Wir nehmen die feste Wand als eine ebene an und die Phasenverzögerung sei $\frac{x}{c} = \frac{e}{c} + \frac{\lambda/2 \cos i}{c}$, wo c die Geschwindigkeit der Welle, λ die Wellenbreite und i den Einfallswinkel bezeichnen.

Die Aufgabe soll in zwei Teile zerlegt werden. In dem ersten soll angenommen werden, dass die Wellenbreite des einfallenden und die des reflektierten Systems einander gleich, im zweiten, dass sie von einander verschieden sind.

Das reflektierte Wellensystem ist, da die einfallende Welle an der festen Wand eine Phasenverzögerung erleidet, ein dem Kreiswellensystem ähnliches. Die einzelnen Wellen weichen in der Richtung K K¹ (man vergleiche beifolgende Figurentafel) von einem Kreise ab. Um die Interferenzlinien zu untersuchen, greifen wir einen Punkt heraus, wo sich ein Kurvenast des Kreiswellensystems mit einem des reflektierten schneidet. Die Deviation dieses Punktes von der Gleichgewichtslage wird gefunden durch Kombination der Deviationen desselben Punktes, wenn er betrachtet wird als angehörig dem ersten und zweiten System. Analytisch durch Kombination der Gleichungen:

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda}\right)$$

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right)$$

t wird vom Augenblick der grössten Abweichung an gerechnet.

Addiert man diese beiden Ausdrücke, so erhält man:

$$y + y_1 = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda}\right) + a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda}\right)$$

oder, indem man die Addition ausführt:

$$y + y_1 = Y = 2\, a \cos \pi \left(\frac{e_1 - (e + \lambda/2 \cos i)}{\lambda}\right)$$

$$\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e + e_1 + \lambda/2 \cos i}{2\lambda}\right)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Ausdruck bezeichnet die resultierende Ablenkung des Punktes von der Gleichgewichtslage. Die Interferenzkurven ergeben sich hieraus, indem man setzt:

$$e_1 - (e + \lambda/2 \cos i) = \frac{2\,p + 1}{2}\,\lambda$$

$$\frac{e + e_1 + \lambda/2 \cos i}{\lambda} = \frac{2\,t}{T} + \frac{2\,q + 1}{2}$$

p und q bezeichnen ganze Zahlen. Die erste Gleichung drückt stehende Interferenzlinien aus, die zweite wandernde, da die Konstante eine Funktion von t ist.

Führt man für cos i seinen Wert ein, so erhält man nach der Figur:

$$\cos i = \frac{d/2}{r} = \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e}$$

Führt man diesen Wert für cos i in die letzten beiden Gleichungen ein, so erhält man:

$$\text{I. } e_1 - e - \lambda/2 \left(\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e}\right) = \frac{2\,p + 1}{2}\,\lambda$$

$$\text{II. } e + e_1 + \lambda/2 \left(\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e}\right) = \left(\frac{2\,t}{T} + \frac{2\,q + 1}{2}\right)\lambda.$$

Dieses sind die Gleichungen der Kurven in bipolaren Koordinaten. Führt man für e, e_1 rechtwinklige Koordinaten ein, setzt

$$e = \sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}$$
$$e_1 = \sqrt{y^2 + (d/2 - x)^2},$$

so erhält man Gleichungen 6. Grades in x y

$$\text{Ia. } \sqrt{y^2 + (d/2 - x)^2} - \sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2} - \lambda/2 \times$$
$$\left(\frac{y^2 + (d/2 + x)^2 - y^2 - (d/2 - x)^2 + d^2}{2\,d\sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}}\right) = \frac{2\,p + 1}{2}\,\lambda.$$

$$\text{IIa. } \sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2} + \sqrt{y^2 + (d/2 - x)^2} + \lambda/2.$$
$$\left(\frac{y^2 + (d/2 + x)^2 - y^2 - (d/2 - x)^2 + d^2}{2\,d\sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}}\right) = \left(\frac{2\,t}{T} + \frac{2q + 1}{2}\right)\lambda.$$

Macht man beide Gleichungen rational, so kommt:

$$A\sqrt{\left(y^2 + (d/2 - x)^2\right)\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)} - \left(y^2 + (d/2 + x)^2\right) - \lambda/2$$
$$\left(\frac{d + 2\,x}{2}\right) = \frac{2\,p + 1}{2}\,\lambda\,\sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Quadriert, erhält man:

$$\left(y^2 + \left(\frac{d}{2} - x\right)^2\right)\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right) + \left(\frac{2p + 1}{2}\right)^2 \lambda^2$$

$$\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right) - (2p + 1)\lambda\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)$$

$$\sqrt{y^2 + (d/2 - x)^2} = \left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)^2 + \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{d + 2x}{2}\right)^2 + \lambda$$

$$\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)\left(\frac{2x + d}{2}\right)$$

oder zusammengefasst:

$$\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)\left(2dx + \frac{2x + d}{2}\lambda - \left(\frac{2p + 1}{2}\lambda\right)^2\right) + \frac{\lambda^2}{4}$$

$$\left(\frac{d + 2x}{2}\right)^2 = -(2p + 1)\lambda\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)\sqrt{y^2 + (d/2 - x)^2}$$

Quadriert man diese Gleichung noch einmal, so erhält man:

$$\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)^2\left(2dx + \left(x + \frac{d}{2}\right)\lambda - \left(\frac{2p + 1}{2}\lambda\right)^2\right)^2$$

$$+ \frac{\lambda^4}{16}\left(\frac{d}{2} + x\right)^4 + \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{d}{2} + x\right)^2\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)$$

$$\left(2dx + \left(x + \frac{d}{2}\right)\lambda - \left(\frac{2p + 1}{2}\lambda\right)^2\right) =$$

$$(2p + 1)^2\lambda^2\left(y^2 + (d/2 + x)^2\right)^2\left(y^2 + (d/2 - x)^2\right).$$

Hieraus erkennt man, dass der Grad der Kurve Ia der 6. ist.

Ebenso ist der Grad IIa der 6. Multipliziert man nämlich beiderseits mit $\sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}$, so kommt:

$$y^2 + (d/2 + x)^2 + \sqrt{(y^2 + (d/2 - x)^2)(y^2 + (d/2 + x)^2)} + \lambda/2$$

$$\left(\frac{d + 2x}{2}\right) = \left(\frac{2t}{T} + \frac{2q + 1}{2}\right)\lambda\sqrt{y^2 + (d/2 + x)^2}.$$

Durch Vergleichung dieser Gleichung mit A erkennt man, dass der Grad derselben auch der 6. sein muss. Beide Gleichungen stimmen, nachdem sie rational gemacht sind, mit einander überein, nur kommt in der ersten der Faktor $\frac{2p + 1}{2}$, in der zweiten der Faktor $\frac{2t}{T} + \frac{2q + 1}{2}$ vor.

Die Diskussion der Kurven in Bezug auf ihre Singularitäten nach den gewöhnlichen mathematischen Methoden ist schwierig und führt zu keinem Ziele. Man muss sich daher

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch andere Mittel eine geometrische Anschauung von denselben zu verschaffen suchen.

Ist $e_1^2 - e^2 = d^2$, so geht Gleichung I über in:

$$e_1 - e = \frac{2p+1}{2}\lambda.$$

Dieses ist aber die Gleichung einer Hyperbel. Für die Punkte der Kurve I, welche auf einer Hyperbel liegen, bestehen folgende beiden Gleichungen:

$$e_1^2 - e^2 = d^2;\ (e_1 - e)(e_1 + e) = d^2$$

$$e_1 - e = \frac{2p+1}{2}\lambda.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die dritte:

$$e + e_1 = \frac{2d^2}{(2p+1)}\lambda.$$

Diese Punkte liegen also auch auf einer Ellipse. p muss nach den drei letzten Gleichungen einen negativen Wert besitzen. Die Punkte also, welche durch die beiden vorletzten Gleichungen bestimmt werden, liegen zu gleicher Zeit auf einer Ellipse und auf einer Hyperbel.

Die Gleichung II geht unter derselben Bedingung in eine Ellipse über, deren Gleichung ist:

$$e + e_1 = \left(\frac{2t}{T} + \frac{2q+1}{2}\right)\lambda.$$

$$e_1^2 - e^2 = d^2.$$

Aus beiden Gleichungen folgt die dritte

$$e_1 - e = \frac{d^2}{\lambda\left(\frac{2t}{T} + \frac{2q+1}{2}\right)}.$$

Diese Punkte liegen daher zu gleicher Zeit auf einer Hyperbel und auf einer Ellipse. Sie müssen, da $e_1 > e$ sämtlich hinter der festen Wand liegen, also für uns imaginär sein.

Um die Schnittpunkte der Kurve I mit der Centrale $C\,C_1$ zu bestimmen, setzen wir

$$e + e_1 = d.$$

Man erhält daher zur Bestimmung von e und e_1 2 Gleichungen

$$e + e_1 = d$$

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda} - \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{4de} = \frac{2p+1}{2}.$$

Setzt man den Wert von e_1 aus der ersten Gleichung in die zweite ein, so kommt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{d - e}{\lambda} - \frac{e}{\lambda} - 1/2 = \frac{2\,p + 1}{2}$$

$$\text{oder } e = \frac{d/\lambda - 1/2 - \frac{2\,p + 1}{2}}{2/\lambda}$$

Da e und e_1 positive Grössen sind, so hat die Konstante der Kurve einen Minimalwert für $e_1 = 0$. In diesem Punkt hat sie ihren Ursprung. Für $e_1 = 0$ ist $e = d$. Das Minimum der Konstante ist unter Fortlassung von $-1/2$:

$$-d/\lambda = \frac{2\,p + 1}{2}.$$

Hieraus folgt für e:

$$e = \frac{\frac{2\,d}{\lambda} - 1/2}{2/\lambda}$$

$$\text{oder } e = d - 1/4\,\lambda.$$

Den Schnittpunkt der Kurve mit der Centrale über C_1 hinaus kann man durch Kombination der beiden Gleichungen nicht ohne weiteres finden.

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda} - \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{4\,d\,e} = \frac{2\,p + 1}{2}.$$

$$e - e_1 = d.$$

Derselbe ergiebt sich aber dadurch, dass man annimmt, die Wellenl änge des einfallenden und des zurückgeworfenen Systems seien von einander verschieden. Man erhält alsdann für e_1, wie vorher, folgenden Wert:

$$e_1 = d + \frac{\lambda\,\lambda_1}{2\,(\lambda - \lambda_1)}.$$

Lässt man jetzt $\lambda = \lambda_1$ werden, so wird der Wert für $e_1 = \infty$ d. h. die Kurve schneidet die Centrale über C_1 hinaus erst im Unendlichen. Der Schnittpunkt der Kurve mit der Centrale über C hinaus ist für uns ohne Interesse.

Auf dieselbe Weise findet man die Schnittpunkte der Kurve II mit der Axe. Der Einfachheit halber setzen wir $t = 0$. Man erhält den allgemeinen Fall wieder, wenn man die Konstante $\frac{2\,q + 1}{2}$ um die Grösse $\frac{2\,t}{T}$ vermehrt. Zur Bestimmung des Schnittpunktes innerhalb $C\,C_1$ hat man folgende beiden Gleichungen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$e + e_1 + \lambda/2 \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e} = \frac{2\,q + 1}{2} \lambda$$

$$e + e_1 = d.$$

Aus denselben kann man ebenfalls nicht ohne weiteres die Schnittpunkte bestimmen. Es muss daher auf dieselbe Weise verfahren werden, wie vorher, und es ergiebt sich dann für e der Wert ∞ d. h. der Schnittpunkt innerhalb $C\,C_1$ ist unbestimmt.

Um den Schnittpunkt der Kurve mit der Centrale über C_1 hinaus zu finden, hat man die beiden Gleichungen mit einander zu verbinden.

$$e + e_1 + \lambda/2 \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e} = \frac{2\,q + 1}{2} \lambda$$

$$e - e_1 = d.$$

Man findet:

$$e = d + 1/4\,\lambda.$$

Hiernach und nach der Konstruktion muss die Kurve I einer Hyperbel gleichen. Am Scheitel besitzt sie eine Einbiegung. Die Kurve II gleicht einer Ellipse und besitzt ebenfalls an ihrem Scheitel eine Einbiegung.

Zwischen den Interferenzlinien befinden sich andere Kurven, deren Gleichungen sind:

$$e_1 - e + \lambda/2 \left(\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e} \right) = l\,\lambda$$

$$e + e_1 + \lambda/2 \left(\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e} \right) = m\,\lambda + \frac{2\,t}{T} \lambda.$$

Es sind analytische Ausdrücke für die Rippungen zwischen den Interferenzlinien, l m bedeuten ganze Zahlen.

Die Geschwindigkeit der wandernden Interferenzkurve findet man durch Verbindung der Gleichung für dieselbe mit der Gleichung

$$e - e_1 = d$$

und durch Bildung des Differenzialquotienten $\frac{d\,e}{d\,t}$.

Man erhält

$$\frac{d\,e}{d\,t} = n\,\lambda$$

wobei gesetzt ist $T = \frac{1}{n}$.

Damit ist der einfachste Fall erledigt. Komplizierter wird die ganze Untersuchung durch die Annahme, dass die Wellen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

länge des einfallenden Systems von der des reflektierten verschieden ist, und dass es auch die Schwingungsdauer und Fortpflanzungsgeschwindigkeit für beide Systeme sind. Es sei λ die Wellenlänge des einfallenden, λ_1 die des reflektierten. T die Schwingungsdauer für ersteres, T_1 die für das zweite. c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ersten, c_1 die des zweiten Systems. Die Gleichungen, welche die Abweichung der einzelnen Punkte der Systeme von der Gleichgewichtslage ausdrücken, lauten alsdann:

$$y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} \right)$$

$$y_1 = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda} \right).$$

t wird auch hier vom Augenblick der grössten Deviation an gerechnet. Die Amplituden sollen in beiden Systemen dieselben sein.

Addiert man beide Gleichungen, so kommt:

$$y + y_1 = Y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} \right)$$

$$+ a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda} \right)$$

$$Y = 2\, a \cos \pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{t}{T} + \frac{e_1}{\lambda} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} \right)$$

$$\cos \pi \left(\frac{t}{T_1} + \frac{t}{T} - \left(\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} \right) \right)$$

Die Gleichungen der Interferenzlinien ergeben sich hieraus, indem man setzt:

$$\frac{t}{T_1} - \frac{t}{T} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} + \frac{e_1}{\lambda} = \frac{2\,q + 1}{2}$$

$$\frac{t}{T_1} + \frac{t}{T} - \frac{e_1}{\lambda} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} = - \frac{2\,p + 1}{2}$$

p und q bedeuten ganze Zahlen.

Nun ist: $T = {}^1/m$; $T_1 = {}^1/m_1$

m und m_1 bedeuten die Anzahl der Schwingungen in einer Sekunde, daher hat man:

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} = \frac{2\,q + 1}{2} + t\,(m - m_1)$$

$$\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e + \lambda/2 \cos i}{\lambda_1} = \frac{2\,p + 1}{2} + t\,(m + m_1)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Konstanten sind Funktionen von t. Die Wellen, deren analytisches Äquivalent diese Gleichungen sind, wandern also und zwar muss stets eine derselben wandern. Die Summe $m + m_1 = \frac{c}{\lambda} + \frac{c_1}{\lambda_1}$ kann nur dann gleich Null werden, wenn eine der Geschwindigkeiten negativ, also die eine Wellenbewegung centripetal, die andere centrifugal wird. Die Differenz

$$m - m_1 = \frac{c}{\lambda} - \frac{c_1}{\lambda_1}$$

ist nur dann gleich Null, wenn beide Bewegungen entweder centrifugal oder centripetal sind.

Die Kurvenscharen, für welche $t(m + m_1)$ und $t(m - m_1)$ gleich einer ganzen Zahl, werden Fundamentalsysteme genannt. Bei der Bewegung der beiden Systeme wechseln die Rippungen und Interferenzlinien fortwährend mit den festen Kurven der Fundamentalsysteme ab d. h. sie passieren jede Gattung 1 und 2 für sich stets gleichzeitig und kongruent.

Die Rippungen zwischen den Interferenzlinien entstehen dadurch, dass zwischen den Kurven I Wellensysteme von auf einander folgenden Bergen und Thälern sich axifugal mit der Geschwindigkeit der Berg und Thal von einander scheidenden Kurvenschar II mit grosser Geschwindigkeit fortbewegen. Dadurch wird der Eindruck einer Rippung hervorgerufen.

Das Auswechseln der Kurven findet für beide Systeme in verschiedenen Zeiten statt und zwar für das System 1 in

$$t_1 = \frac{1}{m + m_1} = \frac{T\,T_1}{T + T_1}.$$

Für das System 2 in

$$t_2 = \frac{1}{m - m_1} = \frac{T\,T_1}{T_1 - T}.$$

Hiernach ist $t_2 > t_1$, d. h. die Interferenzlinien 2 wandern langsamer als die von 1.

Es sei nun $m > m_1$; $\lambda < \lambda_1$, so wächst in der Gleichung mit t bei konstantem e_1, d. h. die Kurvenschar bewegt sich von C nach C_1; die Wanderung muss in der Richtung $C\,C_1$ stattfinden.

Führt man für cos i seinen Wert in e; e_1 ein, so erhält man folgende beiden Gleichungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1)\ \frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \lambda/2\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = \frac{2\,q + 1}{2} + t\,(m - m_1)$$

$$2)\ \frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} + \lambda/2\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = \frac{2\,p + 1}{2} + t\,(m + m_1)$$

Der Grad der Kurven ist wie vorher der 6.

Um die Geschwindigkeit der Wanderung der Kurven, welche erkennbar wird an den Rippungen zwischen denselben, kennen zu lernen innerhalb der Strecke C C_1, verbinden wir die Gleichungen derselben mit folgender:

$$e + e_1 = d.$$

Zunächst ziehen wir die Gleichung 1 in Betracht. Eliminiert man aus beiden Gleichungen e_1, so erhält man:

$$-\,e\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right) + \frac{d}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\,\lambda_1} = \frac{2\,q + 1}{2} + t\,(m - m_1).$$

Bildet man das Differenzial von e nach t, so erhält man:

$$\frac{d\,e}{d\,t} = \frac{m_1 - m}{1/\lambda + 1/\lambda_1} = (m_1 - m)\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also unabhängig von e. Die Wellenweite erhält man, indem dieser Ausdruck mit t_2 multipliziert wird.

Mit $2\,t_2$ multipliziert, ergiebt sich:

Der doppelte Abstand der wandernden Knotenpunkte auf der Axe ist dem harmonischen Mittel aus den beiden Wellenlängen λ, λ_1 proportional.

Ist $m = m_1$ so hört das Wandern auf. Ist $\lambda_1 = \lambda$, so ist

$$\frac{d\,e}{d\,t} = (m_1 - m)\,\frac{\lambda}{2}$$

$L = \lambda/2$ die Wellenweite.

Die Geschwindigkeit der Wanderung der Wellen über C_1 hinaus wird gefunden, indem man die Gleichung 1 mit der Gleichung

$$e - e_1 = d$$

verbindet und wiederum den Differenzialquotienten $\frac{d\,e}{d\,t}$ aufsucht.

Man erhält:

$$e\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_1}\right) - \frac{d}{\lambda} - \frac{\lambda}{2\,\lambda_1} = \frac{2\,q + 1}{2} + t\,(m - m_1)$$

$$\frac{d\,e}{d\,t} = (m - m_1)\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist $\lambda = \lambda_1$, so ist

$$\frac{d\,e}{d\,t} = \infty.$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeit der Wanderung der Interferenzlinien über C_1 hinaus und innerhalb $C\,C_1$ ist also gleich:

$$\frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda - \lambda_1}.$$

Setzt man $m = 247$; $\lambda = 0{,}249$; $c = 54{,}09$
$m_1 = 261$; $\lambda_1 = 0{,}213$; $c_1 = 55{,}60$

so ist die Geschwindigkeit der Wanderung

1,6 bezw. 20,6.

Das Verhältnis der Geschwindigkeit der Wanderung

$$\frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} = 12{,}83.$$

Die Geschwindigkeit der andern Kurve auf der Achse lässt sich auf dieselbe Weise bestimmen wie vorher. Man hat daher Gleichung 2 resp. zu verbinden mit

$$e + e_1 = d$$
$$e - e_1 = d$$

und erhält erstens

$$e\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda}\right) + \frac{d}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\,\lambda_1} = \frac{2\,p + 1}{2} + t\,(m + m_1)$$

$$\frac{d\,e}{d\,t} = (m + m_1)\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda - \lambda_1}.$$

zweitens

$$e\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda_1}\right) - \frac{d}{\lambda} + \frac{\lambda}{2\,\lambda_1} = \frac{2\,p + 1}{2} + t\,(m + m_1)$$

$$\frac{d\,e}{d\,t} = (m + m_1)\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeit der Wanderung dieser Interferenzlinien innerhalb $C\,C_1$ und über C_1 hinaus ist also dasselbe wie vorher

$$\frac{\lambda + \lambda_1}{\lambda - \lambda_1}.$$

In der Mitte zwischen den Kurven 1 und 2 liegen andere, welche denen von 1 und 2 ähnlich sind. Die Gleichungen derselben lauten folgendermassen:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$1a)\ \frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \lambda/2\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = r + t\,(m - m_1)$$

$$2a)\ \frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} + \lambda/2\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = l + t\,(m + m_1).$$

l und r bedeuten ganze Zahlen.

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen t, so erhält man die Gleichung der Kurven, in welchen die die Rippungen bildenden axifugalen Wellenberge, von denen sich in der Axe in jedem Zeitintervalle

$$t_1 = \frac{T\,T_1}{T + T_1}$$

einer bildet, verlaufen. Da ferner das Auswechseln der Kurven 1 in jedem Zeitintervalle

$$t_2 = \frac{T\,T_1}{T_1 - T}$$

stattfindet, so entstehen in dieser Zeit

$$1/2\ \frac{T + T_1}{T_1 - T}$$

Wellenberge zwischen je 2 Rippungen auf der Axe.

Man erhält durch Elimination

$$\frac{e_1}{\lambda}\,2\,m_1 - \frac{e}{\lambda_1}\,2\,m - \lambda\,m\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,\lambda_1\,e\,d}$$
$$= r\,(m + m_1) - l\,(m - m_1).$$

Dividiert man beiderseits durch $2\,m\,m_1$, so kommt:

$$3)\ \frac{e_1}{c} - \frac{e}{c_1} - \frac{\lambda}{2\,m_1}\ \frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,e\,\lambda_1\,d} = 1/2\,m\,m_1$$
$$\Big(r\,(m + m_1) - l\,(m - m_1)\Big).$$

Aus dem Umstande, dass die Kurvenscharen 1 und 2, die einen Berg von 4 Seiten einschliessen, beide in verschiedenen Zeitintervallen t_2 und t_1, auswechseln, folgt, dass diese Kurven die Kurven 1 schief durchschneiden.

Die Bedingung, unter welcher alle diese Kurven in einfache Kegelschnitte übergehen, ist

$$e_1^2 - e^2 = d^2$$
$$\lambda = \lambda_1$$
$$c = c_1.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bemerkenswert ist, dass die beiden Klassen von Wellenkurven 1a und 3 Kreise werden und zwar

$$1\,a,\ \text{wenn}\ r = 0$$
$$t = 0$$
$$e_1^2 - e^2 = d^2.$$

$$3,\ \text{wenn}\ \frac{r}{l} = \frac{m - m_1}{m + m_1}$$
$$e_1^2 - e^2 = d^2.$$

Wir wollen jetzt Form und Lage der einzelnen Kurven näher ins Auge fassen. Zu dem Zwecke suchen wir die Schnittpunkte derselben mit der Axe auf. Da e und e_1 stets positive Grössen sind, weil bipolare Koordinaten, so haben die Konstanten der Kurven einen Minimalwert für $e_1 = o$, also im Punkte C_1. In diesem Punkt haben sie ihren Ursprung. Für 1 ist auf der Axe ($t = 0$)

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \lambda/2\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = \frac{2\,q + 1}{2}.$$

Für $e_1 = o$ ist $e = d$ nach der Gleichung: $e + e_1 = d$

$$-\frac{d}{\lambda_1} - \lambda/2\,\lambda_1 = p.$$

Unter Fortlassung von $+ 1/2$.

Durch Elimination von e_1 aus den vorletzten beiden Gleichungen findet man

$$e = \frac{\dfrac{d}{\lambda} - \lambda/2\,\lambda_1 - \dfrac{2\,q + 1}{2}}{1/\lambda + 1/\lambda_1}$$

oder indem man den Wert von q einführt:

$$e = d - 1/2\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Der Schnittpunkt der Kurve mit der Axe über C_1 hinaus wird gefunden, indem man die Gleichung 1 mit $e - e_1 = d$ verbindet.

Es kommt:

$$e = d + \frac{\lambda\,\lambda_1}{2\,(\lambda_1 + \lambda)}.$$

Für 2 ist ($t = 0$)

$$\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} + \lambda/2\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e\,\lambda_1} = \frac{2\,p + 1}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Innerhalb der Strecke $C\,C_1$ ist

$$e + e_1 = d$$

für $e_1 = o$; $e = d$, daher

$$p = \frac{d}{\lambda_1} + \lambda/2\,\lambda_1.$$

Eliminiert man aus den beiden ersten Gleichungen e_1, so erhält man:

$$e\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda}\right) = d\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda}\right) + 1/2$$

$$e = d + \frac{\lambda\,\lambda_1}{2\,(\lambda - \lambda_1)}.$$

Zur Bestimmung der Schnittpunkte der Kurve mit der Axe über C_1 hinaus hat man ausser der Gleichung 2 noch folgende

$$e - e_1 = d.$$

Man findet durch Kombination derselben:

$$e = d + 1/2\,\frac{\lambda\,\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}.$$

Die Kurven 3 und 4 verlaufen denen von 1 und 2 ähnlich. Die Form und Lage derselben ist daher bekannt, sobald die der letzten gegeben ist.

Die Gleichung der Kurven 3 kann auch folgendermassen geschrieben werden, wenn man beachtet

$$\frac{c}{c_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda}$$

$$\frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e}{\lambda} - \frac{\lambda^2}{2\,\lambda_1^2}\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,e} = \frac{\lambda}{2\,\lambda_1\,m_1}$$

$$\Big(r\,(m + m_1) - l\,(m - m_1)\Big).$$

Da sich ferner verhält

$$\frac{T}{T_1} = \frac{\lambda^2}{\lambda_1^2},$$

so kann man die letzte Gleichung auch schreiben:

$$-\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} - \frac{T}{T_1}\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{4\,d\,e} = \frac{\lambda}{2\,\lambda_1\,m_1}$$

$$\Big(r\,(m + m_1) - l\,(m - m_1)\Big).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Schnittpunkte dieser Kurve mit der Axe findet man ebenso wie vorher. Man hat sie zu verbinden mit den Gleichungen:

$$e + e_1 = d$$

$$e - e_1 = d$$

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \frac{T}{T_1}\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{4\,d\,e} = \frac{\lambda}{2\,\lambda_1\,m_1}$$

$$\Big(r(m + m_1) - l\,(m - m_1)\Big)$$

$$\frac{d - e}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \frac{T}{T_1}\,\frac{e^2 - (d - e)^2 + d^2}{4\,d\,e} = \frac{\lambda}{2\lambda_1\,m}$$

$$\Big(r\,(m + m_1) - l\,(m - m_1)\Big)$$

$$e\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\lambda}{2\,\lambda_1\,m_1}\Big(l(m - m_1) - r(m + m)\Big)$$

$$+ \frac{d}{\lambda_1} - \frac{T}{2\,T_1}$$

$$e\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{d}{\lambda_1} + \frac{T}{2\,T_1} + \lambda/2\,\lambda_1\,m_1$$

$$\Big(r\,(m + m_1) - l(m - m_1)\Big).$$

Jede der Kurven schneidet links und rechts von C_1 die Axe einmal, sie sind vom 6. Grade, daher müssen sie die Gestalt wie in Figur annehmen.

Wir kommen schliesslich zu der Bestimmung der Geschwindigkeit eines Wellenberges auf der Kurve 3 und gehen dabei von folgenden drei Gleichungen aus:

$$\frac{e_1}{\lambda} - \frac{e}{\lambda_1} - \lambda/2\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e} = l.$$

$$\frac{e_1}{\lambda} + \frac{e}{\lambda_1} + \lambda/2\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e} = r.$$

$$\frac{e_1}{\lambda_1} - \frac{e}{\lambda} - \lambda/2\,\frac{e^2 - e_1^2 + d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e} = k.$$

Wir differenzieren diese drei Gleichungen und erhalten $\delta\,e$; $\delta\,e_1$ sei das Differenzial von e bzw. e_1

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{\delta e_1}{\lambda} + \frac{\delta e}{\lambda_1} + \lambda/2$$

$$\frac{4 d \lambda_1 e^2 \delta e - 4 \lambda_1 d e e_1 \delta e_1 - 2 \lambda_1 d e^2 \delta e + 2 \lambda_1 d e_1^2 \delta e - 2 d^3 \lambda_1 \delta e}{4 d^2 \lambda_1^2 e^2} = 0$$

$$\delta e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{e^2 + e_1^2 - d^2}{2 d \lambda_1 e^2} \right) + \delta e_1 \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda/2 \frac{2 e e_1}{2 d \lambda_1 e^2} \right) = 0$$

$$\frac{\delta e}{\delta e_1} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda e_1}{2 d \lambda_1 e}}{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2 d \lambda_1 e^2}}$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\frac{d \varsigma \cos \gamma}{d \varsigma \cos \delta} = \frac{\cos \gamma}{\cos \delta}$.

Vertauscht man e mit — e, so erhält man

$$\frac{\delta e}{\delta e_1} = \frac{\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda e_1}{2 d \lambda_1 e}}{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2 d \lambda_1 e^2}} = \frac{d \varsigma_1 \cos \alpha_1}{d \varsigma_1 \cos \beta_1} = \frac{\cos \alpha_1}{\cos \beta_1}$$

Durch Differenziation erhält man aus der 3. Gleichung:

$$\delta e_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{2 d e \sqrt{T_1}}{e_1 \sqrt{T}} \right) - \delta e$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\sqrt{T}}{4 \sqrt{T_1} d} + \frac{\sqrt{T}}{4 \sqrt{T_1} d} \frac{e_1^2}{e^2} + \frac{\sqrt{T} d}{4 \sqrt{T_1} e^2} \right) = 0$$

$$\frac{\delta e}{\delta e_1} = \frac{\frac{1}{\lambda_1} - \frac{e_1 \sqrt{T}}{2 d e \sqrt{T_1}}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\sqrt{T}}{4 \sqrt{T_1}} \left(\frac{1}{d} + \frac{e_1^2}{e^2 d} + \frac{d}{e^2} \right)}$$

Dieser Ausdruck ist gleich $\frac{d s \cos \alpha}{d s \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$.

Die Bedeutungen der eingeführten Zeichen ist folgende: d s bedeutet ein Element der Kurve 3, α und β die Winkel, welche die Kurve mit e, e_1 bildet. $d \varsigma_1$ bedeutet ein Element der Kurve 1; α_1, β_1 die Winkel, welche diese Kurve

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

mit e, e_1 bilden; d ς bezeichnet ein Element der Kurve 2; α, β die Winkel, welche diese Kurven mit e, e_1 bilden. Die Quotienten rechts sind Funktionen von e, e_1, also variable Grössen.

Die cos der Winkel lassen sich als Funktionen von e, e_1 darstellen. Es ist nämlich:

$$e_1^2 = e^2 + d^2 - 2\,d\,e \cos\vartheta$$

$$\frac{e\,\delta\vartheta}{\delta e} = \operatorname{tg}\gamma.$$

Die erste Gleichung differenziert und durch δ e dividiert giebt

$$2\,e_1 \frac{\delta e_1}{\delta e} = 2\,e - 2\,d \cos\vartheta + 2\,d\,e \sin\vartheta \frac{\delta\vartheta}{\delta e}.$$

Der Wert von $\frac{\delta e_1}{\delta e}$ ist aus einer der vorhergehenden Gleichungen in diese einzusetzen, dadurch erhält man:

$$2\,e_1 \frac{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\,e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}} = 2\,e - 2\,d \cos\vartheta + 2\,d\,e \sin\vartheta \frac{\delta\vartheta}{\delta e}.$$

Hieraus folgt:

$$\operatorname{tg}\gamma = e \frac{\delta\vartheta}{\delta e} = \frac{e_1 \frac{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\,e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}} - e + d \cos\vartheta}{d \sin\vartheta.}$$

Für cos ϑ kann nun noch der Wert eingesetzt werden, dadurch erhält man:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{e_1 \frac{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\,e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}} - e + \frac{d^2 + e^2 - e_1^2}{2\,e}}{d \sin\vartheta}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Hieraus folgt:

$$\frac{1}{\cos^2\gamma} = d^2 \sin^2\vartheta + \frac{\left[-\frac{e_1}{\lambda_1} + \lambda/2\, e_1 \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\, d\, \lambda_1\, e^2} \Big/ \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda\, e_1}{2\, d\, \lambda_1\, e} \right) + \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\, e} \right]^2}{d^2 \sin^2\vartheta.}$$

Da nun auch $\sin\vartheta$ eine Funktion von e, e_1 ist, so erkennt man, dass $\cos\gamma$ nur von e, e_1 abhängig ist.

Der Wert für $\cos\delta$ ist durch diese Gleichung und

$$\frac{\cos\gamma}{\cos\delta} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda\, e_1}{2\, d\, \lambda_1\, e}}{-\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2 \; \frac{d^2 - e^2 - e_1^2}{2\, d\, \lambda_1\, e^2}}$$

zu bestimmen.

Auf entsprechende Weise werden die Werte der anderen cos gefunden, alle lassen sich als Funktionen von e, e_1 darstellen.

Nun ist

$$v^2 = \left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = \left(\frac{d\,\varsigma}{d\,t}\right)^2 + \left(\frac{d\,\varsigma_1}{d\,t}\right)^2 - 2\left(\frac{d\,\varsigma}{d\,t}\right)\left(\frac{d\,\varsigma_1}{d\,t}\right)\cos(\alpha + \delta).$$

Nun schreiten die Wellen 1a und 2a auf einander fort. Daher ist

$$\delta\, e \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2\, \frac{e^2 + e_1^2 - d^2}{2\, d\, \lambda_1\, e^2}\right) + \delta\, e_1 \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda/2\, \frac{2\, e\, e_1}{2\, d\, \lambda_1\, e^2}\right)$$
$$= \delta\, t\, (m + m_1).$$

Ferner

$$\delta\, e = \delta\, \varsigma_1 \cos\beta;\; \delta\, e_1 = \delta\, \varsigma_1 \cos\alpha,$$

daher

$$\frac{\delta\, \varsigma_1}{\delta\, t} = \frac{m + m_1}{\cos\beta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2\, \frac{e^2 + e_1^2 - d^2}{2\, d\, \lambda_1\, e^2}\right) + \cos\alpha \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda/2\, \frac{e_1}{2\, d\, \lambda_1\, e}\right)}$$

Ebenso erhält man den Wert für

$$\frac{\delta\, \varsigma}{\delta\, t} = \frac{m - m_1}{\cos\beta_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} + \lambda/2\, \frac{e^2 + e_1^2 - d^2}{2\, d\, \lambda_1\, e^2}\right) + \cos\alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda/2\, \frac{e_1}{2\, d\, \lambda_1\, e}\right)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und diese Werte in die Gleichung für v^2 eingesetzt, geben die Geschwindigkeit, mit welcher eine Wellenberg auf der Kurve 3 fortschreitet.

$$v^2 = \left[\frac{m - m_1}{\cos\beta_1\left(1/\lambda_1 + \lambda/2\,\frac{e^2 + e_1{}^2 - d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}\right) + \cos\alpha_1\left(1/\lambda + \lambda/2\,\frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}\right)}\right]^2 +$$

$$\left[\frac{m + m_1}{\cos\beta\left(1/\lambda_1 + \lambda/2\,\frac{e^2 + e_1{}^2 - d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}\right) + \cos\alpha\left(1/\lambda - \lambda/2\,\frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}\right)}\right]^2$$

$$- 2\,\frac{m - m_1}{\cos\beta_1\left(1/\lambda_1 + \lambda/2\,\frac{e^2 + e_1{}^2 - d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}\right) + \cos\alpha_1\left(1/\lambda + \lambda/2\,\frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}\right)}$$

$$\frac{m + m_1}{\cos\beta\left(1/\lambda_1 + \lambda/2\,\frac{e^2 + e_1{}^2 - d^2}{2\,d\,\lambda_1\,e^2}\right) + \cos\alpha\left(1/\lambda - \lambda/2\,\frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e}\right)}$$

$$\times \cos(\alpha + \delta).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und diese W… …tzt, geben die
Geschwindig… …f der Kurve 3
fortschreitet.

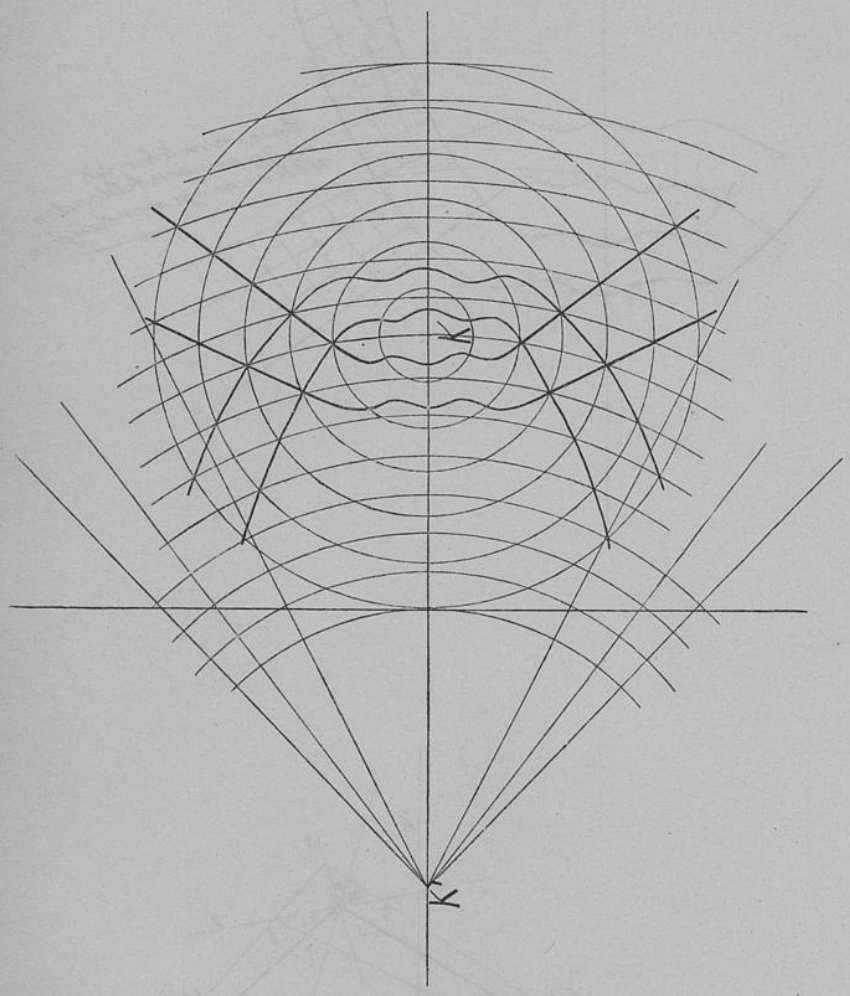
$$v^2 = \left[\frac{\quad}{\cos\beta_1 \left(1/\lambda \quad \lambda/2 \, \frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e} \right)} \right]^2 +$$

$$\left[\frac{\quad}{\cos\beta \left(1/\lambda_1 \quad 2 \, \frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e} \right)} \right]^2$$

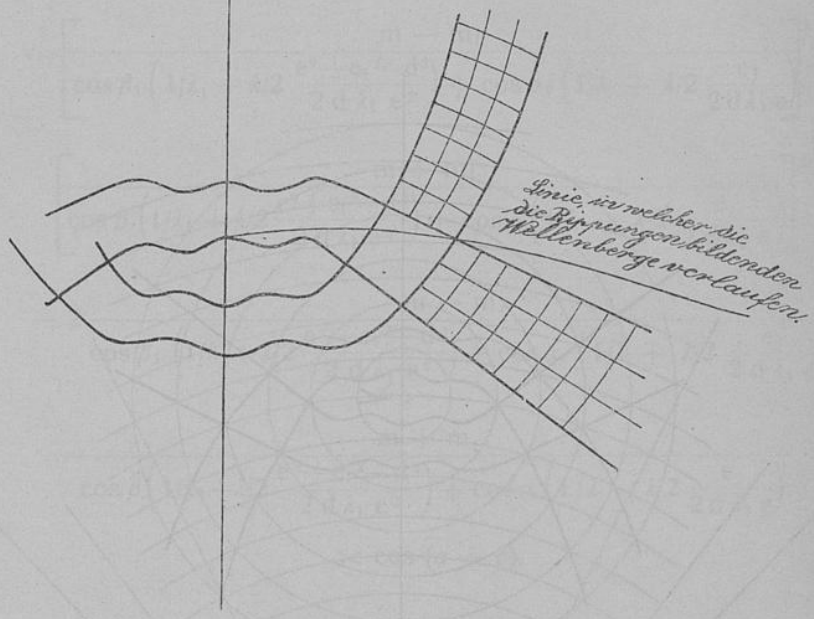
$$- 2 \, \frac{\quad}{\cos\beta_1 \left(1 \quad + \lambda/2 \, \frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e} \right)}$$

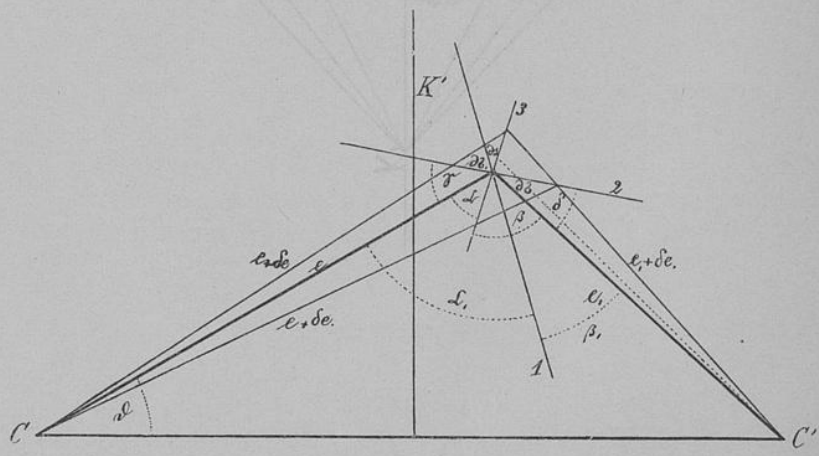
$$\frac{\quad}{\cos\beta \left(1/\lambda \quad \lambda/2 \, \frac{e_1}{2\,d\,\lambda_1\,e} \right)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf





Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf