Die singulären Punkte einiger Flächen der vierten Ordnung.

§ 1.

Die Gleichung der auf ihre Axen bezogenen Wellenfläche optisch zweiaxiger Mittel ist die folgende:

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2x^2(b^2+c^2)-b^2y^2(a^2+c^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2=0,$$

worin wir, um einen Anhaltspunkt für die weiteren Untersuchungen zu gewinnen, $a > b > c$ annehmen.

Setzen wir weiter $-c^2$ an die Stelle von c^2 in unsere Gleichung, oder vertauschen wir b^2 und c^2 mit $-b^2$ und $-c^2$, oder geben wir endlich den drei Größen a^2, b^2 und c^2 zugleich das negative Vorzeichen, so erhalten wir der Reihe nach andere Gleichungen des vierten Grades, andere Flächen der vierten Ordnung.

Wir werden nun im Folgenden die singulären oder merkwürdigen Punkte der bezeichneten Wellenfläche und der aus ihr auf die angegebene Art hergeleiteten Flächen aufsuchen und näher bestimmen. Ehe wir jedoch dazu übergehen, jede einzelne dieser Flächen in Bezug auf jene Punkte zu untersuchen, sei es uns vergönnt, ihre Hauptschnitte zu betrachten; denn es stehen letztere, wie wir sehen werden, in einer innigen Beziehung zu den in Rede stehenden Punkten.

§ 2.

Die Fläche

$$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2x^2(b^2+c^2)-b^2y^2(a^2+c^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2=0$$

schneidet die Ebenen xy, xz, yz in Curven, deren Gleichungen

$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2)-a^2x^2(b^2+c^2)-b^2y^2(a^2+c^2)+a^2b^2c^2=0,$$
$$(a^2x^2+c^2z^2)(x^2+z^2)-a^2x^2(b^2+c^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2=0,$$
$$(b^2y^2+c^2z^2)(y^2+z^2)-b^2y^2(a^2+c^2)-c^2z^2(a^2+b^2)+a^2b^2c^2=0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich auch der Reihe nach unter die Form

$$(a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2)(x^2 + y^2 - c^2) = 0,$$
$$(a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2)(x^2 + z^2 - b^2) = 0,$$
$$(b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c^2)(y^2 + z^2 - a^2) = 0$$

bringen lassen.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß jeder Hauptschnitt der Fläche aus zwei Curven, einer Ellipse und einem Kreise besteht, daß ferner der Anfangspunkt der Coordinaten der gemeinschaftliche Mittelpunkt dieser Curven ist.

Der Hauptschnitt xy besteht aus einer Ellipse mit den Halbaren a und b und einem Kreise, welcher c zum Radius hat. Weil aber $c < b < a$ ist, so liegt letztere Curve ganz innerhalb der ersteren, ohne sie zu berühren.

Der Hauptschnitt xz besteht ebenfalls aus einer Ellipse und einem Kreise. Da aber der Radius b des Kreises einen mittleren Werth zwischen den Halbaren a und c der Ellipse hat, so schneiden sich unsere Curven in vier Punkten.

Auch bei dem Hauptschnitte yz haben wir es mit einem Kreise und einer Ellipse zu thun. Der Radius a des Kreises ist größer als b und c, die Halbaren der Ellipse, und somit liegt letztere Curve ganz innerhalb der ersteren, ohne sie zu berühren.

§ 3.

Ist, der Kürze halber, $f = o$ die Gleichung der Wellenfläche, deren Hauptschnitte wir eben betrachtet haben, so müssen die Coordinaten ihrer singulären Punkte den Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dy} = 0, \frac{df}{dz} = 0$$

genügen.

Bilden wir $\frac{df}{dx}$ ꝛc., und setzen wir nach der Differentiation ϱ^2 an die Stelle von $x^2 + y^2 + z^2$, so werden die Bestimmungsgleichungen der fraglichen Punkte die folgenden:

$$\frac{df}{dx} = 2x\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 - c^2)] = 2xA = 0,$$
$$\frac{df}{dy} = 2y\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 - c^2)] = 2yB = 0,$$
$$\frac{df}{dz} = 2z\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2)] = 2zC = 0.$$

Diese Gleichungen werden befriedigt, wenn

1) $x = 0, y = 0, z = 0$;
2) $A = 0, B = 0, C = 0$;
3) wenn zwei der Größen x, y, z verschwinden und von den Ausdrücken A, B, C derjenige, welcher der dritten Coordinate zugeordnet ist;
4) wenn zwei der Ausdrücke A, B, C mit der dem dritten entsprechenden Coordinate zugleich Null werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wie man sich durch leichte Rechnung überzeugen kann, liefert nur der vierte der angeführten Fälle Coordinaten für Punkte, welche der Fläche angehören.

Die singulären Punkte der Fläche ergeben sich also aus folgenden Gleichungsgruppen:

$$x = 0,\ B = 0,\ C = 0,$$
$$y = 0,\ A = 0,\ C = 0,$$
$$z = 0,\ A = 0,\ B = 0.$$

Die Gleichungen

$$x = 0,\ B = 0,\ C = 0, \text{ oder}$$
$$x = 0,$$
$$b^2y^2 + c^2z^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 - c^2) = 0,$$
$$b^2y^2 + c^2z^2 + c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

welche sich durch die folgenden:

$$x = 0,$$
$$y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$
$$b^2y^2 + c^2z^2 - b^2c = 0$$

ersetzen lassen, stellen Kreis und Ellipse des Hauptschnittes yz dar. Da aber diese Curven, wir wir wissen, nicht zum Durchschnitte kommen, so kann es sich hier nur um imaginäre singuläre Punkte handeln.

Die Gleichungsgruppe

$$y = 0,\ A = 0,\ C = 0, \text{ oder}$$

die Gleichungen

$$y = 0,$$
$$a^2x^2 + c^2z^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 - c^2) = 0,$$
$$a^2x^2 + c^2z^2 + c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2) = 0, \text{ oder auch}$$
$$y = 0,$$
$$x^2 + z^2 - b^2 = 0,$$
$$a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2 = 0$$

stellen die Curven im Hauptschnitte xz dar. Diese Curven, ein Kreis und eine Ellipse, schneiden sich aber, wie wir gesehen haben, in vier Punkten. Es sind also die vier Durchschnittspunkte des Kreises und der Ellipse im Hauptschnitte xz reelle singuläre Punkte unserer Fläche.

Die dritte der oben aufgestellten Gleichungsgruppen

$$z = 0,\ A = 0,\ B = 0, \text{ oder}$$

die Gleichungen

$$z = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 - c^2) = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 - c^2) = 0$$

lassen sich ersetzen durch die folgenden:

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 - c^2 = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und es stellen dieselben Kreis und Ellipse im Hauptschnitte xy dar. Diese Curven kommen aber nicht zum Durchschnitte, und somit ist einleuchtend, daß vier imaginäre singuläre Punkte unserer Fläche sich in der Ebene der xy befinden.

§ 4.

Aus den Gleichungen des Kreises und der Ellipse des Hauptschnittes xz der Fläche

$$y = 0,$$
$$x^2 + z^2 - b^2 = 0,$$
$$a^2x^2 + c^2z^2 - a^2c^2 = 0$$

ergeben sich also die Coordinaten x', y', z' ihrer reellen singulären Punkte. Man findet

$$x'^2 = \frac{c^2\,(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2},\ y'^2 = 0,\ z'^2 = \frac{a^2\,(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2},$$

und hieraus ohne Weiteres die Coordinaten selbst.

In jedem singulären Punkte gibt es nicht eine einzige Tangentialebene der Fläche, sondern, weil für diese Punkte die partiellen Differentialien $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so gibt es deren unendlich viele, welche einen Kegel umhüllen, dessen Spitze der singuläre Punkt ist. Dieser Berührungskegel läßt die Beschaffenheit der Fläche in ihrem singulären Punkte erkennen.

Die Gleichung des Berührungskegels für den singulären Punkt, der zwischen den positiven Richtungen der Axen liegt, dessen Coordinaten x', y', z' also positiv zu nehmen sind, ist diese:

$$\frac{d^2f}{dx'^2}(x - x')^2 + \frac{d^2f}{dy'^2}(y - y')^2 + \frac{d^2f}{dz'^2}(z - z')^2 + 2.\frac{d^2f}{dx'\,dy'}(x - x')(y - y')$$
$$+ 2.\frac{d^2f}{dx'\,dz'}(x - x')(z - z') + 2.\frac{d^2f}{dy'\,dz'}(y - y')(z - z') = 0.$$

Da wir nun durch Differentiation finden

$$\frac{d^2f}{dx'^2} = 8\,a^2x'^2 = 8\,a^2c^2\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2},$$
$$\frac{d^2f}{dy'^2} = 2\left[a^2x'^2 + c^2z'^2 + b^2(x'^2 + z'^2 - a^2 - c^2)\right] = -2\,(a^2 - b^2)(b^2 - c^2),$$
$$\frac{d^2f}{dz'^2} = 8\,c^2z'^2 = 8\,a^2c^2\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$
$$\frac{d^2f}{dx'\,dy'} = 0,$$
$$\frac{d^2f}{dx'\,dz'} = 4\,(a^2 + c^2)\,x'z' = 4\,ac\,(a^2 + c^2)\,\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{a^2 - c^2},$$
$$\frac{d^2f}{dy'\,dz'} = 0,$$

so wird die Gleichung unseres Kegels entweder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$a^2x'^2(x-x')^2-\tfrac{1}{4}\left[a^2x'^2+c^2z'^2+b^2(x'^2+z'^2-a^2-c^2)\right](y-y')^2+c^2z'^2(z-z')^2$$
$$+(a^2+c^2)x'z'(x-x')(z-z')=0,$$ oder in zweiter Form
$$a^2c^2(a^2-b^2)(x-x')^2-\tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)(y-y')^2+a^2c^2(b^2-c^2)(z-z')^2$$
$$+ac(a^2+c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}=0.$$

Weil in dieser Gleichung, welche einen gewöhnlichen Kegel des zweiten Grades darstellt, die laufende Coordinate y nur in der zweiten Potenz vorkommt, so ist ersichtlich, daß dieser Kegel von der Ebene xz axial geschnitten wird. Die Gleichung des bezüglichen Schnittes
$$a^2x'^2(x-x')^2+c^2z'^2(z-z')^2+(a^2+c^2)x'z'(x-x')(z-z')=0$$
kann man auch erhalten, wenn man die Gleichungen der Tangenten im singulären Punkte $(x', 0, z')$ an Kreis und Ellipse im Hauptschnitte xz, welche der Reihe nach
$$x'(x-x')+z'(z-z')=0,$$
$$a^2x'(x-x')+c^2z'(z-z')=0$$
sind, mit einander multiplicirt. Es besteht demnach unser axialer Schnitt aus den beiden angeführten Tangenten. Die Halbirungslinie des stumpfen Winkels, welche beide Tangenten mit einander bilden, wird als Axe des Berührungskegels anzusprechen sein.

Die Schnitte des Kegels mit den Ebenen xy und yz sind Hyperbeln.

Die Berührungskegel der übrigen reellen singulären Punkte der Fläche führen zu ähnlichen Resultaten, die der imaginären dagegen werden selbst imaginär und bedürfen somit keiner weiteren Betrachtung.

§ 5.

Die Hauptschnitte der Fläche
$$\varphi-(a^2x^2+b^2y^2-c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)-a^2x^2(b^2-c^2)-b^2y^2(a^2-c^2)+c^2z^2(a^2+b^2)-a^2b^2c^2=0$$
sind in den Gleichungen
$$(a^2x^2+b^2y^2)(x^2+y^2)-a^2x^2(b^2-c^2)-b^2y^2(a^2-c^2)-a^2b^2c^2=0,$$
$$(a^2x^2-c^2z^2)(x^2+z^2)-a^2x^2(b^2-c^2)+c^2z^2(a^2+b^2)-a^2b^2c^2=0,$$
$$(b^2y^2-c^2z^2)(y^2+z^2)-b^2y^2(a^2-c^2)+c^2z^2(a^2+b^2)-a^2b^2c^2=0$$
enthalten, die sich auch unter die Form
$$(a^2x^2+b^2y^2-a^2b^2)(x^2+y^2+c^2)=0,$$
$$(a^2x^2-c^2z^2+a^2c^2)(x^2+z^2-b^2)=0,$$
$$(b^2y^2-c^2z^2+b^2c^2)(y^2+z^2-a^2)=0$$
bringen lassen.

Es ist wieder der Ursprung der Coordinaten gemeinschaftlicher Mittelpunkt sämmtlicher Curven der Hauptschnitte.

Der Hauptschnitt xy besteht aus einem imaginären Kreise und einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind.

Der Hauptschnitt xz ist ebenfalls das System zweier Curven, eines Kreises mit dem Radius b und einer Hyperbel, deren reelle Halbaxe a mit der z-Axe zusammenfällt. Weil aber $a > b$ ist, so können Kreis und Hyperbel sich nicht schneiden, noch berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch der dritte Hauptschnitt ist das System eines Kreises mit dem Radius a und einer Hyperbel, deren reelle Halbare b in der z-Axe liegt. Beide Curven schneiden sich in vier Punkten, weil der Radius a der ersteren größer ist als die reelle Halbare b der letzteren.

§ 6.

Gehen wir nun zur Bestimmung der singulären Punkte unserer durch die Gleichung $\varphi = 0$ dargestellten Fläche über. Als Bestimmungsgleichungen dieser Punkte erhalten wir die folgenden:

$$\frac{d\varphi}{dx} = 2\,x\,[a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 + c^2)] = 2\,x\,A' = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = 2\,y\,[a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 + c^2)] = 2\,y\,B' = 0,$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = 2\,z\,[a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 - c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2)] = 2\,z\,C' = 0.$$

Punkte, deren Coordinaten die Gleichung der Fläche befriedigen, ergeben sich nur aus den Gleichungsgruppen

$$x = 0,\ B' = 0,\ C' = 0,$$
$$y = 0,\ A' = 0,\ C' = 0,$$
$$z = 0,\ A' = 0,\ B' = 0.$$

Die erste Gruppe oder die Gleichungen

$$x = 0,$$
$$b^2y^2 - c^2z^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 + c^2) = 0,$$
$$b^2y^2 - c^2z^2 - c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

reduciren sich auf die folgenden:

$$x = 0,$$
$$y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$
$$b^2y^2 - c^2z^2 + b^2c^2 = 0,$$

welche Kreis und Hyperbel im Hauptschnitte yz darstellen. Diese Curven schneiden sich, wie wir gesehen haben, in vier Punkten, und es sind also diese vier Durchschnittspunkte reelle singuläre Punkte der Fläche,

Die zweite Gruppe oder die Gleichungen

$$y = 0,$$
$$a^2x^2 - c^2z^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 + c^2) = 0,$$
$$a^2x^2 - c^2z^2 - c^2(\varrho^2 - a^2 - b^2) = 0,$$

welche auch durch

$$y - 0,$$
$$x^2 + z^2 - b^2 = 0,$$
$$a^2x^2 - c^2z^2 + a^2c^2 = 0$$

ersetzt werden können, stellen Kreis und Hyperbel im Hauptschnitte xz vor, liefern aber nur imaginäre Punkte, weil diese Curven sich nicht schneiden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich die dritte Gleichungsgruppe

$$z = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + a^2(\varrho^2 - b^2 + c^2) = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 + b^2(\varrho^2 - a^2 + c^2) = 0,$$

welche durch die Gleichungen

$$z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + c^2 = 0,$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

ersetzt werden kann, welche dieselben sind als die der Curven im Hauptschnitte xy, können ebenfalls nur zu imaginären Punkten führen, weil, wie bekannt, jene Curven nicht zum Durchschnitte kommen.

§ 7.

Aus den Gleichungen des Kreises und der Hyperbel im Hauptschnitte yz, nämlich aus

$$x = 0,$$
$$y^2 + z^2 - a^2 = 0.$$
$$b^2y^2 - c^2z^2 + b^2c^2 = 0$$

ergeben sich zwischen den Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ der reellen singulären Punkte unserer Fläche folgende Beziehungen:

$$x_{,}^2 = 0,\ y_{,}^2 = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2 + c^2},\ z_{,}^2 = \frac{b^2(a^2 + c^2)}{b^2 + c^2}.$$

Um die Gleichung des Berührungskegels in einem der singulären Punkte zu erhalten, etwa in demjenigen, der zwischen den positiven Richtungen der Axen liegt, dessen Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ also positiv zu nehmen sind, bilden wir $\frac{d^2\varphi}{dx_{,}^2}$ ꝛc. Wir finden

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2\left[b^2y_{,}^2 - c^2z_{,}^2 + a^2(y^2 + z_{,}^2 - b^2 + c^2)\right] = 2(a^2 - b^2)(a^2 + c^2),$$
$$\frac{d^2\varphi}{dy_{,}^2} = 8b^2y_{,}^2 = 8b^2c_{,}^2\,\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2},$$
$$\frac{d^2\varphi}{dz_{,}^2} = -8c^2z_{,}^2 = -8b^2c^2\,\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2},$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx_{,}dy_{,}} = 0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dx_{,}dz_{,}} = 0,$$
$$\frac{d^2\varphi}{dy_{,}dz_{,}} = 4y_{,}z_{,}(b^2 - c^2) = 4bc\,\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(a^2 + c^2)}}{b^2 + c^2}.$$

Die gesuchte Gleichung ist also

$$\tfrac{1}{4}\left[b^2y_{,}^2 - c^2z_{,}^2 + a^2(y_{,}^2 + z_{,}^2 - b^2 + c^2)\right](x - x_{,})^2 + b^2y_{,}^2(y - y_{,})^2 - c^2z_{,}^2(z - z_{,})^2$$
$$+ (b^2 - c^2)y_{,}z_{,}(y - y_{,})(z - z_{,}) = 0, \text{ oder}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in anderer Form die folgende:

$$\tfrac{1}{4}(a^2-b^2)(a^2+c^2)(b^2+c^2)(x-x_{,})^2+b^2c^2(a^2-b^2)(y-y_{,})^2-b^2c^2(a^2+c^2)(z-z_{,})^2$$
$$+\,bc(b^2-c^2)\sqrt{(a^2-b^2)(b^2+c^2)}=0,$$

und es stellt dieselbe einen gewöhnlichen Kegel des zweiten Grades dar. Substituiren wir $x=0$ in die Gleichung des Kegels in erster Form, so finden wir als Gleichung seines axialen Schnittes die nachfolgende:

$$b^2y_{,}^{\,2}(y-y_{,})^2-c^2z_{,}^{\,2}(z-z_{,})^2+(b^2-c^2)y_{,}z_{,}(y-y_{,})(z-z_{,})=0.$$

Letztere Gleichung erhält man auch, wenn man die der Tangenten in dem singulären Punkte $(0, y_{,}, z_{,})$ an Kreis und Hyperbel des Hauptschnittes yz, welche Gleichungen der Reihe nach

$$y\,(y-y)+z_{,}\,(z-z)=0,$$
$$b^2y^2(y-y_{,})-c^2z_{,}(z-z_{,})=0$$

sind, mit einander multiplicirt. Es ist somit unser axialer Schnitt des Kegels das System der bezeichneten Tangenten. In der Halbirungslinie des von diesen Tangenten gebildeten spitzen Winkels haben wir die Axe des Berührungskegels zu suchen.

Die Ebene xy schneidet den Kegel elliptisch, während sein Hauptschnitt xz eine Hyperbel ist.

§ 8.

Die dritte Fläche, die wir in Bezug auf ihre singulären Punkte untersuchen, ist durch die Gleichung

$$\psi=(a^2x^2-b^2y^2-c^2z^2)(x^2+y^2+z^2)+a^2x^2(b^2+c^2)+b^2y^2(a^2-c^2)+c^2z^2(a^2-b^2)+a^2b^2c^2=0$$

gegeben.

Ihre Hauptschnitte sind in den Gleichungen

$$(a^2x^2-b^2y^2)(x^2+y^2)+a^2x^2(b^2+c^2)+b^2y^2(a^2-c^2)+a^2b^2c^2=0,$$
$$(a^2x^2-c^2z^2)(x^2+z^2)+a^2x^2(b^2+c^2)+c^2z^2(a^2-b^2)+a^2b^2c^2=0,$$
$$(b^2y^2+c^2z^2)(y^2+z^2)-b^2y^2(a^2-c^2)-c^2z^2(a^2-b^2)-a^2b^2c^2=0, \text{ oder}$$
$$(a^2x^2-b^2y^2+a^2b^2)(x^2+y^2+c^2)=0,$$
$$(a^2x^2-c^2z^2+a^2c^2)(x^2+z^2+b^2)=0,$$
$$(b^2y^2+c^2z^2+b^2c^2)(y^2+z^2-a^2)=0$$

enthalten.

Aus diesen Gleichungen geht hervor, daß jeder Hauptschnitt aus zwei Curven, einer reellen und einer imaginären, besteht.

Die reelle Curve des Hauptschnittes xy ist eine Hyperbel, deren reelle Halbaxe a mit der y-Axe zusammenfällt.

Der reelle Theil des Hauptschnittes xz ist ebenfalls eine Hyperbel, deren reelle Halbaxe a aber in die z-Axe fällt.

Endlich die reelle Curve des Hauptschnittes yz ist ein Kreis, der a zum Radius hat.

Von reellen Durchschnittspunkten der Curven irgend eines Hauptschnittes kann natürlich keine Rede sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9.

Als Bestimmungsgleichungen der singulären Punkte unserer durch die Gleichung $\psi = 0$ dargestellten Fläche erhalten wir die folgenden:

$$\frac{d\psi}{dx} = 2x\,[a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 + a^2(\varrho^2 + b^2 + c^2)] = 2x\,A'' = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dy} = 2y\,[a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 - b^2(\varrho^2 - a^2 + c^2)] = 2y\,B'' = 0,$$

$$\frac{d\psi}{dz} = 2z\,[a^2x^2 - b^2y^2 - c^2z^2 - c^2(\varrho^2 - a^2 + c^2)] = 2z\,C'' = 0.$$

Punkte der Fläche ergeben sich nur aus den Gleichungsgruppen

$$x = 0,\ B'' = 0,\ C'' = 0,$$
$$y = 0,\ A'' = 0,\ C'' = 0,$$
$$z = 0,\ A'' = 0,\ B'' = 0.$$

Die erste Gruppe, welche sich auf die Gleichungen

$$x = 0,$$
$$y^2 + z^2 - a^2 = 0,$$
$$b^2y^2 + c^2z^2 + b^2c^2 = 0$$

reducirt, stellt die Curven der Fläche im Hauptschnitte yz dar und liefert, da diese Curven nur imaginäre Durchschnittspunkte haben, auch nur imaginäre singuläre Punkte.

Ein Aehnliches findet Statt bei den beiden anderen Gruppen. Unsere Fläche hat also nur imaginäre singuläre Punkte, deren je vier sich in einem ihrer Hauptschnitte befinden.

§ 10.

Die durch die Gleichung

$$\chi = (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) + a^2x^2(b^2 + c^2) + b^2y^2(a^2 + c^2) + c^2z^2(a^2 + b^2) + a^2b^2c^2 = 0$$

dargestellte Fläche ist imaginär. Die Curven ihrer Hauptschnitte können also ebenfalls nur imaginär sein. Aus den Gleichungen

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + a^2b^2)(x^2 + y^2 + c^2) = 0,$$
$$(a^2x^2 + c^2z^2 + a^2c^2)(x^2 + z^2 + b^2) = 0,$$
$$(b^2y^2 + c^2z^2 + b^2c^2)(y^2 + z^2 + a^2) = 0,$$

worin diese Curven enthalten sind, geht dieses ohne Weiteres hervor.

Suchen wir auch hier die imaginären singulären Punkte — denn nur solche kann eine imaginäre Fläche haben — zu bestimmen, so werden wir finden, daß deren je vier in einem Hauptschnitte liegen und durch die Gleichungen der Curven dieses Schnittes gegeben sind.

§ 11.

Werden zwei der Größen a, b, c einander gleich, so stellen die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ $\psi = 0$, $\chi = 0$ jedesmal das System zweier concentrischen Flächen dar, welche, wenigstens wenn

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie reell sind, sich auf einer der Axen berühren. Die singulären Punkte sind alsdann in den Berührungspunkten zu suchen, und die Berührungskegel in diesen Punkten werden zu gemeinschaftlichen Tangentialebenen.

Werden die drei Größen a, b, c einander gleich, so haben wir es jedesmal mit einem Systeme zweier identischen Flächen zu thun. Die Coordinaten der singulären Punkte werden in diesem Falle unbestimmt, mithin auch die bezüglichen Berührungskegel, wie dies sich auch von vorneherein erwarten läßt.

Es genügt uns, hier auf die angeführten speciellen Fälle hingewiesen und bemerkt zu haben, daß sich die auf sie bezüglichen eben gemachten Bemerkungen durch einfache Rechnung verificiren lassen.

Piro.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf