3.
Einige Transversalen der merkwürdigen Punkte des Dreiecks.

Die Koordinaten der Mittelpunkte O, A′, B′, C′ der Berührungskreise des Dreiecks ABC sind beziehungsweise [1, 1, 1]; [−1, 1, 1];]1, −1, 1]; [1, 1, −1]. Für O ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a : b : c.$$

$$k = \varrho_0;\ k_1 = \varrho_a;\ k_2 = \varrho_b;\ k_3 = \varrho_c.$$

Die Gleichungen der Harmonikalen (Polaren) dieser Punkte sind:

$$\left.\begin{aligned} (A_1\ B_1\ A_1) &\equiv\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 0;\\ (B_0\ C_0) &\equiv -x_1 + x_2 + x_3 = 0;\\ (C_0\ A_0) &\equiv\ \ x_1 - x_2 + x_3 = 0;\\ (A_0\ B_0) &\equiv\ \ x_1 + x_2 - x_3 = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Die Abstände des Mittelpunktes M des dem Dreieck umschriebenen Kreises von den Dreieckseiten sind $r\cos\alpha$, $r\cos\beta$, $r\cos\gamma$; die Koordinaten von M sind daher $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$, und es ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma.$$

Die durch den Mittelpunkt des Umkreises und je einen Mittelpunkt eines Berührungskreises bestimmten Geraden werden in folgender Weise analytisch dargestellt:

$$(O\ M) \equiv x_1(\cos\beta - \cos\gamma) + x_2(\cos\gamma - \cos\alpha) + x_3(\cos\alpha - \cos\beta) = 0;$$

$$(A'M) \equiv x_1(\cos\beta - \cos\gamma) - x_2(\cos\gamma + \cos\alpha) + x_3(\cos\alpha + \cos\beta) = 0;$$

$$(B'M) \equiv x_1(\cos\beta + \cos\gamma) + x_2(\cos\gamma - \cos\alpha) - x_3(\cos\alpha + \cos\beta) = 0;$$

$$\begin{aligned}(C'M) \equiv -x_1(\cos\beta + \cos\gamma) &+ x_2(\cos\gamma + \cos\alpha)\\ &+ x_3(\cos\alpha - \cos\beta) = 0,\end{aligned} \qquad (33)$$

oder, in anderer Form:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{aligned}
(O\,M) \equiv\ & x_1 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta-\gamma}{2} + x_2 \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
& + x_3 \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0; \\
(A'\,M) \equiv\ & x_1 \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta-\gamma}{2} + x_2 \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
& - x_3 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0; \\
(B'\,M) \equiv\ & - x_1 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2} + x_2 \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
& + x_3 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0; \\
(C'\,M) \equiv\ & x_1 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2} - x_2 \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma-\alpha}{2} \\
& + x_3 \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

Die Gleichung für OM erhält man auch, wenn man das vom Punkte O auf die Gerade $A_1 B_1 C_1$ gefällte Lot entwickelt:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1 - \cos\beta - \cos\gamma, & 1 - \cos\gamma - \cos\alpha, & 1 - \cos\alpha - \cos\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Aus der Form dieser Determinante geht unmittelbar hervor, dass sie eine durch die Punkte $[1, 1, 1]$ und $[1 - \cos\beta - \cos\gamma, 1 - \cos\gamma - \cos\alpha, 1 - \cos\alpha - \cos\beta]$ bestimmte Gerade darstellt.

Um die Abstände x_1', x_2', x_3' des letzteren Punktes von den Seiten des Grunddreiecks zu bestimmen, gehe man von der Formel

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a\,(1 - \cos\beta - \cos\gamma) : b\,(1 - \cos\gamma - \cos\alpha) : c\,(1 - \cos\alpha - \cos\beta)$$

aus; dann findet man nach (6a), weil

$$a + b + c - (b + c)\cos\alpha - (c + a)\cos\beta - (a + b)\cos\gamma = 0,$$

$$k' = \infty.$$

Sonach liegt der durch x_1', x_2', x_3' dargestellte Punkt in unendlicher Entfernung.

Dies kommt bei der Bildung der Determinantengleichung aller auf $A_1 B_1 C_1$ senkrecht stehenden Geraden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in der Weise zum Ausdruck, dass die dritte Zeile der Determinanten immer die nämliche ist.

Man überzeugt sich leicht, dass die von den Punkten A', B', C' auf ihre Harmonikalen gefällten Senkrechten mit den Geraden $A'M$, $B'M$, $C'M$ zusammenfallen.

Die von den Mittelpunkten der vier Berührungskreise eines Dreiecks auf die entsprechenden Harmonikalen gefällten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkt des Umkreises. (Vergleiche »Harmonikalen etc.« des Verfassers, S. 30.)

Die Koordinaten des Mittelpunktes M' des Umkreises des durch die äusseren Berührungspunkte bestimmten Dreiecks sind (vergleiche »Harmonikalen etc.« des Verf., Seite 8) $[2r - \varrho_a, 2r - \varrho_b, 2r - \varrho_c]$, oder $[1 + \cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma, 1 - \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma, 1 - \cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma]$. Die Determinante der Koordinaten der Punkte O, M, M' ist, wie ihre Auflösung ergiebt, identisch Null.

Der Mittelpunkt des durch die Centra der äusseren Berührungskreise gelegten Kreises liegt auf der durch die Mittelpunkte des ein- und umschriebenen Kreises bestimmten Gerade. Letztere steht senkrecht auf der Harmonikale des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises.

Die Gerade OM ist die Polare des Punktes $[\cos\beta - \cos\gamma, \cos\gamma - \cos\alpha, \cos\alpha - \cos\beta]$, oder

$$\left[\frac{b-c}{a}\cos^2\frac{\alpha}{2}, \frac{c-a}{b}\cos^2\frac{\beta}{2}, \frac{a-b}{c}\cos^2\frac{\gamma}{2}\right];$$ daher ist

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = (b-c)\cos^2\frac{\alpha}{2} : (c-a)\cos^2\frac{\beta}{2} : (a-b)\cos^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\text{und } k\left(\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{b^2-c^2}{a} + \frac{c^2-a^2}{b}\right) = -4\Delta.$$

Dieser Punkt ist der Schnittpunkt der Polaren der Punkte O und M, wie man sich durch Bildung der Unterdeterminanten der Gleichungen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ und

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + x_3 \cos\gamma = 0 \qquad (35)$$

überzeugt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Abstände des Höhenschnittpunktes H von den Seiten des Dreiecks sind $2r\cos\beta\cos\gamma$, $2r\cos\gamma\cos\alpha$, $2r\cos\alpha\cos\beta$; daher ist:

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{\cos\alpha} : \frac{1}{\cos\beta} : \frac{1}{\cos\gamma};$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta : \operatorname{tg}\gamma.$$

Der Höhenschnittpunkt ist daher der Spiegelpunkt des Mittelpunktes des dem Dreieck umschriebenen Kreises, und die Polare des Punktes H

$$\frac{x_1}{\cos\alpha} + \frac{x_2}{\cos\beta} + \frac{x_3}{\cos\gamma} = 0 \qquad (36)$$

ist zugleich die Harmonikale des Punktes M.

Die Gleichungen der Höhen des Dreiecks sind (vergl. (24)):

$$(AH) \equiv x_2 \cos\beta - x_3 \cos\gamma = 0;$$
$$(BH) \equiv x_3 \cos\gamma - x_1 \cos\alpha = 0;$$
$$(CH) \equiv x_1 \cos\alpha - x_2 \cos\beta = 0.$$

Die Gleichung der durch die Punkte M und H bestimmten Gerade lautet:

$$(HM) \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \\ \cos\beta\cos\gamma, & \cos\gamma\cos\alpha, & \cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 0, \qquad (37)$$

oder, aufgelöst:

$$(HM) \equiv x_1 \sin 2\alpha \sin(\beta-\gamma) + x_2 \sin 2\beta \sin(\gamma-\alpha) + x_3 \sin 2\gamma \sin(\alpha-\beta) = 0,$$

oder

$$(HM) \equiv x_1 \sin\alpha(\sin 2\beta - \sin 2\gamma) + x_2 \sin\beta(\sin 2\gamma - \sin 2\alpha) + x_3 \sin\gamma(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) = 0.$$

Der allgemeine Ausdruck für die Länge einer vom Punkte $[p_1, p_2, p_3]$ auf die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ gefällten Senkrechte ist*)

$$\varkappa = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 a_2 a_3 \cos\alpha - 2 a_3 a_1 \cos\beta - 2 a_1 a_2 \cos\gamma}}. \qquad (38)$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Grössen p_1, p_2, p_3 die Abstände eines Punktes von den Seiten des Grunddreiecks bedeuten.

*) Hanner, Analytische Geometrie des Punktes, der Geraden und der Kegelschnitte. Prag 1891. Seite 134.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Abstand $\varkappa$ eines Punktes x_1', x_2', x_3' von der Gerade $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ist daher:

$$\varkappa = (x_1' + x_2' + x_3') \cdot \sqrt{\frac{r}{r - 2\varrho_0}}.$$

Führt man nun den in der Abhandlung des Verfassers: »Die Harmonikalen etc.« Seite 20 definierten Winkel ω ein, so ist:

$$\varkappa = \frac{x_1' + x_2' + x_3'}{\sin \omega}.$$

Der Abstand eines jeden Punktes M von der Gerade $A_1 B_1 C_1$ bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches durch eine Kathete und ihren Gegenwinkel bestimmt wird. Die Länge der Kathete ist gleich der Summe der Abstände des Punktes M von den Seiten des Dreiecks ABC. Ihr Gegenwinkel ist unveränderlich gleich ω. Demnach ist (vergl. »Harmonikalen etc.« Seite 21):

$$\varkappa_0 = \frac{3\,\varrho_0}{\sin \omega}. \tag{39}$$

Die vom Mittelpunkte M des umschriebenen Kreises auf die Gerade $A_1 B_1 C_1$ gefällte Senkrechte hat die Länge

$$\varkappa_m = \frac{3\,\varrho_0}{\sin \omega}. \tag{40}$$

Für die von den Geraden B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 gemessenen Abstände eines Punktes wird der Nenner des Bruches in (38) beziehungsweise gleich $\sqrt{\frac{r + 2\,\varrho_a}{r}}$, $\sqrt{\frac{r + 2\,\varrho_b}{r}}$, $\sqrt{\frac{r + 2\,\varrho_c}{r}}$ und kann durch $\frac{1}{\sin \omega_a}$, $\frac{1}{\sin \omega_b}$, $\frac{1}{\sin \omega_c}$ ersetzt werden, wobei die Winkel ω_a, ω_b, ω_c die in der Abhandlung über Harmonikalen, Seite 11, angegebene Bedeutung haben.

Die Gleichungen der Scheiteltransversalen des Punktes M sind:

$$(AM) \equiv \frac{x_2}{\cos \beta} - \frac{x_3}{\cos \gamma} = 0; \quad (BM) \equiv \frac{x_3}{\cos \gamma} - \frac{x_1}{\cos \alpha} = 0;$$

$$(CM) \equiv \frac{x_1}{\cos \alpha} - \frac{x_2}{\cos \beta} = 0. \tag{41}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Koordinaten des Schwerpunkts S der Dreiecksfläche sind $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]$ oder [bc, ca, ab], und sonach

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1.$$

Die Gleichung der Harmonikale des Schwerpunkts S

$$\left.\begin{array}{c} a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \text{ oder} \\ x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0 \end{array}\right\} \qquad (42)$$

stellt die unendlich ferne Gerade dar. (Vergl. Seite 14). Letzterer Gleichung kann man auch folgende Form geben:

$$x_1 \sin(\beta + \gamma) + x_2 \sin(\gamma + \alpha) + x_3 \sin(\alpha + \beta) = 0.$$

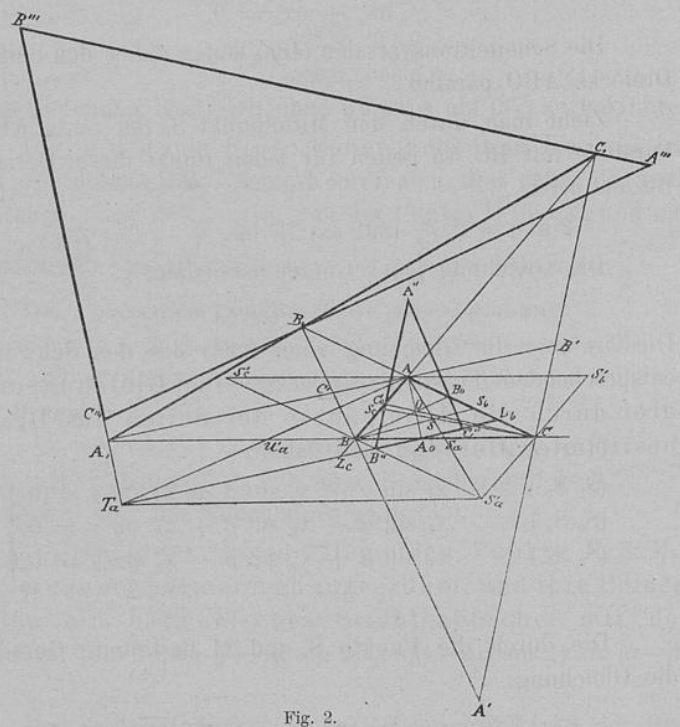

Fig. 2.

Die Schwerlinien (Fig. 2) haben die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} (AS_a) \equiv x_2 \sin\beta - x_3 \sin\gamma = 0; \\ (BS_b) \equiv x_3 \sin\gamma - x_1 \sin\alpha = 0; \\ (CS_c) \equiv x_1 \sin\alpha - x_2 \sin\beta = 0. \end{array}\right\} \qquad (43)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die den Schwerlinien in Beziehung auf die Dreieckseiten harmonisch zugeordneten Transversalen sind (Vergl. Formel (23)):

$$\left.\begin{aligned}(S_b' S_c') &\equiv x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0;\\ (S_c' S_a') &\equiv x_3 \sin\gamma + x_1 \sin\alpha = 0;\\ (S_a' S_b') &\equiv x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (43a)$$

Für jeden Punkt einer durch A zu BC parallel gezogenen Gerade ist einerseits

$$ax_1 = 2\triangle, \text{ andererseits}$$

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\triangle; \text{ folglich:}$$

$$bx_2 + cx_3 = 0.$$

Die Scheiteltransversalen (43a) laufen daher den Seiten des Dreiecks ABC parallel.

Zieht man durch den Mittelpunkt S_c der Seite AB eine Parallele mit BC, so gelten für jeden Punkt dieser Gerade die Beziehungen:

$$2\,ax_1 = 2\triangle \text{ und } ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\triangle.$$

Die Gleichung jener Gerade ist daher:

$$-ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Seite des den Schwerlinien entsprechenden Fusspunktsdreiecks. Die Gleichungen der drei durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks bestimmten Geraden sind daher:

$$\left.\begin{aligned}(S_b S_c) &\equiv -x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0;\\ (S_c S_a) &\equiv x_1 \sin\alpha - x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0;\\ (S_a S_b) &\equiv x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta - x_3 \sin\gamma = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

Die durch die Punkte S und M bestimmte Gerade hat die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \sin\beta \sin\gamma, & \sin\gamma \sin\alpha, & \sin\alpha \sin\beta \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Auflösung dieser Determinante erhält man die Gleichung für HM. (Vergl. Formel (37)):

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Punkte M, S, H liegen daher in einer Gerade. Diese Gerade steht senkrecht auf der Polare des Mittelpunktes des dem Dreieck umschriebenen Kreises, denn die Gleichung der vom Punkte H auf seine Harmonikale gefällten Senkrechte wird durch folgende Determinante dargestellt:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \cos\beta\cos\gamma, & \cos\gamma\cos\alpha, & \cos\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha - 2\cos\beta\cos\gamma, & \cos\beta - 2\cos\gamma\cos\alpha, & \cos\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x_1 \cos\alpha \begin{vmatrix} \cos\gamma, \cos\beta \\ \cos\beta, \cos\gamma \end{vmatrix} + x_2 \cos\beta \begin{vmatrix} \cos\alpha, \cos\gamma \\ \cos\gamma, \cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$+ x_3 \cos\gamma \begin{vmatrix} \cos\beta, & \cos\alpha \\ \cos\alpha, & \cos\beta \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich ohne weiteres auf (37) zurückführen.

Der Mittelpunkt F des Feuerbachschen Kreises halbiert die Strecke HM. Seine Koordinaten sind daher die arithmetischen Mittel der Koordinaten der Punkte H und M, und man findet für F: $[\cos(\beta-\gamma), \cos(\gamma-\alpha), \cos(\alpha-\beta)]$; $k = \frac{r}{2}$.

Die Polare des Punktes F hat die Gleichung:

$$x_1 \cos(\alpha-\beta) + x_2 \cos(\beta-\gamma) + x_3 \cos(\gamma-\alpha) = 0. \quad (45)$$

Addiert und subtrahiert man die Gleichungen der Polaren von H und S:

$$x_1 \cos\beta\cos\gamma + x_2 \cos\gamma\cos\alpha + x_3 \cos\alpha\cos\beta = 0,$$
$$x_1 \sin\beta\sin\gamma + x_2 \sin\gamma\sin\alpha + x_3 \sin\alpha\sin\beta = 0,$$

so ergeben sich die Gleichungen (45), (35).

Die in einer Gerade liegenden Punkte H, S, M, F sind einander harmonisch zugeordnet, und ihre Polaren bilden ein harmonisches Strahlenbüschel mit dem Scheitel $[\sin 2\alpha \sin(\beta-\gamma), \sin 2\beta \sin(\gamma-\alpha), \sin 2\gamma \sin(\alpha-\beta)]$.

Der Spiegelpunkt U des Schwerpunkts S der Dreiecksfläche hat die Koordinaten [a, b, c]. Für ihn ist

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a^2 : b^2 : c^2, \text{ und}$$

$$k = \frac{2\triangle}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \lambda,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn λ den später näher zu betrachtenden Brocardschen Winkel des Dreiecks ABC bedeutet.

Zur Ermittelung des Zusammenhanges der Punkte H, S und U mit den Winkelsymmetralen des Dreiecks gehe man von den Normalen aus, welche man in den Fusspunkten der Winkelsymmetralen auf dieselben errichtet.

Seien (Fig. 2) $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ und $B'''C'''$, $C'''A'''$, $A'''B'''$ die in A_0, B_0, C_0 und A_1, B_1, C_1 auf die Winkelsymmetralen errichteten Senkrechten, dann gelangt man zur Gleichung der Gerade $B''C''$, indem man berücksichtigt, dass $B''C''$ durch den Punkt A_0 [0, 1, 1] geht und der Gerade $B'C'$ $[x_2 + x_3 = 0]$ parallel läuft. Man findet:

$$2\,x_1 \sin\alpha + (x_2 - x_3)\,(\sin\beta - \sin\gamma) = 0,$$

oder in anderer Form, wenn man zugleich die beiden übrigen Seiten des Dreiecks $A''B''C''$ in Betracht zieht:

$$\left.\begin{aligned}(B''C'') &\equiv 2x_1\,a + (x_2 - x_3)\,(b - c) = 0;\\ (C''A'') &\equiv 2x_2\,b + (x_3 - x_1)\,(c - a) = 0;\\ (A''B'') &\equiv 2x_3\,c + (x_1 - x_2)\,(a - b) = 0,\end{aligned}\right\}\quad \text{oder} \tag{46}$$

$$(B''C'') \equiv 2x_1 \cos\frac{\alpha}{2} + (x_2 - x_3)\sin\frac{\beta - \gamma}{2} = 0;$$

$$(C''A'') \equiv 2x_2 \cos\frac{\beta}{2} + (x_3 - x_1)\sin\frac{\gamma - \alpha}{2} = 0;$$

$$(A''B'') \equiv 2x_3 \cos\frac{\gamma}{2} + (x_1 - x_2)\sin\frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Die letzte Form der Gleichung für $B''C''$ erhält man auch unmittelbar aus den Koordinaten der Punkte

A_0 [0, 1, 1] und $L_b\left[\sin\frac{\beta - \gamma}{2},\ 0,\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\right]$, nämlich

$$(B''C'') \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & 1, & 1 \\ \sin\frac{\beta - \gamma}{2}, & 0, & 2\cos\frac{\alpha}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen der Seiten des Dreiecks $A'''B'''C'''$ werden in analoger Weise entwickelt:

$$\left.\begin{aligned}(B'''C''') &\equiv 2x_1 a + (x_2 + x_3)\,(b + c) = 0;\\ (C'''A''') &\equiv 2x_2 b + (x_3 + x_1)\,(c + a) = 0;\\ (A'''B''') &\equiv 2x_3 c + (x_1 + x_2)\,(a + b) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Auch diesen Formeln kann man eine andere Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 \sin\frac{\alpha}{2} + (x_2 + x_3)\cos\frac{\beta-\gamma}{2} &= 0; \\ 2x_2 \sin\frac{\beta}{2} + (x_3 + x_1)\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} &= 0; \\ 2x_3 \sin\frac{\gamma}{2} + (x_1 + x_2)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Aus der Form der Gleichungen (46) und (47) geht hervor, dass die Geraden $B''C''$ und $B'''C'''$ durch den Schnittpunkt von $x_1 = 0$ und $x_2 - x_3 = 0$ beziehungsweise $x_1 = 0$ und $x_2 + x_3 = 0$ gehen; man erhält die erste jener Gleichungen in der That aus

$$x_1 + \varphi\,(x_2 - x_3) = 0,$$

wo φ in der Weise bestimmt wird, dass man die Koordinaten von $L_b\left[\sin\frac{\beta-\gamma}{2},\ 0,\ 2\cos\frac{\alpha}{2}\right]$ in diese Gleichung einsetzt; dann ist

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2} - \varphi.\ 2\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \text{oder } \varphi = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Verbindet man die Gleichungen

$$(B''C'') \equiv 2\,ax_1 + (b - c)(x_2 - x_3) = 0;$$
$$(B'''C''') \equiv 2\,ax_1 + (b + c)(x_2 + x_3) = 0$$

durch Addition, so erhält man:

$$2\,ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0. \tag{48}$$

Diese Gerade, welche durch den Schnittpunkt T_a der Geraden $B''C''$ und $B'''C'''$ geht, läuft der Dreieckseite BC im Abstande $x_1 = -h_a$ parallel. Für jeden Punkt einer solchen Parallele finden die Beziehungen statt:

$$ax_1 = -2\triangle \text{ und } ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2\triangle.$$

Aus der Verbindung dieser beiden Relationen folgt Gleichung (48). Dieselbe stellt die Gerade $S_a'\,T_a$ dar.

Da $T_aS_a' \parallel A_1A_0$, so muss der den Strahlen T_aA_1, T_aA_0, T_aS_a' zugeordnete vierte harmonische Strahl durch den Mittelpunkt der Strecke A_0A_1 gehen. Die Gleichung desselben folgt aus obigen Gleichungen durch Subtraktion und lautet:

$$cx_2 + bx_3 = 0 \text{ oder } \frac{x_2}{\sin\beta} + \frac{x_3}{\sin\gamma} = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Diese Gerade geht nach Voraussetzung durch Punkt T_a und, wie der Anblick der Formel lehrt, durch Punkt A, den Schnittpunkt der Geraden $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$, ist daher die Diagonale des Rechtecks $A A_0 T_a A_1$, halbiert $A_0 A_1$ im Punkte U_a' und bildet mit der Gerade BC den Winkel $\beta - \gamma$; sie teilt somit den Aussenwinkel B_1AB des Dreiecks ABC so, dass $BAU_a' = \gamma$ und $B_1AU_a' = \beta$.

Da nun der durch die Seite AB und den Radius AM des umschriebenen Kreises gebildete Winkel gleich $90^0 - \gamma$ ist, so steht AU_a' senkrecht auf AM. Analoge Beziehungen finden in betreff der Mittelpunkte U_b', U_c' der Strecken B_0B_1, C_0C_1 statt.

Die Gerade, welche man von dem Mittelpunkt der die Fusspunkte der Symmetralen eines Dreieckswinkels verbindenden Strecke nach dessen Scheitel zieht, berührt den Umkreis des Dreiecks in dem entsprechenden Eckpunkt.

Die Gleichungen der in den Ecken des Dreiecks an den Umkreis gezogenen Tangenten lauten daher:

$$(AU_a') \equiv \frac{x_2}{\sin\beta} + \frac{x_3}{\sin\gamma} = 0; \quad (BU_b') \equiv \frac{x_3}{\sin\gamma} + \frac{x_1}{\sin\alpha} = 0;$$

$$(CU_b') \equiv \frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{x_2}{\sin\beta} = 0. \tag{49}$$

Diese Formeln erhält man auch, wenn man die Gleichungen der in den Ecken des Dreiecks auf die Scheiteltransversalen des Kreismittelpunktes M errichteten Senkrechten bildet. (Vergl. Seite 18 und Formel (41)).

Man beachte, dass die Gleichung (48) durch Addition der beiden folgenden:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta = 0; \\ x_1 \sin\alpha + x_3 \sin\gamma = 0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

erhalten werden kann. Die Gerade $x_1 \sin\alpha + x_2 \sin\beta = 0$ geht durch Punkt C, die Gerade $x_3 \sin\gamma + x_1 \sin\alpha = 0$ dagegen durch Punkt B des Dreiecks ABC. Der Schnittpunkt beider Geraden hat die Koordinaten $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]$ und fällt mit S_a' zusammen. Die Gleichungen (50) stellen sonach die Geraden CS_a' und BS_a' dar.

Die den Geraden $S_a'B$, $S_a'C$, $S_a'T_a$ zugeordnete vierte harmonische hat die Gleichung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_2 \sin\beta - x_3 \sin\gamma = 0.$$

Es ist dies die Gleichung der Schwerlinie AS_a (siehe Formel (43). Die Koordinaten der Punkte U'_a, U'_b, U'_c sind beziehungsweise:

$$[0, \sin\beta, -\sin\gamma]; \; [-\sin\alpha, 0, \sin\gamma]; \; [\sin\alpha, -\sin\beta, 0].$$

Die Determinante derselben

$$\begin{vmatrix} 0, & \sin\beta, & -\sin\gamma \\ -\sin\alpha, & 0, & \sin\gamma \\ \sin\alpha, & -\sin\beta, & 0 \end{vmatrix}$$

ist identisch Null.

Die Mittelpunkte der Strecken A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 liegen in einer Gerade.

Die Gleichung derselben lautet:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0, & \sin\beta, & -\sin\gamma \\ -\sin\alpha, & 0, & \sin\gamma \end{vmatrix} = 0, \qquad (51)$$

oder
$$\frac{x_1}{\sin\alpha} + \frac{x_2}{\sin\beta} + \frac{x_3}{\sin\gamma} = 0,$$

oder
$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Harmonikale des Punktes U, des Spiegelpunktes des Flächenschwerpunktes, dar und ist somit die Polare des Punktes S. (Vergl. Seite 27). Die Polare des Punktes U ist die unendlich ferne Gerade. (Vergl. Seite 25.)

Errichtet man in den Fusspunkten der Winkelsymmetralen eines Dreiecks Senkrechte auf dieselben und verbindet deren Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Dreiecks, so werden die durch die Fusspunkte der Winkelhalbierenden bestimmten Strecken halbiert, und die Mittelpunkte dieser Strecken liegen in einer Gerade.

Die durch U und M bestimmte Gerade hat die Gleichung:

$$(UM) \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \sin\alpha, & \sin\beta, & \sin\gamma \\ \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0, \text{ oder} \qquad (52)$$

$$(UM) \equiv x_1 \sin(\beta-\gamma) + x_2 \sin(\gamma-\alpha) + x_3 \sin(\alpha-\beta) = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Gleichung des vom Punkte U auf seine Harmonikale gefällten Lotes:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a, & b, & c \\ \frac{1}{a} - \frac{\cos\gamma}{b} - \frac{\cos\beta}{c}, & \frac{1}{b} - \frac{\cos\alpha}{c} - \frac{\cos\gamma}{a}, & \frac{1}{c} - \frac{\cos\beta}{a} - \frac{\cos\alpha}{b} \end{vmatrix} = 0$$

ergiebt nach Auflösung der Determinante eine der Formel (52) identische:

$$(UM) \equiv x_1 \frac{b^2 - c^2}{a} + x_2 \frac{c^2 - a^2}{b} + x_3 \frac{a^2 - b^2}{c} = 0.$$

Die vom Punkte U auf seine Harmonikale gefällte Senkrechte geht durch den Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises.

Der Pol der Gerade (52) hat die Koordinaten $[\sin(\beta-\gamma), \sin(\gamma-\alpha), \sin(\alpha-\beta)]$ und ist der Schnittpunkt der unendlich fernen Gerade (42) mit der Harmonikale des Höhenschnittpunktes (35).

Weil nun:

$$a \sin(\beta-\gamma) + b \sin(\gamma-\alpha) + c \sin(\alpha-\beta) = 0, \text{ so folgt:}$$

$$k = \infty, \text{ wegen der Beziehung:}$$

$$k\,[a \sin(\beta-\gamma) + b \sin(\gamma-\alpha) + c \sin(\alpha-\beta)] = 2\triangle.$$

Der Pol der Gerade (52) liegt in unendlicher Entferung. (Vergl. S. 13.)

Der Schwerpunkt V des Dreiecksumfangs ist der Mittelpunkt des inneren Berührungskreises des durch die Fusspunkte der Schwerlinien gebildeten Dreiecks; er hat die Koordinaten: $\left[\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}\right]$, und es ist:

$$k = \frac{\varrho_0}{2};\ \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = b + c : c + a : a + b.$$

Die Harmonikale des Schwerpunkts V hat die Gleichung:

$$\frac{a}{b+c} \cdot x_1 + \frac{b}{c+a} \cdot x_2 + \frac{c}{a+b} \cdot x_3 = 0, \quad (53)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder (vergleiche Abhandlung des Verfassers: »Die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise«, Seite 15):

$$x_1 \sin \alpha_1 + x_2 \sin \beta_1 + x_3 \sin \gamma_1 = 0.$$

Die Gleichung der Gerade OV in Determinantenform ist:

$$(OV) \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \frac{b+c}{a}, & \frac{c+a}{b}, & \frac{a+b}{c} \end{vmatrix} = 0, \qquad (54)$$

oder aufgelöst:

$$(OV) \equiv x_1\, a\,(b-c) + x_2\, b\,(c-a) + x_3\, c\,(a-b) = 0,$$

$$\text{oder: } x_1 \sin^2\frac{\alpha}{2}\,(\cos\beta - \cos\gamma) + x_2 \sin^2\frac{\beta}{2}\,(\cos\gamma - \cos\alpha)$$

$$+ x_3 \sin^2\frac{\gamma}{2}\,(\cos\alpha - \cos\beta) = 0.$$

Die nämliche Gleichung findet man durch Auflösen der Determinante für die Gerade SV:

$$(SV) \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ \frac{1}{a}, & \frac{1}{b}, & \frac{1}{c} \\ \frac{b+c}{a}, & \frac{c+a}{b}, & \frac{a+b}{c} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Schwerpunkt der Dreiecksfläche, der Schwerpunkt des Dreiecksumfangs und der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises liegen in einer Gerade.

Der Pol der Gerade OV ist verwandt mit dem Pol $[b-c,\ c-a,\ a-b]$ der Gerade OU.

Der Spiegelpunkt $\mathfrak{V}$ des Schwerpunkts V des Dreiecksumfangs hat die Koordinaten $\left[\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right]$; daher ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{a^2}{b+c} : \frac{b^2}{c+a} : \frac{c^2}{a+b}, \text{ und } k = \frac{abc\,\varrho_0}{\mathfrak{P}(a^3+b^3+c^3+abc)},$$

wo $\mathfrak{P}$ die Seite 10 der »Harmonikalen etc. des Verfassers« angegebene Bedeutung hat.

Nun ist

$$(O\mathfrak{V}) \equiv x_1\,(b^2-c^2) + x_2\,(c^2-a^2) + x_3\,(a^2-b^2) = 0, \qquad (55)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

oder:

$$(O\mathfrak{V}) \equiv x_1 \sin\alpha \sin(\beta-\gamma) + x_2 \sin\beta \sin(\gamma-\alpha) + x_3 \sin\gamma \sin(\alpha-\beta) = 0,$$

oder:

$$(O\mathfrak{V}) \equiv \frac{x_1}{A_0 A_1} + \frac{x_2}{B_0 B_1} + \frac{x_3}{C_0 C_1} = 0.$$

Durch vorstehende Gleichung wird die Harmonikale eines Punktes der Dreiecksfläche dargestellt, dessen Koordinaten den durch die Fusspunkte der Winkelsymmetralen bestimmten Strecken proportional sind.

Für die Gerade U$\mathfrak{V}$ erhält man:

$$(U\mathfrak{V}) \equiv \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ a, & b, & c \\ \frac{a}{b+c}, & \frac{b}{c+a}, & \frac{c}{a+b} \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist aber, wie sich nach Auflösung der Determinante ergiebt, die Gleichung der Gerade UM (Formel (52)).

Punkt $\mathfrak{V}$ liegt sonach in der Gerade UM.

Der Mittelpunkt des Umkreises, der Spiegelpunkt des Flächenschwerpunkts und der Spiegelpunkt des Umfangsschwerpunkts eines Dreiecks liegen in einer Gerade. Dieselbe steht senkrecht auf der Polare des Flächenschwerpunkts.

Die Berührungspunkte des Kreises O teilen die Dreieckseiten im Verhältnis $\varrho_a : \varrho_b : \varrho_c$. Die Scheiteltransversalen dieser Punkte schneiden sich daher im Punkte $T\left[\frac{\varrho_a}{a}, \frac{\varrho_b}{b}, \frac{\varrho_c}{c}\right]$;

dann ist $k = \frac{2\triangle}{4r + \varrho_0}$.

Für $T \equiv \left[\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{\beta}{2}}, \frac{1}{\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right]$ erhält man die Gleichungen der inneren Berührungssehnen:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + x_2 \cos^2\frac{\beta}{2} + x_3 \cos^2\frac{\gamma}{2} &= 0; \\ x_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} - x_2 \cos^2\frac{\beta}{2} + x_3 \cos^2\frac{\gamma}{2} &= 0; \\ x_1 \cos^2\frac{\alpha}{2} + x_2 \cos^2\frac{\beta}{2} - x^3 \cos^2\frac{\gamma}{2} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (56)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In betreff der äusseren Berührungspunkte finden ähnliche Beziehungen statt.

Teilt man die Seiten des Dreiecks im umgekehrten Verhältnis der durch den inneren Berührungskreis gebildeten Tangentenabschnitte, so ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{\varrho_a} : \frac{1}{\varrho_b} : \frac{1}{\varrho_c},$$

und der Schnittpunkt T′ der Scheiteltransversalen hat die Koordinaten $\left[\frac{1}{a\varrho_a}, \frac{1}{b\varrho_b}, \frac{1}{c\varrho_c}\right]$; alsdann ist $k = 2\,\varrho_0 \triangle$. Für $T' \equiv \left[\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{2}}, \frac{1}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}\right]$ erhält man die Gleichung der Harmokale des Punktes T′:

$$\frac{x_1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{x_2}{\sin^2\frac{\beta}{2}} + \frac{x_3}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} = 0. \tag{57}$$

Addiert und subtrahiert man diese Gleichung und diejenige der Polare des Punktes T:

$$\frac{x_1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{x_2}{\cos^2\frac{\beta}{2}} + \frac{x_3}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} = 0, \tag{58}$$

so gelangt man zu der ersten der Gleichungen (32) bezw. (35).

Die Harmonikalen der Punkte T und T′, sowie die Polaren der Punkte O und M gehen durch einen Punkt und bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Die Spiegelpunkte der Punkte T und T′, der Mittelpunkt des einbeschriebenen und des umschriebenen Kreises liegen in der Polare des Punktes

$$[\cos\beta - \cos\gamma,\ \cos\gamma - \cos\alpha,\ \cos\alpha - \cos\beta].$$

Einen besonders merkwürdigen Punkt R des Dreiecks stellen die Koordinaten $[\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c]$ dar, für welchen $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = a\varrho_a : b\varrho_b : c\varrho_c$; $k = \frac{\varrho_0}{2r - \varrho_0}$ ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dieser Punkt liegt in der Gerade OM, denn seine Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 1, & 1, & 1 \\ \varrho_a, & \varrho_b, & \varrho_c \end{vmatrix} = 0,$$

stimmt nach einigen Umgestaltungen mit derjenigen von OM überein.

Die Harmonikale dieses Punktes ist:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{x_1}{\varrho_a} + \frac{x_2}{\varrho_b} + \frac{x_3}{\varrho_c} = 0, \\ \text{oder:}\quad &x_1 \cot\frac{\alpha}{2} + x_2 \cot\frac{\beta}{2} + x_3 \cot\frac{\gamma}{2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

Man bezeichne die Entfernung des Punktes $[\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c]$ von der Gerade $A_1B_1C_1$ mit $\varkappa'$, dann ergiebt sich für dieselbe (siehe Formel (38)):

$$\varkappa' = \frac{\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c}{\sin\omega} \cdot \frac{\varrho_0}{2r - \varrho_0} = \frac{4r + \varrho_0}{\sin\omega} \cdot \frac{\varrho_0}{2r - \varrho_0}. \qquad (60)$$

Die Summe der von den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise auf die Gerade $A_1B_1C_1$ gefällten Lote (vergl. »Harmonikalen etc.« des Verfassers, Seite 19) ist aber:

$$\varkappa_{a'} + \varkappa_{b'} + \varkappa_{c'} = \frac{4r + \varrho_0}{\sin\omega},$$

und daher:

$$\varkappa' = (\varkappa_{a'} + \varkappa_{b'} + \varkappa_{c'}) \cdot \frac{\varrho_0}{2r - \varrho_0}.$$

Der Spiegelpunkt $\mathfrak{R}$ des Punktes R hat die Koordinaten $\left[\frac{1}{\varrho_a}, \frac{1}{\varrho_b}, \frac{1}{\varrho_c}\right]$, und es ist:

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{a}{\varrho_a} : \frac{b}{\varrho_b} : \frac{c}{\varrho_c};$$

$$k = 4\triangle^2 : (-a^2 - b^2 - c^2 + 2bc + 2ca + 2ab).$$

Die Punkte T und R sind verwandte Punkte, desgleichen die Punkte T′ und $\mathfrak{R}$.

Die Harmonikale des Punktes $\mathfrak{R}$ hat die Gleichung:

$$x_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + x_2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + x_3 \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 0. \qquad (61)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (59) und (61) erhält man:

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} + \frac{x_3}{c} = 0,$$

$$\frac{x_1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{x_2}{\operatorname{tg}\beta} + \frac{x_3}{\operatorname{tg}\gamma} = 0.$$

Die Polaren des Flächenschwerpunkts S, der Punkte R, $\mathfrak{R}$, sowie des Punktes $[\cot\alpha, \cot\beta, \cot\gamma]$ bilden ein harmonisches Strahlenbüschel mit dem Scheitel $[(\cos\beta - \cos\gamma)\operatorname{tg}\alpha,\ (\cos\gamma - \cos\alpha)\operatorname{tg}\beta,\ (\cos\alpha - \cos\beta)\operatorname{tg}\gamma]$.

Die Punkte S, R, $\mathfrak{R}$ und $[\cot\alpha, \cot\beta, \cot\gamma]$ liegen in einer Gerade und sind einander harmonisch zugeordnet.

Der dem Punkte V verwandte Punkt $[b+c, c+a, a+b]$ hat die Polare

$$x_1(b+c) + x_2(c+a) + x_3(a+b) = 0. \qquad (62)$$

Addiert und subtrahiert man zu dieser Gleichung diejenige der Polare des Punktes U d. i. $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$, so erhält man die erste der Gleichungen (32) beziehungsweise (59).

Die vier Punkte $[b+c, c+a, a+b]$, U, O, R liegen daher in einer Gerade und sind einander harmonisch zugeordnet.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Polaren der Punkte $[b+c, c+a, a+b]$, O, R, parallel sind, da die Polare von U die unendlich ferne Gerade darstellt.

Die Gleichung der Polare des dem Punkte U verwandten Punktes $[\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma]$ verbinde man durch Addition und Subtraktion mit derjenigen der Polare des Punktes $[\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma]$, dann ist:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

$$x_1\cos 2\alpha + x_2\cos 2\beta + x_3\cos 2\gamma = 0.$$

Die Punkte O; $[\sin^2\alpha, \sin^2\beta, \sin^2\gamma]$; $[\cos^2\alpha, \cos^2\beta, \cos^2\gamma]$; $[\cos 2\alpha, \cos 2\beta, \cos 2\gamma]$ liegen in einer Gerade, sind einander harmonisch zugeordnet, und ihre Polaren gehen durch den Scheitel $[\sin\alpha\sin(\beta-\gamma),\ \sin\beta\sin(\gamma-\alpha),\ \sin\gamma\sin(\alpha-\beta)]$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einen merkwürdigen Punkt des Dreiecks, den sogenannten Brocardschen Punkt, erhält man, wenn in Formel (8) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ gesetzt wird.

Alsdann ist:

$$\sin^3 \lambda = \sin(\alpha - \lambda) \sin(\beta - \lambda) \sin(\gamma - \lambda).$$

Betrachtet man λ als Unbekannte, so folgt aus vorstehender Gleichung:

$$\cot \lambda = \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \triangle}; \text{ daher ist:}$$

$$\sin \lambda = \frac{2 \triangle}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}.$$

Wird der Wert von $\cot \lambda$ in die Formeln (10) eingesetzt, so gehen dieselben in die folgenden über:

$$\cot \mu_1 = -\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma;$$
$$\cot \mu_2 = \cot \alpha - \cot \beta + \cot \gamma;$$
$$\cot \mu_3 = \cot \alpha + \cot \beta - \cot \gamma.$$

Für die Verhältnisse der durch die Scheiteltransversalen bestimmten Seitenabschnitte findet man, (nach Formel (7)):

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{a^2}{c^2}; \quad \frac{b_3}{b_1} = \frac{b^2}{a^2}; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

Die Abstände des Schnittpunkts der Scheiteltransversalen von den Seiten des Dreiecks sind:

$$p_1' = \frac{c}{\sin \beta} \sin^2 \lambda; \quad p_2' = \frac{a}{\sin \gamma} \sin^2 \lambda; \quad p_3' = \frac{b}{\sin \alpha} \sin^2 \lambda;$$

daher sind die Koordinaten des Brocardschen Punktes:

$$\left[\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}\right]; \text{ und es ist:}$$

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2} : \frac{1}{a^2}; \quad k = 2r \sin^2 \lambda.$$

Die Gleichung der Polare des Brocardschen Punktes ist:

$$\frac{c}{b} x_1 + \frac{a}{c} x_2 + \frac{b}{a} x_3 = 0, \tag{63}$$

diejenige der Polare des Spiegelpunktes:

$$\frac{b}{c} x_1 + \frac{c}{a} x_2 + \frac{a}{b} x_3 = 0. \tag{64}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ähnliche Beziehungen ergeben sich für die drei dem Punkte P zugeordneten Schnittpunkte der äussern Transversalen.

Durch Subtraktion der vorstehenden beiden Gleichungen folgt:

$$x_1\, a\,(b^2-c^2) + x_2\, b\,(c^2-a^2) + x_3\, c\,(a^2-b^2) = 0, \qquad (65)$$

oder:

$$x_1 \sin^2\alpha \sin(\beta-\gamma) + x_2 \sin^2\beta \sin(\gamma-\alpha) + x_3 \sin^2\gamma \sin(\alpha-\beta) = 0,$$

oder:

$$x_1 \sin\alpha\,(\cos 2\,\beta - \cos 2\,\gamma) + x_2 \sin\beta\,(\cos 2\,\gamma - \cos 2\,\alpha) + x_3 \sin\gamma\,(\cos 2\,\alpha - \cos 2\,\beta) = 0.$$

Dies ist die Gleichung für SU. (Vergleiche Formel (16), Seite 10). Der Pol der Gerade O$\mathfrak{W}$ (Formel (55)) ist sowohl dem Pol der Gerade SU als auch dem Pol der Gerade UM (vergl. Seite 32) verwandt.

Die durch den Schwerpunkt der Dreiecksfläche und seinen Spiegelpunkt bestimmte Gerade geht durch den Schnittpunkt der Polaren des Brocardschen Punktes und seines Spiegelpunktes.

Der Pol der durch den Brocardschen Punkt und seinen Spiegelpunkt bestimmten Gerade liegt auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes der Dreiecksfläche mit seinem Spiegelpunkt.

Die Lehre von den merkwürdigen Punkten des Dreiecks erfährt durch Einführung der Spiegelpunktskurve der Gerade in Beziehung auf das Dreieck und der die Seiten des Dreiecks in den Fusspunkten der Scheiteltransversalen eines Punktes berührenden »Fusspunktskurve« einen gewissen Abschluss. In einer später zu veröffentlichenden Abhandlung sollen die dem Dreieck umschriebenen Spiegelpunktskurven und die einbeschriebenen Fusspunktskurven näher betrachtet werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Berichtigung.

S. 7. Z. 1 und S. 8. Z. 13 lies: A', B', C' statt $[A', B', C']$.

S. 13. Z. 8 und 11 v. u. lies: A_1', B_1', C_1' statt A_1, B_1, C_1.

S. 14. Z. 16 lies: Gerade statt Grade.

S. 22. Z. 20 lies: einbeschriebenen statt ein-.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beri

S. 7. Z. 1 und S. 8. Z. 13 li

S. 13. Z. 8 und 11 v. u. lie

S. 14. Z. 16 lies: Gerade sta

S. 22. Z. 20 lies: einbeschri

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf