2.

Spiegelpunkt, Harmonikale, Polare und Spiegelpunktskurve eines Punktes in Bezug auf das Dreieck.

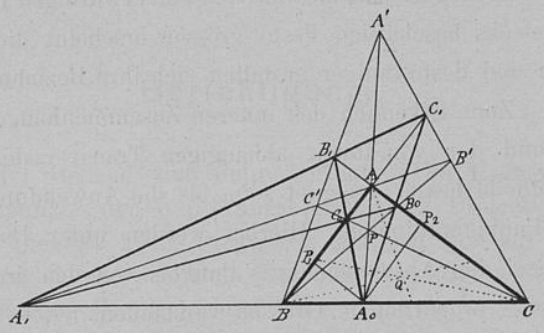

Fig. 1.

Seien (Fig. 1) im Grunddreieck ABC = △ die Seiten BC = a, CA = b, AB = c und die Winkel beziehungsweise α, β, γ, dann lauten die Gleichungen der Seiten BC, CA, AB:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0. \tag{1}$$

Man nehme innerhalb des Dreiecks einen Punkt P mit den Koordinaten $[p_1, p_2, p_3]$ an und ziehe die durch denselben bestimmten Scheiteltransversalen AA_0, BB_0, CC_0.

Die Gleichungen derselben lauten:

$$\left.\begin{aligned} (AA_0) &\equiv \frac{x_2}{p_2} - \frac{x_3}{p_3} = 0; \\ (BB_0) &\equiv \frac{x_3}{p_3} - \frac{x_1}{p_1} = 0; \\ (CC_0) &\equiv \frac{x_1}{p_1} - \frac{x_2}{p_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Diese drei linearen Formen befinden sich in linearer Abhängigkeit, ein Beweis dafür, dass die durch sie dargestellten Geraden durch einen Punkt gehen, und die Determinante der Koeffizienten dieser Gleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{vmatrix} 0, & \frac{1}{p_2}, & -\frac{1}{p_3} \\ -\frac{1}{p_1}, & 0, & \frac{1}{p_3} \\ \frac{1}{p_1}, & -\frac{1}{p_2}, & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{p_1\, p_2\, p_3}\right)^2 . \begin{vmatrix} 0, & p_3, & -p_2 \\ -p_3, & 0, & p_1 \\ p_2, & -p_1, & 0 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

ist identisch Null.

Bezeichnet man die auf den Seiten bestimmten Abschnitte

$$BA_0,\ CA_0;\ CB_0,\ AB_0,;\ AC_0,\ BC_0$$

mit $\qquad a_3,\quad a_2;\quad b_1,\quad b_3;\quad c_2,\quad c_1$

und fällt vom Punkte A_0 die Lote $A_0 P_2$, $A_0 P_3$ auf die Seiten CA, AB, so sind die Koordinaten desselben $[0, p_2, p_3]$, und man hat

$$A_0 P_2 = a_2 \sin\gamma,\ A_0 P_3 = a_3 \sin\beta, \text{ folglich}$$

$$A_0 P_2 : A_0 P_3 = p_2 : p_3 = \frac{a_2}{b} : \frac{a_3}{c}.$$

Für die Koordinaten $[p_1, 0, p_3]$; $[p_1, p_2, 0]$ der Punkte B_0,C_0 ist

$$p_3 : p_1 = \frac{b_3}{c} : \frac{b_1}{a};\ p_1 : p_2 = \frac{c_1}{a} : \frac{c_2}{b},$$

$$\text{und daher } p_1 : p_2 : p_3 = \frac{a_3\, b_1\, c_1}{a} : \frac{a_3\, b_1\, c_2}{b} : \frac{a_3\, b_3\, c_1}{c}.$$

Unter Beachtung dieser Verhältnisse der Koordinaten des Punktes P geht die Determinante (3) in die folgende über:

$$\begin{vmatrix} 0, & a_3, & -a_2 \\ -b_3, & 0, & b_1 \\ c_2, & -c_1, & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder } a_3\, b_1\, c_2 = a_2\, b_3\, c_1. \qquad (4)$$

Dies ist daher die Bedingung dafür, dass drei Transversalen des Dreiecks durch einen Punkt gehen.

Setzt man nun

$$\xi_1 = a_3\, b_1\, c_1;\ \xi_2 = a_3\, b_1\, c_2 = a_2\, b_3\, c_1;\ \xi_3 = a_3\, b_3\, c_1,$$

dann ist

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{\xi_1}{a} : \frac{\xi_2}{b} : \frac{\xi_3}{c}. \qquad (5)$$

Die Grössen ξ_1, ξ_2, ξ_3 sind proportional den Flächen ap_1, bp_2, cp_3.

Vorstehende Formel ermöglicht es, die Koordinaten eines Punktes der Ebene des Dreiecks durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Verhältnisse der von den zugehörigen Scheiteltransversalen gebildeten Abschnitte der Dreieckseiten auszudrücken, und umgekehrt.

Zur Ermittelung der Abstände p_1', p_2', p_3' des Punktes P von den Seiten des Dreiecks ABC setze man

$$p_1' = k \cdot p_1; \quad p_2' = k \cdot p_2; \quad p_3' = k \cdot p_3,$$

wobei k eine unveränderliche Grösse darstellt.

Dann findet man den Proportionalitätsfaktor aus der Relation:

$$k\,(ap_1 + bp_2 + cp_3) = 2\triangle. \tag{6}$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass

$$k'\,(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) = 2\triangle. \tag{6a}$$

Führt man die von den Scheiteltransversalen und den Dreieckseiten eingeschlossenen Winkel ein und setzt

$\sphericalangle A_0AB = \lambda_1$, $\sphericalangle B_0BC = \lambda_2$, $\sphericalangle C_0CA = \lambda_3$, dann ist

$$p_2 : p_3 = \sin(\alpha - \lambda_1) : \sin\lambda_1; \quad p_3 : p_1 = \sin(\beta - \lambda_2) : \sin\lambda_2;$$

$$p_1 : p_2 = \sin(\gamma - \lambda_3) : \sin\lambda_3$$

und

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= \frac{b.\sin(\alpha-\lambda_1)}{\sin(\beta+\lambda_1)}; \quad b_3 = \frac{c.\sin(\beta-\lambda_2)}{\sin(\gamma+\lambda_2)}; \quad c_1 = \frac{a.\sin(\gamma-\lambda_3)}{\sin(\alpha+\lambda_3)}; \\ a_3 &= \frac{c.\sin\lambda_1}{\sin(\beta+\lambda_1)}; \quad b_1 = \frac{a.\sin\lambda_2}{\sin(\gamma+\lambda_2)}; \quad c_2 = \frac{b.\sin\lambda_3}{\sin(\alpha+\lambda_3)}; \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{b.\sin(\alpha-\lambda_1)}{c.\sin\lambda_1}; \quad \frac{b_3}{b_1} = \frac{c.\sin(\beta-\lambda_2)}{a.\sin\lambda_2}; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a.\sin(\gamma-\lambda_3)}{b.\sin\lambda_3},$$

wobei zu beachten ist, dass

$$\sin\lambda_1 \cdot \sin\lambda_2 \cdot \sin\lambda_3 = \sin(\alpha - \lambda_1) \cdot \sin(\beta - \lambda_2) \cdot \sin(\lambda - \gamma_3). \tag{8}$$

Die Seiten des Fusspunktsdreiecks $A_0\,B_0\,C_0$ haben die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (B_0\,C_0) &\equiv -\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0 \\ (C_0\,A_0) &\equiv \frac{x_1}{p_1} - \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0 \\ (A_0\,B_0) &\equiv \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} - \frac{x_3}{p_3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Koordinaten der Schnittpunkte $[A_1, B_1, C_1]$ dieser drei Geraden mit den verlängerten entsprechenden Dreieckseiten sind beziehungsweise:

$$[0, p_2, -p_3], \; [-p_1, 0, p_3], \; [p_1, -p_2, 0].$$

Die Punkte A_1, B_1, C_1 teilen die Dreieckseiten BC, CA, AB so, dass

$$A_0 B : A_0 C = A_1 B : A_1 C; \; B_0 C : B_0 A = B_1 C : B_1 A;$$
$$C_0 A : C_0 B = C_1 A : C_1 B$$

und sind den Punkten A_0, B_0, C_0 in Beziehung auf die entsprechenden Ecken des Dreiecks harmonisch zugeordnet.

Setzt man

$$\sphericalangle A_1 A B = \mu_1; \quad \sphericalangle B_1 B C = \mu_2; \quad \sphericalangle C_1 C A = \mu_3,$$

dann finden die folgenden Proportionen statt:

$$\sin \lambda_1 : \sin (\alpha - \lambda_1) = \sin \mu_1 : \sin (\alpha + \mu_1);$$
$$\sin \lambda_2 : \sin (\beta - \lambda_2) = \sin \mu_2 : \sin (\beta + \mu_2);$$
$$\sin \lambda_3 : \sin (\gamma - \lambda_3) = \sin \mu_3 : \sin (\gamma + \mu_3).$$

Nach einigen Umgestaltungen erhält man hieraus:

$$2 \cot \alpha = \cot \lambda_1 - \cot \mu_1; \; 2 \cot \beta = \cot \lambda_2 - \cot \mu_2;$$
$$2 \cot \gamma = \cot \lambda_3 - \cot \mu_3. \tag{10}$$

Die Punkte A_1, B_1, C_1 liegen in einer Gerade, denn die Determinante ihrer Koordinaten

$$\begin{vmatrix} 0, & p_2, & -p_3 \\ -p_1, & 0, & p_3 \\ p_1, & -p_2, & 0 \end{vmatrix}$$

ist identisch Null. (Vergleiche (3)).

Die Gleichung dieser Gerade lautet:

$$(A_1 B_1 C_1) \equiv \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0. \tag{11}$$

Dies ist aber, wie ihre Form lehrt, die Harmonikale des Punktes P.

Die durch die Punkte A_1, B_1, C_1 und die entsprechenden Ecken A, B, C des Grunddreiecks bestimmten Geraden haben die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} (A A_1) &\equiv \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0 \\ (B B_1) &\equiv \frac{x_3}{p_3} + \frac{x_1}{p_1} = 0 \\ (C C_1) &\equiv \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sind den Scheiteltransversalen AA_0, BB_0, CC_0 in Beziehung auf je zwei Seiten des Dreiecks harmonisch zugeordnet.

Verbindet man die Formeln (2) und (12) durch Addition und Subtraktion, wie folgt, so erhält man:

$$(AA_0) + (BB_1) - (CC_1) = 0; \quad (BB_0) + (CC_1) - (AA_1) = 0;$$
$$(CC_0) + (AA_1) - (BB_1) = 0.$$

Da sich je drei lineare Formen in linearer Abhängigkeit befinden, so folgt, dass die durch sie dargestellten drei Geraden durch je einen Punkt gehen.

Je zwei äussere und eine entsprechende innere Scheiteltransversale schneiden sich in einem Punkt.

Die Koordinaten der Schnittpunkte $[A', B', C']$ der Transversalen (12) sind:

$$[-p_1, p_2, p_3]; \quad [p_1, -p_2, p_3]; \quad [p_1, p_2, -p_3].$$

Haben die den Punkten A', B', C' zugehörigen Grössen k_1, k_2, k_3 eine der Konstante k entsprechende Bedeutung, sodass

$$k_1 = \frac{2\triangle}{-\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}; \quad k_2 = \frac{2\triangle}{\xi_1 - \xi_2 + \xi_3};$$
$$k_3 = \frac{2\triangle}{\xi_1 + \xi_2 - \xi_3},$$

dann ist

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}.$$

Die Gleichungen (9) stellen die Harmonikalen der Punkte A', B', C' dar.

Dem innerhalb des Dreiecks liegenden Punkt P entsprechen drei ausserhalb liegende Punkte, deren Koordinaten dem absoluten Werte nach mit denen des ursprünglichen Punktes übereinstimmen und nur in betreff der Vorzeichen von einander abweichen.

Die vier den Punkten P, A', B', C' entsprechenden Harmonikalen des Dreiecks ABC bilden ein vollständiges Vierseit mit den Scheiteln A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1, den Fusspunkten der inneren und äusseren Scheiteltransversalen des Punktes P. Die Ecken A, B, C des Dreiecks

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sind die Nebenscheitel dieses Vierseits, während die Geraden AB, BC, CA die Diagonalen desselben darstellen.

Liegt der Punkt P ausserhalb des Dreiecks ABC, dann konstruiert man zunächst zwei äussere und eine innere Scheiteltransversale, verbindet die entstandenen Fusspunkte mit einander und zieht die drei zu den Schnittpunkten der Seiten des Fusspunktsdreiecks mit denjenigen des Grunddreiecks gehörenden Scheiteltransversalen.

Durch einen beliebigen Punkt in der Ebene des Dreiecks sind zugleich drei zugehörige Punkte bestimmt; einer dieser vier Punkte liegt innerhalb, die drei übrigen liegen ausserhalb des Dreiecks.

Jedem der vier von einander abhängigen Punkte entspricht eine Harmonikale; in jeder der vier Harmonikalen liegen drei Fusspunkte der dem ursprünglich angenommenen Punkt entsprechenden sechs Scheiteltransversalen.

Sei Q der Spiegelpunkt des Punktes P, dann bilden seine Scheiteltransversalen mit den Seiten AC, BA, CB beziehungsweise die Winkel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Die durch die Scheiteltransversalen bestimmten Abschnitte auf den Seiten des Dreiecks sind dann:

$$a_2' = \frac{b.\sin\lambda_1}{\sin(\gamma+\lambda_1)};\quad b_3' = \frac{c.\sin\lambda_2}{\sin(\alpha+\lambda_2)};\quad c_1' = \frac{a.\sin\lambda_3}{\sin(\beta+\lambda_3)};$$

$$a_3' = \frac{c.\sin(\alpha-\lambda_1)}{\sin(\gamma+\lambda_1)};\quad b_1' = \frac{a.\sin(\beta-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_2)};\quad c_2' = \frac{b.\sin(\gamma-\lambda_3)}{\sin(\beta+\lambda_3)},$$

folglich

$$\frac{a_2'}{a_3'} = \frac{b.\sin\lambda_1}{c.\sin(\alpha-\lambda_1)};\quad \frac{b_3'}{b_1'} = \frac{c.\sin\lambda_2}{a.\sin(\beta-\lambda_2)};\quad \frac{c_1'}{c_2'} = \frac{a.\sin\lambda_3}{b.\sin(\gamma-\lambda_3)}.$$

Seien $[q_1, q_2, q_3]$ die Koordinaten des Punktes Q, dann ist

$$q_2 : q_3 = \sin\lambda_1 : \sin(\alpha-\lambda_1) = \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}.$$

Die beiden übrigen Verhältnisse der Koordinaten werden entsprechend gebildet, und man erhält:

$$q_1 : q_2 : q_3 = \frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}. \tag{13}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Koordinaten eines Punktes sind denjenigen des Spiegelpunktes reciprok, und es sind mit den Koordinaten eines Punktes zugleich auch die Koordinaten des Spiegelpunktes bestimmt.

Bezeichnet man die Verhältnisse der durch die Scheiteltransversalen des Spiegelpunktes bestimmten Abschnitte auf den Dreieckseiten mit η_1, η_2, η_3, so findet folgende Beziehung statt:

$$q_1 : q_2 : q_3 = \frac{\eta_1}{a} : \frac{\eta_2}{b} : \frac{\eta_3}{c}.$$

Der Vergleich dieser Formel mit der vorhergehenden ergiebt:

$$\frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3} = \frac{\eta_1}{a} : \frac{\eta_2}{b} : \frac{\eta_3}{c}.$$

Unter Beachtung der Formel (5) folgt bei unveränderlichem m:

$$\frac{a}{\xi_1} = m\frac{\eta_1}{a},\ \frac{b}{\xi_2} = m\frac{\eta_2}{b},\ \frac{c}{\xi_3} = m\frac{\eta_3}{c} \text{ oder}$$

$$\eta_1 = m\frac{a^2}{\xi_1};\ \eta_2 = m\frac{b^2}{\xi_2};\ \eta_3 = m\frac{c^2}{\xi_3}. \tag{14}$$

Analoge Beziehungen ergeben sich für die Spiegelpunkte der äusseren Punkte.

Die Formeln (14) ermöglichen es, aus den Verhältnissen der durch die Scheiteltransversalen eines Punktes gebildeten Abschnitte auf den Dreieckseiten die Verhältnisse der durch die Scheiteltransversalen des Spiegelpunktes bestimmten Abschnitte auszudrücken.

Die Beziehung zwischen Punkt und Spiegelpunkt in Beziehung auf das Dreieck ist als ein specieller Fall der Steinerschen Verwandtschaft aufzufassen, welche von den in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel konjugierten Punktepaaren gebildet wird.

Nimmt man auf der Gerade BC einen beliebigen Punkt $[0, p_2, p_3]$ an, so hat der Spiegelpunkt desselben die Koordinaten $\left[1, \frac{0}{p_2}, \frac{0}{p_3}\right]$.

Dies ist aber das analytische Äquivalent des Punktes A. Der Richtungsquotient $\frac{x_2}{x_3}$ der Scheiteltransversalen, auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welchen Punkt A liegt, ist daher unbestimmt, und man hat sich im Punkte A unendlich viele Punkte übereinander gelagert zu denken, deren Koordinaten sich unterscheiden je nach Wahl des Verhältnisses $p_2 : p_3$.

Die Spiegelpunkte derjenigen Punkte, welche auf den Seiten des Dreicks ABC liegen, fallen mit den Gegenecken zusammen. Daraus ergiebt sich, dass umgekehrt den Ecken des Dreiecks sämtliche Punkte der entsprechenden Gegenseiten als Spiegelpunkte zugeordnet sind. Mithin ist für die Eckpunkte des Dreiecks die Eindeutigkeit der Beziehung zwischen Punkt und Spiegelpunkt unterbrochen.

Während also im allgemeinen jedem Punkt in der Ebene des Dreiecks nur ein Spiegelpunkt entspricht, gehören zu den Ecken des Dreiecks unendlich viele Spiegelpunkte, welche die Gegenseite der betreffenden Ecke erfüllen.

Die Harmonikale eines jeden Punktes einer Seite des Fundamentaldreiecks ist diese Seite selbst.

Man nenne eine Gerade, deren Koordinaten mit denjenigen eines Punktes zusammen fallen, die »Polare des Punktes in Beziehung auf das Dreieck« und den Punkt den »Pol der Gerade in Beziehung auf das Dreieck.«

Die Gleichung der Polaren der Punkte P und Q lauten

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 0 \tag{15}$$

beziehungsweise

$$\frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0. \tag{15a}$$

Die Gleichungen (1) stellen die Polaren der Ecken A, B, C des Grunddreicks dar.

Die Polare eines Punktes ist die Harmonikale seines Spiegelpunktes und umgekehrt.

Die Gleichung der durch einen Punkt P und seinen Spiegelpunkt Q bestimmten Gerade hat die Form:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x_1\, p_1 \begin{vmatrix} p_2, & p_3 \\ p_3, & p_2 \end{vmatrix} + x_2\, p_2 \begin{vmatrix} p_3, & p_1 \\ p_1, & p_3 \end{vmatrix} + x_3\, p_3 \begin{vmatrix} p_1, & p_2 \\ p_2, & p_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (16)$$

oder

$$x_1\, \xi_1\, a \begin{vmatrix} b^2, & c^2 \\ \xi_2^2, & \xi_3^2 \end{vmatrix} + x_2\, \xi_2 b \begin{vmatrix} c^2, & a^2 \\ \xi_3^2, & \xi_1^2 \end{vmatrix} + x_3\, \xi_3 c \begin{vmatrix} a^2, & b^2 \\ \xi_1^2, & \xi_2^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Je nachdem die Koordinaten eines Punktes gleiche oder verschiedene Vorzeichen besitzen, werden sämtliche Dreieckseiten durch die Polare und die Harmonikale desselben äusserlich oder zwei Dreieckseiten innerlich, die dritte äusserlich geschnitten.

Die Polaren aller Punkte auf der Verlängerung einer Dreieckseite gehen durch die Gegenecke und schneiden die Seite innerlich; die Polaren aller Punkte einer unverlängerten Dreieckseite gehen durch die Gegenecke und schneiden die Seite äusserlich.

Sind zwei beliebige Punkte

$$P' \equiv [x_1', x_2', x_3'],\ P'' \equiv [x_1'', x_2'', x_3'']$$

gegeben, dann lauten die Gleichungen ihrer Polaren:

$$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot x_1' + x_2 \cdot x_2' + x_3 \cdot x_3' &= 0 \\ x_1 \cdot x_1'' + x_2 \cdot x_2'' + x_3 \cdot x_3'' &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden hat die Koordinaten $[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$, wenn

$$\delta_1 = \begin{vmatrix} x_2', & x_3' \\ x_2'', & x_3'' \end{vmatrix};\ \delta_2 = \begin{vmatrix} x_3', & x_1' \\ x_3'', & x_1'' \end{vmatrix};\ \delta_3 = \begin{vmatrix} x_1', & x_2' \\ x_1'', & x_2'' \end{vmatrix} \text{ gesetzt wird.}$$

Die Gleichung der Polare dieses Punktes

$$x_1\, \delta_1 + x_2\, \delta_2 + x_3\, \delta_3 = 0 \qquad (18)$$

ist aber zugleich die Gleichung der durch die Punkte P', P'' bestimmten Gerade.

Die Polaren zweier Punkte schneiden sich in dem Pol der durch sie bestimmten Gerade.

Die Pole zweier Geraden liegen in der Polare ihres Schnittpunkts.

Die Abstände $\delta_1' = k\delta_1$; $\delta_2' = k\delta_2$; $\delta_3' = k\delta_3$ des Punktes $[\delta_1, \delta_2, \delta_3]$ von den Geraden BC, CA, AB werden ermittelt,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

indem man zunächst die unveränderliche Grösse k aus der Beziehung

$$k\,(a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c\,\delta_3) = 2\triangle$$

bestimmt. Setzt man

$$a\,\delta_1 + b\,\delta_2 + c\,\delta_3 = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \end{vmatrix} = D,$$

so ist

$$k = \frac{2\triangle}{D}$$

und

$$\delta_1' = \frac{2\triangle}{D}\,\delta_1;\quad \delta_2' = \frac{2\triangle}{D}\,\delta_2;\quad \delta_3' = \frac{2\triangle}{D}\,\delta_3. \qquad (19)$$

Wählt man nun anstelle des Punktes P′ den Punkt U mit den Koordinaten [a, b, c] dann ist

$$D = \begin{vmatrix} a, & b, & c \\ a, & b, & c \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \end{vmatrix} = 0;$$

folglich ist $k = \infty$, und daher

$$\delta_1' = \delta_2' = \delta_3' = \infty.$$

Jede Gerade des Strahlenbüschels mit dem Scheitel [a, b, c] hat ihren Pol in unendlicher Entfernung.

Jedem unendlich fernen Punkt entspricht eine durch [a, b, c] gehende Polare und eine das Endliche durchschneidende Harmonikale.

Die Koordinaten der Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 der Gerade $p_1\,x_1 + p_2\,x_2 + p_3\,x_3 = 0$ mit den Seiten BC, CA, AB des Grunddreiecks sind (vergl. Seite 6)

$A_1 \equiv [\,0, -p_3, p_2\,]$; $B_1 \equiv [\,p_3, 0, -p_1\,]$; $C_1 \equiv [\,-p_2, p_1, 0\,]$.

Zur Ermittelung der Abstände dieser drei Schnittpunkte von den Seiten BC, CA, AB beachte man die Relationen

$$k_1\,(cp_2 - bp_3) = k_2\,(ap_3 - cp_1) = k_3\,(bp_1 - ap_2) = 2\triangle.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$d_1 = -\begin{vmatrix} b, & c \\ p_2, & p_3 \end{vmatrix};\quad d_2 = -\begin{vmatrix} c, & a \\ p_3, & p_1 \end{vmatrix};\quad d_3 = -\begin{vmatrix} a, & b \\ p_1, & p_2 \end{vmatrix},$$

so ist

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$k_1 = \frac{2\triangle}{d_1}; \quad k_2 = \frac{2\triangle}{d_2}; \quad k_3 = \frac{2\triangle}{d_3}.$$

Die Abstände der Punkte A_1, B_1, C_1 von den Dreieckseiten sind sonach:

$$0, -\frac{2\triangle}{d_1} p_3, \frac{2\triangle}{d_1} p_2; \quad \frac{2\triangle}{d_2} p_3, 0, -\frac{2\triangle}{d_2} p_1;$$
$$-\frac{2\triangle}{d_3} p_2, \frac{2\triangle}{d_3} p_1, 0. \tag{20}$$

Wählt man den Punkt [a, b, c] statt des Punktes $[p_1, p_2, p_3]$, so lautet die Gleichung seiner Polare:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Gerade mit den Seiten des Grunddreiecks sind:

$$[0, -c, b]; \; [c, 0, -a]; \; [-b, a, 0].$$

Für den Punkt [a, b, c] wird

$$d_1 = d_2 = d_3 = 0$$

und somit

$$k_1 = k_2 = k_3 = \infty.$$

Die Grade $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ schneidet die Seiten des Grunddreiecks in unendlicher Entfernung und ist daher die unendlich ferne Gerade der Ebene des Dreiecks.

Die Polaren aller Punkte der Gerade BC gehen durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC.

Stellt die veränderliche Grösse φ alle Zahlenwerte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ dar, so werden sämtliche Geraden des Strahlenbüschels mit dem Schnittpunkt A durch die Gleichung

$$x_2 + \varphi x_3 = 0 \tag{21}$$

ausgedrückt, und die Geraden

$$x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_2 + \varphi x_3 = 0; \quad x_2 - \varphi x_3 = 0$$

bilden ein harmonisches Strahlenbüschel.

Setzt man in Gleichung (21) $\varphi = \pm 1$, so erhält man die äussere und innere Symmetrale des Winkels A:

$$x_2 + x_3 = 0; \quad x_2 - x_3 = 0. \tag{22}$$

Die durch A zu BC parallel gezogene Gerade hat die Gleichung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$bx_2 + cx_3 = 0, \text{ oder } x_2 \sin\beta + x_3 \sin\gamma = 0, \tag{23}$$

während die durch A zu BC gezogene Senkrechte durch die Gleichung

$$x_2 \cos\beta - x_3 \cos\gamma = 0 \tag{24}$$

dargestellt wird.

Die Polare des unendlich fernen Punktes $\left[0, \frac{1}{b}, -\frac{1}{c}\right]$ der Gerade BC hat die Gleichung

$$\frac{x_2}{b} - \frac{x_3}{c} = 0, \text{ oder } \frac{x_2}{\sin\beta} - \frac{x_3}{\sin\gamma} = 0. \tag{25}$$

Rückt ein Punkt auf der Gerade BC aus unendlicher Entfernung gegen den Eckpunkt B des Dreiecks hin, darauf über B hinaus bis zum Eckpunkt C und endlich von C aus in derselben Richtung weiter ins Unendliche, so macht seine Polare von der Anfangslage AU an über b und c eine volle Umdrehung um den Punkt A.

Die Polare bildet mit der Gerade BC einen Null- oder einen rechten Winkel, je nachdem der Pol die Koordinaten $[0, \sin\beta, \sin\gamma]$ oder $[0, \cos\beta, -\cos\gamma]$ annimmt.

Seien $[x_1', x_2', x_3']$, $[x_1'', x_2'', x_3'']$, $[x_1''', x_2''', x_3''']$ die Koordinaten dreier Punkte, dann liegen dieselben in **einer** Gerade, wenn

$$\begin{vmatrix} x_1', & x_2', & x_3' \\ x_1'', & x_2'', & x_3'' \\ x_1''', & x_2''', & x_3''' \end{vmatrix} = 0. \tag{26}$$

Dies ist aber zugleich die Bedingung dafür, dass die Polaren jener drei Punkte sich in einem Punkte schneiden.

Die Polaren einer Punktreihe gehen durch einen Punkt.

Die Pole eines Strahlenbüschels liegen in der Polare des Scheitels.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Mittelpunkte der Berührungskreise fallen mit ihren Spiegelpunkten zusammen; daher stellen die Polaren dieser Punkte zugleich auch die Harmonikalen derselben dar.

Nimmt man auf den Seiten BC, CA, AB je einen Punkt $[0, a_2, a_3]$; $[b_1, 0, b_3]$; $[c_1, c_2, 0]$ an, dessen Koordinaten also den Verhältnissen der Abschnitte proportional sind, welche durch die Fusspunkte der Scheiteltransversalen des Punktes P gebildet werden, dann lauten die Gleichungen der jenen drei Punkten entsprechenden Scheiteltransversalen, wie folgt:

$$\frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0; \quad \frac{x_3}{b_3} - \frac{x_1}{b_1} = 0; \quad \frac{x_1}{c_1} - \frac{x_2}{c_2} = 0. \tag{27}$$

Diese drei Geraden gehen durch einen Punkt, denn ihre linearen Formen befinden sich in linearer Abhängigkeit. (Vergleiche Formel 4.)

Die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes werden gefunden als die Unterdeterminanten der Koordinaten zweier beliebiger Geraden (27) und zwar, nach einigen Umformungen:

$$[\, ap_1, bp_2, cp_3 \,] \text{ oder } [\, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \,].$$

Die Gleichung der durch die Punkte $[p_1, p_2, p_3]$; $[\xi_1, \xi_2, \xi_3]$ bestimmten Gerade ist:

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ p_1, & p_2, & p_3 \\ ap_1, & bp_2, & cp_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

oder

$$x_1 \frac{b-c}{p_1} + x_2 \frac{c-a}{p_2} + x_3 \frac{a-b}{p_3} = 0.$$

Zwei Punkte nenne man »mit einander verwandt,« wenn die Koordinaten des einen durch Multiplikation mit den Strecken a, b, c aus denjenigen des anderen abgeleitet werden.

Der Schwerpunkt $\left[\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right]$ der Dreiecksfläche und der Mittelpunkt $[\,1, 1, 1\,]$ des einbeschriebenen Kreises sind »verwandte Punkte«; desgleichen der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises und der Spiegelpunkt $[\,a, b, c\,]$ des Schwerpunkts der Dreiecksfläche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Man beachte, dass der Flächenschwerpunkt und sein Spiegelpunkt »im zweiten Grad mit einander verwandt« sind. Auch die Punkte $[\cot\alpha, \cot\beta, \cot\gamma]$, $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$ sowie $[\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma]$, $[\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \sin 2\gamma]$ sind verwandte Punkte.

Die Beziehung zwischen Pol und Polare eines Dreiecks ist eine involutorische reciproke Verwandtschaft, also die Beziehung zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes.

Dieser Kegelschnitt hat offenbar die Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{29}$$

denn er ist der Ort der Punkte, welche auf ihren Polaren liegen. Aus der Form der Gleichung geht hervor, dass der durch sie dargestellte Kegelschnitt keinen reellen Punkt besitzt. Das gegebene Dreieck ist Polardreieck dieses Kegelschnittes, und Punkt $[1, 1, 1]$ hat seine Harmonikale zur Polare, wodurch das Polarsystem eindeutig bestimmt ist.

Ist $[v_1, v_2, v_3]$ ein beliebiger Punkt der Ebene, dann lautet die Gleichung seiner Polare in Beziehung auf den Kegelschnitt (29)

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0.$$

Dies ist aber auch die Gleichung der Polare des Punktes $[v_1, v_2, v_3]$ in Beziehung auf das Grunddreieck ABC. Die unendlich ferne Gerade $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ ist sonach die Polare des Mittelpunktes $[a, b, c]$ der Kurve $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$. Es wird später gezeigt werden, dass dieser Kegelschnitt einen Kreis mit dem Mittelpunkt $[a, b, c]$ und dem Radius $R = \sqrt{-1} = i$ darstellt.

Um den Ort der Spiegelpunkte aller Punkte der Gerade

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

mit dem Pole P in Beziehung auf das Grunddreieck zu ermitteln, greife man einen beliebigen Punkt $[x_1, x_2, x_3]$ jener Gerade heraus. Seien dann $[y_1, y_2, y_3]$ die Koordinaten seines Spiegelpunktes, so ist:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$mx_1 = \frac{1}{y_1}; \quad mx_2 = \frac{1}{y_2}; \quad mx_3 = \frac{1}{y_3}, \tag{30}$$

wo m eine unveränderliche Grösse bedeutet.

Da nun x_1, x_2, x_3 auf der Gerade $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$ liegt, so folgt durch Einsetzen jener Werte in die Gleichung der Gerade:

$$\frac{p_1}{y_1} + \frac{p_2}{y_2} + \frac{p_3}{y_3} = 0,$$

oder

$$p_1 y_2 y_3 + p_2 y_3 y_1 + p_3 y_1 y_2 = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnitts, der durch die Ecken des Dreiecks ABC geht. Andererseits hat jeder durch die Ecken des Dreiecks gehende Kegelschnitt diese Form, sodass den Geraden der Ebene die dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitte entsprechen.

Kehrt man nun wieder zur ursprünglichen Bezeichnung der laufenden Koordinaten durch x_1, x_2, x_3 zurück, dann lautet die Gleichung der dem Dreieck umschriebenen Kurve:

$$p_1 x_2 x_3 + p_2 x_3 x_1 + p_3 x_1 x_2 = 0. \tag{31}$$

Man nenne den Kegelschnitt

$$p_1 x_2 x_3 + p_2 x_3 x_1 + p_3 x_1 x_2 = 0$$

die »Spiegelpunktskurve des Punktes P in Beziehung auf das Dreieck ABC«.

Zur Konstruktion dieses Kegelschnitts zeichne man zu zwei beliebigen Punkten der Gerade

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$$

die Spiegelpunkte; alsdann ergeben dieselben mit den Ecken des Dreiecks die fünf zur Bestimmung des Kegelschnitts erforderlichen Elemente.

Die in den Ecken des Dreiecks ABC an diese Kurve gezogenen Tangenten haben die Gleichungen:

$$\frac{x_2}{p_2} + \frac{x_3}{p_3} = 0; \quad \frac{x_3}{p_3} + \frac{x_1}{p_1} = 0; \quad \frac{x_1}{p_1} + \frac{x_2}{p_2} = 0.$$

Dies sind aber die äusseren Scheiteltransversalen der dem Punkte P zugeordneten Punkte: $[-p_1, p_2, p_3]$; $[p_1, -p_2, p_3]$; $[p_1, p_2, -p_3]$. (Vergleiche Seite 8.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der dem Dreieck ABC umschriebene Kegelschnitt ist dem Dreieck A′ B′ C′ einbeschrieben.

Während die Seiten des Dreiecks ABC die Polaren der dem Punkte P zugeordneten Punkte A′, B′, C′ in Beziehung auf den Kegelschnitt $p_1 x_2 x_3 + p_2 x_3 x_1 + p_3 x_1 x_2 = 0$ sind, bilden die Scheiteltransversalen B′C′, C′A′, A′B′ die Tangenten desselben in den Ecken A, B, C.

Die Spiegelpunkte der Punkte der unendlich fernen Gerade

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0$$

liegen auf dem Kegelschnitt

$$a x_2 x_3 + b x_3 x_1 + c x_1 x_2 = 0.$$

Dies ist aber, wie später gezeigt wird, die Gleichung des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises.

Der dem Dreieck umschriebene Kreis ist der Ort der Spiegelpunkte der Punkte der unendlich fernen Gerade.

Die Spiegelpunkte der Punkte des dem Dreieck umschriebenen Kreises liegen in unendlicher Entfernung.

Die Scheiteltransversalen der Spiegelpunkte eines jeden Punktes des dem Dreieck umschriebenen Kreises sind parallel.

Dieser Satz ist leicht auf elementar-planimetrischem Wege zu beweisen.

Von den Spiegelpunkten sämtlicher reellen Punkte einer Gerade liegen zwei, einer oder keiner in unendlicher Entfernung, je nachdem die Gerade mit dem Kreis zwei Punkte, einen oder keinen Punkt gemeinsam hat.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf