Über Äquipollenzen und ihre Anwendungen auf das ebene Dreieck.

Die Methode der Äquipollenzen hat den Zweck, in ähnlicher Weise wie die analytische Geometrie ein System von Sätzen aufzustellen, welches, den Regeln der Algebra unterworfen, es ermöglicht, die Eigenschaften der ebenen Figuren zu entwickeln.

Die Theorie der Äquipollenzen ist zuerst von dem Italiener Bellavitis aufgestellt und in neuester Zeit von dem Franzosen Laisant in seinem Werke: „Théorie et applications des Équipollences; Paris, Gauthier-Villars" ausführlicher behandelt worden.

Der Zweck der nachstehenden Abhandlung ist, die wichtigsten für die Äquipollenzen giltigen Gesetze zu entwickeln und eine Anwendung derselben an mehreren sich auf das ebene Dreieck beziehenden Beispielen zu geben.

I. Teil.

Theorie der Äquipollenzen.

§ 1. Erklärung der Äquipollenzen.

Eine Strecke, welche vom Punkte A bis zum Punkte B reicht, wird mit AB bezeichnet, die Bezeichnung AB umfasst gleichzeitig die Länge, die Richtung und den Sinn der Strecke. Zwei gleiche, parallele Strecken von demselben Sinne werden geometrisch gleich oder äquipollent genannt. Das Zeichen dafür ist: $=$. Es bezeichnet also $AB = CD$, dass beide Strecken gleich gross, parallel und gleichen Sinnes sind. Wenn ausgedrückt werden soll, dass zwei Strecken AB und CD nur dieselbe Länge haben, so schreibt man: $gr.AB = gr.CD$; die gleiche Richtung oder der Parallelismus derselben wird durch $AB \parallel CD$ bezeichnet. Wenn die Strecken AB und CD parallel und gleichen Sinnes sind, und wenn das Verhältnis ihrer Längen $\frac{gr.AB}{gr.CD}$ gleich der positiven Zahl a ist, so sagt man, dass AB äquipollent ist dem Produkte von a und CD und schreibt $AB = a.CD$. Aus dem Gesagten folgt, dass $BA = -AB$ oder $\frac{BA}{AB} = -1$ ist. Die Bezeichnung für den Parallelismus $AB \parallel CD$ kann auch ersetzt werden durch die Äquipollenz $AB = x.CD$, wo x ein bestimmter positiver oder negativer Coeffizient ist. Aus dem bisher Gesagten ergiebt sich ohne weiteres, dass die Bedingung, ein Punkt M liege auf einer Geraden AB ausgedrückt, wird durch die Äquipollenz $AM = x.AB$, wo x alle möglichen positiven und negativen Werte annehmen kann. Ist z. B. $x = \frac{1}{2}$, so hat der Ausdruck $AM = x\,AB$ die Bedeutung, dass M die Mitte von AB ist; oder ist $x = 2$, so muss man AB um sich selbst über B verlängern, um M zu erhalten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 2. Geometrische Summen.

Die geometrische Summe mehrerer in einer Ebene beliebig liegenden Strecken AB, CD, EF, GH u. s. w. (Fig. 1) erhält man, indem man die Aquipollenzen BU = CD, UV = EF und VW = GH konstruiert, d. h. indem man durch B, bezüglich U, V Strecken zieht, die bezüglich gleich, parallel und gleichen Sinnes sind mit CD, EF und GH. Wir können also für die Strecken AB, CD, EF, GH die Strecken AB, BU, UV, VW setzen und sagen, dass die geometrische Summe oder kürzer gesagt die Summe der gegebenen Strecken äquipollent der Strecke AW ist, welche den Anfangspunkt der ersten Strecke mit dem Endpunkte der letzten verbindet; wir schreiben also:

$$AB + CD + EF + GH = AB + BU + UV + VW = AW.$$

Es wird die Länge von AW im allgemeinen nicht gleich der Summe der Längen der gegebenen Strecken sein, weil ABUVW gewöhnlich eine gebrochene Linie darstellt.

Aus dem Obigen ergiebt sich, dass die geometrische Summe zweier Strecken AB und AC äquipollent ist der Diagonale AD des aus den gegebenen Strecken konstruierten Parallelogramms. Die Übereinstimmung dieses Satzes mit dem physikalischen Gesetze vom Parallelogramm der Kräfte ist ohne weiteres ersichtlich.

Nach der Erklärung der Subtraktion folgt aus

$$AB + CD = EF$$

die Äquipollenz

$$EF - CD = AB.$$

Ferner ist klar, dass wir die beiden Glieder einer Äquipollenz mit einer beliebigen positiven oder negativen Zahl multiplizieren oder dividieren und dass wir auf die Aequipollenzen alle die Operationen anwenden können, welche mit algebraischen Gleichungen vorgenommen werden, insofern es sich um die Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen handelt.

§ 3. Hauptsätze, die sich auf die Addition beziehen.

Liegen drei Punkte A, B, C beliebig in einer Ebene, so hat man stets die Äquipollenz

$$AB + BC = AC,$$

welcher man auch folgende Formen geben kann:

$$BC = AC - AB$$
$$AB = AC - BC = CB - CA$$
$$AB + BC + CA = 0.$$

Hieraus folgt, dass eine Strecke AB stets durch eine Differenz OB — OA oder AO — BO ersetzt werden kann, wo O ein vollkommen willkürlicher Punkt ist.

Eine Folgerung dieses Satzes ist folgende: Wenn vier Punkte A, B, C, D beliebig in einer Ebene liegen, so ist

$$AB - CD = DB - CA.$$

Ersetzt man nämlich AB durch AO — BO, CD durch CO — DO, DB durch DO — BO und CA durch CO — AO, so wird obige Äquipollenz auf die Identität

$$AO - BO - CO + DO = DO - BO - CO + AO$$

zurückgeführt.

§ 4. Bedingung, dass drei Punkte in gerader Linie liegen.

Als Bedingung, dass der Punkt M auf der Verbindungslinie der Punkte A und B liegt, haben wir in § 1 die Äquipollenz

$$AM = x . AB$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aufgestellt. Mit Hilfe von § 3 können wir dieser auch die Form geben

$$OM - OA = x(OB - OA)$$

oder

$$OM = (1 - x)\,OA + x\,OB.$$

Setzt man für $1 - x$ und x bezüglich u und v, wo u und v der Bedingung $u + v = 1$ genügen müssen, so hat man

$$OM = u\,OA + v\,OB \text{ und } u + v = 1.$$

Der letzteren Bedingung genügt man, wenn man $u = \frac{z}{z+t}$ und $v = \frac{t}{z+t}$ setzt, man erhält dann

$$z\,OA + t\,OB - (z + t)\,OM = o$$

z, t und $-(z + t)$ sind hier drei beliebige Coeffizienten, deren Summe Null ist. Man kann also die Bedingung, dass die drei Punkte A, B, M in gerader Linie liegen, durch folgende zwei Äquipollenzen ersetzen:

$$p\,OA + q\,OB + r\,OM = o \text{ und}$$
$$p + q + r = o.$$

§ 5. Das arithmetische Mittel mehrerer Strecken.

Wenn M die Mitte der Strecke AB sein soll, so muss der Äquipollenz $AM = \frac{1}{2}\,AB$ genügt werden, oder wenn O ein willkürlich angenommener Punkt ist, muss

$$OM - OA = \frac{1}{2}(OB - OA) \text{ oder}$$

$$OM = \frac{1}{2}(OA + OB)$$

sein; d. h. OM ist das arithmetische Mittel der beiden Strecken OA und OB.

Allgemein kann dieser Ausdruck dahin erweitert werden:

$$OM = \frac{1}{n}(OA_1 + OA_2 + \ldots\ldots OA_n),$$

d. h. OM ist das arithmetische Mittel der n Strecken OA_1, OA_2, ... OA_n.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich noch folgendes: Wenn die Strecken OA, OB, OC ..... bezüglich mit den Coeffizienten a, b, c .... multipliziert werden, so ist das arithmetische Mittel derselben durch die Äquipollenz

$$ON = \frac{1}{a + b + c \ldots.}(a.AO + b.OB + c.OC + \ldots.)$$

bestimmt. Wir haben also den Satz:

N ist der Schwerpunkt des Systems der Punkte A, B, C ..... in welchen bezüglich die Gewichte a, b, c .... wirken.

§ 6. Neigung der Geraden.

Um die Richtungen mehrerer Geraden mit einander vergleichen zu können, nehmen wir eine unbegrenzte Gerade OX an, welche durch den als fest angenommenen Punkt O gezogen ist (Fig. 2); sie sei z. B. horizontal angenommen und von links nach rechts gerichtet. Eine beliebige in derselben Ebene mit OX gezogene Strecke AB verschieben wir in die Richtung OM, so dass OM = AB ist, und messen die Richtung von AB durch den Winkel MOX, welchen die Strecke OM mit OX bildet, und nennen diesen Winkel die Neigung von OM oder AB.

Die Gerade OX wird der Ursprung der Neigungen genannt.

Um jede Zweideutigkeit zu vermeiden, müssen wir noch die Vorzeichen der Neigungen bestimmen. Die Neigung XOM messen wir, indem wir uns die Gerade OX um O gedreht denken, bis sie mit OM zusammenfällt. Ist die Richtung der Drehung der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt, so heisst sie positiv, im andern Falle negativ.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Neigung einer Geraden AB wird bezeichnet mit inc. AB, wir haben also z. B. (Fig. 2)

$$\text{inc.}\,AB = \text{inc.}\,OM.$$

Der Winkel BAC zweier Geraden AB und AC wird durch die Differenz der Neigungen dieser Geraden gemessen, also (Fig. 3)

$$\angle\, BAC = \text{inc.}\,AC - \text{inc.}\,AB.$$

Wenn DE = AC ist, so schreiben wir

$$\angle\,(AB, DE) = \text{inc.}\,DE - \text{inc.}\,AB.$$

Dabei ist das Vorzeichen der Winkel wohl zu beachten. Der Winkel BAC wird gemessen, indem man sich AB nach AC gedreht denkt, der Winkel CAB dagegen, indem sich AC nach AB dreht; man hat also

$$\angle\, CAB = \text{inc.}\,AB - \text{inc.}\,AC = -\angle\, BAC \text{ oder}$$

$$\angle\,(DE, AB) = -\angle\,(AB, DE).$$

Da sich weder die Richtung einer Geraden noch ihr Sinn ändert, wenn man sie ein oder mehrere Male im Kreise herumdreht oder ihre Neigung um das Vierfache eines rechten Winkels ein oder mehrere Male vermehrt, so hat eine Gerade eine unendliche Anzahl von Neigungen, unter welchen man gewöhnlich diejenige wählt, welche sich durch die einfachste Zahl ausdrücken lässt. Die Neigungen zweier Geraden aber, welche zwar dieselbe Richtung aber entgegengesetzten Sinn haben, z. B. AB und BA, unterscheiden sich um einen Winkel von 180° oder um eine ungerade Anzahl von halben Umdrehungen im Kreise, oder wenn man den rechten Winkel als Einheit nimmt, um die Zahl von $4n + 2$ rechten Winkeln, wo n eine ganze positive oder negative Zahl bezeichnet.

§ 7. Sätze über Grösse und Neigungen der Strecken.

1) Wenn die beiden Glieder einer zweigliedrigen Äquipollenz verschiedene Neigungen haben, so ist jedes von ihnen für sich gleich Null.

Denn jede zweigliedrige Äquipollenz kann auf die Form

$$l.\,AB = m.\,CD$$

gebracht werden; dann muss nach der Erklärung der Äquipollenz

$$l.\,\text{gr.}\,AB = m.\,\text{gr.}\,CD \text{ und } \text{inc.}\,AB = \text{inc.}\,CD$$

sein. Ist nun der letzten Bedingung nicht genügt, so muss

$$l = o \text{ und } m = o$$

sein.

2) Wenn zwei Glieder AB und BC der dreigliedrigen Äquipollenz AB + BC = AC gleiche Neigungen haben, so hat das dritte dieselbe Neigung, und seine Grösse ist gleich der Summe der Grösse der beiden ersten Glieder.

Denn wenn AB und BC dieselbe Neigung haben, so liegen die drei Punkte A, B, C hintereinander auf derselben Geraden AC.

3) Wenn in einer dreigliedrigen Äquipollenz von der Form $a + b + c = o$, die drei Glieder verschiedene Neigungen haben, aber

$$\text{inc.}\,a + \text{inc.}\,c = 2\,\text{inc.}\,b \text{ ist,}$$

so ist

$$\text{gr.}\,a = \text{gr.}\,c.$$

Denn setzen wir (Fig. 4) $a = LM$, $b = MN$, $c = NL$, so heisst die gegebene Äquipollenz

$$LM + MN + NL = o$$

und die gegebene Bedingung geht über in

$$\text{inc.}\,LM + \text{inc.}\,NL = 2\,\text{inc.}\,MN \text{ oder}$$

$$\text{inc.}\,LM - \text{inc.}\,MN = \text{inc.}\,MN - \text{inc.}\,NL.$$

Addieren wir auf beiden Seiten 2 rechte Winkel, so ist

$$\text{inc.}\,ML - \text{inc.}\,MN = \text{inc.}\,NM - \text{inc.}\,NL$$

$$\text{d. h. } \angle\, NML = \angle\, LNM;$$

$$\text{also gr.}\,LM = \text{gr.}\,NL \text{ oder gr.}\,a = \text{gr.}\,c.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Umgekehrt lässt sich zeigen: Wenn in einer dreigliedrigen Äquipollenz

$$a + b + c = o \text{ und } gr.a = gr.c \text{ ist,}$$

so ist

$$inc.a + inc.c = 2\ inc.b.$$

§ 8. Erklärung des Produkts zweier und mehrerer Strecken.

Bisher hatten wir unsere Rechnung nur auf die Multiplikation von Strecken mit einer reellen Zahl beschränkt. Jetzt sollen die Produkte und im folgenden § die Quotienten zweier Strecken betrachtet werden.

Unter dem Produkte zweier Strecken OA und OB versteht man eine Strecke OC, deren Grösse gleich dem Produkte der Grösse von OA und OB und deren Neigung gleich der Summe der Neigungen von OA und OB ist.

Die Äquipollenz $OA.OB = OC$ umfasst also folgende 2 Gleichungen:

$$gr.OA.gr.OB = gr.OC \text{ und}$$
$$inc.OA + inc.OB = inc.OC.$$

Während die Summe zweier Strecken von jedem anderen Elemente der Ebene unabhängig war, hängt ihr Produkt von dem einmal gewählten Ursprung der Neigungen ab.

Die Übereinstimmung der oben gegebenen Erklärung der Multiplikation zweier Strecken mit der in der Arithmetik von der Multiplikation gegebenen Erklärung lässt sich durch folgende Betrachtung erweisen. In der Arithmetik versteht man unter dem Produkte der Grössen a und b eine Grösse c, welche die Grösse a so oft enthält als b Einheiten hat. Wenn nun die Strecke OJ eine der Einheit gleiche Strecke ist, welche mit dem Ursprung der Neigungen gleich gerichtet ist, so erhält man OB aus OJ, indem man die Grösse von OB so wählt, dass $\frac{gr.OB}{gr.OJ} = gr.OB$ wird und die so erhaltene Strecke um den Winkel β dreht, welcher die Neigung von OB angiebt. Ebenso erhält man das Produkt $OA.OB$, indem man die Grösse von OA in der Richtung OA so viel mal nimmt, als die Einheit OJ in der Strecke OB enthalten ist, d. h. dass man eine Strecke von der Grösse $gr.OA.gr.OB$ erhält und dann die erhaltene Strecke um den Winkel β d. i. um $inc.OB$ dreht. Es ergiebt sich ohne weiteres, dass man zu demselben Resultate kommt, wenn man OB als Multiplikandus und AO als Multiplikator betrachtet. Wir können deshalb den Satz aussprechen: Das Produkt zweier Strecken ist von der Ordnung der Faktoren unabhängig.

Der arithmetische Satz

$$OA\ (OB + OD) = OA.OB + OA.OD$$

gilt auch als Äquipollenz.

Zum Beweise setzen wir $OA.OB = OC$ und $OA.OD = OF$ und bezeichnen die Grössen von OA, OB, OC, OD, OF bezüglich mit a, b, c, d, f und ihre Neigungen bezüglich mit α, β, γ, δ, φ. Dann umfassen die Äquipollenzen $OA.OB = OC$ und $OA.OD = OF$ die Gleichungen

$$a.b = c \text{ und } \alpha + \beta = \gamma, \text{ bezüglich}$$
$$a.d = f \text{ und } \alpha + \delta = \varphi.$$

Wenn wir nun (Fig. 5) die Strecken OB und OD so viel mal nehmen, als die Einheit in der Grösse a enthalten ist und sie um den Winkel α drehen, so stellen die auf diese Weise erhaltenen Strecken OC und OF nach der von dem Produkt gegebenen Erklärung die Produkte $OA.OB$ und $OA.OD$ dar, und die Diagonale des von OC und OF gebildeten Parallelogramms ist dann äquipollent dem Ausdruck $OA.OB + OA.OD$. Konstruiert man andrerseits die Diagonale des von OD und OB gebildeten Parallelogramms, d. i. die Summe von OB und OD, nimmt sie so viel mal als die Einheit in der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Grösse a enthalten ist und dreht sie um den Winkel α, so erhält man das Produkt OA (OB + OD). Die einfachste geometrische Betrachtung zeigt aber, dass die auf beide Weisen erhaltenen Strecken sich decken, also ist

$$OA\,(OB + OD) = OA\,.\,OB + OA\,.\,OD.$$

Gemäss der Erklärung des Produkts zweier Strecken, umfasst das Produkt mehrerer Strecken

$$OA\,.\,OB\,.\,OC\,.\,OD\,\ldots\ldots = OV$$

die beiden Gleichungen:

$$gr\,.\,OA\,.\,gr\,.\,OB\,.\,gr\,.\,OC\,.\,gr\,.\,OD\,\ldots\ldots = gr\,.\,OV \text{ und}$$
$$inc\,.\,OA + inc\,.\,OB + inc\,.\,OC + inc\,.\,OD + \ldots\ldots = inc\,.\,OV.$$

§ 9. Erklärung des Quotienten oder Verhältnisses zweier Strecken.

Nach der Definition der Division in der Arithmetik hat der Quotient c der Grössen a und b die Eigenschaft, dass $b\,.\,c = a$ ist; ebenso wird die Äquipollenz $\frac{OA}{OB} = OC$ dahin definiert werden, dass

$$\frac{gr\,.\,OA}{gr\,.\,OB} = gr\,.\,OC \text{ und } inc\,.\,OA - inc\,.\,OB = inc\,.\,OC$$

ist. Man nennt auch den Quotienten $\frac{OA}{OB}$ das geometrische Verhältnis der Strecken OA und OB. Die Neigung des Verhältnisses $\frac{OA}{OB}$ ist nach der im § 6 gegebenen Erklärung gleich dem Winkel BOA.

§ 10. Direkte Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

Die Äquipollenz zweier Verhältnisse führt noch zu der folgenden geometrischen Erklärung. Aus der Äquipollenz

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

folgt nämlich:

$$\frac{gr\,.\,OA}{gr\,.\,OB} = \frac{gr\,.\,OC}{gr\,.\,OD} \text{ und}$$
$$\angle\,BOA = \angle\,DOC.$$

Also sind (Fig. 6), wenn wir A mit B und C mit D verbinden, die beiden Dreiecke OAB und OCD einander ähnlich und zwar direkt ähnlich, d. h. wenn $gr\,.\,OA = gr\,.\,OC$ und $gr\,.\,OB = gr\,.\,OD$ ist, so können die beiden Dreiecke durch Aufeinanderlegen, ohne dass ein Umwenden des einen nötig ist, zur Deckung gebracht werden.

Umgekehrt wenn zwei Dreiecke ABC und A'B'C' einander direkt ähnlich sind, so kann diese Ähnlichkeit durch eine der Äquipollenzen

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ oder } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

ausgedrückt werden.

§ 11. Die mittlere Proportionale zweier Strecken.

Wenn OM die mittlere Proportionale der Strecken OA und OB ist, so haben wir die Äquipollenz

$$\frac{OA}{OM} = \frac{OM}{OB}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

d. h. (Fig. 7.) Die beiden Dreiecke OAM und OMB sind ähnlich; daraus folgt, dass OM die winkelhalbierende Transversale des Winkels AOB ist; ebenso ist

$$\angle BMO = \angle MAO,$$

also $\angle BMO + \angle OMA = \angle MAO + \angle OMA = 180^0 - \angle AOM,$

d. i. $\angle BMA = 180^0 - \angle AOM.$

Winkel AOM ist aber die Hälfte des von den Strecken OA und OB gebildeten Winkels. Wir erhalten also OM, indem wir über AB ein Kreissegment, welches das Supplement des Winkels $\frac{1}{2}$ AOB als Peripheriewinkel fasst, so konstruieren, dass der Punkt O innerhalb des beschriebenen Kreises liegt, und den Winkel AOB halbieren, dann ist die Halbierungslinie OM die mittlere Proportionale von OA und OB.

Das auf der andern Seite von AB liegende Kreissegment fasst den Winkel $\frac{1}{2}$ AOB als Peripheriewinkel und wird von der Winkelhalbierenden im Punkte M′ geschnitten. Die beiden Dreiecke OAM′ und OMB′ sind auch ähnlich, denn

$$\angle AOM' = \angle M'OB \text{ und}$$
$$\angle OAM' = \angle OM'B,$$

weil $\angle OAM' + \angle OAM = \angle OM'B + \angle OMB$ und

$$\angle OAM = \angle OMB \text{ ist.}$$

Also ist

$$\frac{OA}{OM'} = \frac{OM'}{OB}, \text{ mithin}$$
$$OM' = -OM.$$

Die Analogie mit der Lösung der Gleichung $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, welche die Wurzeln $+\sqrt{ab}$ und $-\sqrt{ab}$ hat, ist ohne weiteres klar.

Aus der Definition der Neigungen (§ 6) ergiebt sich auch die doppelte Lösung. Wenn nämlich

$$gr.OA = a,\ gr.OB = b,\ inc.OA = \alpha \text{ und } inc.OB = \beta$$

ist, so ist gemäss der Erklärung der Äquipollenzen

$$gr.OM = \sqrt{ab} \text{ und}$$
$$inc.OM = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Um die Lösung auf die allgemeine Form zu bringen, setzt man

$$inc.OA = \alpha + n.360^0 \text{ und } inc.OB = \alpha + m.360^0;$$

also ist

$$inc.OM = \frac{\alpha + \beta}{2} + k.180^0.$$

Wenn k eine gerade Zahl ist, so hat man die Richtung OM, wenn k eine ungerade Zahl ist, so hat man die Richtung OM′.

Als Umkehrung des bewiesenen Satzes ergiebt sich: Wenn man durch die Mitte O der Sehne MM′ unter gleicher Neigung gegen die Sehne die Strecken OA und OB bis zur Peripherie zieht, so sind sowohl die Dreiecke OAM und OMB als auch OAM′ und OM′B ähnlich.

§ 12. Allgemeine Sätze über die Rechnung mit Strecken.

Da alle Regeln, welche wir bisher in bezug auf das Rechnen mit Äquipollenzen aufgestellt haben, vollkommen mit denen der Algebra übereinstimmen, so können wir folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Man kann auf die Äquipollenzen, welche sich auf die ebenen Figuren beziehen, alle Rechnungsoperationen und Umformungen anwenden, welche bei den algebraischen Gleichungen Anwendung finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aber auf einen Punkt soll noch besonders aufmerksam gemacht werden, dass nämlich bei den Äquipollenzen die Rechnung mit imaginären Grössen vermieden wird.

Als Beispiel sei die n^{te} Wurzel aus einer Strecke zu ziehen; es lässt sich dann zeigen, dass alle n Lösungen reell sind.

Wenn $OX = \sqrt[n]{OA}$ ist, so heisst dies:

$$OA = (OX)^n = OX \,.\, OX \ldots\ldots OX, \text{ oder}$$

$$gr.OA = (gr.OX)^n, \text{ also } gr.OX = \sqrt[n]{gr.OA}$$

und wenn $inc.OA = \alpha + k\ 360^0$ ist,

$$inc.OX = \frac{inc.OA}{n} = \frac{\alpha}{n} + \frac{k}{n}.360^0.$$

Um alle möglichen Richtungen von OX zu erhalten, muss man für k alle ganzen Zahlenwerte von 0 bis $n - 1$ setzen. Die so erhaltenen n Strecken, welche jede mit der folgenden einen Winkel von $\frac{360^0}{n}$ bilden und alle dieselbe Grösse haben, stellen dann die n Wurzeln der n^{ten} Wurzel aus OA dar.

Folgende allgemeine Bemerkungen sollen hier eingeschaltet werden:

Wir hatten bisher angenommen, dass das Resultat einer jeden mit Strecken vorgenommenen Operation wieder eine Strecke sei. Wir können uns aber auch jeden algebraischen Ausdruck als eine Strecke vorstellen. Z. B. es wird OA^2 als eine Strecke angesehen werden können, wenn wir den Nenner $OJ = 1$ in die Rechnung einführen, dies giebt

$$\frac{OA^2}{OJ}.$$

Ebenso kann der Quotient $\frac{OA}{OB}$ betrachtet werden. Es sei z. B. $gr.OA = 3.gr.OJ$ und $gr.OB = 4.gr.OJ$, $inc.OA = 60^0$, $inc.OB = 40^0$, so hat die Zahl $\frac{OA}{OB}$ die Grösse $\frac{3}{4}$ und die Neigung 20^0.

Ausdrücke von der Form $\frac{OA}{OB}$ sollen geometrische Zahlen genannt werden.

§ 13. Das Zeichen der Perpendikularität.

Unter den geometrischen Zahlen wollen wir eine, deren Grösse der Einheit gleich ist, und deren Neigung $+ 90^0$ ist, mit einem besonderen Zeichen i bezeichnen. Um die Eigenschaften dieser geometrischen Zahl i festzustellen, ziehen wir (Fig. 8) durch den Anfangspunkt O ein Lot auf den Ursprung der Neigungen OX und tragen auf den 4 erhaltenen Geraden OX, OY, OX′, OY′ die der Einheit gleichen Strecken OA, OB, OC, OD von O aus ab, so ist

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OD} = i;$$

also $\frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} = i^2$, da aber

$$\frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} = \frac{OC}{OA} = -1 \text{ ist, (denn } OC = -OA),$$

so ist $i^2 = -1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ebenso ist

$$i^3 = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{OA} = -i$$

$$i^4 = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OA}{OD} = 1.$$

Es sind mithin die Potenzen des Symbols i genau dieselben wie die des algebraischen Symbols $\sqrt{-1}$; wir können also den Satz aussprechen:

Das Symbol i in der Rechnung der Äquipollenzen ist denselben Regeln unterworfen wie das Symbol $\sqrt{-1}$ in der Algebra.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass wir durch die Multiplikation einer Strecke OM mit i eine Strecke OM′ gleich der ersten erhalten, die aber mit OM den Winkel $+ 90^0$ bildet. Ebenso erhalten wir durch Multiplikation der Strecke OM mit $-i = \frac{1}{i}$ eine der Strecke OM gleiche, die aber im entgegengesetzten Sinne um einen Winkel von 90^0 gedreht ist. Allgemein stellt $OM.i^n$ eine Strecke dar, die gleich OM und um n rechte Winkel um O gedreht ist. Wenn der Exponent von i keine ganze Zahl ist, so nimmt man den rechten Winkel zur Einheit und setzt $\alpha^0 : 90^0 = p$; dann bedeutet $OM.i^p$ eine Strecke gleich OM, welche um den Winkel α in positivem Sinne gedreht ist, wo $\alpha^0 = 90^0.p$ ist.

Das Symbol i, für sich betrachtet, stellt also eine der Einheit gleiche Strecke vor, deren Neigung gleich 90^0 ist. Ebenso bedeutet i^p eine der Einheit gleiche Strecke, deren Neigung der Winkel α ist, wenn $\alpha^0 = 90^0.p$ ist. In gleicher Weise ist der Ausdruck $(-i)^p = \left(\frac{1}{i}\right)^p = i^{-p}$ zu erklären. Auch ist

$$i^p = i^{p+4} = i^{p+4k},$$

weil $i^4 = 1$ ist.

Da eine Strecke von der Grösse 1, deren Neigung α durch p gemessen ist, durch i^p ausgedrückt wird, so kann jede beliebige Strecke OM, deren Grösse = r ist, durch

$$OM = r\,i^p$$

dargestellt werden.

§ 14. Eine neue Darstellung der Strecken. Erklärung und Einführung des Zeichen ε.

Wenn wir vom Punkte M der Strecke OM (Fig. 9), deren Neigung α ist, ein Lot MQ auf den Ursprung der Neigungen fällen, so haben wir

$$OM = OQ + QM.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes M mit x und y, so haben wir die Äquipollenzen

$$OQ = x \text{ und } MQ = yi.$$

Also ist

$$OM = x + yi.$$

Wenn wir in dem Ausdruck für eine beliebige Strecke ri^p die Bogen nicht durch den Quadranten als Einheit messen, sondern durch einen Bogen, dessen Länge gleich dem Radius ist, so ist

$$p = \frac{\alpha^0}{90^0} = \frac{\alpha}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2\alpha}{\pi},$$

also wird

$$r\,i^p = r\,i^{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da der Exponent $\frac{2}{\pi}$ in den folgenden Rechnungen oft vorkommt, so setzen wir

$$i^{\frac{2}{\pi}} = \varepsilon.$$

Es ist dann $$OM = r\,\varepsilon^{\alpha}.$$

In Figur 9 ist $$x = r\cos\alpha \text{ und } y = r\sin\alpha;$$

also $$OM = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

mithin $$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

§ 15. Conjugierte Strecken.

Wenn zwei Strecken OA und OA′ dieselbe Grösse und Neigung haben, wenn aber die Neigung von OA′ das entgegengesetzte Zeichen von der Neigung der Strecke OA hat, so heisst OA′ der Strecke OA conjugiert, umgekehrt ist OA der Strecke OA′ conjugiert. Man schreibt:

$$OA' = cj.\,OA \text{ und } OA = cj.\,OA'.$$

Die Strecken OA und OA′ können in der Ebene beliebig parallel mit sich selbst verschoben werden, ohne dass sie aufhören, einander conjugiert zu sein.

Wenn $OM = x + yi$ ist, so folgt aus der soeben gegebenen Erklärung, dass

$$cj.\,OM = x - yi$$

ist. Wenn $OM = r\,i^{p}$ ist, so ist

$$cj.\,OM = r\,i^{-p}.$$

Wenn $OM = r\,\varepsilon^{\alpha}$ ist, so ist

$$cj.\,OM = r\,\varepsilon^{-\alpha}.$$

Wenn endlich $OM = r\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ist, so ist

$$cj.\,OM = r\,(\cos\alpha - i\sin\alpha).$$

Aus den identischen Gleichungen

$$\varepsilon^{\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$
$$\varepsilon^{-\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha,$$

welche zwei conjugierten, der Einheit gleichen Strecken entsprechen, folgt durch Addition und Subtraktion

$$\frac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2} = \cos\alpha$$
$$\frac{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{-\alpha}}{2i} = \sin\alpha.$$

§ 16. Sätze über conjugierte Strecken.

Aus der Definition der Conjugierten ergeben sich ohne weiteres folgende Sätze:

1. Die Conjugierte der Summe oder Differenz zweier Strecken ist äquipollent der Summe oder Differenz ihrer Conjugierten.

2. Die Conjugierte des Produkts oder des Quotienten zweier Strecken ist äquipollent dem Produkt oder dem Quotienten ihrer Conjugierten.

Allgemein gilt der Satz:

3. Die Conjugierte irgend einer Funktion mehrerer Strecken ist äquipollent derselben Funktion der Conjugierten dieser Strecken.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn die Strecken die Form $x + y i$, $r i^p$, $r \varepsilon^\alpha$ haben, so ergiebt sich folgendes allgemeine Prinzip:

4. Um die Conjugierte irgend eines Ausdrucks zu erhalten, hat man nur die Zeichen aller Exponenten von i oder ε, welche in dem Ausdruck enthalten sind, in die entgegengesetzten zu verwandeln.

Ferner gelten noch folgende Sätze:

5. Jeder Äquipollenz entspricht eine conjugierte Äquipollenz.

Denn wenn wir in der ursprünglichen Äquipollenz alle vorkommenden Strecken durch ihre Conjugierten ersetzen, so erhalten wir eine der ersten in Bezug auf den Ursprung der Neigungen symmetrische Figur und folglich eine entsprechende Äquipollenz.

6. Das Produkt zweier conjugierter Ausdrücke hat eine Neigung gleich Null und eine Grösse gleich dem Quadrate eines der beiden Ausdrücke.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der Definition des Produktes (§ 8) und den in den §§ 15 und 16 enthaltenen Erklärungen. Aber auch analytisch lässt er sich beweisen. Denn haben die beiden Ausdrücke die Form

$$r \varepsilon^\alpha \text{ und } r \varepsilon^{-\alpha} \text{ oder}$$
$$x + y i \text{ und } x - y i,$$

so ist im ersten Fall ihr Produkt

$$r^2 \varepsilon^{\alpha - \alpha} = r^2$$

im zweiten Fall $\quad x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2.$

Die Grösse ist also das Quadrat von r und die Richtung fällt mit dem Ursprung der Neigungen zusammen.

7. Der Quotient eines Ausdrucks durch den ihm conjugierten hat zur Grösse die Einheit und zur Neigung die doppelte Neigung des Dividendus.

Denn ist $r \varepsilon^\alpha$ der gegebene Ausdruck und der ihm conjugierte $r \varepsilon^{-\alpha}$, so ist

$$\frac{r \varepsilon^\alpha}{r \varepsilon^{-\alpha}} = \varepsilon^{2\alpha}.$$

8. Die Summe einer Strecke und ihrer Conjugierten hat eine Neigung gleich Null oder gleich 180° und eine Länge, die das Doppelte der Länge der Projektion der Strecke auf den Ursprung der Neigungen ist.

Denn setzen wir $\quad OA = x + y i$ und

$$cj.OA = x - y i,$$
$$\text{so ist } OA + cj.OA = 2x.$$

Je nachdem x positiv oder negativ ist, wird die Neigung gleich Null oder gleich 180° sein.

Oder setzen wir $\quad OA = r (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ und

$$cj.OA = r (\cos \alpha - i \sin \alpha)$$
$$\text{so ist } OA + cj.OA = 2 r \cos \alpha.$$

9. Die Differenz zwischen einer Strecke und ihrer Conjugierten hat zur Neigung 90° oder 270° und zur Länge das Doppelte der Länge der Projektion der Strecke auf ein Lot zum Ursprung der Neigungen.

Denn setzen wir

$$OA = x + y i = r (\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ und}$$
$$cj.OA = x - y i = r (\cos \alpha - i \sin \alpha),$$
$$\text{so ist } AO - cj.OA = 2 y i \quad = 2 i r \sin \alpha.$$

Je nachdem y positiv oder negativ ist, wird die Neigung gleich 90° oder 270° sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Teil.

Anwendung der Äquipollenzen.

§ 17.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC ist:

$$AB^2 + CA.CB = BC^2 + AB.AC = CA^2 + BC.BA.$$

Beweis. Nach § 3 ist

$$AB = AC - BC \quad (I)$$
$$BC = BA - CA \quad (II)$$
$$CA = CB - AB \quad (III)$$

Durch Multiplikation von (II) und (III), (I) und (III), (I) und (II) ergiebt sich

$$BC.CA = BA.CB + AB^2 - CA.CB + CA.AB \text{ oder}$$
$$AB^2 + CA.CB = CB.CA + BC.BA + AC.AB \quad (IV)$$
$$AB.CA = AC.CB - AC.AB + BC^2 + BC.AB \text{ oder}$$
$$BC^2 + AB.AC = CB.CA + BC.BA + AC.AB \quad (V)$$
$$AB.BC = AC.BA + CA^2 - BC.BA + BC.CA \text{ oder}$$
$$CA^2 + BC.BA = CB.CA + BC.BA + AC.AB \quad (VI).$$

Aus (IV), (V), (VI) folgt

$$AB^2 + CA.CB = BC^2 + AB.AC = CA^2 + BC.BA.$$

§ 18.

Lehrsatz. Wenn man über den Seiten BC und CA eines Dreiecks ABC bezüglich die dem Dreiecke ABC direkt ähnlichen Dreiecke BCA′ und CAB′ konstruiert, so schneiden sich die Seiten AB und A′B′ in ihrer Mitte.

Beweis I (Fig. 10). Aus § 17 folgt

$$\frac{BC^2}{AB} + AC = \frac{CA^2}{AB} + CB.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCA′ einerseits und ABC und CAB′ andrerseits ergiebt sich

$$\frac{BC}{AB} = \frac{CA'}{BC} \text{ und } \frac{CA}{AB} = \frac{B'C}{CA}$$

$$\frac{BC^2}{AB} = CA' \text{ und } \frac{CA^2}{AB} = B'C;$$

also

$$CA' + AC = B'C + CB \text{ oder}$$
$$CA' + CB' = CA + CB.$$

Also fallen nach § 2 die Mittellinien der beiden Dreiecke CAB und CA′B′ zusammen, d. h. AB und A′B′ halbieren sich, oder AB′BA′ ist ein Parallelogramm.

Beweis II.

$$CA' = \frac{BC^2}{AB} = \frac{CB^2}{AB}$$

$$CB' = -\frac{CA^2}{AB},$$

mithin $$CA' + CB' = \frac{CB^2 - CA^2}{AB} = \frac{(CB + CA)\,(CB - CA)}{AB}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Da nach § 3 $CB - CA = AB$ ist, so folgt abermals

$$CA' + CB' = CA + CB.$$

Beweis III. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und BCA' folgt:

$$\frac{A'B}{BC} = \frac{CA}{AB}, \text{ also } A'B = \frac{BC.CA}{AB};$$

aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und CAB' ergiebt sich

$$\frac{AB'}{CA} = \frac{BC}{AB}, \text{ also } AB' = \frac{BC.CA}{AB};$$

folglich

$$AB' = A'B.$$

Mithin ist nach § 1 $AB'BA'$ ein Parallelogramm.

§ 19.

Lehrsatz. Wenn man über einer Strecke LM die Dreiecke LMP, LMQ, LMR bezüglich direkt ähnlich den Dreiecken ABC, BCA, CAB construiert, so sind die Dreiecke PQR und CAB direkt ähnlich.

Beweis. (Fig 11.) Aus $LMP \backsim ABC$, $LMQ \backsim BCA$, $LMR \backsim CAB$ folgt

$$\frac{LP}{LM} = \frac{AC}{AB}, \text{ also } LP = \frac{AC.LM}{AB},$$

$$\frac{LQ}{LM} = \frac{BA}{BC}, \text{ also } LQ = \frac{BA.LM}{BC},$$

$$\frac{LR}{LM} = \frac{CB}{CA}, \text{ also } LR = \frac{CB.LM}{CA};$$

mithin

$$LQ - LP = PQ = LM\left(\frac{BA}{BC} - \frac{AC}{AB}\right) = LM\left(\frac{AB^2 + CA.CB}{CB.AB}\right)$$

$$LR - LP = PR = LM\left(\frac{CB}{CA} - \frac{AC}{AB}\right) = LM\left(\frac{CA^2 + BC.BA}{CA.AB}\right)$$

Da nach § 17 $AB^2 + CA.CB = CA^2 + BC.BA$ ist, so folgt

$$\frac{PQ}{PR} = \frac{CA}{CB}.$$

Also ist $\triangle PQR \backsim \triangle CAB$.

§ 20.

Aufgabe. Die Strecke $\sqrt{OA^2 \mp OB^2}$ zu konstruieren.

Auflösung 1. Es ist $\sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{(OA + OB)(OA - OB)}$.

Man konstruiere (Fig. 12) eine Strecke $AC = OB$ und eine zweite Strecke $AC' = -OB$,

so ist $OA + OB = OA + AC = OC$

und $OA - OB = OA + AC' = OC'$.

Also $\sqrt{(OA + OB)(OA - OB)} = \sqrt{OC.OC'}$.

Die zu suchende Strecke ist mithin die mittlere Proportionale zwischen OC und OC', die Konstruktion ist folglich auf die im § 11 angegebene zurückgeführt.

Auflösung 2. Es ist $\sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{(OA + i.OB)(OA - i.OB)}$.

Man konstruiere (Fig. 13) eine Strecke $AC = i.OB$ (§ 13) und eine zweite Strecke $AC' = -i.OB$, so ist $OA + i.OB = OA + AC = OC$

und $OA - i.OB = OA + AC' = OC'$;

also $\sqrt{(OA + i.OB)(OA - i.OB)} = \sqrt{OC.OC'}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die zu suchende Strecke ist mithin die mittlere Proportionale zwischen OC und OC′; folglich ist die Konstruktion auf die im § 11 angegebene zurückgeführt.

§ 21. Symmetrische Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

Es sei die Äquipollenz $\frac{OA}{OB} = \frac{cj.OA'}{cj.OB'}$ gegeben.

Setzen wir (Fig. 14)

$$gr.OA = a,\ gr.OB = b,\ gr.OA' = a',\ gr.OB' = b'$$
$$inc.OA = \alpha,\ inc.OB = \beta,\ inc.OA' = \alpha',\ inc.OB' = \beta',$$

so nimmt die gegebene Äquipollenz folgende Form an

$$\frac{a\,\varepsilon^{\alpha}}{b\,\varepsilon^{\beta}} = \frac{a'\,\varepsilon^{-\alpha'}}{b'\,\varepsilon^{-\beta}} \text{ oder}$$

$$\frac{a}{b}\,\varepsilon^{\alpha-\beta} = \frac{a'}{b'}\,\varepsilon^{\beta'-\alpha'}$$

Es muss also $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ und $\alpha - \beta = \beta' - \alpha'$ sein.

Es ist aber $\alpha - \beta = \angle AOB$ und $\beta' - \alpha' = \angle B'OA'$.

Bei der Vergleichung der beiden Dreiecke OAB und A′OB′ sehen wir also, dass die Grössen der entsprechenden Seiten OA, OA′ und OB, OB′ gleiche Verhältnisse bilden und die Winkel bei O gleich gross sind, aber entgegengesetztes Zeichen haben. Die beiden Dreiecke sind also ähnlich, aber zugleich ist ersichtlich, dass, wenn $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = 1$ wird, sie nur zum Decken gebracht werden können, wenn das eine von ihnen umgewendet wird.

Man nennt solche Dreiecke symmetrisch ähnlich.

Umgekehrt wenn zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ symmetrisch ähnlich sind, so ist das Verhältnis zweier Seiten des einen dieser Dreiecke gleich dem Verhältnis der Conjugierten der entsprechenden Seiten des andern Dreiecks.

Die Bedingung, dass zwei Dreiecke ABC und A′B′C′ symmetrisch ähnlich sind, kann auch durch folgende Äquipollenz ausgedrückt werden

$$\frac{AB}{cj.A'B'} = \frac{BC}{cj.B'C'} = \frac{CA}{cj.C'A'}.$$

§ 22. Projektion einer Strecke auf eine Gerade. Potenz eines Punktes in Bezug auf einen Kreis.

Gegeben sei (Fig. 15) die Strecke AB und die Gerade AC, es soll die Projektion von AB auf AC bestimmt werden. AP sei die gesuchte Projektion. Wenn wir BP um sich selbst um PB′ verlängern, so sind die Dreiecke ABC und AB′C symmetrisch in Bezug auf AC; wir haben also

$$\frac{AB'}{AC} = \frac{cj.AB}{cj.AC}, \text{ also}$$

$$AB' = AC\,\frac{cj.AB}{cj.AC}.$$

Da der Punkt P die Mitte von BB′ ist, so ist

$$AP = \frac{1}{2}(AB + AB') = \frac{1}{2}\left(AB + AC\,\frac{cj.AB}{cj.AC}\right).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mithin ist die Projektion der Strecke AB auf AC,

$$AP = \frac{1}{2}\,\frac{AB\ cj.AC + AC\ cj.AB}{cj.AC}.$$

Wir können dieser Projektion noch eine andere Form geben, indem wir

$$AB = b\,\varepsilon^{\beta},\ AC = c\,\varepsilon^{\gamma}$$

setzen. Dann wird

$$AP = \frac{1}{2}\,b\,c\,\frac{\varepsilon^{\beta-\gamma} + \varepsilon^{\gamma-\beta}}{c\,\varepsilon^{-\gamma}} \text{ oder nach § 15}$$

$$AP = b\cos(\beta-\gamma)\,\varepsilon^{\gamma}.$$

Da $\beta - \gamma = \text{inc}.AB - \text{inc}.AC = \angle\ CAB = \angle\ \alpha$ ist, so besteht die identische Gleichung

$$\frac{1}{2}(AB\ cj.AC + AC\ cj.AB) = b\,c\cos\alpha.$$

Der Ausdruck $\quad bc\cos\alpha = gr.AB\ .\ gr.AC\cos CAB$

ist aber die Potenz des Punktes A in Bezug auf den über BC als Durchmesser konstruierten Kreis. Wir haben also den Satz:

Die Potenz eines Punktes A in Bezug auf einen Kreis vom Durchmesser BC hat zum Ausdruck $\quad \frac{1}{2}(AB\ cj.AC + AC\ cj.AB)$.

Wenn die beiden Strecken AB und CB einen verschiedenen Anfang haben, so kann der Ausdruck

$$AB\ cj.CD + CD\ cj.AB = 2.gr.AB\ .\ gr.CD\cos(CD, AB)$$

folgender Umformung unterworfen werden. Man hat

$$AB = AC - BC = AD - BD$$
$$CD = AD - AC = BD - BC,$$

also

$$AB\ cj.CD = AC\ cj.AD - AC\ cj.AC + BC\ cj.DA + BC\ cj.AC$$
$$CD\ cj.AB = BD\ cj.AD + BC\ cj.BD - BD\ cj.BD + CB\ cj.AD;$$

mithin

$$AB\ cj.CD + CD\ cj.AB = (AC + CB + BD)\ cj.AD - AC\ cj.AC + BC\ (cj.BD + cj.DA + cj.AC) - BD\ cj.BD;$$

folglich nach § 2

$$AB\ cj.CD + CD\ cj.AB = AD\ cj.AD - AC\ cj.AC + BC\ cj.BC - BD\ cj.BD,$$

endlich nach § 16, 6

$$AB\ cj.CD + CD\ cj.AB = (gr\ AD)^2 + (gr\ BC)^2 - (gr\ AC)^2 - (gr\ BD)^2.$$

§ 23. Flächeninhalt eines Dreiecks.

Im Dreieck ABC (Fig. 15) sei P der Fusspunkt der von B auf AC gefällten Höhe, so ist nach § 22

$$AP = \frac{1}{2}\,\frac{AB\ cj.AC + AC\ cj.AB}{cj.AC};$$

Da $BP = AP - AB$ nach § 3 ist, so ist

$$BP = \frac{1}{2}\,\frac{AC\ cj.AB + AB\ cj.AC}{cj.AC} - AB, \text{ oder}$$

$$BP = \frac{1}{2}\,\frac{AC\ cj.AB - AB\ cj.AC}{cj.AC}.$$

Das Produkt der Grössen BP und cj.AC giebt den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks, den wir mit $2\,\Delta$ bezeichnen wollen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Zähler AC cj. AB — AB cj. AC hat nach § 16, 9 die Richtung eines Lots auf den Ursprung der Neigungen, hat also die Form k i, wo k eine positive oder negative Grösse ist. Es ist also

$$BP\ cj.AC.i = 2\,\Delta\, i = \frac{1}{2}\,(AC\ cj.AB - AB\ cj.AC),$$

folglich

$$2\,\Delta = \frac{1}{2i}\,(AC\ cj.AB - AB\ cj.AC);$$

mithin

$$\Delta = \frac{i}{4}\,(AB\ cj.AC - AC\ cj.AB).$$

Die Übereinstimmung der soeben gefundenen Formel mit der trigonometrischen lässt sich leicht zeigen. Setzt man nämlich

$$AB = b\,\varepsilon^{\beta} \text{ und } AC = c\,\varepsilon^{\gamma}$$

so ist

$$\frac{i}{4}\,(AB\ cj.AC - AC\ cj.AB) = b\,c\,\frac{i}{4}\,(\varepsilon^{\beta-\gamma} - \varepsilon^{\gamma-\beta})$$

$$= \frac{b\,c\,i^2}{2}\sin(\beta-\gamma) \text{ nach § 15}$$

$$= \frac{b\,c}{2}\sin(\gamma-\beta).$$

§ 24.

Aufgabe. Es sind zwei symmetrisch ähnliche Dreiecke ABC und A'B'C' gegeben; die Mitten der Strecken AA', BB', CC' seien P, Q, R, es soll der Flächeninhalt des Dreiecks PQR durch die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und A'B'C' ausgedrückt werden.

Auflösung. (Fig. 16.) Es ist

$$PQ = PA + AB + BQ$$

$$PQ = PA' + A'B' + B'Q;$$

also

$$2\,PQ = AB + A'B';$$

ebenso ist

$$2\,PR = AC + A'C'.$$

Bezeichnen wir die Flächeninhalte der Dreiecke ABC, A'B'C', PQR bezüglich mit Δ, Δ', Δ'', so ist

$$\Delta'' = \frac{i}{4}\,(PQ\ cj.PR - PR\ cj.PQ);$$

nach Einsetzung der für PQ und PR gefundenen Werte ist

$$\Delta'' = \frac{i}{16}\left[(AB + A'B')\ cj.(AC + A'C') - (AC + A'C')\ cj.(AB + A'B')\right]$$

$$\Delta'' = \frac{i}{16}\left[\begin{array}{l} AB\ cj.AC + A'B'\ cj.AC + AB\ cj.A'C' + A'B'\ cj.A'C' \\ - AC\ cj.AB - A'C'\ cj.AB - AC\ cj.A'B' - A'C'\ cj.A'B' \end{array}\right]$$

$$\Delta'' = \frac{1}{4}\left[\begin{array}{l} \frac{i}{4}\,(AB\ cj.AC - AC\ cj.AB) + \frac{i}{4}\,(A'B'\ cj.A'C' - A'C'\ cj.A'B') \\ + \frac{i}{4}\,(A'B'\ cj.AC - AC\ cj.A'B' + AB\ cj.A'C' - A'C'\ cj.AB) \end{array}\right].$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nach Voraussetzung ist

$$\frac{AB}{cj.A'B'} = \frac{AC}{cj.A'C'} \text{ und } \frac{A'B'}{cj.AB} = \frac{A'C'}{cj.AC};$$

also ist

$$AB\,cj.A'C' - AC\,cj.A'B' = 0 \text{ und } A'B'\,cj.AC - A'C'\,cj.AB = 0;$$

mithin

$$\Delta'' = \frac{1}{4}\left[\frac{i}{4}(AB\,cj.AC - AC\,cj.AB) + \frac{i}{4}(A'B'\,cj.A'C' - A'C'\,cj.A'B').\right]$$

Da

$$\frac{i}{4}(AB\,cj.AC - AC\,cj.AB) = \Delta \text{ und}$$

$$\frac{i}{4}(A'B'\,cj.A'C' - A'C'\,cj.A'B') = \Delta' \text{ ist,}$$

so ist

$$\Delta'' = \frac{1}{4}(\Delta + \Delta').$$

§ 25.

Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte P (Fig. 17) auf der den Winkel A halbierenden Transversale eines Dreiecks Lote PA', PB', PC' auf die drei Seiten des Dreiecks fällt, so schneidet PA' die Strecke B'C' in einem Punkte Q, welcher auf der vom Punkte A aus gezogenen seitenhalbierenden Transversale liegt.

Beweis. Man nehme die den Winkel bei A halbierende Transversale zum Ursprung der Neigungen und setze

$$gr.AP = p,\ gr.AC = b,\ gr.AB = c$$
$$inc.AC = \alpha, \text{ folglich } inc.AB = -\alpha,$$

so hat man

$$AP = p,\quad AC = b\,\varepsilon^{\alpha},\quad AB = c\,\varepsilon^{-\alpha}$$
$$AC' = p\cos\alpha.\varepsilon^{\alpha}\quad AB' = p\cos\alpha.\varepsilon^{-\alpha}.$$

Ferner ist einerseits

$$AQ = AP + PQ,$$

und da PQ auf BC senkrecht steht, ist nach § 13

$$PQ = x\,i.BC;$$

mithin

$$AQ = p + x\,i.BC. \quad (I).$$

Andererseits ist

$$AQ = AW + WQ,$$

wenn W den Schnittpunkt von AP und B'C' bezeichnet.

Da AW die Mittelsenkrechte von B'C' ist, so ist

$$AW = \frac{AB' + AC'}{2} = p\cos\alpha\,\frac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2},$$

und da nach § 15 $\frac{\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{-\alpha}}{2} = \cos\alpha$ ist, so folgt

$$AW = p\cos^2\alpha.$$

Ferner ist, da WQ auf dem Ursprung der Neigungen senkrecht steht,

$$WQ = y\,i.$$

Folglich ist

$$AQ = p\cos^2\alpha + y\,i \quad (II).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (I) und (II) folgt

$$AQ = p + xi . BC = p \cos^2\alpha + yi \quad (III)$$

Es ist

$$BC = AC - AB = b\varepsilon^{\alpha} - c\varepsilon^{-\alpha}$$

und nach § 15

$$BC = b(\cos\alpha + i\sin\alpha) - c(\cos\alpha - i\sin\alpha)$$

$$BC = (b - c)\cos\alpha + i(b + c)\sin\alpha.$$

Setzen wir diesen Wert für BC in die Gleichung (III), so ist

$$p + xi[(b - c)\cos\alpha + i(b + c)\sin\alpha] = p\cos^2\alpha + yi$$

$$p + xi(b - c)\cos\alpha - x(b + c)\sin\alpha = p\cos^2\alpha + yi;$$

also

$$y = x(b - c)\cos\alpha$$

$$p - x(b + c)\sin\alpha = p\cos^2\alpha$$

oder

$$p\sin\alpha = x(b + c),$$

folglich

$$x = \frac{p\sin\alpha}{b + c};$$

mithin

$$y = p\frac{b - c}{b + c}\sin\alpha\cos\alpha;$$

also

$$AQ = p\cos^2\alpha + ip\frac{b - c}{b + c}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$AQ = \frac{p(b + c)\cos^2\alpha + ip(b - c)\sin\alpha\cos\alpha}{b + c}$$

$$AQ = \frac{p\cos\alpha}{b + c}[(b + c)\cos\alpha + i(b - c)\sin\alpha]. \quad (IV).$$

Die von A aus gezogene seitenhalbierende Transversale ist aber nach § 2 äquipollent $\frac{AB + AC}{2}$.

Nun ist

$$AB + AC = c\varepsilon^{-\alpha} + b\varepsilon^{\alpha}$$

$$AB + AC = c(\cos\alpha - i\sin\alpha) + b(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$AB + AC = (b + c)\cos\alpha + (b - c)i\sin\alpha. \quad (V).$$

Eine Vergleichung der unter (IV) und (V) erhaltenen Ausdrücke ergiebt nach § 1, dass AQ und die von A aus gezogene seitenhalbierende Transversale dieselbe Richtung haben. Da beide Strecken denselben Anfangspunkt haben, so müssen sie in eine Gerade zusammenfallen; also liegt Punkt Q auf der seitenhalbierenden Transversale.

Die in den §§ 17—25 gegebenen Beispiele werden genügen, um die mannigfaltige Anwendung der Theorie der Äquipollenzen auf das Dreieck zu zeigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus (I) und (II) folgt

AQ = ... III)

Es ist

B

und nach § 15

BC = ... sin α)

BC ... α.

Setzen wir diesen Wert fü...

p + x i [(b — ... s $^2\alpha$ + y i

p + x i (b — ... s $^2\alpha$ + y i;

also

oder

folglich

mithin

also

AQ ... α

AQ = ... cos α

AQ = $\frac{p}{b}$ ... α]. (IV).

Die von A aus ge... ist aber nach § 2 äqui-pollent $\frac{AB + AC}{2}$.

Nun ist

AB + AC ... + i sin α)

AB + A ... α. (V).

Eine Vergleichung ... usdrücke ergiebt nach § 1, dass AQ und die von A ... versale dieselbe Richtung haben. Da beide Strecken ... üssen sie in eine Gerade zusammenfallen; also liegt ... Transversale.

Die in den §§ 17- ... gen, um die mannigfaltige Anwendung der Theorie d... zeigen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fi

A

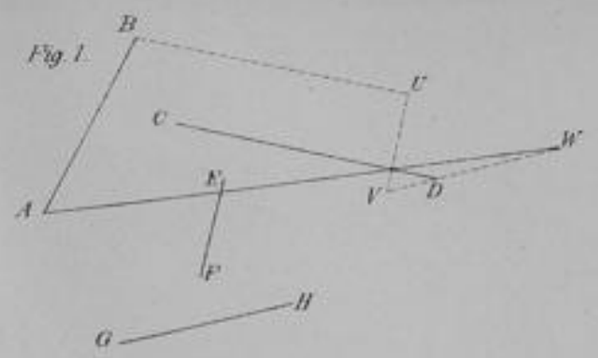
Fig.

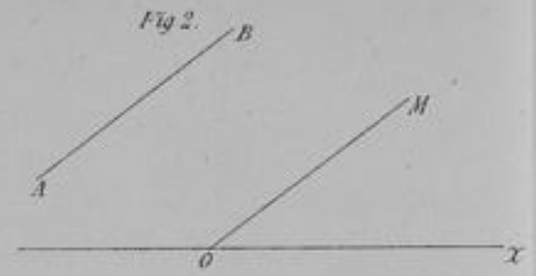
A

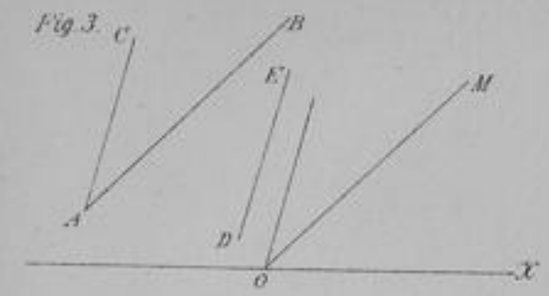
Fi

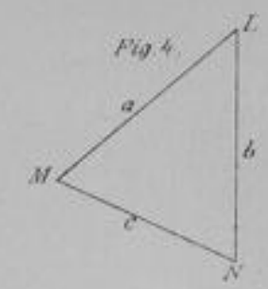
A

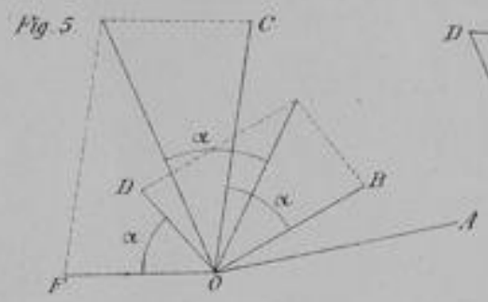
Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

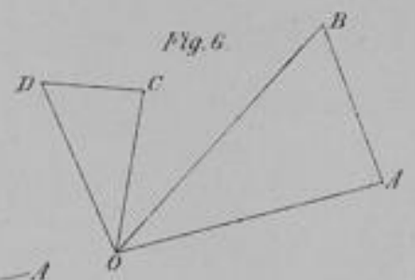


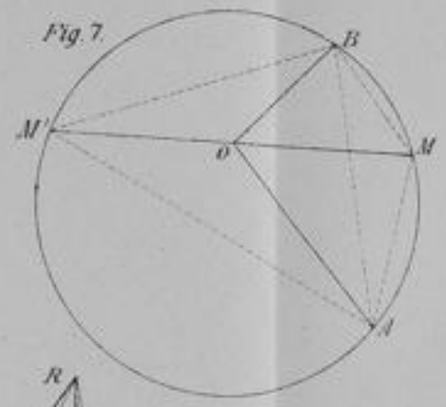


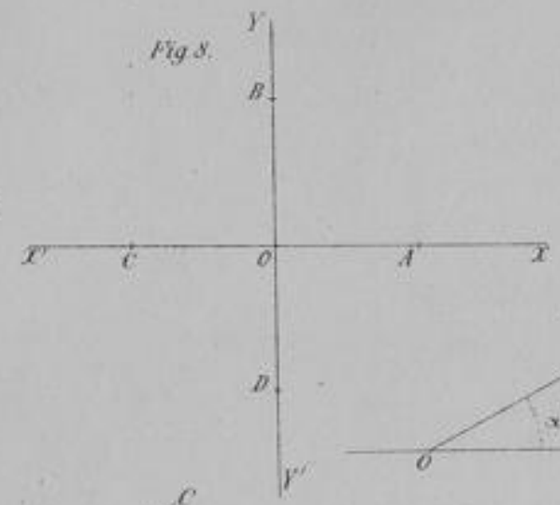


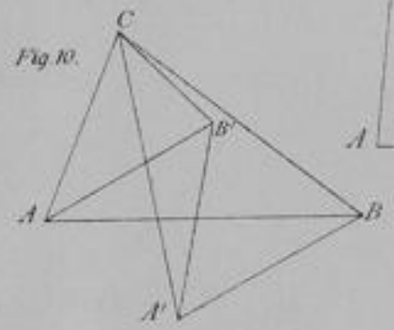


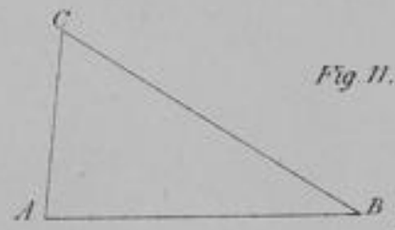


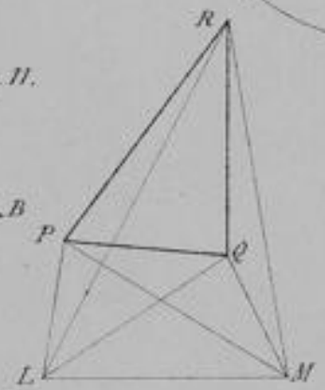


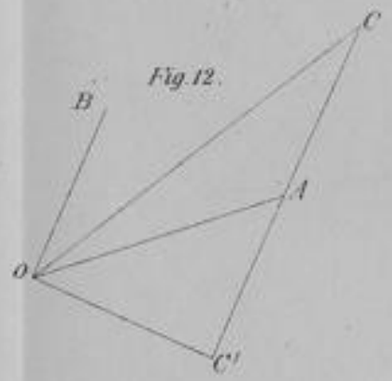


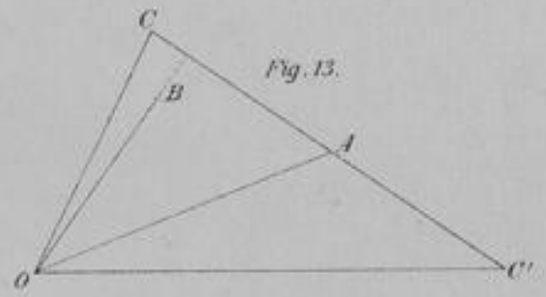


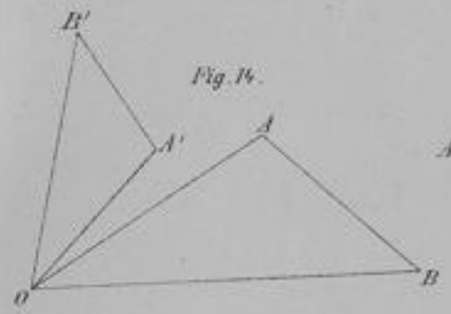


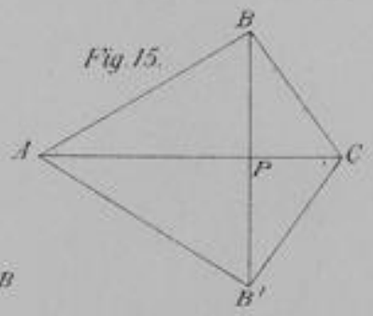


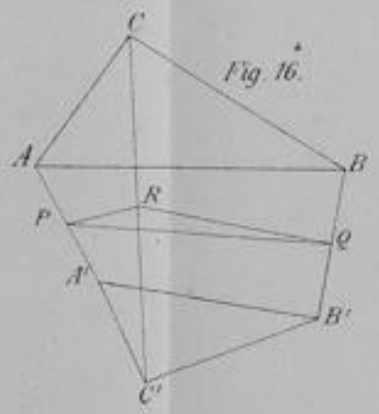


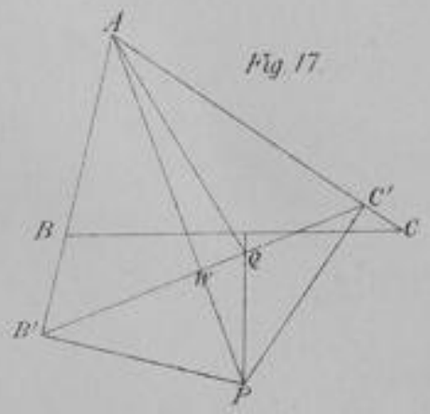












Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf