STAATS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Die Harmonikalen der Mittelpunkte

der

Berührungskreise eines Dreiecks

in Bezug auf dasselbe

von

Dr. Fr. W. Frankenbach
Realschul-Director.

Beilage zum Jahresbericht der städtischen Wilhelms-Realschule in Liegnitz.

Liegnitz 1895.
Druck von Carl Seyffarth.

Progr. No. 231.

qa 4 (1895)

231 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK
DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die vorliegende Abhandlung schliesst sich hinsichtlich des Zweckes und der Methode den bereits veröffentlichten Arbeiten*) des Verfassers, betreffend die Geometrie des Dreiecks, an und kann als eine Fortsetzung derselben angesehen werden.

1.
Einführung.

Die Symmetralen der Winkel des Dreiecks ABC (Fig. 1) seien AA_0, BB_0, CC_0, diejenigen der Aussenwinkel AA_1, BB_1, CC_1. Bezeichnet man die Seiten und Winkel des Dreiecks ABC mit a, b, c, beziehungsweise α, β, γ, den Radius des umschriebenen Kreises M mit r, denjenigen des einbeschriebenen Kreises O mit ϱ und die Radien der anbeschriebenen Kreise A', B', C', beziehungsweise mit $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$, so finden folgende Beziehungen statt, von welchen im Laufe der Untersuchung Gebrauch gemacht wird. (Siehe die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise, vom Verf.):

$$\left.\begin{array}{l} A_0B = \frac{a}{b+c}\,c, \quad B_0C = \frac{b}{c+a}\,a, \quad C_0A = \frac{c}{a+b}\,b \\ A_0C = \frac{a}{b+c}\,b, \quad B_0A = \frac{b}{c+a}\,c, \quad C_0B = \frac{c}{a+b}\,a \end{array}\right\} \quad . \quad \text{I.}$$

$$\left.\begin{array}{l} A_1B = \frac{a}{b-c}\,c, \quad B_1C = \frac{b}{a-c}\,a, \quad C_1A = \frac{c}{a-b}\,b \\ A_1C = \frac{a}{b-c}\,b, \quad B_1A = \frac{b}{a-c}\,c, \quad C_1B = \frac{c}{a-b}\,a \end{array}\right\} \quad . \quad \text{II.}$$

---

*) Das dem Dreieck einbeschriebene Quadrat, Beilage zum Jahresbericht der städt. höheren Bürgerschule in Liegnitz, 1889. Die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise, Beilage zum Jahresbericht der städtischen höheren Bürgerschule in Liegnitz, 1891.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

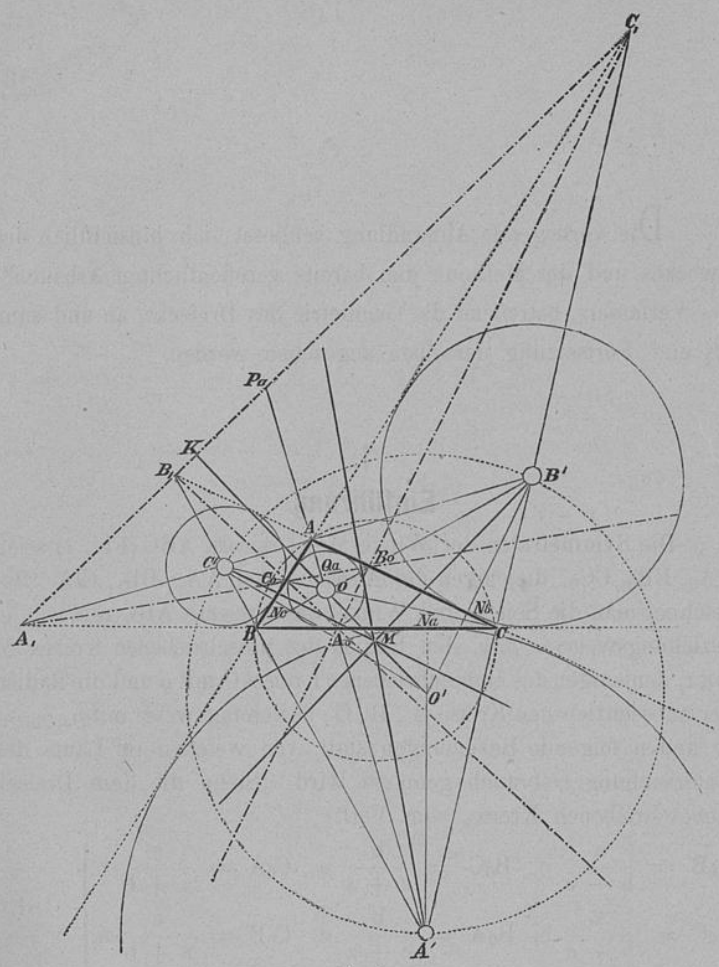

Fig. 1.

$$AA_0 = \frac{2\,b\,c}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},\ BB_0 = \frac{2\,c\,a}{c+a}\cos\frac{\beta}{2},\ CC_0 = \frac{2\,a\,b}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}\quad \text{III.}$$

$$AA_1 = \frac{2\,b\,c}{b-c}\sin\frac{\alpha}{2},\ BB_1 = \frac{2\,c\,a}{a-c}\sin\frac{\beta}{2},\ CC_1 = \frac{2\,a\,b}{a-b}\sin\frac{\gamma}{2}\quad \text{IV.}$$

$$A_0A_1 = \frac{2\,abc}{b^2-c^2},\qquad B_0B_1 = \frac{2\,abc}{a^2-c^2},\qquad C_0C_1 = \frac{2\,abc}{a^2-b^2}\ .\quad .\ \text{V.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{aligned}
\varrho &= 4\,r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = (-1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,r \\
\varrho_a &= 4\,r \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = (1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)\,r \\
\varrho_b &= 4\,r \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} = (1 + \cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma)\,r \\
\varrho_c &= 4\,r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = (1 + \cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)\,r
\end{aligned}\right\} \text{VI.}$$

Aus vorstehenden Formeln können einige Eigenschaften der Dreieckstransversalen unmittelbar abgeleitet werden:

Wegen I ist

$$\frac{A_0B \cdot B_0C \cdot C_0A}{A_0C \cdot B_0A \cdot C_0B} = 1 \quad \ldots\ldots \quad \text{VII.}$$

Die inneren Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden einander in **einem** Punkt.

Aus II folgt:

$$\frac{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}{A_1C \cdot B_1A \cdot C_1B} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII.}$$

Die Endpunkte der äusseren Winkelsymmetralen eines Dreiecks liegen in **einer** Gerade.

Die Verbindung der Formeln I und II ergiebt einerseits:

$$\frac{A_1B \cdot B_0C \cdot C_0A}{A_1C \cdot B_0A \cdot C_0B} = 1, \quad \frac{A_0B \cdot B_1C \cdot C_0A}{A_0C \cdot B_1A \cdot C_0B} = 1, \quad \frac{A_0B \cdot B_0C \cdot C_1A}{A_0C \cdot B_0A \cdot C_1B} = 1. \quad \text{IX.}$$

Die Endpunkte je zweier inneren und der dritten äusseren Winkelsymmetralen liegen in einer Gerade.

Andrerseits finden die folgenden Proportionen statt:

$$\left.\begin{aligned}
A_0B : A_0C &= A_1B : A_1C; \\
B_0C : B_0A &= B_1C : B_1A; \\
C_0A : C_0B &= C_1A : C_1B.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{X.}$$

Die Endpunkte A_1, B_1, C_1 der äusseren Winkelsymmetralen sind durch die Seiten des Dreiecks ABC harmonisch getrennt von den Endpunkten A_0, B_0, C_0 der inneren Winkelsymmetralen.

Die Gerade $A_1B_1C_1$ wird die Harmonikale des Punktes 0 in Beziehung auf das Dreieck ABC genannt. (Siehe Salmon-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fiedler, analytische Geometrie der Kegelschnitte, fünfte Aufl. Leipzig 1887. Seite 105).

Analog sind die Geraden $B_0C_0A_1$, $C_0A_0B_1$, $A_0B_0C_1$ beziehungsweise die Harmonikalen der Punkte A', B', C'.

Was die Bezeichnung der im vorstehenden nicht erwähnten Strecken angeht, so ist dieselbe im Laufe der folgenden Untersuchung erklärt; doch möge hier darauf hingewiesen werden, dass der Abstand eines Punktes der Ebene des Dreiecks von den Harmonikalen $A_1B_1C_1$, $B_0C_0A_1$, $C_0A_0B_1$ und $A_0B_0C_1$ beziehentlich mit $\varkappa$, λ, μ und ν bezeichnet wird, und dass der Index dieser Buchstaben den Punkt anzeigt, von welchem aus der Abstand gemessen wird.

2.

Das durch die äusseren Winkelsymmetralen bestimmte Dreieck A'B'C'.

1) Die Seiten des Dreiecks A'B'C' (Fig. 2) seien a', b', c', dann ist:

$$a' = B'C' = AB' + AC' = \frac{\varrho_b}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{\varrho_c}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Unter Anwendung von 1. VI auf diese Formel findet man:

$$a' = 4\ r \cos\frac{\alpha}{2},\ b' = 4\ r \cos\frac{\beta}{2},\ c' = 4\ r \cos\frac{\gamma}{2},\ \text{oder}$$

$$a' = \frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ b' = \frac{b}{\sin\frac{\beta}{2}},\ c' = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

Hieraus folgt:

$$a'b'c' = \frac{4\ abc\ r}{\varrho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

Der Radius r' des Umkreises O' von A'B'C' ist das Doppelte von dem Radius r des Umkreises M von ABC, denn es ist:

$$2\ r' = \frac{a'}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{a'}{\cos\frac{\alpha}{2}} = 4\ r \text{ und somit}$$

$$r' = 2\ r \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Inhalt $\triangle'$ des Dreiecks A'B'C' ergiebt sich aus

$\triangle' = \frac{a' b' c'}{4 r'}$ unter Anwendung von II:

$$\triangle' = \frac{abc}{2 \varrho} = r (a + b + c) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

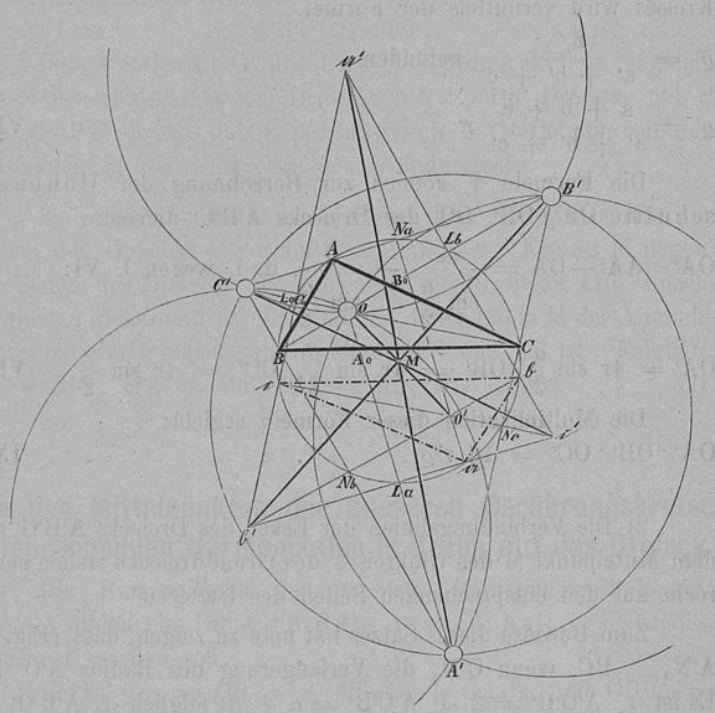

Fig. 2.

Zur Ermittelung der Höhen des Dreiecks A'B'C' hat man, wenn $\triangle$ den Inhalt des Dreiecks ABC bedeutet:

$$AA' = \frac{2\triangle'}{a'} = \frac{abc}{4r\varrho \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\triangle}{\varrho \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{a+b+c}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

und sonach:

$$AA' = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ BB' = \frac{\varrho_b}{\sin\frac{\beta}{2}},\ CC' = \frac{\varrho_c}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad . \quad \text{V.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Multiplikation der vorstehenden Formeln resultiert:

$$AA' \cdot BB' \cdot CC' = (a + b + c)^2 . \; r = \triangle' (a + b + c). \quad \text{VI.}$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist M der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks A'B'C'.

Der Radius ϱ' des dem Dreieck A'B'C' einbeschriebenen Kreises wird vermittels der Formel

$$\varrho' = \frac{2\triangle'}{a' + b' + c'} \text{ gefunden.}$$

$$\varrho' = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} \, r' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{VII.}$$

Die Formeln V können zur Berechnung der Höhenabschnitte OA', OB', OC' des Dreiecks A'B'C' dienen:

$$OA' = AA' - OA = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ d. i. wegen 1. VI:}$$

$$OA' = 4r \sin\frac{\alpha}{2}, \; OB' = 4r \sin\frac{\beta}{2}, \; OC' = 4r \sin\frac{\gamma}{2} . \quad \text{VIII.}$$

Die Multiplikation dieser Formeln ergiebt:

$$OA' \cdot OB' \cdot OC' = 16 \, r^2 \varrho \; \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{IX.}$$

2) Die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks A'B'C' mit dem Mittelpunkt M des Umkreises des Grunddreiecks stehen senkrecht auf den entsprechenden Seiten des letzteren.

Zum Beweise dieses Satzes hat man zu zeigen, dass (Fig. 1) $A'N_a \perp BC$, wenn $O'N_a$ die Verlängerung des Radius A'O' ist. Es ist $\sphericalangle A'O'B' = 2 \sphericalangle A'C'B' = \alpha + \beta$; folglich $\sphericalangle A'B'O' = \sphericalangle B'A'O' = \frac{\gamma}{2}$. Da $\sphericalangle OCB = \frac{\gamma}{2}$ und $A'C \perp CC'$, so ist $A'N_a \perp BC$.

Die vom Mittelpunkt O' des Umkreises A'B'C' auf das Grunddreieck gefällten Lote haben die Grössen:

$$O'N_a = 2r - \varrho_a, \; O'N_b = 2r - \varrho_b, \; O'N_c = 2r - \varrho_c, \quad . \; . \quad \text{X.}$$

wo $O'N_a$ negativ zu nehmen ist, wenn Winkel α ein stumpfer ist.

Seien $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Mittelpunkte der den Dreiecken OB'C', OC'A', OA'B' umschriebenen Kreise, so findet man (Fig. 2):

$$O\mathfrak{a}' = O\mathfrak{b}' = O\mathfrak{c}' = 2r. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XI.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks A'B'C' ist sonach der Mittelpunkt O des Umkreises von $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$.

Die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$ stehen senkrecht auf den Höhen des Dreiecks A' B' C' und werden durch die Punkte $L_{\mathfrak{c}}$, $L_{\mathfrak{a}}$, $L_{\mathfrak{b}}$ des Kreises M halbiert. Daher ist M auch der Feuerbachsche Kreis des Dreiecks $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, und

$$A'B'C' \cong \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'.$$

Der Mittelpunkt O' des Umkreises von A'B'C' ist zugleich der Höhenschnittpunkt des Dreiecks $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$. Die Dreiecke $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$ und A' B' C' liegen daher perspektivisch in Beziehung auf den Mittelpunkt M des Umkreises des Grunddreiecks.

Es verdient bemerkt zu werden, dass die Fusspunkte der Höhen des Dreiecks $\mathfrak{a}'\,\mathfrak{b}'\,\mathfrak{c}'$ auf dem Umfang des Kreises M liegen, die Seiten des Dreiecks $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ denjenigen des Dreiecks ABC einzeln verglichen gleich und parallel sind und daher Punkt M der Ähnlichkeitspunkt der kongruenten Dreiecke ABC und $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$ ist. Folglich: $MO = MO'$, $MA' = M\mathfrak{a}'$, $MB' = M\mathfrak{b}'$, $MC' = M\mathfrak{c}'$. . . XII.

3.

Die den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise entsprechenden Harmonikalen in Bezug auf das Dreieck.

Die Harmonikalen der äusseren Berührungsmittelpunkte (Fig. 1) bilden ein Dreieck $A_0B_0C_0$, dessen Inhalt $\triangle_0$ zunächst berechnet werden soll.

Es ist $\triangle_0 = OB_0C_0 + OC_0A_0 + OA_0B_0$ und $OB_0C_0 = {}^1/_2 OB_0 \cdot OC_0 \sin B_0OC_0$.

Wegen

$$OB_0 = \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}},\quad OC_0 = \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ und } \sin B_0OC_0 = \cos\frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$OB_0C_0 = \frac{\varrho^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{abc\varrho}{2\,(c+a)\,(a+b)} =$$

$$\frac{abc\,(b+c)\,\varrho}{2\,(a+b)\,(b+c)\,(c+a)}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Setzt man der Kürze wegen:

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \mathfrak{P}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

dann ist:

$$OB_0C_0 = \frac{b+c}{2}\,\varrho\,\mathfrak{P},\ OC_0A_0 = \frac{c+a}{2}\,\varrho\,\mathfrak{P},\ OA_0B_0 = \frac{a+b}{2}\,\varrho\,\mathfrak{P},$$

und demnach:

$$\triangle_0 = (a+b+c)\,\varrho\mathfrak{P}, \text{ oder}$$

$$\triangle_0 = 2\,\triangle\mathfrak{P} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

Für die Seiten a_0, b_0, c_0 des Dreiecks $A_0B_0C_0$ erhält man:

$$a_0^2 = AB_0^2 + AC_0^2 - 2\,AB_0 \,.\, AC_0 \cos\alpha,$$

und unter Beachtung von 1. I:

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 \left[2\,a\,(a+b+c)(1-\cos\alpha) + b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha\right]$$

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 a\left[a + 2\,(a+b+c)\,(1-\cos\alpha)\right]$$

Setzt man

$$a+b+c = 2s_0,\ -a+b+c = 2s_a,\ a-b+c = 2s_b,$$
$$a+b-c = 2s_c,$$

so ist

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 a\left(a + 8s_0 \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 a\left(a + 8\,\frac{s_0\,s_b\,s_c}{bc}\right)$$

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 \cdot \frac{a}{bc}\left(abc + \frac{8\triangle^2}{s_a}\right)$$

$$a_0^2 = \left[\frac{bc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 \cdot \frac{4\,\triangle\,a^2}{abc}\left(r + 2\,\varrho_a\right)$$

$$a_0^2 = \left[\frac{abc}{(c+a)(a+b)}\right]^2 \cdot \frac{r + 2\varrho_a}{r}$$

Mit Rücksicht auf Formel I ist sonach:

$$a_0 = \frac{(b+c)\,\mathfrak{P}}{\sqrt{\dfrac{r}{r+2\,\varrho_a}}},\quad b_0 = \frac{(c+a)\,\mathfrak{P}}{\sqrt{\dfrac{r}{r+2\,\varrho_b}}},\quad c_0 = \frac{(a+b)\,\mathfrak{P}}{\sqrt{\dfrac{r}{r+2\,\varrho_c}}}$$

Der in vorstehenden Formeln enthaltene Wurzelausdruck ist immer ein echter Bruch. Es ist daher die Annahme be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

rechtigt, dass derselbe dem Sinus eines Winkels entspricht, der mit den Konstanten des gegebenen Dreiecks ABC in Beziehung steht.

Zur Ermittelung dieses Winkels fälle man von O die Lote λ_0, μ_0, ν_0 auf die Seiten a_0, b_0, c_0 des Dreiecks $A_0B_0C_0$, dann ist:

$$\lambda_0 = \frac{2\,OB_0C_0}{a_0},\quad \mu_0 = \frac{2\,OC_0A_0}{b_0},\quad \nu_0 = \frac{2\,OA_0B_0}{c_0},\ \text{oder}$$

$$\lambda_0 = \varrho\sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_a}},\quad \mu_0 = \varrho\sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_b}},\quad \nu_0 = \varrho\sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_c}}.$$

Zieht man nun die den Schnittpunkten des Kreises O mit den Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ entsprechenden Tangenten und bezeichnet die Winkel, welche jene Tangenten einschliessen, beziehentlich mit $2\omega_a$, $2\omega_b$, $2\omega_c$, dann ist:

$$\sin\omega_a = \frac{\lambda_0}{\varrho},\quad \sin\omega_b = \frac{\mu_0}{\varrho},\quad \sin\omega_c = \frac{\nu_0}{\varrho}.$$

Der Vergleich dieser Formeln mit den vorhergehenden ergiebt die wichtigen Definitionsgleichungen:

$$\sin\omega_a = \sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_a}},\ \sin\omega_b = \sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_b}},\ \sin\omega_c = \sqrt{\frac{r}{r+2\,\varrho_c}}.\quad \text{III.}$$

Demnach ist:

$$\left.\begin{aligned} &\cos\omega_a = \sqrt{\frac{2\,\varrho_a}{r+2\,\varrho_a}},\ \cos\omega_b = \sqrt{\frac{2\,\varrho_b}{r+2\,\varrho_b}},\ \cos\omega_c = \sqrt{\frac{2\,\varrho_c}{r+2\,\varrho_c}};\\ &\operatorname{tg}\omega_a = \sqrt{\frac{r}{2\,\varrho_a}},\qquad \operatorname{tg}\omega_b = \sqrt{\frac{r}{2\,\varrho_b}},\qquad \operatorname{tg}\omega_c = \sqrt{\frac{r}{2\,\varrho_c}}. \end{aligned}\right\}\ \text{IIIa.}$$

Die Abstände der Seiten a_0, b_0, c_0 vom Mittelpunkt O sind somit:

$$\lambda_0 = \varrho\sin\omega_a,\ \mu_0 = \varrho\sin\omega_b,\ \nu_0 = \varrho\sin\omega_c \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

und die Formeln für die Seiten des Dreiecks $A_0B_0C_0$ lauten nun:

$$a_0 = \frac{b+c}{\sin\omega_a}\,\mathfrak{P},\ b_0 = \frac{c+a}{\sin\omega_b}\,\mathfrak{P},\ c_0 = \frac{a+b}{\sin\omega_c}\,\mathfrak{P}\ \ldots\ldots\ \text{V.}$$

Bezeichnet man die auf den Berührungskreisen durch die Gerade B_0C_0 bestimmten halben Sehnenabschnitte mit $a_{\mathfrak{o}}$, $a_{\mathfrak{b}}$, $a_{\mathfrak{c}}$, dann ist, wenn $b_{\mathfrak{o}}$, $b_{\mathfrak{c}}$, $b_{\mathfrak{a}}$, und $c_{\mathfrak{o}}$, $c_{\mathfrak{a}}$, $c_{\mathfrak{b}}$ eine analoge Bedeutung inbetreff der Seiten C_0A_0 und A_0B_0 haben:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{array}{l} a_{\mathfrak{o}} = \varrho \cos \omega_a,\ a_{\mathfrak{b}} = \varrho_b \cos \omega_a,\ a_{\mathfrak{c}} = \varrho_c \cos \omega_a \\ b_{\mathfrak{o}} = \varrho \cos \omega_b,\ b_{\mathfrak{c}} = \varrho_c \cos \omega_b,\ b_{\mathfrak{a}} = \varrho_a \cos \omega_b \\ c_{\mathfrak{o}} = \varrho \cos \omega_c,\ c_{\mathfrak{a}} = \varrho_a \cos \omega_c,\ c_{\mathfrak{b}} = \varrho_b \cos \omega_c \end{array}\right\} \quad \ldots \quad \text{VI.}$$

und daher

$$a_{\mathfrak{b}}\, b_{\mathfrak{c}}\, c_{\mathfrak{a}} = a_{\mathfrak{c}}\, b_{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{b}} \quad \ldots \quad \text{VII.}$$

Die Höhen des Dreiecks $A_0\, B_0\, C_0$ ergeben sich aus den Formeln II und V:

$$\lambda_{a0} = \frac{4 \triangle}{b + c} \sin \omega_a,\ \mu_{b0} = \frac{4 \triangle}{c + a} \sin \omega_b,\ \nu_{c0} = \frac{4 \triangle}{a + b} \sin \omega_c$$

Diese Formeln nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn man die von den Endpunkten je einer Winkelsymmetrale auf die beiden den Winkel einschliessenden Seiten gefällten Lote p_{a0}, p_{b0}, p_{c0} einführt; dann ist

$$p_{a0} = \frac{2 \triangle}{b + c},\ p_{b0} = \frac{2 \triangle}{c + a},\ p_{c0} = \frac{2 \triangle}{a + b}, \text{ und somit}$$

$$\lambda_{a0} = 2 p_{a0} \sin \omega_a,\ \mu_{b0} = 2 p_{b0} \sin \omega_b,\ \nu_{c0} = 2 p_{c0} \sin \omega_c \quad \text{VIII.}$$

Unter Anwendung der Gleichung:

$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\lambda_{a0}} + \frac{1}{\mu_{b0}} + \frac{1}{\nu_{c0}}$ erhält man für den Radius ϱ_0 des dem Dreieck $A_0B_0C_0$ einbeschriebenen Kreises die Formel:

$$\frac{2}{\varrho_0} = \frac{1}{p_{a0} \sin \omega_a} + \frac{1}{p_{b0} \sin \omega_b} + \frac{1}{p_{c0} \sin \omega_c} \quad \ldots \quad \text{IX.}$$

während der Radius r_0 des dem Dreieck $A_0B_0C_0$ umschriebenen Kreises, unter Benutzung der Formel $a_0b_0c_0 = 4\, r_0 \triangle_0$, gefunden wird:

$$2r_0 = \frac{r \mathfrak{P}}{\sin \omega_a \sin \omega_b \sin \omega_c} \quad \ldots \quad \text{X.}$$

Die Lote, welche von den Ecken des Dreiecks ABC auf die Harmonikalen B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 gefällt werden, ermittele man aus der Formel für den Inhalt der Dreiecke AB_0C_0, BC_0A_0, CA_0B_0 wie folgt:

$AB_0C_0 = {}^1/_2\, AB_0 \cdot AC_0 \cdot \sin \alpha$, oder wegen 1. I, wenn man zugleich von den Formeln $\sin \alpha = \frac{a}{2r}$ und $abc = 4r \triangle$ Gebrauch macht:

$$AB_0C_0 = \frac{b + c}{2}\, h_a\, \mathfrak{P}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nun ist aber $\lambda_a = \frac{2AB_0\,C_0}{a_0} = h_a \sin \omega_a$.

Die übrigen Lote werden auf analoge Weise abgeleitet:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_a = h_a \sin \omega_a,\ \lambda_b = h_b \sin \omega_a,\ \lambda_c = h_c \sin \omega_a \\ \mu_a = h_a \sin \omega_b,\ \mu_b = h_b \sin \omega_b,\ \mu_c = h_c \sin \omega_b \\ \nu_a = h_a \sin \omega_c,\ \nu_b = h_b \sin \omega_c,\ \nu_c = h_c \sin \omega_c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad \text{XI.}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_a\,\mu_b = \lambda_b\,\mu_a,\ \lambda_b\,\mu_c = \lambda_c\,\mu_b,\ \lambda_c\,\mu_a = \lambda_a\,\mu_c; \\ \mu_a\,\nu_b = \mu_b\,\nu_a,\ \mu_b\,\nu_c = \mu_c\,\nu_b,\ \mu_c\,\nu_a = \mu_a\,\nu_c; \\ \nu_a\,\lambda_b = \nu_b\,\lambda_a,\ \nu_b\,\lambda_c = \nu_c\,\lambda_b,\ \nu_c\,\lambda_a = \nu_a\,\lambda_c. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XII.}$$

und daher

$$\begin{vmatrix} \lambda_a, & \lambda_b, & \lambda_c \\ \mu_a, & \mu_b, & \mu_c \\ \nu_a, & \nu_b, & \nu_c \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIII.}$$

sowie

$$\lambda_a\,\mu_b\,\nu_c = \mu_a\,\nu_b\,\lambda_c = \nu_a\,\lambda_b\,\mu_c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIV.}$$

Die Vergleichung von IV mit XI liefert:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_a} + \frac{1}{\lambda_b} + \frac{1}{\lambda_c}; \\ \frac{1}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_a} + \frac{1}{\mu_b} + \frac{1}{\mu_c}; \\ \frac{1}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_a} + \frac{1}{\nu_b} + \frac{1}{\nu_c}. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XV.}$$

und

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_a} + \frac{\mu_0}{\mu_b} + \frac{\nu_0}{\nu_c} = \frac{\lambda_0}{\lambda_b} + \frac{\mu_0}{\mu_c} + \frac{\nu_0}{\nu_a} = \frac{\lambda_0}{\lambda_c} + \frac{\mu_0}{\mu_a} + \frac{\nu_0}{\nu_b} = 1. \quad \text{XVI.}$$

Die Abstände der Punkte B', C' von der Gerade $B_0\,C_0$ ergeben sich unter Anwendung von IV auf die Proportionen: $\lambda_0 : \lambda_{b'} = \varrho : \varrho_b$, $\lambda_0 : \lambda_{c'} = \varrho : \varrho_c$ wie folgt:

$$\lambda_{b'} = \varrho_b \sin \omega_a,\ \lambda_{c'} = \varrho_c \sin \omega_a.$$

In entsprechender Weise findet man die von den Punkten C', A' auf die Gerade C_0A_0 und von den Punkten A', B' auf die Gerade A_0B_0 gefällten Lote:

$$\mu_{c'} = \varrho_c \sin \omega_b,\ \mu_{a'} = \varrho_a \sin \omega_b;$$
$$\nu_{a'} = \varrho_a \sin \omega_c,\ \nu_{b'} = \varrho_b \sin \omega_c.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Abstand $\lambda_{a'}$ des Punktes A' von der Harmonikale $B_0\,C_0$ desselben kann mit Hilfe der Proportion

$$\lambda_{a'} : \lambda_a = A'Q_a : AQ_a$$

berechnet werden, wenn Q_a den Schnittpunkt von AA_0 mit B_0C_0 bedeutet. Unter Anwendung von 1. III auf das Dreieck AB_0C_0 findet man:

$$AQ_a = \frac{2\triangle}{(2\,a + b + c)\sin\frac{\alpha}{2}}; \text{ nun ist aber}$$

$$A'Q_a = AA' - AQ_a = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \frac{2\triangle}{(2\,a + b + c)\sin\frac{\alpha}{2}},$$

(vergl. 2. V.) und somit:

$$A'Q_a = \frac{3a\,\varrho_a}{(2\,a + b + c)\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Nach Einsetzung dieser Werte in obige Proportion gelangt man unter Beachtung von XI zu den bedeutsamen Formeln:

$$\lambda_{a'} = 3\,\varrho_a \sin\omega_a,\ \mu_{b'} = 3\,\varrho_b \sin\omega_b,\ \nu_{c'} = 3\,\varrho_c \sin\omega_c, \text{ oder}$$

$$\lambda_{a'} = 3\,\varrho_a\sqrt{\frac{r}{r+2\varrho_a}},\ \mu_{b'} = 3\,\varrho_b\sqrt{\frac{r}{r+2\varrho_b}},\ \nu_{c'} = 3\,\varrho_c\sqrt{\frac{r}{r+2\varrho_c}}$$

Die Zusammenstellung dieser Formeln mit den vorher entwickelten ergiebt:

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda_{a'} = 3\,\varrho_a \sin\omega_a, & \lambda_{b'} = \varrho_b \sin\omega_a, & \lambda_{c'} = \varrho_c \sin\omega_a. \\ \mu_{a'} = \varrho_a \sin\omega_b, & \mu_{b'} = 3\varrho_b \sin\omega_b, & \mu_{c'} = \varrho_c \sin\omega_b. \\ \nu_{a'} = \varrho_a \sin\omega_c, & \nu_{b'} = \varrho_b \sin\omega_c, & \nu_{c'} = 3\,\varrho_c \sin\omega_c. \end{array}\right\} \quad \text{XVII.}$$

Hieraus folgt unter anderem:

$$\lambda_{a'}\,\mu_{b'}\,\nu_{c'} = 27\,\lambda_{b'}\,\mu_{c'}\,\nu_{a'} = 27\,\lambda_{c'}\,\mu_{a'}\,\nu_{b'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XVIII.}$$

Schliessen die von der Projektion des Punktes A' auf $B_0\,C_0$ an den Kreis A' gezogenen Tangenten den Winkel $2\,\omega_{a'}$ ein, und haben $\omega_{b'}$, $\omega_{c'}$ eine analoge Bedeutung, dann ist:

$$\sin\omega_{a'} = \frac{\varrho_a}{\lambda_{a'}},\ \sin\omega_{b'} = \frac{\varrho_b}{\mu\lambda_{b'}},\ \sin\omega_{c'} = \frac{\varrho_c}{\nu\lambda_{c'}} \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIX.}$$

Aus XIX und XVII folgt:

$$\sin\omega_a \cdot \sin\omega_{a'} = \sin\omega_b \cdot \sin\omega_{b'} = \sin\omega_c \cdot \sin\omega_{c'} = \frac{1}{3}\,. \quad \text{XX.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für die Winkel $(b_0\, c_0)$, $(c_0\, a_0)$, $(a_0\, b_0)$ des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ resultieren unter Anwendung der Formeln V und X auf die Gleichung $\sin(b_0\, c_0) = \frac{a_0}{2 r_0}$, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \sin(b_0\, c_0) &= \frac{b+c}{r} \sin\omega_b \sin\omega_c \\ \sin(c_0\, a_0) &= \frac{c+a}{r} \sin\omega_c \sin\omega_a \\ \sin(a_0\, b_0) &= \frac{a+b}{r} \sin\omega_a \sin\omega_b \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{XXI.}$$

Behufs Ermittelung der Sinus der von den Dreieckseiten und den Harmonikalen der äusseren Berührungskreis-Mittelpunkte gebildeten Winkel beachte man, dass

$$\sin(a\, a_0) = \frac{\lambda_{a0}}{A_0 A_1}, \quad \sin(b\, b_0) = \frac{\mu_{b0}}{B_0 B_1}, \quad \sin(c\, c_0) = \frac{\nu_{c0}}{C_0 C_1},$$

$$\sin(a\, b_0) = \frac{p_{c0}}{b_0}, \quad \sin(b\, c_0) = \frac{p_{a0}}{c_0}, \quad \sin(c\, a_0) = \frac{p_{b0}}{a_0},$$

$$\sin(a\, c_0) = \frac{p_{b0}}{c_0}, \quad \sin(b\, a_0) = \frac{p_{c0}}{a_0}, \quad \sin(c\, b_0) = \frac{p_{a0}}{b_0},$$

und daher

$$\left.\begin{aligned} \sin(a\, a_0) &= \frac{b-c}{2r} \sin\omega_a, \\ \sin(b\, b_0) &= \frac{c-a}{2r} \sin\omega_b, \\ \sin(c\, c_0) &= \frac{a-b}{2r} \sin\omega_c. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{XXIIa.}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(a\, b_0) &= \frac{b+c}{2r} \sin\omega_b, \\ \sin(b\, c_0) &= \frac{c+a}{2r} \sin\omega_c, \\ \sin(c\, a_0) &= \frac{a+b}{2r} \sin\omega_a. \\ \sin(a\, c_0) &= \frac{b+c}{2r} \sin\omega_c, \\ \sin(b\, a_0) &= \frac{c+a}{2r} \sin\omega_a, \\ \sin(c\, b_0) &= \frac{a+b}{2r} \sin\omega_b. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{XXIIb.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus den Formeln XXIIa fliesst:

$$\frac{\sin(a\,a_0)}{\sin\omega_a} + \frac{\sin(b\,b_0)}{\sin\omega_b} + \frac{\sin(c\,c_0)}{\sin\omega_c} = 0 \quad . \; . \; . \quad \text{XXIII.}$$

während die Formeln XXIIb ergeben:

$$\frac{\sin(a\,b_0)\,\sin(b\,c_0)\,\sin(c\,a_0)}{\sin(a\,c_0)\,\sin(b\,a_0)\,\sin(c\,b_0)} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{XXIV.}$$

Die Verbindung der Formeln XXII liefert das beachtenswerte Ergebnis:

$$\left.\begin{aligned} \sin(aa_0) + \sin(ba_0) - \sin(ca_0) &= 0, \\ \sin(bb_0) + \sin(cb_0) - \sin(ab_0) &= 0, \\ \sin(cc_0) + \sin(ac_0) - \sin(bc_0) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{XXV.}$$

Mit Hilfe der vorstehenden Formeln können nun auch die übrigen Teilstrecken der Harmonikalen der äusseren Berührungsmittelpunkte ermittelt werden. Es ist

$$A_1B_0 = \frac{p_{b0}}{\sin(aa_0)}, \quad A_1C_0 = \frac{p_{c0}}{\sin(aa_0)},$$

$$B_1C_0 = \frac{p_{c0}}{\sin(bb_0)}, \quad B_1A_0 = \frac{p_{a0}}{\sin(bb_0)},$$

$$C_1A_0 = \frac{p_{a0}}{\sin(cc_0)}, \quad C_1B_0 = \frac{p_{b0}}{\sin(cc_0)}, \text{ d. i.}$$

$$A_1B_0 = \frac{4\,r\triangle}{(c+a)\,(b-c)\,\sin\omega_a}, \quad A_1C_0 = \frac{4\,r\triangle}{(a+b)\,(b-c)\,\sin\omega_a,}$$

$$B_1C_0 = \frac{4\,r\triangle}{(a+b)\,(c-a)\,\sin\omega_b}, \quad B_1A_0 = \frac{4\,r}{(b+c)\,(c-a)\,\sin\omega_b,}$$

$$C_1A_0 = \frac{4\,r\triangle}{(b+c)\,(a-b)\,\sin\omega_c}, \quad C_1B_0 = \frac{4\,r\triangle}{(c+a)\,(a-b)\,\sin\omega_c,}$$

woraus ohne weiteres folgt:

$$\frac{A_1B_0 \cdot B_1C_0 \cdot C_1A_0}{A_1C_0 \cdot B_1A_0 \cdot C_1B_0} = 1.$$

Die im vorstehenden entwickelten Formeln dienen zur Berechnung der Abstände λ_{b_1}, λ_{c_1}; μ_{c_1}, μ_{a_1}; ν_{a_1}, ν_{b_1} der Punkte A_1, B_1, C_1 von den Harmonikalen $A_1B_0C_0$, $B_1C_0A_0$, $C_1A_0B_0$ der Kreismittelpunkte A', B', C'.

Es ist nämlich

$$\lambda_{b_1} = B_1C_0 \cdot \sin(a_0b_0) = \frac{4\triangle}{c-a}\sin\omega_a,$$

$$\lambda_{c_1} = C_1B_0 \cdot \sin(c_0a_0) = \frac{4\triangle}{a-b}\sin\omega_a, \text{ etc.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führt man die von den Endpunkten der äusseren Winkelsymmetralen auf die einschliessenden Schenkel der Dreieckswinkel gefällten Lote p_{a_1}, p_{b_1}, p_{c_1} ein, dann ist

$$p_{a_1} = \frac{2\triangle}{b-c}, \quad p_{b_1} = \frac{2\triangle}{c-a}, \quad p_{c_1} = \frac{2\triangle}{a-b},$$

wobei das Vorzeichen von p_{b_1} zu beachten ist, und die vorstehenden Formeln gehen in die folgenden über:

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_{b_1} = 2p_{b_1} \sin \omega_a, & \lambda_{c_1} = 2p_{c_1} \sin \omega_a, \\ \mu_{c_1} = 2p_{c_1} \sin \omega_b, & \mu_{a_1} = 2p_{a_1} \sin \omega_b, \\ \nu_{a_1} = 2p_{a_1} \sin \omega_c, & \nu_{b_1} = 2p_{b_1} \sin \omega_c. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{XXVI.}$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_{b_1} \mu_{c_1} \nu_{a_1} = \lambda_{c_1} \mu_{a_1} \nu_{b_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{XXVII.}$$

Die von den äusseren Winkelsymmetralen und den Harmonikalen der äusseren Berührungskreismittelpunkte gebildeten Winkel können mit Hilfe des Sinussatzes berechnet werden: $\sin(a_0 a') : \sin(a_0 a) = AC_0 : AA_1$ etc.

Unter Beachtung der Werte von $\sin(a_0 a)$, AC_0, AA_1 etc. erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \sin(a_0 a') = \sin \frac{\beta-\gamma}{2} \cdot \sin \omega_a, \\ \sin(b_0 b') = \sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \cdot \sin \omega_b, \\ \sin(c_0 c') = \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin \omega_c. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XXVIII.}$$

4.

Die Harmonikale des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises in Bezug auf das Dreieck.

Man ermittle zunächst die Strecken $B_1C_1 = a_1$, $C_1A_1 = b_1$ und $A_1B_1 = c_1$ aus dem Inhalt der Dreiecke $A'B_1C_1$, $B'C_1A_1$, $C'A_1B_1$.

Es ist (Fig 1):

$$A'B_1C_1 = \frac{1}{2} A'B_1 \cdot A'C_1 \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Aus } A'B_1 = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}} = \frac{b\ \varrho_a}{(a-c)\cos\frac{\beta}{2}} \text{ und}$$

$$A'C_1 = \frac{\varrho_a}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{c\ \varrho_a}{(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}} \text{ folgt}$$

$$A'B_1C_1 = \frac{1}{2}\ \frac{abc\ \varrho_a}{(a-c)(a-b)}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$-\frac{abc}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \mathfrak{Q}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{I.}$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{Ia.}$$

dann ist

$$A'B_1C_1 = \frac{b-c}{2}\varrho_a\ \mathfrak{Q},\ B'C_1A_1 = \frac{c-a}{2}\varrho_b\ \mathfrak{Q},\ C'A_1B_1 = \frac{a-b}{2}\varrho_c\ \mathfrak{Q}.$$

Die Summierung dieser Dreiecke ergiebt:

$$A'B_1C_1 + B'C_1A_1 + C'A_1B_1 = \frac{\triangle\mathfrak{Q}}{2}\left(\frac{b-c}{s_a} + \frac{c-a}{s_b} + \frac{a-b}{s_c}\right),$$

und nach einigen Umformungen:

$$A'B_1C_1 + B'C_1A_1 + C'A_1B_1 = \frac{abc}{2\varrho}.$$

d. i. wegen 2. IV.

$$A'B_1C_1 + B'C_1A_1 + C'A_1B_1 = \triangle', \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.}$$

wobei auf das Vorzeichen von $B'C_1A_1$ zu achten ist.

Um nun a_1 zu berechnen, benutze man die Formel:

$$a_1{}^2 = AB_1{}^2 + AC_1{}^2 - 2\ AB_1 \cdot AC_1 \cos\alpha.$$

Nach Einführung der Werte für AB_1 und AC_1 (vergl. 1. II) ist:

$$a_1{}^2 = \left[\frac{bc}{(a-c)(a-b)}\right]^2 a\left[a-2\left(-a+b+c\right)\left(1-\cos\alpha\right)\right];$$

nun ist

$$a-2\left(-a+b+c\right)\left(1-\cos\alpha\right) = a-8s_a\ \sin^2\frac{\alpha}{2} = a-8\ \frac{s_a\ s_b\ s_c}{bc}$$

$$= \frac{abc-8\ \frac{s_0\ s_a\ s_b\ s_c}{s_0}}{bc} = \frac{4r\triangle-8\varrho\triangle}{bc} = \frac{4\triangle(r-2\varrho)}{bc} = \frac{a(r-2\varrho)}{r},$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und daher

$$a_1 = \frac{abc}{(a-c)(a-b)} \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}}.$$

Wegen I erhält man:

$$a_1 = (b-c)\,\Omega \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}},$$

$$b_1 = (c-a)\,\Omega \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}},$$

$$c_1 = (a-b)\,\Omega \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}},$$

wobei auf das Vorzeichen von b_1 zu achten ist.

Die Addition dieser Formeln liefert:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 0.$$

Dieser Formel kann nur genügt werden, wenn die Strecken a_1, b_1, c_1 in einer Gerade liegen. (Vergl. 1. VIII).

Da der hier vorkommende Wurzelausdruck immer reell und ein echter Bruch ist, so kann derselbe dem Sinus eines Winkels gleich gesetzt werden, und in der That steht dieser, im folgenden zu ermittelnde (Siehe Seite 11) Winkel mit den Dreieckskonstanten in inniger Beziehung.

Man fälle von den Mittelpunkten der äusseren Berührungskreise die Lote $\varkappa_{a'}$, $\varkappa_{b'}$, $\varkappa_{c'}$ auf die Gerade $A_1B_1C_1$, dann ist: $\varkappa_{a'} = \frac{2A'B_1C_1}{B_1C_1}$ etc., und somit

$$\varkappa_{a'} = \varrho_a \sqrt{\frac{r}{r-2\varrho}},\quad \varkappa_{b'} = \varrho_b \sqrt{\frac{r}{r-2\varrho}},\quad \varkappa_{c'} = \varrho_c \sqrt{\frac{r}{r-2\varrho}}.$$

Zieht man nun von den Fusspunkten der Lote $\varkappa_{a'}$, $\varkappa_{b'}$, $\varkappa_{c'}$ Tangenten an die entsprechenden äusseren Berührungskreise, dann sind die Sinus der halben Winkel, die von je einem Tangentenpaar eingeschlossen werden, beziehungsweise gleich $\frac{\varrho_a}{\varkappa_{a'}}$, $\frac{\varrho_b}{\varkappa_{b'}}$, $\frac{\varrho_c}{\varkappa_{c'}}$.

Da andrerseits gemäss obigen Formeln

$$\frac{\varrho_a}{\varkappa_{a'}} = \frac{\varrho_b}{\varkappa_{b'}} = \frac{\varrho_c}{\varkappa_{c'}} = \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}},$$

so sind die Sinus jener Winkel und daher die Winkel selbst einander gleich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nennt man den in Rede stehenden Winkel 2ω, dann findet die wichtige Definitionsgleichung statt:

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{r-2\varrho}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{III.}$$

Hieraus fliesst unmittelbar:

$$\cos\omega = \sqrt{\frac{2\varrho}{r}} \text{ und } \operatorname{tg}\omega = \sqrt{\frac{r-2\varrho}{2\varrho}} \quad \ldots\ldots \quad \text{IIIa.}$$

Projiziert man die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise auf die Harmonikale des inneren Berührungskreismittelpunktes, so erscheinen die den Projektionen entsprechenden Berührungssehnen unter gleichem Winkel.

Die halben Längen jener Sehnen seien bezw. a_a, b_b, c_c, dann ist:

$$a_a = \varrho_a \cos\omega,\ b_b = \varrho_b \cos\omega,\ c_c = \varrho_c \cos\omega \quad \ldots\ldots \quad \text{IV.}$$

und mit Rücksicht auf 3. VI:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_a\, b_b\, c_c}{a_a\, b_b\, c_c} &= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,.\,\sin\omega_a\ \sin\omega_b\ \sin\omega_c \\ \frac{a_b\, b_c\, c_a}{a_a\, b_b\, c_c} &= \frac{\sin\omega_a\ \sin\omega_b\ \sin\omega_c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \text{V.}$$

Wegen III gehen die oben entwickelten Formeln in die folgenden über:

$$\varkappa_{a'} = \frac{\varrho_a}{\sin\omega},\ \varkappa_{b'} = \frac{\varrho_b}{\sin\omega},\ \varkappa_{c'} = \frac{\varrho_c}{\sin\omega} \quad \ldots\ldots \quad \text{VI.}$$

$$a_1 = (b-c)\,\Omega\sin\omega,\ b_1 = (c-a)\,\Omega\sin\omega,\ c_1 = (a-b)\,\Omega\sin\omega. \quad \text{VII.}$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$a_1 : b_1 : c_1 = b-c : c-a : a-b \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VIIa.}$$

Da die Entfernungen der äusseren Berührungskreismittelpunkte von den Harmonikalen des inneren Mittelpunktes grösser sind, als die entsprechenden Radien, so liegt die Harmonikale des inneren Berührungskreismittelpunktes immer ausserhalb der äusseren Berührungskreise, während die Harmonikale des Mittelpunktes eines anbeschriebenen Kreises die drei übrigen Berührungskreise schneidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Betrachtet man die Harmonikale des Mittelpunktes eines Berührungskreises als die Polare der drei übrigen Berührungskreise, so sind die den drei Polen entsprechenden Tangentenwinkel einander gleich.

Zwischen den Winkeln ω, ω_a, ω_b, ω_c besteht die Relation: (vergl. 3. III).

$$\sin^2\omega + \frac{1}{\sin^2\omega_a} + \frac{1}{\sin^2\omega_b} + \frac{1}{\sin^2\omega_c} = 12 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

Auch ist $\cos\omega \operatorname{tg} \omega_a = \sqrt{\frac{\varrho}{\varrho_a}}$ etc. und

$\operatorname{tg} \omega_a \operatorname{tg} \omega_b \operatorname{tg} \omega_c \cos \omega = \frac{r}{a+b+c}$ und daher (vergl. Frankenbach, die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise, Formel XXXI):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \beta_1 \operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \omega_a \operatorname{tg} \omega_b \operatorname{tg} \omega_c \cos\omega. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IX.}$$

Der Abstand $OK = \varkappa_0$ des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises von seiner Harmonikale in Beziehung auf das Dreieck ABC wird aus der Proportion $\varkappa_0 : \varkappa_a = OP_a : AP_a$ gefunden, wenn P_a der Durchschnitt der Symmetrale AA_0 mit $A_1B_1C_1$ ist.

Es ist $OP_a = OA + AP_a = \frac{\varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}} + AP_a$.

Unter Anwendung von Formel 1. III. auf das Dreieck AB_1C_1 ist

$$AP_a = \frac{2\triangle}{(2a-b-c)\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ und daher}$$

$$OP_a = \frac{3a\varrho}{(2a-b-c)\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Einsetzen der gefundenen Werte in obige Proportion erhält man:

$$\varkappa_0 = \frac{3\varrho}{\sin\omega} = 3\varrho\sqrt{\frac{r}{r-2\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{X.}$$

Das von K an den Kreis O gezogene Tangentenpaar schliesse den Winkel $2\omega'$ ein, dann ist

$$\sin\omega' = \frac{\varrho}{\varkappa_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XI.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Folglich:

$\sin \omega = 3 \sin \omega'$. . . . . XIa.

Der Anwendung der Formeln XI und 3. XIX auf die Gleichung $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4\,r$ entspringt:

$\lambda_{a'} \sin \omega'_a + \mu_{b'} \sin \omega'_b + \nu_{c'} \sin \omega'_c - \varkappa_0 \sin \omega' = 4\,r$,

oder unter Beachtung der Gleichungen XIa und 3. XX:

$$\frac{\lambda_{a'}}{\sin \omega_a} + \frac{\mu_{b'}}{\sin \omega_b} + \frac{\nu_{c'}}{\sin \omega_c} - \varkappa_0 \sin \omega = 12\,r \quad . \quad . \quad . \quad \text{XII.}$$

Um dem eingeführten Winkel ω noch eine andre Bedeutung abzugewinnen, fälle man von den Ecken des Grunddreiecks die Lote $\varkappa_a$, $\varkappa_b$, $\varkappa_c$ auf die Harmonikale von O, dann ist:

$\varkappa_a : \varkappa_{c'} = A_1A : A_1C'$ etc. und daher:

$\varkappa_a : \varkappa_{c'} = h_a : \varrho_c$

$\varkappa_b : \varkappa_{a'} = h_b : \varrho_a$,

$\varkappa_c : \varkappa_{b'} = h_c : \varrho_b$, oder, wegen VI:

$$\varkappa_a = \frac{h_a}{\sin \omega},\ \varkappa_b = \frac{h_b}{\sin \omega},\ \varkappa_c = \frac{h_c}{\sin \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIII.}$$

Aus obigen Proportionen folgt:

$$\frac{\varkappa_a\,\varkappa_b\,\varkappa_c}{\varkappa_{a'}\,\varkappa_{b'}\,\varkappa_{c'}} = \frac{h_a\,h_b\,h_c}{\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c} = \frac{2\,\varrho}{r}.$$

(Vergleiche Formel XXXII Seite 22 der Abhandlung des Verfassers: Die dem Dreieck einbeschriebenen Kreise.)

Auch die Abstände der Endpunkte A_0, B_0, C_0 der inneren Winkelsymmetralen von der Gerade $A_1B_1C_1$ stehen mit dem Winkel ω in Beziehung. Man erhält diese Grössen vermittelst Proportionen, denn es ist:

$\varkappa_{a0} : \varkappa_b = A_0A_1 : BA_1$ etc.

und somit, wegen XIII, 1. II und 1. V:

$$\varkappa_{a0} = \frac{2\,p_{a0}}{\sin \omega},\ \varkappa_{b0} = \frac{2\,p_{b0}}{\sin \omega},\ \varkappa_{c0} = \frac{2\,p_{c0}}{\sin \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIV.}$$

Die Formeln VI, X, XIII und XIV liefern das bemerkenswerte Ergebnis:

$$\frac{1}{\varkappa_a} + \frac{1}{\varkappa_b} + \frac{1}{\varkappa_c} = \frac{1}{\varkappa_{a0}} + \frac{1}{\varkappa_{b0}} + \frac{1}{\varkappa_{c0}} =$$

$$\frac{1}{\varkappa_{a'}} + \frac{1}{\varkappa_{b'}} + \frac{1}{\varkappa_{c'}} = \frac{3}{\varkappa_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XV.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Summe der reciproken Abstände der Ecken, der Endpunkte der inneren Winkelsymmetralen, sowie der Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise eines Dreiecks von der Harmonikale des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises ist konstant und zwar gleich der dreifachen Reciproke des von dem inneren Berührungskreismittelpunkt auf dessen Harmonikale gefällten Lotes.

Für die Winkel, welche die Harmonikale des Mittelpunktes O mit den Seiten beziehungsweise den äusseren Winkelsymmetralen bildet, findet man:

$$\sin(aa_1) = \frac{\varkappa_b}{A_1B}, \sin(bb_1) = \frac{\varkappa_c}{B_1C}, \sin(cc_1) = \frac{\varkappa_a}{C_1A},$$

$$\sin(a'a_1) = \frac{\varkappa_a}{AA_1}, \sin(b'b_1) = \frac{\varkappa_b}{BB_1}, \sin(c'c_1) = \frac{\varkappa_c}{CC_1},$$

und daher:

$$\sin(aa_1) = \frac{b-c}{2r\sin\omega}, \sin(bb_1) = \frac{c-a}{2r\sin\omega}, \sin(cc_1) = \frac{a-b}{2r\sin\omega}. \quad \text{XVI.}$$

$$\sin(a'a_1) = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\omega}, \sin(b'b_1) = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\sin\omega}, \sin(c'c_1) = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\omega}. \quad \text{XVII.}$$

Aus XVI folgt mit Rücksicht auf VI

$$\sin(aa_1) : \sin(bb_1) : \sin(cc_1) = a_1 : b_1 : c_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XVIII.}$$

(Vergleiche hiermit Formel VIIa.)

Die Sinus der Winkel, welche die Harmonikale des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises eines Dreiecks mit den Seiten desselben bildet, stehen im Verhältnis der Teilstrecken der Harmonikale.

Die Addition der Gleichungen XVI ergiebt:

$$\sin(aa_1) + \sin(bb_1) + \sin(cc_1) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XIX.}$$

Die Summe der Sinus der von den Dreieckseiten und der Harmonikale des inneren Berührungskreismittelpunktes gebildeten Winkel ist gleich Null. (Vergl. S. 19.)

Aus den Dreiecken $A_1C_0C_1$, $B_1A_0A_1$, $C_1B_0B_1$ entwickelt man, dem vorhergehenden entsprechend, die Formeln:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left.\begin{aligned} \sin(a_0a_1) &= \frac{b-c}{r}\cdot\frac{\sin\omega_a}{\sin\omega}, \\ \sin(b_0b_1) &= \frac{c-a}{r}\cdot\frac{\sin\omega_b}{\sin\omega}, \\ \sin(c_0c_1) &= \frac{a-b}{r}\cdot\frac{\sin\omega_c}{\sin\omega}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{XX.}$$

Hieraus lässt sich die Relation ableiten (vergl. 3. XXIII):

$$\frac{\sin(a_0a_1)}{\sin\omega_a} + \frac{\sin(b_0b_1)}{\sin\omega_b} + \frac{\sin(c_0c_1)}{\sin\omega_c} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXI.}$$

Vergleicht man Formel XVII mit 3. XXVIII, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(a_0a')}{\sin(a_1a')} &= \sin\omega\sin\omega_a, \\ \frac{\sin(b_0b')}{\sin(b_1b')} &= \sin\omega\sin\omega_b, \\ \frac{\sin(c_0c')}{\sin(c_1c')} &= \sin\omega\sin\omega_c. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXII.}$$

Auf die nämliche Weise ergeben die Formeln XVI und 3. XXIIa:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sin(aa_0)}{\sin(aa_1)} &= \sin\omega\sin\omega_a, \\ \frac{\sin(bb_0)}{\sin(bb_1)} &= \sin\omega\sin\omega_b, \\ \frac{\sin(cc_0)}{\sin(cc_1)} &= \sin\omega\sin\omega_c, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIII.}$$

während aus den beiden letzten Formelgruppen folgt:

$\sin(aa_0)\sin(a_1a') = \sin(aa_1)\sin(a_0a')$, etc.

Die Formeln XX und 3. XXIIa liefern:

$$\frac{\sin(aa_0)}{\sin(a_1a_0)} = \frac{\sin(bb_0)}{\sin(b_1b_0)} = \frac{\sin(cc_0)}{\sin(c_1c_0)} = \frac{1}{2}\sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad \text{XXIV.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5.

Beziehungen der Harmonikalen der Berührungskreismittelpunkte eines Dreiecks zu dem Umkreis desselben und zu dem durch die Mittelpunkte der anbeschriebenen Kreise bestimmten Kreis.

Bevor man zur Ermittelung der Abstände δ, δ_a, δ_b, δ_c des Kreismittelpunktes M von den Punkten O, A', B', C' schreitet, berechne man (Fig. 1) die Strecke OO' aus dem Dreieck A'OO', wie folgt:

$$\overline{OO'}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'O'}^2 - 2\, A'O \cdot A'O' \cos O'A'O.$$

Nun ist:

$$A'O = AA' - AO = \frac{\varrho_a - \varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 4\, r \sin\frac{\alpha}{2},\ A'O' = 2\, r \text{ und}$$

$$\sphericalangle\, O'A'O = \sphericalangle\, AA_1B = \frac{\beta-\gamma}{2} \text{ und daher}$$

$$\overline{O'O}^2 = 16\, r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} + 4\, r^2 - 16\, r^2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

$$\overline{O'O}^2 = 4\, r \left(4\, r \sin^2\frac{\alpha}{2} + r - 4\, r \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2} \right)$$

Wegen $4\, r \sin^2\frac{\alpha}{2} = \varrho_a - \varrho$ und $4\, r \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \varrho_a + \varrho$, geht diese Formel in die folgende über:

$$\overline{O'O}^2 = 4\, r\, (r - 2\varrho) = 4\, r^2 \frac{r-2\varrho}{r}, \text{ d. i.}$$

$$O'O = 2\, r \sin\omega \text{ und wegen 2. III}$$

$$O'O = r' \sin\omega = 2\sqrt{r\,(r-2\varrho)}$$

Konstruiert man in Beziehung auf den Kreis O' den dem Punkte O konjugierten harmonischen Punkt, so schliessen die jenem Punkte entsprechenden Berührenden des Kreises O' den Winkel $2\,\omega$ ein.

Wegen 2. XII ist aber:

$$\delta = \sqrt{r\,(r-2\varrho)} = r \sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Konstruiert man in Beziehung auf den Kreis M den dem Punkte O konjugierten harmonischen Punkt, so schliessen die jenem Punkte entsprechenden Tangenten des Kreises M den Winkel 2ω ein.

Das durch Formel 2. XII ausgedrückte Resultat, dass $OO' = 2\,MO$, kann auch durch Berechnung von MO unmittelbar ermittelt werden:

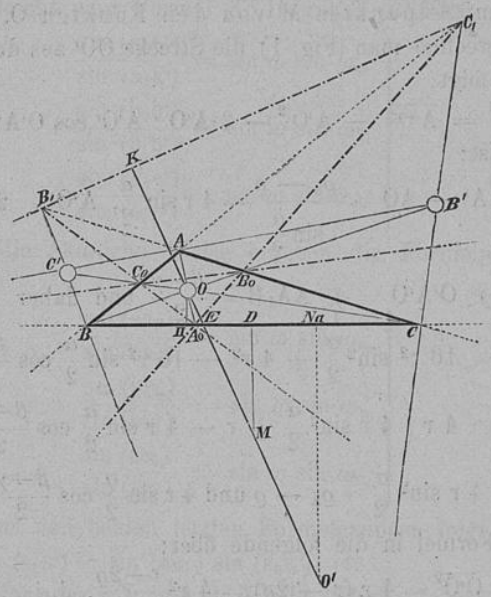

Fig. 3.

Sei (Fig. 3) H die Projektion des Punkes O, D diejenige des Punktes M, N_a diejenige von O' auf die Gerade BC, und E der Schnittpunkt der Geraden OM und BC, dann ist

$$MO = EO + EM, \text{ und}$$
$$EO : EO' = HO : N_a O', \text{ oder}$$
$$EO : OO' - EO = HO : N_a O'.$$

Hieraus folgt:

$$EO = \frac{HO \cdot OO'}{HO + N_a O'}$$

Andrerseits ist

$$EM : EO' = DM : N_a O', \text{ d. i.:}$$

$$EM = \frac{EO' \cdot DM}{N_a O'}.$$

Weil nun

$$EO' : OO' - EO' = N_a O' : HO, \text{ so folgt}$$

$$EO' = \frac{N_a O' \cdot OO'}{HO + N_a O'}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für EM ein, dann ist

$$EM = \frac{DM \cdot OO'}{HO + N_a O'}.$$

Daher ist

$$MO = \frac{HO \cdot OO'}{HO + N_a O'} + \frac{DM \cdot OO'}{HO + N_a O'}, \text{ d. i.}$$

$$MO = \frac{HO + DM}{HO + N_a O'} \cdot OO'.$$

Da nun

$HO = \varrho$, $DM = r \cos(180 - \alpha) = - r \cos \alpha = \frac{\varrho_a - \varrho - 2r}{2}$ und

$N_a O' = \varrho_a - 2r$, so folgt

$$MO = \frac{\varrho + \frac{\varrho_a - \varrho - 2r}{2}}{\varrho + \varrho_a - 2r} \cdot OO' = \frac{1}{2} OO'.$$

Nunmehr kann der durch die Winkelsymmetrale AA_0 und die Centrale OM gebildete Winkel $A'OO'$ aus dem Dreieck $A'O'O$ mit Hilfe des Sinussatzes berechnet werden (Fig. 1).

$$\sin A'OO' = \frac{\sin OA'O'}{OO'} \cdot A'O' = \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \omega}.$$

Die Vergleichung dieses Ausdruckes mit Formel 4. XVII liefert das wichtige Resultat:

$$\sin A'OO' = \sin (a'a_1) \text{ und daher}$$

$$\sphericalangle A'OO' = \sphericalangle (a'a_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II.}$$

Der durch die Centrale OM und die innere Winkelsymmetrale AA_0 gebildete Winkel ist sonach gleich dem Winkel,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welchen die Harmonikale von O mit der äusseren Winkelsymmetrale AA_1 des Grunddreiecks einschliesst.

Da nun $AA_0 \perp B'C'$, so ist auch $OM \perp B_1C_1$, d. h. die Geraden OM und OK fallen zusammen. Man hat daher das beachtenswerte Resultat:

Die Verbindungslinie der Mittelpunkte des um- und einbeschriebenen Kreises eines Dreiecks fällt mit dem Abstand des Mittelpunktes des inneren Berührungskreises von dessen Harmonikale zusammen.

Zur Berechnung des Abstandes δ_a benütze man Dreieck A'MO und findet:

$$\overline{A'M}^2 = \overline{MO}^2 + \overline{A'O}^2 - 2\,MO \cdot A'O \cos A'OM.$$

Nun ist aber (vergl. I und 2. VIII)

$$MO = r \sin \omega,\ A'O = 4\,r \sin \frac{\alpha}{2} \text{ und}$$

$$\cos A'OM = \frac{OK}{OP_a} = \frac{2a-b-c}{a}\,\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\omega}, \text{ und daher}$$

$$\delta_a{}^2 = r\,(r-2\varrho) + 16\,r^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} - 8r^2\,\frac{2a-b-c}{a}\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\delta_a{}^2 = r\,(r-2\varrho) + 8r^2\,\frac{b+c}{a}\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\delta_a{}^2 = r\left(r-2\varrho + 8r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right),$$

$$\delta_a{}^2 = r\,[r-2\varrho + 2\,(\varrho_a+\varrho)] = r\,(r+2\varrho_a),$$

$$\delta_a = \sqrt{r\,(r+2\varrho_a)} = r\sqrt{\frac{r+2\varrho_a}{r}}$$

und somit:

$$\delta_a = \frac{r}{\sin\omega_a},\ \delta_b = \frac{r}{\sin\omega_b},\ \delta_c = \frac{r}{\sin\omega_c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III.}$$

Betrachtet man die äusseren Berührungskreismittelpunkte als Pole in Beziehung auf den Umkreis des Grunddreiecks, so sind die denselben zugehörigen Tangentenwinkel gleich den Winkeln, welche die Tangenten einschliessen, die im Durchschnitt der jenen Mittelpunkten entsprechenden Harmonikalen mit dem Innenkreis an denselben gezogen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Durch Vergleichung von III mit 3. IV, sowie I mit 4. X folgt:

$$\delta_a \lambda_0 = \delta_b \mu_0 = \delta_c \nu_0 = \frac{1}{3} \delta \varkappa_0 = r\varrho \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IV.}$$

Das Produkt aus der Entfernung des Mittelpunktes des Umkreises von dem Mittelpunkt eines äusseren Berührungskreises in den Abstand des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von der Harmonikale jenes äusseren Berührungskreismittelpunktes ist gleich dem Rechteck aus dem Radius des einbeschriebenen Kreises und dem Radius des Umkreises eines Dreiecks.

Das Produkt aus der Entfernung des Mittelpunktes des Innenkreises von demjenigen des Umkreises eines Dreiecks in den Abstand des Dreiecksmittelpunktes von dessen Harmonikale ist gleich dem dreifachen Rechteck aus dem Radius des Innenkreises und demjenigen des Umkreises.

Mit Rücksicht auf die unter 3. XVII und 4. X entwickelten Formeln erhält man unter anderem:

$$\delta_a \lambda_{a'} + \delta_b \mu_{b'} + \delta_c \nu_{c'} - \delta \varkappa_0 = 12\, r^2.$$

Die Summe der Rechtecke aus der Entfernung je eines Mittelpunktes eines anbeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkt des Umkreises des Grunddreiecks in den Abstand jenes Punktes von seiner Harmonikale vermindert um das Rechteck aus der Entfernung des Mittelpunktes des einbeschriebenen Kreises von demjenigen des Umkreises in den Abstand jenes Punktes von seiner Harmonikale ist gleich dem zwölffachen Quadrat des Radius des Umkreises des Grunddreiecks.

Andrerseits folgt aus I und III unter Beachtung von 4. VIII:

$$\delta^2 + \delta_a{}^2 + \delta_b{}^2 + \delta_c{}^2 = 12\, r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V.}$$

Behufs Ermittelung der Lage der Gerade A'M zur Harmonikale B_0C_0 des Punktes A' in Bezug auf das Dreieck ABC bestimme man den Winkel OA'M, unter Anwendung des Sinussatzes auf das Dreieck A'MO:

$$\sin OA'M = \frac{OM}{A'M} \sin A'OM = \frac{\delta}{\delta_a} \sin (a'a_1).$$

Setzt man für δ, δ_a und $\sin (a'a_1)$ die früher gefundenen Werte ein, so ist:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sin OA'M = \sin \frac{\beta - \gamma}{2} \sin \omega_a.$$

Mit Rücksicht auf 3. XXVIII ist daher:

$$\sin OA'M = \sin (a_0 a') \text{ und somit}$$

$$\sphericalangle OA'M = (a_0 a'),\ \sphericalangle OB'M = (b_0 b'),\ \sphericalangle OC'M = (c_0 c') \quad . \quad \text{VI.}$$

Der durch die äussere Winkelsymmetrale AA_1 und die Harmonikale des Punktes A' eingeschlossene Winkel ist daher gleich dem durch die innere Winkelsymmetrale AA_0 und die Centrale A'M gebildeten Winkel.

Weil nun $A_0A \perp B'C'$, so ist auch $A'M \perp B_0C_0$, d. h. die von M auf B_0C_0 gefällte Senkrechte fällt mit der Centrale A'M zusammen.

Unter Berücksichtigung der Formeln II und VI hat man den wichtigen Lehrsatz:

Die vier von den Berührungskreismittelpunkten nach dem Mittelpunkt des Umkreises gezogenen Geraden stehen senkrecht auf den entsprechenden Harmonikalen jener Punkte.

Die Abstände $\varkappa_m$, λ_m, μ_m, ν_m des Mittelpunktes M des Umkreises von den Harmonikalen der Punkte O,A',B',C' sind beziehungsweise:

$$\varkappa_0 + \delta;\ \lambda_{a'} - \delta_a,\ \mu_{b'} - \delta_b,\ \nu_{c'} - \delta_c,$$

d. i. nach Einsetzen der entsprechenden Werte:

$$\varkappa_m = \frac{r + \varrho}{\sin \omega};\ \lambda_m = (\varrho_a - r) \sin \omega_a,\ \mu_m = (\varrho_b - r) \sin \omega_a,$$

$$\nu_m = (\varrho_c - r) \sin \omega_a,$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_m &= (r + \varrho) \sqrt{\frac{r}{r - 2\varrho}}; \\ \lambda_m &= (\varrho_a - r) \sqrt{\frac{r}{r + 2\varrho_a}}, \\ \mu_m &= (\varrho_b - r) \sqrt{\frac{r}{r + 2\varrho_b}}, \\ \nu_m &= (\varrho_c - r) \sqrt{\frac{r}{r + 2\varrho_c}}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VII.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Mit

∢ OA'M = (c_0c') . VI.

Der · AA_1 und die
Harmonik Winkel ist daher
gleich de e AA_0 und die
Centrale

We B_0C_0, d. h. die
von M au er Centrale A'M
zusammen

Unt nd VI hat man
den wich

Die mittelpunkten
nach de ezogenen Ge-
raden s chenden Har-
monikal

Die ttelpunktes M
des Um der Punkte
O,A',B',C'

β_c,

d. i. nach

$\varkappa_m$ = — r) sin ω_a,

oder

. . . VII.

© The Tiffen Company, 2007

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aus vorstehenden Formeln folgt:

$$\frac{\lambda_m}{\sin\omega_a} + \frac{\mu_m}{\sin\omega_b} + \frac{\nu_m}{\sin\omega_c} = \varkappa_m \sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{VIII.}$$

Die Verbindung der Formeln I, III und VII ergiebt:

$$\delta\,\varkappa_m = r\,(r + \varrho),\ \delta_a\,\lambda_m = r\,(\varrho_a - r),$$
$$\delta_b\,\mu_m = r\,(\varrho_b - r),\ \delta_c\,\nu_m = r\,(\varrho_c - r).$$

Die Addition dieser Gleichungen liefert:

$$\delta_a\,\lambda_m + \delta_b\,\mu_m + \delta_c\,\nu_m = \delta\varkappa_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{IX.}$$

Die von den Mittelpunkten der vier Berührungskreise eines Dreiecks auf die entsprechenden Harmonikalen gefällten Lote gehen durch **einen** Punkt, den Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks. Die Summe der Rechtecke aus den, durch diesen Punkt gebildeten, Abschnitten der Abstände der äusseren Berührungskreismittelpunkte von den entsprechenden Harmonikalen ist gleich dem Rechteck aus der Centrale des um- und einbeschriebenen Kreises in den Abstand des Dreiecksmittelpunktes von der Harmonikale desselben in Bezug auf das Dreieck.

Verbesserung:

Seite 14 Zeile 3 von unten lies:

$\mu_{b'}$ statt $\lambda_{b'}$, $\nu_{c'}$ statt $\lambda_{c'}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf