, eine oder keine reelle Lösung hat.

6. Hierher gehört auch die Aufgabe: Drei Punkte A, B und C und eine Gerade L sind gegeben. Es soll ein Punkt gefunden werden, der von den beiden Punkten A und B gleich weit entfernt ist und dessen Verbindungslinie mit dem dritten Punkte C durch die Gerade in einem gegebenen Verhältnisse $m : n$ geteilt wird. Der gesuchte Punkt X liegt auf der Mittelsenkrechten von AB. Bezeichnen wir den Schnittpunkt der Geraden CX und L mit O, so soll $OC : OX = \frac{m}{n}$ sein. Es ist also $CX : CO = \frac{m \pm n}{m}$, je nachdem die Punkte C und X auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von L liegen. Ein geometrischer Ort für X ist somit die vom Augenpunkte C aus mit $\frac{m \pm n}{m}$ multiplizierte Gerade L.

7. In ein gegebenes Viereck ein Parallelogramm zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einen gegebenen Punkt fällt.

Da die Diagonalen eines Parallelogramms sich gegenseitig halbieren, so muß, wenn ein Eckpunkt G des gesuchten Parallelogramms auf CD liegt, der gegenüberliegende Eckpunkt E auf der vom Augenpunkte O aus mit -1 multiplizierten Geraden DC liegen (Fig. 3). Ebenso muß der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 3.

Eckpunkt H auf der mit — 1 multiplizierten Geraden BC liegen, wenn der gegenüberliegende Eckpunkt des gesuchten Parallelogramms auf BC liegt. Zieht man also den Ähnlichkeitsstrahl OG′ und macht OE′ = OG′, so legt die Parallele durch E′ zu DC auf AB den gesuchten Eckpunkt E fest, und EO bestimmt auf DC den gesuchten Eckpunkt G. Zieht man ebenso den Ähnlichkeitsstrahl OF′ und macht OH′ = OF′, so legt die Parallele durch H′ auf AD den gesuchten Eckpunkt H fest, und HO bestimmt auf BC den gesuchten Eckpunkt F. Dann ist EFGH das gesuchte Parallelogramm.

8. Die vorhin behandelte Aufgabe zeigt die offensichtlichen Vorteile der ähnlichen Abbildung für den Fall, daß es sich darum handelt, eine Figur in eine andere unter bestimmten Bedingungen einzuzeichnen. Schwering gibt in seinen 100 Aufgaben für diese Gruppe ein weiteres Beispiel, das sich übrigens ebensowohl als ähnliche Abbildung einer gegebenen Figur von gegebenem Augenpunkt aus mit gegebenem Ähnlichkeitsfaktor auffassen läßt. Schwering stellt die Aufgabe in der Form: „Ein Halbkreis soll mit seinen Endpunkten so auf die Schenkel eines gegebenen Winkels gelegt werden, daß er durch einen gegebenen Punkt geht und sein Durchmesser eine gegebene Richtung erhält.“ Vom Standpunkt der ähnlichen Abbildung aus würde es sich hier darum handeln, ein rechtwinkliges Dreieck bei gegebenem Augenpunkt und gegebenem Ähnlichkeitsfaktor in der Weise ähnlich abzubilden, daß der Scheitelpunkt des rechten Winkels im Bilddreieck auf einen gegebenen Punkt fällt. Die beiden Scheitelpunkte der rechten Winkel müssen dabei natürlich auf dem nämlichen Ähnlichkeitsstrahl liegen, und ihre Entfernungen vom Augenpunkte aus bestimmen den Ähnlichkeitsfaktor. Die Lösung ergibt sich dann durch die Tatsache, daß die mit dem erwähnten Ähnlichkeitsfaktor multiplizierten Katheten des gegebenen Dreiecks auf den entsprechenden Ähnlichkeitsstrahlen die gesuchten Dreieckseckpunkte ausschneiden. In gewissem Sinne gehören hierher auch die Aufgaben, bei denen zur Konstruktion des Dreiecks außer dem Verhältnis zweier Seiten und dem von diesen Seiten gebildeten Winkel als drittes Stück die zur dritten Seite gehörige Höhe oder Mittellinie oder der Halbierer des gegebenen Winkels oder schließlich die dritte Seite selbst resp. Abschnitte derselben durch Höhe oder Winkelhalbierer gegeben sind. In all diesen Fällen liefert das gegebene dritte Stück in Verbindung mit seinem homologen Stück in dem konstruierbaren ähnlichen Dreieck den Ähnlichkeitsfaktor, während der Scheitelpunkt des gegebenen Winkels den Augenpunkt darstellt, und die Konstruktion des Dreiecks ist in all diesen Fällen auf die Multiplikation der dritten Seite des ähnlichen Dreiecks mit dem gefundenen Ähnlichkeitsfaktor zurückgeführt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9. Eine weitere Aufgabe dieser Gruppe ist die: Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden G liegt und der eine zweite gegebene Gerade G_1 berührt und durch einen gegebenen Punkt P geht. Schaltet man zunächst die Bedingung aus, daß der gesuchte Kreis durch den Punkt P gehen soll, so läßt sich irgend ein Kreis M_1 zeichnen, dessen Mittelpunkt auf G liegt und der G_1 berührt. Faßt man den Schnittpunkt O der beiden Geraden G und G_1 als Augenpunkt der ähnlichen Abbildung auf und zeichnet den durch P gehenden Ähnlichkeitsstrahl, so schneidet dieser auf dem vorhin gezeichneten Kreise den zu P zugeordneten Punkt P_1 aus. Die Parallele zu P_1M_1 durch P schneidet dann auf G den gesuchten Kreismittelpunkt M aus, und die Senkrechte von M auf G_1 ergibt den gesuchten Radius. Die Aufgabe hat zwei Lösungen, da der Ähnlichkeitsstrahl den Hülfskreis in zwei Punkten schneidet.

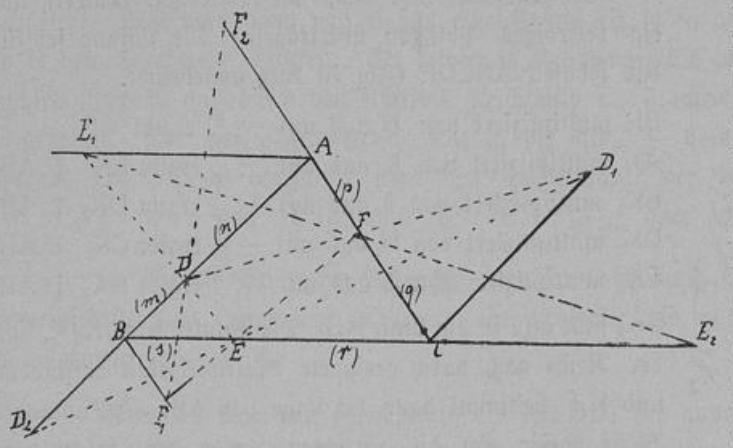
10. Hierher gehört auch die Aufgabe, ein Quadrat in ein Dreieck zu zeichnen, so daß zwei Ecken auf einer Seite des Dreiecks liegen. Zieht man zu der betreffenden Seite BC innerhalb des Dreiecks eine Parallele in beliebigem Abstand und zeichnet über dieser Parallele als Seite das Quadrat, so ist die obige Aufgabe darauf zurückgeführt, die ähnliche Abbildung dieses Quadrates zu finden mit der gegenüberliegenden Ecke A als Augenpunkt. Man verbindet die freien Eckpunkte des Quadrates mit dem Punkte A und erhält dadurch die auf der Seite BC liegenden Eckpunkte des gesuchten Quadrates und damit auch den Ähnlichkeitsfaktor. Soll ein Quadrat in einen Kreisabschnitt so gezeichnet werden, daß zwei Eckpunkte auf der Sehne und die beiden andern auf dem Kreisbogen liegen, so hat man zunächst ein beliebiges Quadrat so zu zeichnen, daß der Halbierungspunkt einer Seite desselben mit dem Halbierungspunkt O der Sehne zusammenfällt. Das gezeichnete Quadrat ist alsdann vom Augenpunkt O aus ähnlich abzubilden und die von O nach den freien Ecken des Quadrats gezogenen Ähnlichkeitsstrahlen legen auf dem Kreisbogen zwei Eckpunkte des gesuchten Quadrates und damit dieses selbst fest. Ist statt des Quadrates in der gleichen Weise ein Rechteck zu zeichnen, dessen Seitenverhältnis gegeben ist, so ist die Lösung analog der obigen, da durch das Verhältnis der Seiten ein dem gesuchten ähnliches Rechteck konstruiert werden kann. Bei den drei zuletzt behandelten Aufgaben liegt der Fall vor, daß Ähnlichkeitsstrahlen ihre eigene ähnliche Abbildung darstellen.

11. Ein Dreieck zu konstruieren aus dem Winkel α und den Mittellinien m_a und m_b.

Ist E die Mitte der Seite AC, D die Mitte der Seite BC und O der Schwerpunkt des Dreiecks, so läßt sich zunächst das Dreieck AEB zeichnen. Mit m_b sind die Punkte B und E gegeben. Der erste geometrische Ort für A ist der Kreis um O mit $\frac{2}{3}$ m_a und der zweite ist der Kreis über BE, der den Winkel α faßt. Der erste geometrische Ort für D ist AO und der zweite die mit $\frac{3}{2}$ multiplizierte Seite BE vom Augenpunkte A aus.

12. Petersen behandelt in seinen „Methoden und Theorien" eine Aufgabe, die schon durch die Eleganz ihrer Lösung und wegen der Möglichkeit einer Verallgemeinerung es verdient, an dieser Stelle wiedergegeben zu werden. Es handelt sich darum, ein Dreieck zu zeichnen, wenn man die Lage von drei Punkten kennt, welche die drei Seiten nach gegebenen Verhältnissen teilen.

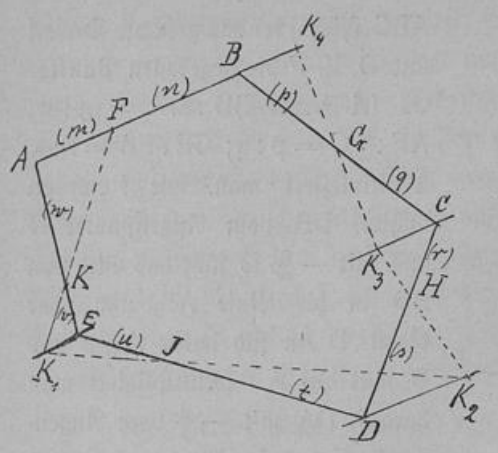
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 4.

ABC (Fig. 4) sei das gesuchte Dreieck und D, E, F die gegebenen Punkte. Es sei ferner $BD : DA = m : n$; $AF : FC = p : q$; $CE : EB = r : s$. Multipliziert man, wie Petersen angibt, DB vom Augenpunkte D aus mit $-\frac{n}{m}$, so fällt das Bild von BD in die Linie AB, und zwar bleibt D in sich selber liegen und B fällt auf A. Multipliziert man darauf DA mit $-\frac{q}{p}$ vom Augenpunkte F aus, so fällt A nach C, und das Bild der Strecke AD ist die zu AD parallele Strecke CD_1. Multipliziert man schließlich noch D_1C vom Augenpunkte E aus mit $-\frac{s}{r}$, so fällt C nach B, und das Bild der Strecke D_1C ist die zu D_1C und damit auch zu AD parallele Strecke D_2B, d. h. D_2B fällt auf die Linie AB. Es ist nun zunächst D_1 auffindbar, da $D_1F = -\frac{q}{p}\,DF$; dann ist D_2 auffindbar, da $D_2E = -\frac{s}{r}\,D_1E$, und da, wie vorhin nachgewiesen, D_2B auf die Linie AB fällt, so ist durch DD_2 die Lage von AB festgelegt. Multipliziert man jetzt in analoger Weise EC mit $-\frac{s}{r}$ vom Augenpunkt E aus, so bleibt E liegen und C fällt auf B. Multipliziert man BE von D aus mit $-\frac{n}{m}$, so fällt B auf A und man erhält als Bild von BE die zu BE parallele Strecke AE_1. Multipliziert man dann noch AE_1 von F aus mit $-\frac{q}{p}$, so fällt A auf C, und das Bild von AE_1 ist die zu AE_1 und damit auch zu BC parallele Strecke E_2C; daher fällt E_2C in die Linie BC, da die beiden Parallelen den Punkt C gemeinsam haben. Damit ist auch die Lage der Linie BC festgelegt. Es ist zunächst E_1 auffindbar, da $DE_1 = -\frac{n}{m}\,DE$, und darauf läßt sich E_2 finden, da $FE_2 = -\frac{q}{p}\,FE_1$ und da, wie oben bewiesen, E_2C in die Linie BC fällt, so ist durch EE_2 die Lage von BC festgelegt. Damit ist aber der Punkt B als Durchschnittspunkt der beiden Linien AB und BC bestimmt. Man könnte nunmehr die Punkte A und C dadurch finden, daß man BD von D aus mit $-\frac{n}{m}$ und ebenso BE von E aus mit $-\frac{r}{s}$ multipliziert. Will man aber das angegebene Verfahren zum drittenmal anwenden, so hat man zunächst AF von F aus mit $-\frac{q}{p}$ zu multiplizieren und erhält als Bild von AF die Strecke CF. CF von E aus mit $-\frac{s}{r}$ multipliziert ergibt als Bild die zu CF parallele Strecke BF_1 und BF_1 von D aus mit $-\frac{n}{m}$ multipliziert ergibt als Bild die zu BF_1 und damit zu AC parallele Strecke AF_2, die also auf die Linie AC fällt. Die Punkte F_1 und F_2 sind nacheinander auffindbar, da $EF_1 = -\frac{s}{r}\,EF$ und $DF_2 = -\frac{n}{m}\,DF_1$ ist. FF_2 legt dann auch die Lage der Seite AC fest, sodaß FF_2 auf den Verlängerungen von BD und BE die noch fehlenden beiden Eckpunkte A und C bestimmt. Damit ist die Aufgabe gelöst.

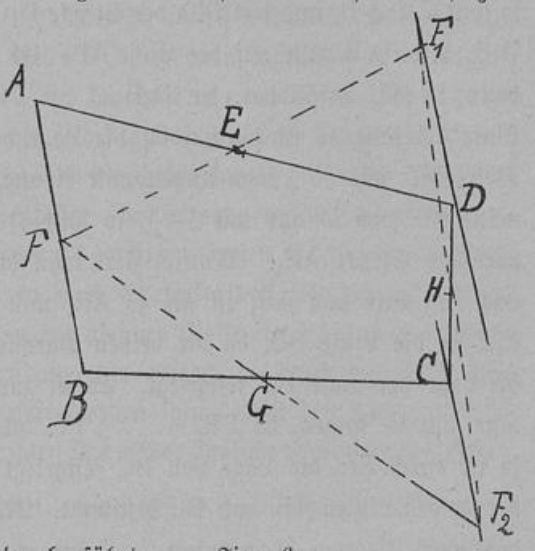
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 5.

13. Dieselbe läßt sich, wie Petersen bemerkt, auf ein beliebiges Polygon übertragen. Die Lösung sei für das Fünfeck ABCDE (Fig. 5) kurz angedeutet.

BF multipliziert von F aus mit $-\frac{m}{n}$ ergibt AF,
AF multipliziert von K aus mit $-\frac{v}{w}$ ergibt $EK_1 \neq AB$,
EK_1 multipliziert von J aus mit $-\frac{t}{u}$ ergibt $DK_2 \neq AB$,
DK_2 multipliziert von H aus mit $-\frac{r}{s}$ ergibt $CK_3 \neq AB$,
CK_3 multipliziert von G aus mit $-\frac{p}{q}$ ergibt $BK_4 \neq AB$,
BK_4 fällt also in die Linie AB. Die Punkte $K_1 K_2 K_3 K_4$ sind der Reihe nach durch geeignete Multiplikation auffindbar und K_4F bestimmt dann die Lage von AB. In analoger Weise lassen sich die einzelnen Lagen der übrigen vier Seiten des gesuchten Fünfecks bestimmen. Man beachte dabei nur, daß das eine Teilstück der Seite, mit der man beginnt, von dem auf dieser Seite liegenden Teilpunkt aus so multipliziert werden muß, daß das zweite Teilstück zu seinem Bilde wird. Man multipliziert dann jedes Bild von dem Teilpunkt derjenigen Seite aus, die mit dem Bilde einen Eckpunkt gemein hat, und zwar so, daß das zweite Bild durch den anderen Eckpunkt der betreffenden Seite geht u. s. f. Dadurch erhält man der Reihe nach durch die einzelnen aufeinander folgenden Eckpunkte Parallele zu der Seite, von der man ausgegangen ist, bis das letzte Bild schließlich in die Lage derjenigen Seite fällt, von der man ausgegangen ist. Die Lösung der Aufgabe wird, wie Petersen bemerkt, unbestimmt, wenn die Mitten aller Seiten gegeben sind und die Seitenzahl gerade ist.



Figur 6.

14. Dieser Fall sei am Viereck ABCD (Fig. 6) durchgeführt:

BF multipliziert von F aus mit -1 ergibt AF,
AF multipliziert von E aus mit -1 ergibt DF_1, wo $DF_1 =$ und $\neq AF$,
DF_1 multipliziert von H aus mit -1 ergibt CF_2, wo $CF_2 =$ und $\neq AF$,
CF_2 multipliziert von G aus mit -1 ergibt BF_3, wo $BF_3 =$ und $\neq AF$.

Hierbei fällt F_3 mit F zusammen und die Linie FF_3, die die Lage von AB zu bestimmen hat, ist unbestimmt.

15. Ein einbeschriebenes Viereck zu konstruieren aus dem $\angle\, \alpha$, der Seite DB, dem $\angle$ ACB und dem Verhältnis m : n, in dem die Diagonale AC von der Diagonale BD geteilt wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

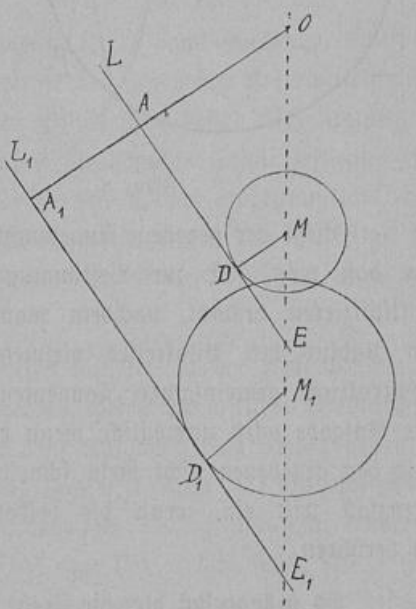
Durch die Diagonale DB und den Winkel α ist der Umkreis des gesuchten Vierecks festgelegt. Legt man dann von B aus eine Sehne AB so in den Kreis, daß sie mit der Tangente in B den gegebenen Winkel ACB bildet, so sind damit die drei Eckpunkte A, B und D des gesuchten Vierecks und durch den Umkreis gleichzeitig ein geometrischer Ort für den vierten Eckpunkt C gegeben. Der zweite geometrische Ort ist die mit $\frac{m+n}{m}$ vom Augenpunkte A aus multiplizierte Gerade DB. Denn bezeichnet man den Schnittpunkt der beiden Diagonalen mit F, so soll $AF : FC = m : n$ sein; es ist somit $AF : AC = \frac{m}{m+n}$ oder $AC = \frac{m+n}{m} . AF$.

16. An die Spitze der Aufgaben über Kreisabbildung gehört wohl die, an zwei Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu legen, eine Aufgabe, die wegen ihrer fundamentalen Bedeutung ja allgemein bekannt ist.

Betrachtet man den einen Kreis als das Bild des andern mit dem Ähnlichkeitsfaktor $r : \varrho$, so verlangt die Aufgabe den Augenpunkt aufzusuchen, von dem aus die Abbildung erfolgt ist. Durch ihn gehen dann die gesuchten Tangenten. Er ist identisch mit dem Ähnlichkeitspunkt beider Kreise. Hat der Ähnlichkeitsfaktor negativen Wert, so wird der gesuchte Augenpunkt der Abbildung zum inneren Ähnlichkeitspunkt. Wir erhalten die Augenpunkte also durch den Schnitt der Verbindungslinie der Endpunkte paralleler Radien mit der Zentrale.

17. Gegeben sind ein Punkt O und zwei Kreise; man soll an jeden der Kreise eine Tangente so ziehen, daß die beiden Tangenten parallel sind und daß ihre Abstände von O im Verhälnis $m : n$ stehen.

Den Weg zur Lösung dieser Aufgabe zeigt die Betrachtung der Beziehung, wie sie zwischen parallelen Tangenten an ähnlich liegenden Kreisen herrscht. Man kann diese Beziehung in den Satz kleiden: Parallele Tangenten an ähnliche Kreise sind selber gegenseitig ähnliche Abbildungen im gleichen Verhältnis wie die Kreise und vom gleichen Augenpunkte aus. Der Beweis für diesen Satz, den ich bisher nirgends gefunden habe, sei hier kurz gebracht:



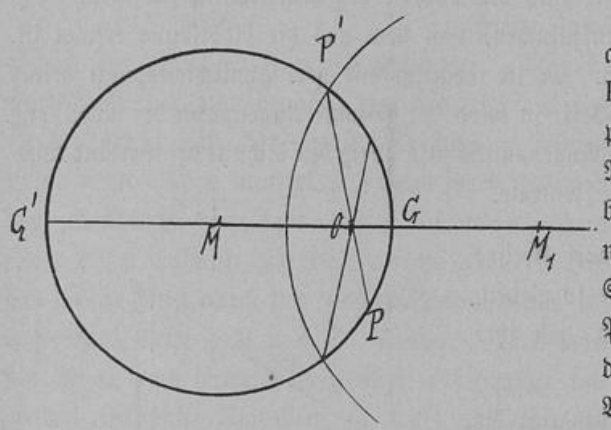
Figur 7.

Der Kreis um M′ (Figur 7) sei die ähnliche Abbildung des Kreises M vom Augenpunkte O aus mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{m}{n}$. Zieht man dann zwei parallele Tangenten L und L_1 an beide Kreise, verbindet ihre Berührungspunkte mit den zugehörigen Kreismittelpunkten und fällt von O auf L und L_1 die Senkrechte OAA_1, so ist $\triangle MDE \sim \triangle M_1D_1E_1$, also $ME : M_1E_1 = MD : M_1D_1 = \frac{m}{n}$. Anderseits ist infolge der ähnlichen Abbildung $OM : OM_1 = \frac{m}{n}$,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also $ME : M_1E_1 = OM : OM_1$ oder $ME : OM = M_1E_1 : OM_1$, folglich $\frac{ME + OM}{OM} = \frac{M_1E_1 + OM_1}{OM_1}$, das heißt $\frac{OE}{OM} = \frac{OE_1}{OM_1}$ oder $\frac{OE}{OE_1} = \frac{OM}{OM_1} = \frac{m}{n}$. Da die beiden Tangenten parallel sind, so ist also in der Tat die eine Tangente die ähnliche Abbildung der andern vom Augenpunkte O aus mit $\frac{m}{n}$ resp. $\frac{n}{m}$ als Ähnlichkeitsfaktor. Speziell ist auch $OA : OA_1 = \frac{m}{n}$. Sollen also jetzt umgekehrt an die beiden gegebenen Kreise Tangenten so gezogen werden, daß ihre Abstände von O im Verhältnis $\frac{m}{n}$ stehen, so kommt diese Aufgabe darauf hinaus, den einen Kreis im Verhältnis $\frac{m}{n}$ von O aus abzubilden und an diese Abbildung und den zweiten Kreis die gemeinsame Tangente zu legen. Diese und die zu ihr parallele Tangente an den ersten Kreis leisten dann das Verlangte.

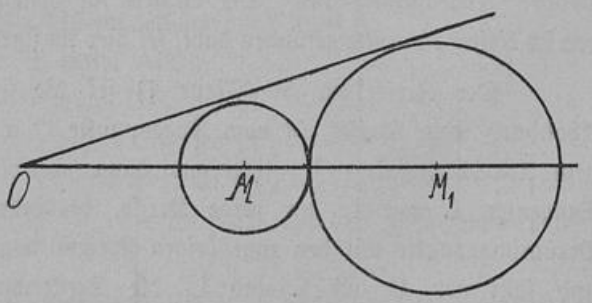
18. Durch den Punkt O innerhalb eines gegebenen Kreises M eine Sehne zu ziehen, welche durch den Punkt O in zwei Abschnitte geteilt wird, die sich wie $m : n$ verhalten.



Figur 8.

Ist PP' (Fig. 8) die gesuchte Sehne, so soll also $OP : OP' = m : n$ sein, d. h. der Punkt P' liegt auf dem mit $-\frac{m}{n}$ von O als Augenpunkt aus multiplizierten Kreise M. Für den Mittelpunkt M' und ebenso für seinen Radius r' besteht also die Beziehung, daß absolut genommen $OM : OM' = r : r' = \frac{m}{n}$ ist. Der Schnittpunkt beider Kreise liefert den gesuchten Punkt P', und OP' ist die gesuchte Sehne. Von der Wahl des Ähnlichkeitsfaktors, für den die Bestimmung gilt, daß $OG : OG' < \frac{m}{n} < 1$ sein muß, hängt die Anzahl der Lösungen ab.

Liegt der gegebene Augenpunkt außerhalb des gegebenen Kreises, so ist die Lösung analog, nur daß man hier zur Bestimmung des Bildkreises nicht noch einen Punkt der Peripherie zu multiplizieren braucht, nachdem man den Mittelpunkt des Bildkreises gefunden hat. Man kann den Radius des Bildkreises vielmehr in diesem Falle mit Hülfe der schon früher erwähnten Konstruktion gemeinsamer Tangenten finden. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn der Bildkreis den gegebenen nicht mehr schneidet. Der Grenzfall tritt ein, wenn die beiden Kreise sich berühren.



Figur 9.

Es drängt sich hier die Frage auf, wie der Ähnlichkeitsfaktor $\frac{m}{n}$ bei gegebenem Augenpunkt zu wählen ist, damit dieser Grenzfall eintritt. Bezeichnet man den Abstand des gegebenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kreismittelpunktes M vom gegebenen Augenpunkt O mit p (Fig. 9), so muß für den Grenzfall, wie sich unmittelbar aus der Figur ablesen läßt, $\frac{m}{n} = \frac{p-r}{p+r}$ sein, und die gesuchte Gerade ist in diesem Fall der durch den Augenpunkt gehende Durchmesser des gegebenen Kreises.

Soll der außerhalb des Kreises liegende Sehnenabschnitt sich zur Sehne wie $m : n$ verhalten, also $OA : AB = \frac{m}{n}$ sein, so ist damit $OA : OB = m : (m + n)$ oder $(m + n) : m$, je nachdem $OA \gtrless OB$ ist, und man erhält den Bildkreis durch Multiplikation des gegebenen Kreises mit $\frac{m}{m+n}$ resp. $\frac{m+n}{m}$.

19. Eine Spezialisierung der soeben behandelten Aufgabe stellt die folgende dar: Ein Parallelogramm zu zeichnen, von dem zwei gegenüberliegende Eckpunkte in gegebenen Punkten und die beiden andern auf einer gegebenen Kreisperipherie liegen.

Durch die beiden gegebenen Punkte ist die eine Diagonale des gesuchten Parallelogramms festgelegt und damit gleichzeitig der Mittelpunkt O des Parallelogramms bestimmt. Die Aufgabe verlangt also, durch O eine Sehne in den Kreis zu legen, die in O halbiert wird, also die gleiche Aufgabe wie vorhin, mit der Spezialisierung, daß $\frac{m}{n} = -1$ ist. Der mit -1 vom Augenpunkt O aus multiplizierte Kreis schneidet also den gegebenen in den beiden gesuchten Eckpunkten des Parallelogramms.

20. Durch einen auf einer Kreisperipherie gegebenen Punkt C eine Sehne zu ziehen, welche von einer andern gegebenen Sehne halbiert wird.

Zur Lösung dieser Aufgabe hat man den gegebenen Kreis vom gegebenen Punkt als Augenpunkt aus mit $\frac{1}{2}$ zu multiplizieren. Die Verbindungslinie des gegebenen Kreismittelpunktes mit dem gegebenen Punkte C ist Durchmesser des gesuchten Bildkreises; dessen Schnittpunkt mit der gegebenen Sehne liefert den Punkt, der mit C verbunden die gesuchte Sehne festlegt. Eine zweite Lösung liefert die Multiplikation der gegebenen Sehne mit 2 vom Augenpunkte C aus; nur wird hier statt des Mittelpunktes der Endpunkt der Sehne festgelegt. Der Grenzfall tritt in den angedeuteten Lösungen ein, wenn die gegebene Sehne den Bildkreis berührt resp. wenn die Bildgerade den gegebenen Kreis berührt.

21. Petersen deutet in seinen Methoden und Theorien die Lösung der Aufgabe an: In einem Dreieck soll von A nach BC eine Linie AD gezogen werden, welche die mittlere Proportionale zwischen BD und DC ist. Die von Schwering in seinen 100 Aufgaben eingehender behandelte Aufgabe sei hier kurz besprochen. Zeichnet man den Umkreis und verlängert AD bis zum zweiten Schnittpunkt E mit dem Umkreise, so soll $BD : DA = DA : DC$ oder $DB \cdot DC = DA^2$ sein. Anderseits ist nach Zeichnung $DB \cdot DC = DA \cdot DE$ also $DA \cdot DE = DA^2$ oder $DA = DE$, somit $DA = \frac{1}{2}AE$. Die Aufgabe verlangt daher, durch den Punkt A eine Sehne so zu ziehen, daß sie durch die gegebene Sehne BC halbiert wird. Sie ist somit identisch mit der vorhin behandelten Aufgabe. Im übrigen verweise ich, besonders was die Untersuchung des Grenzfalles angeht, auf das oben erwähnte Werk von Schwering.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine zweite Lösung ergibt sich nach der vorigen Aufgabe dadurch, daß man den Schnittpunkt E der gesuchten Geraden und des Umkreises zu bestimmen sucht. Ein geometrischer Ort für diesen Schnittpunkt ist die mit 2 multiplizierte Gerade BC.

22. Durch den einen Durchschnittspunkt O zweier Kreise M und M_1 soll eine Gerade so gelegt werden, daß die entstehenden Sehnen einander gleich sind. Der erste geometrische Ort für den zweiten Endpunkt der gesuchten Sehne des Kreises M ist dieser Kreis selbst und der zweite der mit -1 multiplizierte Kreis M_1. Trägt man daher von O aus den Radius OM_1 nach der entgegengesetzten Seite hin ab und schlägt um den erhaltenen Punkt mit diesem Radius den Kreis, so bestimmt er auf dem Kreise M einen Punkt, der mit O verbunden die verlangte Sehne liefert.

Die Aufgabe wird unmöglich, wenn sich die beiden gegebenen Kreise von innen oder außen berühren, in diesem Falle berührt nämlich der Bildkreis des ersteren den zweiten Kreis umgekehrt von außen oder oder innen, hat also keinen weiteren Punkt mit diesem mehr gemein, mit Ausnahme des Falles, daß die beiden einander berührenden Kreise gleich groß sind. Dann ist jeder der beiden Kreise das Bild des andern, und die Aufgabe hat also unendlich viele Lösungen; das heißt jede der durch den gemeinsamen Berührungspunkt gehenden Sehnen genügt der gestellten Forderung.

23. Eine ähnliche Lösung hat die Aufgabe: Zwischen zwei Kreisen M und M_1 ist ein Punkt P gegeben, man soll durch denselben eine Gerade so ziehen, daß das von beiden begrenzte Stück derselben durch den Punkt P im Verhältnis $\frac{m}{n}$ geteilt wird.

Multipliziert man nämlich einen der Kreise, etwa M mit $-\frac{m}{n}$ vom Bildpunkte P aus, so ist der Bildkreis ein geometrischer Ort für den Schnittpunkt der gesuchten Geraden mit dem Kreise M_1.

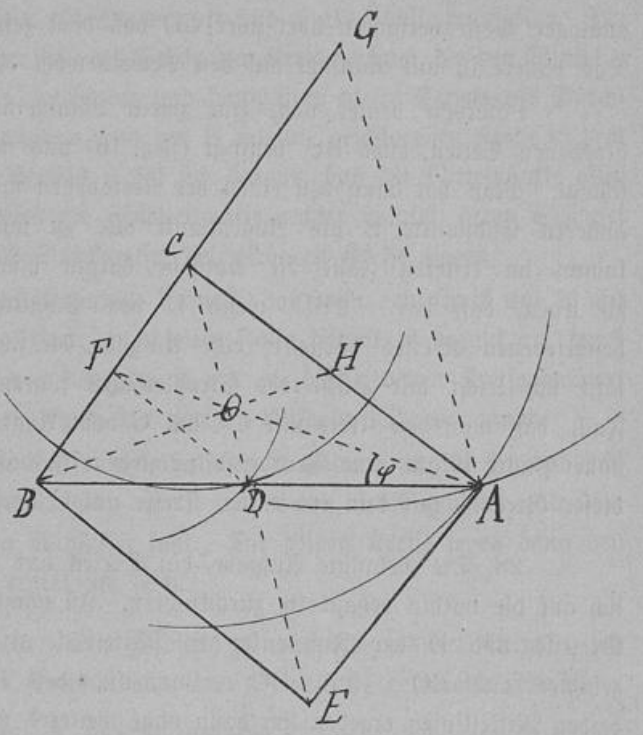
24. Eine Anwendung der vorhergehenden Aufgabe bietet die folgende: Ein Dreieck ist zu konstruieren aus den beiden Seiten a und b und dem Halbierer des von diesen Seiten eingeschlossenen Winkels m_c.

Beginnt man mit der Winkelhalbierenden m_c und schlägt um den einen Endpunkt B Kreise mit a und b als Radien, so hat man durch den andern Endpunkt D der Winkelhalbierenden eine Gerade so zu ziehen, daß die von beiden Kreisen begrenzten Stücke der Geraden, von D aus gerechnet, sich wie a : b verhalten, da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt. Man hat also den Kreis mit dem Radius a mit $-\frac{b}{a}$ oder aber den Kreis mit dem Radius b mit $-\frac{a}{b}$, beide vom Augenpunkte D aus, zu multiplizieren. Der Bildkreis legt auf dem andern Kreise einen gesuchten Eckpunkt fest. Der andere ergibt sich durch die Verbindung des gefundenen Eckpunktes mit D.

25. Ein Dreieck ist zu zeichnen aus dem Winkel γ, der Mittellinie m_b und dem von der Seite c und der Mittellinie m_a gebildeten Winkel φ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch m_b sind die Punkte B und H festgelegt (Fig. 10). Der Punkt O ist auffindbar, da $BO = \frac{2}{3} m_b$. Der erste geometrische Ort für A ist der Kreis über BO als Sehne, der den Winkel φ faßt. Der erste geometrische Ort für C ist der Kreis über BH als Sehne, der den Winkel γ faßt. Es kommt also jetzt darauf an, durch H eine Sehne so zu legen, daß sie auf beiden Kreisen 2 Punkte A und C festlegt, die von H gleiche Entfernung haben. Man erhält also einen zweiten geometrischen Ort für die Punkte A und C dadurch, daß man den einen Kreis vom Augenpunkte H aus mit — 1 multipliziert.



Figur 10.

26. Hierher gehört auch als Spezialfall die mit der früheren Aufgabe 2 verwandte Aufgabe: Für die Konstruktion eines Dreiecks sind gegeben der Schwerpunkt derselben O, ein Eckpunkt A und zwei Kreise M und M_1, auf welche die beiden andern Eckpunkte fallen sollen.

Man hat in diesem Falle (Fig. 2 Seite 6) den einen der gegebenen Kreise von D als Augenpunkt aus mit — 1 zu multiplizieren. Der Bildkreis schneidet den zweiten Kreis alsdann in einem der gesuchten Dreieckseckpunkte, und dessen Verbindungslinie mit D schneidet den abgebildeten Kreis in dem zweiten gesuchten Eckpunkte.

27. Die Lösung der bekannten Aufgabe, ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Seiten und der zur dritten gehörigen Mittellinie, läßt sich ebenfalls als eine Multiplikation von Kurven auffassen. Andeutungen zu dieser Lösung gibt Petersen in seinen Methoden und Theorien.

ABC sei das verlangte Dreieck (Fig. 10) und CD die gegebene Mittellinie. Durch Verlängerung von CD um sich selber bis zum Punkte E erhält man das Parallelogramm AEBC, und das Dreieck ACE ist aus seinen drei Seiten konstruierbar, ebenso das Dreieck CBE. Da $DE = CD$ und $EA = CB$ sowie $BE = CA$ ist, so liegt A auf dem vom Augenpunkte D aus mit — 1 multiplizierten Kreise, der mit CB um C geschrieben ist, ebenso wie B auf dem vom Augenpunkte D aus mit — 1 multiplizierten Kreise CA um C liegt. Zeichnet man also $CE = 2m_c$, beschreibt um C mit den gegebenen Seiten als Radien Kreise und multipliziert den einen derselben vom Augenpunkte D aus mit — 1, so schneidet der Bildkreis den anderen Kreis

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in einem der gesuchten Dreieckseckpunkte. Zur Bestimmung des anderen Eckpunktes kann man in analoger Weise verfahren oder aber CD von dem gefundenen Eckpunkte aus mit 2 multiplizieren. Das letztere ist mit Rücksicht auf den Beweis wohl das einfachere.

Petersen deutet noch eine zweite Lösung an, die darin besteht, daß man mit einer der gegebenen Seiten, etwa BC, beginnt (Fig. 10) und wieder um C, diesmal mit CA und m_c Kreise schlägt. Man hat dann den einen der Kreisbogen mit 2, oder aber den anderen mit $\frac{1}{2}$ von dem anderen Endpunkte B als Augenpunkt aus zu multiplizieren. Da nämlich BD = DA ist, so kommt im ersteren Falle die Aufgabe darauf hinaus, durch den Punkt B eine Gerade BA so zu legen, daß BA = 2BD, wenn D den Schnittpunkt der Geraden und des mit m_c um C beschriebenen Kreises darstellt; eine Aufgabe, die schon oben behandelt worden ist. Der Beweis läßt sich leicht mit Hülfe des Strahlensatzes führen. Die gleichen Überlegungen gelten für den Fall, daß man den Kreis mit CA um C vom Augenpunkte B aus mit $\frac{1}{2}$ multipliziert, da dann vom Punkt B aus eine Gerade so zu ziehen ist, daß BD = $\frac{1}{2}$BA ist, wenn A den Schnittpunkt dieser Geraden mit dem erwähnten Kreise um C darstellt.

28. Die bekannte Aufgabe, ein Dreieck aus seinen drei Mittellinien zu konstruieren, läßt sich auf die vorhin behandelte zurückführen. Ist nämlich (Fig. 10) O der Schwerpunkt des gesuchten Dreiecks und D der Fußpunkt der Mittellinie m_c, so läßt sich zunächst das Teildreieck AOB zeichnen aus AO = $\frac{2}{3}m_a$, BO = $\frac{2}{3}m_b$ und der Mittellinie DO = $\frac{1}{3}m_c$. Die Fußpunkte der beiden Mittellinien ergeben sich dann ohne weiteres und damit auch der dritte Eckpunkt C.

29. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Seite a, der Mittellinie m_c und dem von der Seite c und der Mittellinie m_a gebildeten Winkel φ.

Zeichnet man zunächst (Fig. 10) die Mittellinie CD = m_c und bestimmt auf ihr den Schwerpunkt O, so ist der Kreis über DO als Sehne, der den Winkel φ faßt, ein geometrischer Ort für A; der Kreis um C mit a ist ein geometrischer Ort für B. Es handelt sich also jetzt darum, durch den Punkt D eine Gerade, die den ersteren Kreis in A und den zweiten in B schneidet, so zu ziehen, daß DA = DB wird. Multipliziert man daher den zweiten Kreis, der mit a um C geschlagen war, vom Augenpunkte D aus mit — 1, so schneidet der Bildkreis den ersteren Kreis in dem gesuchten Punkte A und der dritte Eckpunkt ergibt sich dann ohne Schwierigkeit. Die Aufgabe kommt also wieder auf die vorvorige Aufgabe hinaus.

30. Ein ebenso hübsches Beispiel für die Anwendung der ähnlichen Abbildung bei der Aufgabengruppe, in der eine Mittellinie gegeben ist, bildet auch die von Petersen angedeutete Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a, dem gegenüberliegenden Winkel α und der Mittellinie m_b.

Beschreibt man über a (Fig. 10) als Sehne den Kreis, der den Winkel α faßt, so kommt es darauf an, zunächst die geometrischen Örter für den Fußpunkt H der Mittellinie m_b zu finden.

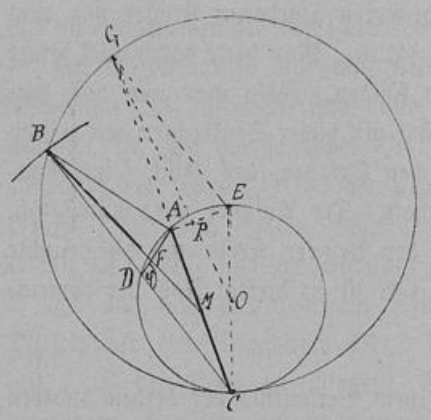
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der erste geometrische Ort ist der mit m_b um B geschlagene Kreis. Der zweite ist die ähnliche Abbildung des zuerst gezeichneten Kreises mit C als Augenpunkt und $\frac{1}{2}$ als Ähnlichkeitsfaktor. Die Lösung ergibt sich also dadurch, daß man über BC als Sehne den Kreis zeichnet, der den Winkel α faßt, den Mittelpunkt M dieses Kreises mit C verbindet und dann über dieser Strecke als Durchmesser den Kreis beschreibt. Dieser wird dann von dem um B mit m_b geschlagenen Kreise in dem Fußpunkt H der Mittellinie getroffen. Der Beweis ergibt sich daraus, daß die Mittelpunkte aller durch C gehenden Sehnen des ersten Kreises als Scheitelpunkte rechter Winkel, deren Schenkel durch C und M gehen, auf dem über CM als Durchmesser beschriebenen Kreise liegen.

Eine zweite Lösung ergibt sich nach Petersen dadurch, daß man den Kreis um B mit m_b vom Augenpunkt C aus mit 2 multipliziert; in diesem Falle kommt es darauf an, durch C eine Gerade AC so zu legen, daß diese von dem um B mit m_b beschriebenen Kreise halbiert wird. Die Lösungen sind also mit den beiden letzten der vorigen Aufgabe nahe verwandt.

Eine dritte Lösung, allerdings ohne Hülfe der ähnlichen Abbildung, ergibt sich dadurch, daß man $BH = m_b$ um sich selber bis K verlängert, um B mit a den Kreis zeichnet und über HK als Sehne den Kreis beschreibt, der den Winkel α faßt. Die beiden Kreise legen dann den einen Eckpunkt des Dreiecks fest; der andere ergibt sich leicht.

31. Hierher gehört auch die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite b, der zugehörigen Mittellinie m_b und dem von der Seite a und ihrer Mittellinie gebildeten Winkel φ.



Figur 11.

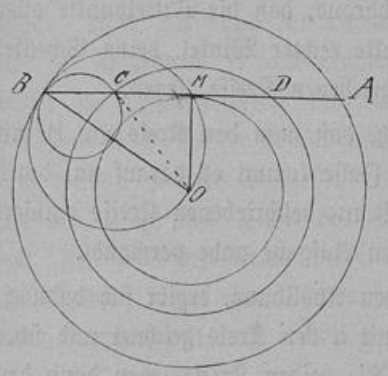
Mit b sind die Punkte A und C festgelegt (Fig. 11). Ein geometrischer Ort für den Scheitelpunkt des Winkels φ ist der Kreis O über AC als Sehne, der den Winkel φ faßt. Ein geometrischer Ort für B ist der Kreis M um die Mitte von AC mit m_b. Die obige Aufgabe kommt jetzt also darauf hinaus, durch C eine den letztern Kreis in B schneidende Gerade CB so zu ziehen, daß sie von dem erstern Kreise halbiert wird. Der zweite geometrische Ort für B ist somit der vom Augenpunkte C aus mit 2 multiplizierte erstere Kreis E. Der Mittelpunkt E des gesuchten Bildkreises liegt also von C aus gerechnet im Pfeilpunkte des Bestimmungskreises für φ.

32. Mit der vorigen nahe verwandt ist die Aufgabe: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite b, dem Winkel α und dem von der Seite a und ihrer Mittellinie gebildeten Winkel φ.

Durch b sind die Punkte A und C gegeben (Fig. 11). Ein geometrischer Ort für B ist der freie Schenkel des Winkels α an AC in A. Ein geometrischer Ort für den Fußpunkt D der Mittellinie m_a ist der Kreis über AC als Sehne, der den gegebenen Winkel φ faßt. Da $CD = DB$ oder $CB = 2CD$, so bildet der vom Augenpunkte C aus mit 2 als Ähnlichkeitsfaktor

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

multiplizierte Kreis den zweiten geometrischen Ort für B. Zeichnet man daher über der Sehne AC den Kreis, der den Winkel φ faßt, und um seinen von C aus genommenen Pfeilpunkt E den Kreis mit EC, so schneidet dieser den freien Schenkel des in A an AC angelegten Winkels α in dem gesuchten Punkte B.



Figur 12.

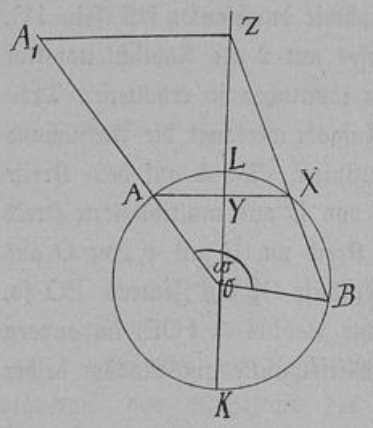
33. Soll durch zwei konzentrische Kreise eine gerade Linie so gezogen werden (Fig. 12), daß die kleine Sehne die Hälfte der großen ist, so kommt es darauf an, den geometrischen Ort aller Sehnen von der verlangten Eigenschaft zu finden. Sei AB eine solche Sehne, also $AB = 2CD$, und fällt man vom Mittelpunkte O aus die Senkrechte OM auf AB, so ist auch $MC = \frac{1}{2}MB$ oder $MC = CB$, daher OC Mittellinie im rechtwinkligen Dreieck OMB. Von diesem Dreieck aber ist die Seite $OB = r$, der Winkel $OMB = R$ und die Mittellinie $OC = \varrho$ bekannt. Das Dreieck ist also konstruierbar nach der vorigen Aufgabe. Man zeichnet daher einen beliebigen Radius OB des großen Kreises und schlägt über OB als Durchmesser den Kreis. Multipliziert man diesen Kreis mit $\frac{1}{2}$ vom Augenpunkt B aus, so schneidet der Bildkreis den kleinern gegebenen Kreis in einem Punkte C, der mit B verbunden die gesuchte Sehne liefert. Der gefundene Bildkreis ist übrigens auch Bildkreis des größeren gegebenen Kreises von dem gleichen Augenpunkt B mit $\frac{1}{4}$ als Ähnlichkeitsfaktor, da $DC = \frac{1}{4}AB$ ist. Man hätte daher auch sofort den größern gegebenen Kreis von B aus mit $\frac{1}{4}$ multiplizieren können. Fällt man nun noch von O aus die Senkrechte OM auf die gefundene Sehne und schlägt mit dieser Senkrechten den dritten konzentrischen Kreis, so stellt dieser den gesuchten geometrischen Ort dar, das heißt, seine sämtlichen Tangenten haben die in der Aufgabe verlangte Eigenschaft. Die Aufgabe wird unmöglich, wenn $r > 2\varrho$. Im Grenzfall $r = 2\varrho$ berührt der Bildkreis den kleinern Kreis und die gesuchte Sehne wird zum Durchmesser, d. h. der gesuchte geometrische Ort ist in diesem Fall der gemeinsame Mittelpunkt der gegebenen Kreise.

34. Ein Dreieck ist zu konstruieren aus der Seite a, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten $b : c = m : n$ und der Mittellinie m_c.

Verlängert man (Fig. 10) BC um sich selber bis G, so ist $BC : CG = BD : DA$, wo D der Fußpunkt der gegebenen Mittellinie ist, also auch $CD : GA = BD : BA = 1 : 2$ oder $GA = 2CD$, ebenso ist $BG = 2BC$. Durch a sind die Punkte B und C gegeben. Der erste geometrische Ort für A ist der Kreis über den Teilpunkten der im Verhältnis $b : c$ harmonisch geteilten Strecke BC; der zweite ist der mit dem Ähnlichkeitsfaktor 2 von B aus multiplizierte Kreis um C mit m_c. Wenn $\frac{m}{n} > 1$, muß $m_c > \frac{3a}{4}$ sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

35. Auf einer Kreisperipherie sind die Punkte A und B gegeben, man bestimme auf der Peripherie einen Punkt X so, daß XA und XB einen gegebenen Durchmesser in zwei Punkten Y und Z schneiden, deren Abstände vom Kreismittelpunkt in einem gegebenen Verhältnis stehen.



Figur 13.

Die von Petersen kurz angedeutete Lösung ergibt sich aus folgender Überlegung. Da OY : OZ = m : n sein soll (Fig. 13), so liegt Z auf der ähnlichen Abbildung der gesuchten Linie AX vom Augenpunkt O aus mit $\frac{n}{m}$ als Ähnlichkeitsfaktor. Diese Abbildung schneidet auf der festen Geraden OA einen Punkt A_1 aus, für den also ebenfalls die Beziehung gilt, daß $OA : OA_1 = m : n$. Der Punkt A_1 ist somit eindeutig bestimmt. Setzt man den gegebenen Winkel $AOB = \omega$, so ist Winkel $AXB = 2R - \frac{\omega}{2}$ eventuell $= \frac{\omega}{2}$, auf jeden Fall aber Winkel $A_1ZB = 2R - \frac{\omega}{2}$. Der gegebene Durchmesser KL liefert den ersten geometrischen Ort für Z; den zweiten bildet der Kreis über A_1B, der den Winkel $2R - \frac{\omega}{2}$ faßt. ZB schneidet dann auf dem gegebenen Kreise den gesuchten Punkt X aus. Liegen die beiden gegebenen Punkte auf einem Durchmesser, ist also $AOB = 2R$, so berühren sich die beiden Kreise von innen.

36. Von nicht geringem Werte ist die ähnliche Abbildung für die Aufsuchung geometrischer Örter, wie das aus den bisher behandelten Aufgaben schon zur Genüge hervorgeht. Es möge das an einigen wenigen von Petersen gestellten Aufgaben noch etwas näher erläutert werden. Handelt es sich beispielsweise um ein Viereck ABCD, von dem die Seiten AB, BC und CD sowie die Diagonale AC gegeben sind, und es soll nun, nachdem die Seite AB in eine bestimmte Lage gebracht ist, ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt der Diagonale BD gesucht werden, so ist zunächst das Dreieck ABC der Lage und Größe nach bestimmt durch die Lage von AB und die Größe seiner drei Seiten. Ein geometrischer Ort für den Eckpunkt D ist zunächst der Kreis um C mit CD. Die ähnliche Abbildung dieses Kreises mit $\frac{1}{2}$ als Ähnlichkeitsfaktor vom Augenpunkte B aus ist, wie aus früheren Darlegungen hervorgeht, der gesuchte geometrische Ort für den Mittelpunkt der Diagonale BD. Man hat also zu seiner Konstruktion um die Mitte von CB mit $\frac{1}{2}$ CD den Kreis zu schlagen. Soll außerdem noch ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt derjenigen Strecken gesucht werden, die die Mitten der Diagonalen verbinden, so sei zunächst daran erinnert, daß all diese Verbindungslinien nichts anderes sind, als die Strecken, die von der Mitte der Dreiecksseite AC und den sämtlichen Peripheriepunkten des oben gefundenen Kreises begrenzt werden. Die Mitten dieser Strecken liegen somit auf dem mit $\frac{1}{2}$ als Ähnlichkeitsfaktor vom Mittelpunkt der Seite AC aus multiplizierten obigen Bildkreis. Man erhält nach den obigen Darlegungen also den zweiten Bildkreis dadurch, daß man die Mitten der beiden Dreiecksseiten AC und BC miteinander verbindet und um den Mittelpunkt dieser Verbindungslinien mit $\frac{1}{4}$ CD den Kreis schlägt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

37. In einem Kreise mit dem Mittelpunkt O ist der feste Durchmesser COE gezogen und eine Sehne CA, welche bis G verlängert ist, so daß CA = AG. Man suche den geometrischen Ort für den Durchschnittspunkt P von GO und AE.

Da COE nach der Aufgabe festliegen und A die Kreisperipherie durchlaufen soll (Fig. 11), so ist der geometrische Ort für G das Bild des gegebenen Kreises mit 2 als Ähnlichkeitsfaktor vom Augenpunkte C aus, kurz der Kreis um E mit EC. In den sämtlichen so erhaltenen Dreiecken CEG stellen AE und GO Mittellinien dar, und die obige Aufgabe verlangt die Aufsuchung eines geometrischen Ortes für den Schnittpunkt P dieser Mittellinien. Da A auf dem Kreise um O wandert, so ist der erste geometrische Ort für P der mit $\frac{2}{3}$ von E aus multiplizierte Kreis um O. Denselben geometrischen Ort erhält man, wenn man den Kreis um E mit $\frac{1}{3}$ von O aus multipliziert, denn in beiden Fällen teilt der gesuchte Kreismittelpunkt O_1 die Zentrale EO so, daß $EO_1 = 2OO_1$. Gleichzeitig ist in dem einen Falle der gesuchte Radius $= \frac{2}{3}OE$, im andern Falle $= \frac{1}{3}EC$, und da $EC = 2EO$, so sind in der Tat die Mittelpunkte und Radien beider Kreise die gleichen.

38. Man bestimme den geometrischen Ort für den zu einem festen Punkt A symmetrischen Punkt A_1 mit Beziehung auf eine Gerade, welche sich um einen anderen festen Punkt B dreht.

Bezeichnet man den Schnittpunkt der Verbindungslinie beider symmetrischen Punkte mit der gegebenen Geraden als Punkt C, so ist der Kreis über den beiden festen Punkten A und B geometrischer Ort für diesen Punkt C insofern, als C den Kreis über dem Durchmesser AB durchläuft, wenn die Gerade den Büschel B durchwandert. Da in jedem Falle $CA = CA_1$ ist, so bildet der vom Augenpunkte A aus mit 2 multiplizierte Kreis den gesuchten geometrischen Ort. Um ihn zu konstruieren, hat man also um B mit BA den Kreis zu schlagen.

39. Zum Schluß dieser Ausführungen über ähnliche Abbildungen sei noch kurz auf ihren Wert für die Lösung von Aufgaben des Apollonischen Taktionsproblems hingewiesen. Soll beispielsweise ein Kreis gezeichnet werden, der zwei Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht, so ergibt die Winkelhalbierende des von den beiden Geraden gebildeten Winkels einen geometrischen Ort für den gesuchten Kreismittelpunkt und die Aufgabe ist damit gleichzeitig zurückgeführt auf die früher behandelte Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, dessen Mittelpunkt auf einer gegebenen Geraden liegt und der eine gegebene Gerade berührt und durch einen gegebenen Punkt geht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II.

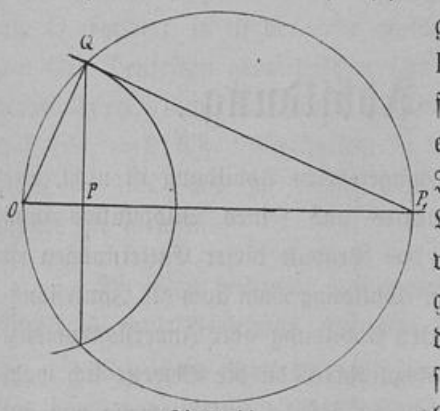
Die umgekehrt ähnliche Abbildung.

Bei der umgekehrt ähnlichen oder kürzer bezeichnet umgekehrten Abbildung ist nicht, wie bisheran, das Verhältnis der Entfernungen des Kurvenpunktes und seines Bildpunktes vom Augenpunkte aus gemessen eine konstante Größe, sondern das Produkt dieser Entfernungen ist konstant. Man bezeichnet den Augenpunkt bei der umgekehrten Abbildung wohl auch als Inversionszentrum und das konstante Produkt als Potenz der umgekehrten Abbildung oder Inversionspotenz. Auch hier dürfte es genügen, die anzuwendenden Sätze kurz anzuführen, da die Beweise sich wohl in jedem ausführlichern Lehrbuche der Geometrie finden dürften. Es sei beispielsweise nur auf Schwering und Krimphof: Ebene Geometrie und auf Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik verwiesen.

Es ist zunächst die umgekehrte Abbildung oder inverse Kurve eines Kreises, der nicht durch das Inversionszentrum geht, ebenfalls ein nicht durch das Inversionszentrum gehender Kreis, allerdings nicht im gleichen, sondern im entgegengesetzten Drehungssinn. Die umgekehrte Abbildung eines durch das Inversionszentrum gehenden Kreises ist eine Gerade, die auf dem durch dieses Inversionszentrum gehenden Durchmesser senkrecht steht, und die umgekehrte Abbildung einer Geraden ist entsprechend ein Kreis durch das Inversionszentrum, dessen Mittelpunkt auf der Senkrechten liegt, die man vom Inversionszentrum auf die abzubildende Gerade fällen kann. Die Lage dieses Mittelpunktes auf dieser Senkrechten ebensowohl wie im umgekehrten Falle die Lage des Fußpunktes der vorhin erwähnten Senkrechten bestimmt sich durch die Wahl der Inversionspotenz. Faßt man übrigens die Gerade als Bogen eines Kreises mit unendlich großem Radius auf, dessen Mittelpunkt ebenfalls im Unendlichen liegt, so sind die beiden letzteren nur spezielle Fälle der Abbildung eines Kreises durch einen Kreis. Die Verwandtschaft der ähnlichen und umgekehrten Abbildung liegt kurz darin, daß der Ähnlichkeitspunkt zweier gegebenen Kreise gleichzeitig Augenpunkt der ähnlichen sowohl wie der umgekehrten Abbildung ist, wobei die eine Kurve als Bild der anderen zu betrachten ist; bei der ähnlichen Abbildung herrscht dabei, wie schon erwähnt, der gleiche, bei der umgekehrten Abbildung der entgegengesetzte Drehungssinn.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

1. Die Aufgabe, die sich bei der umgekehrten Abbildung naturgemäß zunächst aufdrängt, ist die, zu einem gegebenen Punkt den inversen Punkt zu zeichnen, wenn der Augenpunkt O und die Potenz a^2 der umgekehrten Abbildung gegeben sind. Die einfachste Lösung ist die von Wellstein in seiner Encyklopädie der Elementar-Mathematik angegebene. Unter der Voraussetzung, daß die Involution hyperbolisch, die Inversionspotenz a^2 also positiv ist, hat man zunächst um das Inversionszentrum O den Inversionskreis mit a zu schlagen. Liegt der abzubildende Punkt P_1 außerhalb dieses Kreises, so schlägt man (Fig. 14) über OP_1 als Durchmesser den Kreis. Die Chordale beider Kreise schneidet OP_1 in dem zu P_1 inversen Punkt P. Ist umgekehrt der innerhalb des Inversionskreises a gelegene Punkt P gegeben und der zu ihm inverse Punkt P_1 gesucht, so findet man diesen dadurch, daß man auf OP die Senkrechte errichtet und im Schnittpunkte Q dieser Senkrechten mit dem Inversionskreise a die Senkrechte auf OQ errichtet, die die Linie OP im Inversionspunkte P_1 schneidet. Ist die Inversion elliptisch also a^2 negativ, so findet man den zu dem gegebenen elliptisch inversen Punkt durch zentrische Symmetrie des hyperbolisch inversen Punktes, so daß sich alle Untersuchungen über Inversionen auf hyperbolische Inversionen beschränken können.



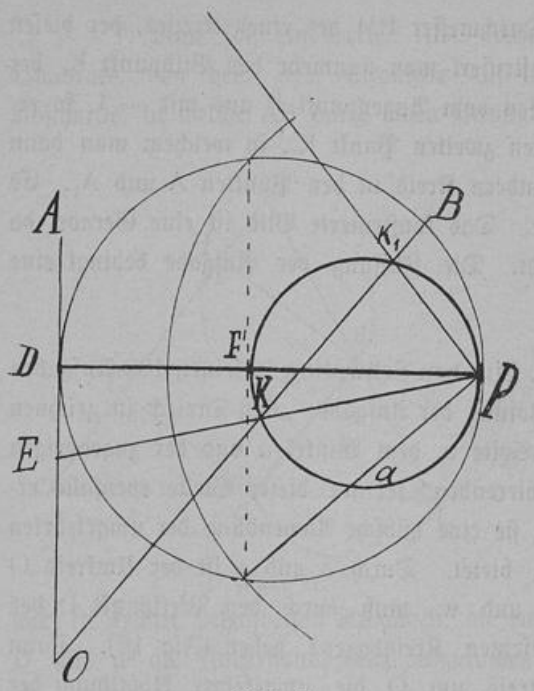
Figur 14.

2. Eine zweite Fundamentalaufgabe ergibt sich, wenn die Inversion durch das Inversionszentrum O und zwei zu einander inverse Punkte P und P_1 gegeben ist und man nunmehr zu einem gegebenen Punkt Q den inversen Punkt Q_1 aufsuchen soll. Man legt zu dem Ende einen beliebigen Kreis durch P und P_1 und schlägt um O den Kreis mit OQ. Er treffe den ersteren in S. Es schneide OS den ersteren Kreis zum zweitenmale in S_1. Dann wird der Kreis mit OS_1 um O den Inversionsstrahl OQ in dem gesuchten zu Q inversen Punkte Q_1 schneiden. Man kann auch einfacher in der Weise verfahren, daß man durch die drei gegebenen Punkte P, P_1 und Q den Kreis legt und nun O mit Q verbindet. Die Verbindungslinie OQ schneidet dann auf dem gezeichneten Kreise den zu Q inversen Punkt Q_1 aus, da jeder Kreis durch zwei inverse Punkte zu sich selbst invers ist.

3. Eine naheliegende Anwendung der umgekehrten Abbildung ergibt die Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt P eine Gerade zu ziehen, welche die Schenkel eines gegebenen Winkels in E und K so schneidet, daß $PE \cdot PK = a^2$ ist, wo a eine gegebene Strecke bedeutet.

Man hat zunächst zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der gegebene Punkt außerhalb der beiden Schenkel liegt oder innerhalb. Im ersteren Falle fällt man (Fig. 15) von P aus auf einen der Schenkel, etwa OA die Senkrechte PD und konstruiert die zu OA inverse Kurve, die auf dem zweiten Schenkel OB zwei Punkte K und K_1 liefert, welche mit P verbunden beide die gesuchte Gerade liefern. Die gesuchte Inversionskurve ist nach dem obigen ein Kreis durch das

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Figur 15.

Inversionszentrum, dessen Mittelpunkt auf der Senkrechten PD liegt. Um ihn zeichnen zu können, hat man den zu D inversen Punkt F zu konstruieren. PF ist dann der Durchmesser des gesuchten Inversionskreises. Unter der Voraussetzung, daß $a < PD$ ist, schlägt man also um P mit a den Kreis und ebenso den Kreis über PD als Durchmesser. Die Chordale beider Kreise schneidet auf PD den zu D inversen Punkt F aus, und der Kreis über PF als Durchmesser ist die gesuchte umgekehrte Abbildung der Geraden OA. Sie legt auf dem Schenkel OB die beiden Punkte K und K_1 fest. Die beiden Geraden PK und PK_1 leisten das Verlangte. a muß unter allen Umständen größer sein als der Abstand des Punktes P von dem ihm am nächsten liegenden Schenkel des gegebenen Winkels. Ist $a > PD$, so ergibt die Aufgabe zwei Lösungen, da in diesem Falle die umgekehrte Abbildung beide Schenkel, sicher also den zunächst gelegenen, in zwei Punkten schneidet. Liegt im zweiten Falle der Punkt P zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels, so muß die Inversionspotenz negativ genommen werden. Die sich daraus ergebende elliptische Inversion läßt sich durch Multiplikation der hyperbolischen Inversion mit -1 vom Augenpunkte P aus konstruieren, wie dies schon in den einleitenden Bemerkungen zur umgekehrten Abbildung angedeutet wurde.

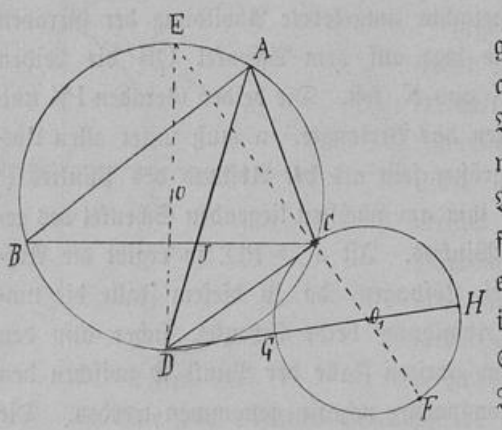
4. Gegeben ist ein Kreis, in demselben ein Durchmesser und ein Punkt P; man soll durch P eine Gerade ziehen, welche den Kreis in X und den Durchmesser in Y so schneidet, daß $PX \cdot PY = a^2$ ist.

Auch in diesem Falle hat man vom Augenpunkte P aus die umgekehrte Abbildung des gegebenen Durchmessers zu zeichnen. Der Bildkreis schneidet den gegebenen Kreis im gesuchten Punkte X. Je nachdem die Inversionspotenz positiv oder negativ genommen wird, fällt der Schnittpunkt X auf die entgegengesetzte oder gleiche Seite des Durchmessers wie P. Die Lösung ergibt sich ebenso dadurch, daß man die umgekehrte Abbildung des gegebenen Kreises konstruiert, die alsdann die gegebene Sehne im gesuchten Punkt Y schneidet. Diese letztere Lösung erledigt sich am einfachsten dadurch, daß man die Bildpunkte der Endpunkte des durch P gehenden Durchmessers aufsucht. Sie sind die Endpunkte des Durchmessers für den gesuchten Bildkreis.

5. Durch den einen Durchschnittspunkt P zweier Kreise eine Gerade so zu ziehen, daß die durch die beiden Kreise abgeschnittenen Sehnen ein gegebenes Produkt haben. Die Mittelpunkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beider Kreise seien M und M_1. Man zeichnet den Durchmesser PM des einen Kreises, der diesen Kreis zum zweitenmal in K schneiden möge. Konstruiert man nunmehr den Bildpunkt K_1 der umgekehrten Abbildung für K und multipliziert diesen vom Augenpunkt P aus mit — 1, so erhält man auf der Verlängerung von PM über P einen zweiten Punkt K_1, in welchem man dann die Senkrechte auf PM errichtet. Sie schneide den andern Kreis in den Punkten A und A_1. Es ist dann AP sowohl wie AP_1 die gesuchte Gerade. Das konstruierte Bild ist eine Gerade, da der abzubildende Kreis durch den Augenpunkt geht. Die Fassung der Aufgabe bedingt eine elliptische Inversion.



Figur 16.

6. Eine von Schwering in seinen 100 Aufgaben gegebene Lösung der Aufgabe: „Ein Dreieck zu zeichnen aus der Seite a, dem Winkel α und der zugehörigen Winkelhalbierenden" sei an dieser Stelle ebenfalls erwähnt, da sie eine hübsche Anwendung der umgekehrten Abbildung bietet. Durch a und α ist der Umkreis O festgelegt, und w_α muß durch den Pfeilpunkt D des entgegengesetzten Kreisbogens gehen (Fig. 16). Dann ist der Kreis um O die umgekehrte Abbildung der Sehne BC vom Augenpunkte D aus mit $\overline{DC}^2$ als Inversionspotenz. Verbindet man den Pfeilpunkt E mit C, verlängert EC um das Stück $CF = w_\alpha$ und beschreibt über CF als Durchmesser den Kreis, so ist DC Tangente an diesem Kreis, da DC senkrecht steht auf EC; zieht man noch von D aus den Durchmesser DO_1, der diesen Kreis in den Punkten G und H treffe, so ist, wenn noch der Fußpunkt der Winkelhalbierenden mit J bezeichnet wird, $DJ \,.\, DA = \overline{DC}^2$

$$DG \,.\, DH = \overline{DC}^2$$

$$\overline{DJ \,.\, DA = DG \,.\, DH}$$

Setzt man hier $DA = x$, $DJ = y$, so ist

$$x \,.\, y = \overline{DC}^2$$

$$x - y = w_\alpha$$

$$\text{und damit } x = \tfrac{1}{2}\sqrt{w_\alpha^2 + 4\overline{DC}^2} + \frac{w_\alpha}{2}$$

Setzt man analog $HD = u$, $GD = v$, so ergibt sich ebenso

$$u \,.\, v = \overline{DC}^2$$

$$u - v = w_\alpha$$

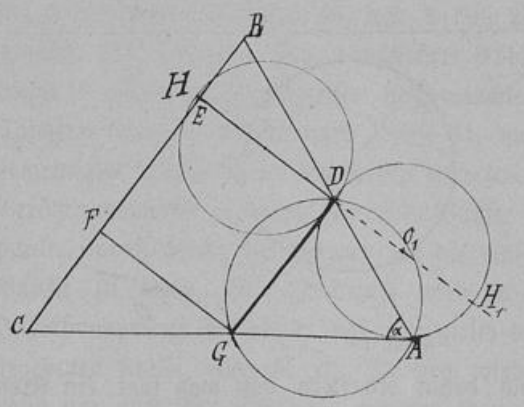
$$\text{und damit } u = \tfrac{1}{2}\sqrt{w_\alpha^2 + 4\overline{DC}^2} + \frac{w_\alpha}{2}$$

also $DA = DH$.

Der Kreis um D mit DH schneidet also den Umkreis in dem gesuchten Punkte A.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. Man soll ein Dreieck ABC konstruieren. Bekannt sind die Seite des einbeschriebenen Quadrats, von dem zwei Eckpunkte auf BC liegen, der Winkel α und das Produkt der beiden Abschnitte, in welche AB durch einen Eckpunkt des Quadrats geteilt wird.



Figur 17.

Beginnt man (Fig. 17) mit der Zeichnung des Quadrats EFGD, so ist damit gleichzeitig die Richtung der Dreiecksseite BC gegeben. Gleichzeitig ergibt sich ein geometrischer Ort für A in dem Kreis über der Quadratseite DG, der den Winkel α faßt. Da nun $DA \cdot DB = a^2$ sein soll, so ergibt sich als zweiter geometrischer Ort für A die negativ genommene umgekehrte Abbildung der Geraden BC, d. h. ein Kreis durch den Punkt D, dessen Mittelpunkt O_1 auf der Verlängerung der Quadratseite ED liegt. Um den Durchmesser festzulegen, hat man, wie in früher behandelten Aufgaben, die umgekehrte Abbildung des Punktes E vom Augenpunkt D mit a^2 als Inversionspotenz aufzusuchen und den gefundenen Punkt H von D aus mit -1 zu multiplizieren.

8. Ein Dreieck zu konstruieren aus der Seite a, dem Winkel α und dem Rechteck $BD \cdot BA = a^2$, wo D der Fußpunkt von h_c ist.

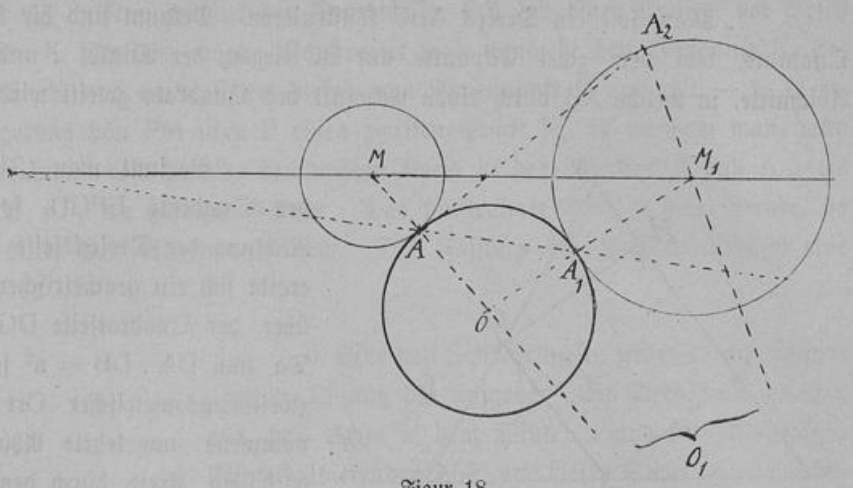
Durch a und α ist der Umkreis des gesuchten Dreiecks mit BC als Sehne festgelegt. Der erste geometrische Ort für den Höhenfußpunkt ist der Kreis über BC als Durchmesser; der zweite geometrische Ort ist die zum gezeichneten Umkreis inverse Kurve vom Augenpunkte B mit der gegebenen Inversionspotenz a^2; in diesem Falle eine auf dem durch B gehenden Durchmesser senkrechte Gerade, da der abzubildende Kreis durch den Augenpunkt B der Inversion geht.

9. Eine hübsche Anwendung der Inversionstheorie bietet die Aufgabe: Einen Kreis zu konstruieren, der zwei gegebene Kreise M und M_1 berührt, und zwar den einen derselben in einem gegebenen Punkte A.

Für diese Aufgabe gibt Schwering zwei Lösungen, von denen die letztere hier in Frage kommt. Setzt man den Satz als bekannt voraus, daß jeder Kreis zwei gegebene immer in zwei inversen Punkten berührt, (bezüglich des Beweises für diesen Satz sei auf Weber und Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik verwiesen), so ist die Lösung von selber gegeben. Man konstruiert den (innern oder äußern) Ähnlichkeitspunkt der gegebenen Kreise und verbindet ihn mit dem gegebenen Punkte A des Kreises M (Fig. 18). Diese Verbindungslinie liefert auf dem

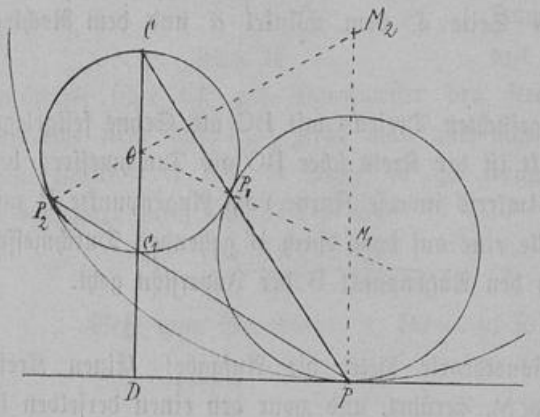
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zweiten Kreise M_1 den zu A inversen Punkt A_1 (A_2) und damit nach dem vorhin erwähnten Satz auch den Berührungspunkt des gesuchten Kreises mit dem gegebenen Kreise M_1. Die Linien MA und $M_1 A_1$ ($M_1 A_2$) sind dann die geometrischen Örter für den gesuchten Kreismittelpunkt O resp. O_1.



Figur 18.

Man kann den oben erwähnten Satz noch dahin erweitern, daß man sagt, ein Kreis berührt eine Gerade und einen gegebenen Kreis ebenfalls in zwei inversen Punkten, falls man wieder, wie vorhin, die gegebenen Kurven als gegenseitige umgekehrte Abbildungen auffaßt. Man hat damit die Lösung einer auch von Schwering behandelten Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade berührt, letztere in einem gegebenen Punkte.



Figur 19.

Die vom Mittelpunkt O (Fig. 19) auf die gegebene Gerade gefällte Senkrechte OD liefert den Augenpunkt der umgekehrten Abbildung, und zwar den Punkt C oder C_1, je nachdem man diese als hyperbolische oder elliptische Abbildung auffaßt. Verbindet man den gefundenen Augenpunkt mit dem gegebenen Berührungspunkte P, so legt diese Verbindungslinie auf dem gegebenen Kreise den zweiten Berührungspunkt P_1 resp. P_2 fest. OP_1 resp. OP_2 ist dann der eine geometrische Ort für den gesuchten Kreismittelpunkt und die Senkrechte auf der gegebenen Geraden im gegebenen Berührungspunke P der zweite.

10. Handelt es sich darum, einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt P geht und zwei gegebene Kreise berührt, so wird die Lösung dieser Aufgabe durch die Tatsache geleistet, daß, falls zwei Kurven sich in einem Punkte unter einem gewissen Winkel schneiden, sich die inversen Kurven in dem zum Schnittpunkt inversen Punkt unter dem gleichen Winkel schneiden. Berühren sich also speziell zwei Kreise, so berühren sich die inversen Kurven in dem zum Berührungspunkt inversen Punkte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denkt man sich den Kreis O gezeichnet, der die beiden gegebenen Kreise M und K berührt und durch den gegebenen Punkt P geht und zeichnet die beiden zu den gegebenen Kreisen inversen Kreise M_1 und K_1 in bezug auf eine beliebig gewählte Inversionspotenz und den gegebenen Punkt P als Augenpunkt, dann wird die umgekehrte Abbildung des gesuchten Berührungskreises die beiden inversen Kreise M_1 und K_1 in Punkten berühren, die zu den gesuchten Berührungspunkten invers liegen. Die umgekehrte Abbildung des gesuchten Kreises aber ist eine auf dem durch P gehenden Durchmesser des gesuchten Kreises senkrechte Gerade, also die gemeinsame Tangente der beiden inversen Kreise M_1 und K_1. Zeichnet man also umgekehrt zunächst eine gemeinsame Tangente an die beiden inversen Kreise, so liefern die Verbindungslinien der beiden Berührungspunkte mit dem gegebenen Punkte auf den gegebenen Kreisen die gesuchten Berührungspunkte, sodaß damit die Aufgabe auf die einfachere reduziert ist: Einen Kreis durch drei gegebene Punkte zu legen. Die Zeichnung wird bedeutend vereinfacht, wenn man die an sich beliebige Inversionspotenz so wählt, daß sie gleich der Potenz des Punktes P in bezug auf einen der gegebenen Kreise, etwa M, ist. Dadurch wird dieser Kreis zu sich selber invers, und man braucht dann nur noch den anderen gegebenen Kreis von P aus mit dieser Inversionspotenz umgekehrt abzubilden. Zieht man also an die Abbildung und den nicht abzubildenden Kreis eine gemeinsame Tangente, so ist sie die inverse Kurve zu dem gesuchten Kreise. Die Aufgabe hat höchstens vier Lösungen, da bei geeigneter Lage nur vier gemeinsame Tangenten an beide Kreise möglich sind.

11. Einen Kreis zu konstruieren, der drei gegebene Kreise berührt, welche alle durch denselben Punkt P gehen.

Betrachtet man den Schnittpunkt S der drei Kreise als Inversionszentrum, so sind die inversen Kurven der drei gegebenen Kreise für jede endliche Inversionspotenz drei gerade Linien, die auf den durch P gehenden Durchmessern resp. deren Verlängerungen senkrecht stehen, da alle drei Kreise durch den Augenpunkt der umgekehrten Abbildung gehen. Denkt man sich jetzt den gesuchten Kreis gezeichnet, so muß sein inverser Kreis die drei Geraden berühren, und zwar in Punkten, die zu den gesuchten Berührungspunkten invers sind. Die Lösung der Aufgabe besteht also darin, daß man zunächst die drei Inversionsgeraden der drei Kreise zeichnet und den Inkreis oder die Ankreise des aus ihnen gebildeten Dreiecks konstruiert. Die Verbindungslinien der dadurch erhaltenen drei Berührungspunkte mit dem Punkte S legen auf den gegebenen Kreisen die gesuchten Berührungspunkte fest, sodaß dadurch die ursprüngliche auf die neue Aufgabe zurückgeführt ist: Einen Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geht. Auch hier läßt sich die Zeichnung dadurch vereinfachen, daß man den Durchmesser des einen der drei Kreise zur Inversionspotenz macht.

Zwei Aufgaben seien zum Schluß noch erwähnt, auf deren Lösung hier nicht eingegangen zu werden braucht, da diese in Petersens Methoden und Theorien vollständig angedeutet ist. Bei der ersteren dieser Aufgaben handelt es sich darum, in einen gegebenen Kreis ein Viereck (allgem. $2n$ Eck) zu zeichnen, dessen Seiten jede durch einen gegebenen Punkt gehen. Die zweite verlangt, in einen gegebenen Kreis ein Dreieck (allgem. $2n + 1$ Eck) zu zeichnen, sodaß jede Seite durch einen gegebenen Punkt geht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denkt man sich den Kreis O gezeichnet, d K berührt und durch den gegebenen Punkt P geht und zei sen inversen Kreise M_1 und K_1 in bezug auf eine beliebig r gegebenen Punkt P als Augenpunkt, dann wird die umg rungskreises die beiden inversen Kreise M_1 und K_1 in Pur Berührungspunkten invers liegen. Die umgekehrte Abbild ne auf dem durch P gehenden Durchmesser des gesuchten gemeinsame Tangente der beiden inversen Kreise M_1 und unächst eine gemeinsame Tangente an die beiden inversen K der beiden Berührungspunkte mit dem gegebenen Punkte au Berührungspunkte, sodaß damit die Aufgabe auf die einfach rei gegebene Punkte zu legen. Die Zeichnung wird bedeut ich beliebige Inversionspotenz so wählt, daß sie gleich der f einen der gegebenen Kreise, etwa M, ist. Dadurch wird d man braucht dann nur noch den anderen gegebenen Kreis v umgekehrt abzubilden. Zieht man also an die Abbildung gemeinsame Tangente, so ist sie die inverse Kurve zu dem chstens vier Lösungen, da bei geeigneter Lage nur vier ge möglich sind.

11. Einen Kreis zu konstruieren, der e alle durch denselben Punkt P gehen.

Betrachtet man den Schnittpunkt S so sind die inversen Kurven der drei gegebenen Kreise für rade Linien, die auf den durch P gehenden Durchmessern v hen, da alle drei Kreise durch den Augenpunkt der umgek ich jetzt den gesuchten Kreis gezeichnet, so muß sein inverser Kr in Punkten, die zu den gesuchten Berührungspunkten invers also darin, daß man zunächst die drei Inversionsgeraden de der die Ankreise des aus ihnen gebildeten Dreiecks konstrui h erhaltenen drei Berührungspunkte mit dem Punkte S legen a Berührungspunkte fest, sodaß dadurch die ursprüngliche auf en Kreis zu zeichnen, der durch drei gegebene Punkte geh adurch vereinfachen, daß man den Durchmesser des ein tenz macht.

Zwei Aufgaben seien zum Schluß noch gegangen zu werden braucht, da diese in Petersens Methoder st. Bei der ersteren dieser Aufgaben handelt es sich darum, i em. 2n Eck) zu zeichnen, dessen Seiten jede durch einen gegel t, in einen gegebenen Kreis ein Dreieck (allgem. $2n + 1$ Eck) n gegebenen Punkt geht.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf