I. Abschnitt.

Einleitung.

§ 1.

Personen, Dinge der verschiedensten Art, Wörter u. s. w. können wir zählen. Wer etwa die Bäume einer Allee zählen will, fängt bei einem Baume an und geht dann von Baum zu Baum weiter. Die einzelnen Gegenstände, die wir beim Zählen nacheinander ins Auge fassen, heißen Einheiten und die Ergebnisse des Zählens sind die Zahlen. Diese bilden in der beim Zählen erhaltenen Folge die natürliche Zahlenreihe, die mit der Eins anfängt und bis ins Unendliche fortgesetzt werden kann. Die Zahlen heißen benannte oder unbenannte, je nachdem bei ihnen die gezählten Gegenstände namhaft gemacht sind oder nicht. Im Folgenden ist in der Regel nur von unbenannten Zahlen die Rede.

§ 2.

Die Arithmetik ist die Lehre von den Zahlen und von den Gesetzen, nach denen sie mit einander verbunden werden können. Sie umfaßt deshalb auch den Hauptinhalt des gewöhnlichen Rechenunterrichts. Von der Mathematik, der Lehre von den Größenverhältnissen der Dinge überhaupt, ist sie der eine Teil. Deren anderer Teil, die Geometrie, behandelt die Lehre von den räumlichen Größen.

Bei allen mathematischen Benennungen und Bezeichnungen muß genau angegeben werden, was unter ihnen verstanden oder begriffen werden soll. Daher nehmen die Erklärungen oder Definitionen in der Arithmetik wie in der Geometrie einen wichtigen Platz ein. Doch wird der Hauptinhalt von beiden Teilen der Mathematik in Sätzen gegeben, die sicher erkannte Wahrheiten aussagen.

Eine kleine Gruppe derselben bilden die Grundsätze. Die Behauptung, daß jede Größe sich selbst gleich sei, zeigt uns von ihnen ein Beispiel. Was ein Grundsatz aussagt, ist so einfach,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

daß er unmittelbar als richtig angenommen wird, und daß es noch einfachere Sätze, mit deren Hülfe er begründet werden könnte, nicht giebt. Jeder Versuch, ihn zu beweisen, ist deshalb überflüssig und auch vergeblich.

Viel zahlreicher als die Grundsätze sind die Lehrsätze, deren Behauptungen zu beweisen sind. Die Beweisgründe müssen vorangehenden Sätzen, Lehr- oder Grundsätzen, und Erklärungen entnommen werden. Lehrsätze werden schon beim gewöhnlichen Rechnen angewandt, z. B. der Satz, daß die Reihenfolge der Zahlen, die multipliziert werden sollen, verändert werden darf; ferner, daß ein Bruch mit einer Zahl multipliziert wird, wenn man den Zähler mit ihr multipliziert und den Nenner unverändert läßt, u. a.

Endlich werden in der Mathematik Aufgaben behandelt, die mit Hülfe der Sätze zu lösen sind.

§ 3.

Die Zahlen werden in der Arithmetik durch Ziffern oder durch Buchstaben, und zwar gewöhnlich durch die kleinen lateinischen, bezeichnet. Eine Ziffer bedeutet eine bestimmte, ein Buchstabe in der Regel eine ganz beliebige Zahl, 5, $7\frac{3}{4}$, 15,63 oder welche man sonst will. Doch ändert er im Verlauf derselben Rechnung seinen Wert nicht. Mit Hülfe der Buchstabenbezeichnung können in der Arithmetik die Gesetze, nach denen die Zahlen mit einander zu verbinden sind, in kurzer Form dargestellt werden, z. B. der vorhin erwähnte Multiplikationssatz durch die Gleichung $a . b = b . a$.

Außer den Ziffern sind vom Rechnenunterrichte her schon die Zeichen $=$, $+$, $-$, $\times$, $:$ und der Bruchstrich bekannt. Größer als wird mit $>$, kleiner als mit $<$, eine unendlich große Zahl mit ∞ bezeichnet. Um die nähere Zusammengehörigkeit von Zahlengrößen auszudrücken und auch um den Gang der Rechnung genau hervorzuheben, werden Klammern angewandt, ( ), oder auch [ ] oder { }.

§ 4.

Allgemeine Grundsätze der Mathematik.

I. Jede Größe ist sich selbst gleich.

$$a = a.$$

II. Das Ganze ist gleich der Summe aller seiner Teile und daher größer als jeder seiner Teile.

Besteht **a** aus den Teilen **b** und **c**, so ist $a = b + c$, $a > b$, $a > c$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. Von zwei gleichen Größen kann die eine statt der anderen gesetzt werden.

Ist z. B. $c = d$ und zugleich $a = b + c$, so ist auch $a = b + d$.

Als ein besonderer Fall dieses Satzes ist die Behauptung anzusehen:

Sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie auch unter einander gleich.

Ist $a = c$ und $b = c$, so ist auch $a = b$.

IV. Gleiches um Gleiches vermehrt oder vermindert, Gleiches mit Gleichem vervielfältigt und Gleiches in gleichviel Teile zerlegt giebt Gleiches.

Ist $a = b$, so ist auch $a + c = b + c$, $a - c = b - c$, $a \times c = b \times c$, $a : c = b : c$.

V. Größeres um Gleiches vermehrt oder vermindert giebt Größeres u. s. w.

Ist $a > b$, so ist auch $a + c > b + c$, $a - c > b - c$, $a \times c > b \times c$, $a : c > b : c$.

§ 5.

Der Grundsatz des Zählens.

Die Reihenfolge des Zählens hat auf die Größe der erhaltenen Zahl keinen Einfluß.

§ 6.

Erklärung und Arten des Rechnens.

Die Thätigkeit, welche die Arithmetik mit den Zahlen ausüben lehrt, ist das Rechnen.

Erklärung: Rechnen heißt, aus zwei gegebenen Zahlen auf vorgeschriebene Art und Weise eine dritte herleiten.

Diese, die gesuchte Zahl, wird das Ergebnis oder Resultat genannt.

Warum ist die Erklärung auch richtig, wenn mehr als zwei Zahlen gegeben sind?

Die Aufgabe ist eine einfache oder eine zusammengesetzte, je nachdem zwei oder mehr Zahlen rechnerisch untereinander verbunden werden sollen.

In der niederen Arithmetik werden die vier Grundrechnungsarten, das Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren und außerdem das Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren gelehrt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Abschnitt.

Das Addieren und Subtrahieren.

§ 7.

Erklärung der gewöhnlichen Addition und Subtraktion.

Sollen zwei einfache Zahlen, etwa 9 und 7, addiert werden, so pflegt der Rechnende das Resultat infolge häufiger Uebung gedächtnismäßig anzugeben. Wie verfährt aber der Anfänger, der das Resultat dieser Aufgabe nicht auswendig weiß?

Erklärung: Addieren heißt, von der ersten gegebenen Zahl an soviel Einheiten aufwärts zählen, wie die zweite Zahl angiebt.

Die gegebenen Zahlen heißen Summanden, die gesuchte Zahl wird Summe genannt. Das Rechenzeichen der Addition, +, wird plus gelesen. Aus der Erklärung folgt, daß $a + 0 = a$ ist.

Von den drei Zahlen, die bei der einfachen Additionsaufgabe vorkommen, sind die beiden Summanden gegeben, die Summe wird gesucht. Es kann nun aber auch die Summe selbst und dazu der eine Summand gegeben, der andere Summand gesucht sein. Die Summe sei 60, der eine Summand 24, wie groß ist dann der andere Summand? Die Aufgabe wird durch Subtraktion gelöst.

1. Erklärung: Subtrahieren heißt, zu einer Summe und dem einen von ihren beiden Summanden den anderen Summanden finden.

2. Erklärung: Subtrahieren heißt, von der ersten gegebenen Zahl soviel Einheiten abwärts zählen, wie die zweite Zahl angiebt.

Beide Erklärungen lassen die Verwandschaft der Addition und Subtraktion erkennen. Die eine hebt die Verschiedenheit in der Bedeutung der gegebenen und der gesuchten Zahlen, die andere die Gegensätzlichkeit des Verfahrens bei der Ausführung beider Rechnungen hervor. Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

Die gegebene Summe wird der Minuend, der gegebene Summand der Subtrahend, der gesuchte Summand die Differenz oder der Rest genannt.

Das Rechenzeichen des Subtrahierens ist — und wird minus gelesen.

Definitionsgleichungen der Subtraktion, d. h. Gleichungen, die unmittelbar aus den Erklärungen folgen, sind:

Differenz + Subtrahend = Minuend, oder

$$(a - b) + b = a. \quad a - a = 0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 9.

Die algebraischen Zahlen.

Was ist 5—9?

In der natürlichen Zahlenreihe können wir von 5 an nur um 5 Einheiten, nämlich bis 0 abwärts zählen. Es scheint daher zunächst notwendig, daß der Minuend größer als der Subtrahend sei. Damit wäre die Feststellung, daß in der Arithmetik die Buchstaben beliebige Zahlen bedeuten sollen, für die Subtraktionsaufgabe a — b wieder aufgehoben.

Nun sind jedoch Verhältnisse, die der gestellten Aufgabe entsprechen, dem täglichen Leben nicht fremd. Es kann z. B. ein Thermometer, das auf 5° stand, in den nächsten Tagen um 9° gefallen sein. Sein Stand kann dann mit 0—4 Grad bezeichnet werden. Statt 0—4, 0—1, 0—2 u. s. w. ist die kürzere Bezeichnung —4, —1, —2 u. s. w. gebräuchlich.

Es möge ferner von drei Personen A, B und C, die ein Vermögen von je 300 M. besitzen, jede auf irgend eine Art von einem Verlust betroffen werden, der für A 100 M., für B 300 M. und für C 500 M. betragen soll. Dann sinkt der Vermögensstand für A auf 200 M., für B auf 0 und für C noch 200 M. tiefer als für B, denn C gerät in eine Schuld von 200 M. Der Vermögensstand von C kann nun mit 0 — 200 M. oder kürzer mit — 200 M. bezeichnet werden.

Diese Beispiele zeigen, daß wir auch unter Null abwärts zählen können. Auch für das Abwärtszählen giebt es keine Grenze, es kann bis $-\infty$ fortgesetzt gedacht werden. Die Beschränkung, daß der Minuend nicht kleiner als der Subtrahend sein dürfe, fällt damit für die Arithmetik weg.

Die Zahlen —1, —2, —3 u. s. w. heißen negative Zahlen. Da sie durch Abwärtszählen, die natürlichen Zahlen durch Aufwärtszählen von Null an erhalten werden, so stehen sie zu diesen im Gegensatz. Die natürlichen Zahlen werden auch positive genannt und mit +1, +2, +3 u. s. w. bezeichnet. Die Reihen der negativen und der positiven Zahlen bilden zusammen die erweiterte oder algebraische Zahlenreihe, die von $-\infty$ an über 0 hinaus bis $+\infty$ reicht. Die Bezeichnung einer algebraischen Zahl besteht aus zwei Teilen, dem Vorzeichen und dem dahinter stehenden Zahlbetrag.

Zählt man von — 6 eine Einheit abwärts, so gelangt man zu — 7. Es ist $-7 < -6$.

Von zwei negativen Zahlen hat die kleinere den größeren Zahlbetrag.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 10.

Das Addieren algebraischer Zahlen.

Bei der Addition zweier algebraischen Zahlen können vier verschiedene Fälle vorkommen:

$+a$, dazu $+b$, $-a$, dazu $+b$, $+a$, dazu $-b$, $-a$, dazu $-b$; oder

$(+a)+(+b)$, $(-a)+(+b)$, $(+a)+(-b)$, $(-a)+(-b)$.

Der erste Fall stellt die Aufgabe des gewöhnlichen Addierens dar. Wie im allgemeinen zwei algebraische Zahlen zu addieren sind, kann durch das folgende Beispiel veranschaulicht werden.

Von zwei Personen X und Y möge X Kapital $(+a)$ besitzen, Y in Schulden $(-a)$ geraten sein. Erbt jede von ihnen ein Kapital $(+b)$, so geht es mit beider Vermögensstand aufwärts. Sind dagegen beide genötigt, einen Schuldposten $(-b)$ zu übernehmen, so geht es mit ihrem Vermögensstande abwärts. Jene Annahme entspricht dem ersten und zweiten Falle, diese dem dritten und vierten Falle des algebraischen Addierens.

Soll zu $+a$ oder zu $-a$ als zweite gegebene Zahl $+b$ addiert werden, so ist in beiden Fällen von der ersten gegebenen Zahl an in der algebraischen Reihe aufwärts zu zählen. Dagegen muß abwärts gezählt werden, wenn zu der ersten Zahl, $+a$ oder $-a$, als zweite Zahl $-b$ gegeben ist. Stets giebt die erste Zahl die Stelle der algebraischen Reihe an, von der aus zu zählen ist. Die zweite Zahl bestimmt mit ihrem Vorzeichen, in welcher Richtung, mit ihrem Zahlbetrag, um wieviel Einheiten gezählt werden soll. Daß bei der Addition von $+b$ und von $-b$ genau Entgegengesetztes zu thun ist, entspricht ganz der Gegensätzlichkeit dieser beiden Zahlen.

Algebraisch addieren heißt, von der ersten gegebenen Zahl an in der algebraischen Zahlenreihe aufwärts oder abwärts zählen, je nachdem das Vorzeichen der zweiten Zahl $+$ oder $-$ ist, und zwar um soviel Einheiten, wie der Zahlbetrag der zweiten Zahl angiebt.

Bei schriftlicher Darstellung der Aufgaben algebraischer Addition werden die gegebenen Zahlen entweder neben einander oder unter einander aufgeführt. Die Aufgabe, die Zahlen $+a$, $-b$ und $+c$ zu addieren, kann also geschrieben werden:

$$(+a)+(-b)+(+c).$$

Doch läßt man in der Regel das immer wiederkehrende Rechenzeichen $+$ und die damit überflüssig werdenden Klammern, außerdem, falls die erste gegebene Zahl das Vorzeichen $+$ hat, auch dieses weg, schreibt also kürzer

$$a-b+c.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Einen solchen Ausdruck nennen wir eine algebraische Summe, seine Teile Glieder.

Auch wenn die zu addierenden algebraischen Zahlen unter einander aufgeführt werden, pflegt man vor den einzelnen nur das Vorzeichen, nicht auch das Operationszeichen anzugeben. Also:

$$\begin{array}{r} +12 \\ -\ 7 \\ \hline +\ 5. \end{array}$$

Definitionsgleichungen.

$$+a-a=0,\quad -a+a=0,\quad a+b-b=0,\quad a-b+b=0.$$

In einer algebraischen Summe heben zwei Glieder mit ungleichen Vorzeichen, aber gleichem Zahlbetrag sich weg.

$$\begin{cases} +a+b=+(a+b), \\ -a-b=-(a+b), \\ +a-b=+(a-b), \\ -a+b=-(a-b), \\ +a-b=-(b-a), \\ -a+b=+(b-a), \end{cases} \begin{matrix} \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{falls } a > b, \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \text{falls } b > a \text{ ist.} \end{matrix}$$

Die Summe zweier algebraischen Zahlen mit gleichen Vorzeichen hat dasselbe Vorzeichen und als Zahlbetrag die Summe der gegebenen Zahlbeträge.

Die Summe zweier algebraischen Zahlen mit ungleichen Vorzeichen hat das Vorzeichen des größeren Zahlbetrags und als Zahlbetrag die Differenz zwischen dem größeren und kleineren der gegebenen Zahlbeträge.

§ 11.

Das Subtrahieren algebraischer Zahlen.

Die vier Fälle der einfachen Aufgabe der algebraischen Subtraktion sind

$(+a)-(+b)$, $(-a)-(+b)$, $(+a)-(-b)$, $(-a)-(-b)$.

Auch hier giebt die erste Zahl, die sowohl im positiven wie im negativen Teile der algebraischen Reihe liegen kann, stets die Stelle an, von der aus zu zählen ist. Die Subtraktion von $+b$ besteht in einem Abwärtszählen und im Gegensatz dazu die Subtraktion von $-b$ in einem Aufwärtszählen. Die Richtigkeit dieser Deutung kann wieder an Beispielen, in denen die Begriffe von Kapital und Schulden verwandt sind, veranschaulicht werden.

Erklärung: Subtrahieren mit algebraischen Zahlen heißt, von der ersten gegebenen Zahl an in der algebraischen Zahlenreihe abwärts oder aufwärts

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zählen, je nachdem das Vorzeichen der zweiten Zahl + oder — ist, und zwar um soviel Einheiten, wie der Zahlbetrag der zweiten Zahl angiebt.

Es ist demnach gleichbedeutend:

$(+a)-(+b)$ mit $(+a)+(-b)$, $(-a)-(-b)$ mit $(-a)+(+b)$,
$(+a)-(-b)$ mit $(+a)+(+b)$, $(-a)-(+b)$ mit $(-a)+(-b)$.

Es wird subtrahiert, wenn man das Vorzeichen der zweiten gegebenen Zahl umkehrt und dann addiert.

Bei schriftlicher Darstellung der Aufgabe, zwei algebraische Zahlen oder Summen zu subtrahieren, werden Minuend und Subtrahend in der Regel unter einander gestellt.

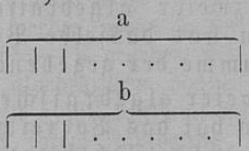
§ 12.

Lehrsätze der Addition und Subtraktion.

$$7+5=5+7,\ 63+37=37+63.$$

$$\text{I. } \mathbf{a+b=b+a}.$$

Wir zeichnen eine Reihe von a Strichen, darunter eine zweite Reihe von b Strichen.



Zählen wir sämmtliche Striche, die der oberen Reihe zuerst, 1, 2, 3 u. s. w., a, a + 1, a + 2 u. s. w., so erhalten wir a + b. Zählen wir noch einmal, doch nun die Striche der unteren Reihe zuerst, so ergiebt sich b + a. Nach dem Grundsatze des Zählens ist dann a + b = b + a.

Die Reihenfolge der Summanden hat auf den Wert der Summe keinen Einfluß.

Der Satz gilt auch für drei und mehr Summanden. Denn es ist zunächst a + b + c = b + a + c, da a + b = b + a ist, und weil von zwei gleichen Größen die eine statt der anderen gesetzt werden kann. Durch wiederholte Anwendung dieser Beweisgründe erhalten wir

$$\mathbf{a+b+c=b+a+c=b+c+a=c+b+a=c+a+b=a+c+b}.$$

Die Gleichheit dieser Summen kann auch unmittelbar durch Anwendung des Grundsatzes vom Zählen bewiesen werden.

Betrachten wir diesen Grundsatz auch für das Auf- und Abwärtszählen in der algebraischen Reihe als richtig, so folgt

$$\text{II. } \mathbf{a+b-c=a-c+b=-c+a+b} \text{ u. s. w.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In einer algebraischen Summe hat die Reihenfolge der Glieder auf das Resultat keinen Einfluß.

Die Richtigkeit von II wird auch daraus erkannt, daß die Addition von c zu jeder der vorkommenden algebraischen Summen zu gleichen Resultaten führt, und daß Gleiches zu Ungleichem addiert Ungleiches ergeben müßte. Es ist nämlich

$a + b - c + c = a + b$ nach den Definitionsgleichungen der algebraischen Addition;

$a - c + b + c = a - c + c + b$ nach Satz I dieses Paragraphen, $= a + b$;

$-c + a + b + c = -c + c + a + b = a + b$.

Wenn wir von einer gegebenen Zahl an erst um b und dann noch weiter um c Einheiten aufwärts zählen, so bedeutet das ein Aufwärtszählen um $b + c$ Einheiten. Daher ist

$$a + (b + c) = a + b + c.$$

Zu einer Zahl wird eine Summe addiert, wenn man zu ihr erst den einen Summanden und zum Resultat dann den andern addiert.

Soll zu einer Zahl eine Differenz addiert werden, und addieren wir zunächst nur den Minuenden, so wird das Resultat zu groß. Wir müssen es wieder um den Subtrahenden vermindern.

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

Die Richtigkeit der Gleichung kann noch durch Addition von c auf beiden Seiten erwiesen werden. Denn es ist

$a + (b - c) + c = a + b$ nach den Definitionsgleichungen der Subtraktion;

$a + b - c + c = a + b$ nach den Definitionsgleichungen der algebraischen Addition.

Zu einer Zahl wird eine Differenz addiert, wenn man zu ihr erst den Minuenden addiert und vom erhaltenen Resultat den Subtrahenden abzieht.

Die Formeln dieser beiden Sätze, die beim gewöhnlichen Rechnen vielfach angewandt werden, bilden zusammen

$$\text{Satz III.} \begin{cases} \mathbf{a + (b + c) = a + b + c,} \\ \mathbf{a + (b - c) = a + b - c.} \end{cases}$$

Klammern, vor denen ein + steht, kann man einfach weglassen.

Aehnliche Ueberlegungen wie bei III führen zu den Gleichungen.

$$\text{IV.} \begin{cases} \mathbf{a - (b + c) = a - b - c,} \\ \mathbf{a - (b - c) = a - b + c.} \end{cases}$$

Auch diese Gleichungen können durch Addition gleicher Größen auf beiden Seiten als richtig erwiesen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$a-(b+c)+(b+c)=a$, und $a-b-c+(b+c)=a-b-c+b+c$
nach dem vorigen Satze, $= a$;

$a-(b-c)+(b-c)=a$, und $a-b+c+(b-c)=a-b+c+b-c$
nach Satz III, $= a$.

Wie werden die Gleichungen IV jede für sich von links nach rechts gelesen, d. h. in Worten ausgedrückt? Zusammen zeigen sie den Satz:

Klammern, vor denen ein — steht, können weggelassen werden, doch sind dabei den Gliedern, die in den Klammern standen, die entgegengesetzten Vorzeichen zu geben.

§ 13.

Eine Gleichung zwischen Buchstaben ausdrücken, die einen mathematischen Satz darstellt, heißt eine Formel. Formeln können in der Regel von links nach rechts (v. l. n. r.) und von rechts nach links (v. r. n. l.) gelesen werden. Die Seite, von der wir beim Lesen einer Formel ausgehen, giebt an, welche Rechnung verlangt, die andere Seite sagt aus, wie das Verlangte ausgeführt wird.

Von den Formeln des vorigen Paragraphen haben I und II, in beiden Richtungen gelesen, denselben Wortlaut. Die Formeln III und IV geben von rechts nach links wohl neue Sätze, doch solche, die für die Herleitung der folgenden Teile der Arithmetik nicht von Wichtigkeit sind.

Wie werden die folgenden Gleichungen, die nach III, IV und II des vorigen Paragraphen leicht als richtig erwiesen werden können, gelesen?

$$(a+b)+c=(a+c)+b=(b+c)+a,$$
$$(a-b)+c=(a+c)-b=a-(b-c).$$
$$(a+b)-c=(a-c)+b=(b-c)+a,$$
$$(a-b)-c=(a-c)-b=a-(b+c).$$

III. Abschnitt.

Das Multiplizieren.

§ 14.

Das Multiplizieren mit Zahlen der natürlichen Zahlenreihe.

Durch das Verfahren der Umkehrung, das uns von der Addition zur Subtraktion führte, können wir nicht von dieser zu einer neuen Rechnungsart gelangen. Zu diesem Zweck müssen wir nochmals von der Addition ausgehen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beim Addieren sind zwei oder auch mehr Summanden gegeben, die im allgemeinen verschieden sind, jedoch auch sämtlich unter einander gleich sein können. Liegt dieser Fall vor, so kann mit einer ersten Zahl angegeben werden, wie der wiederholt vorkommende Summand heißt, mit einer zweiten, wie oft er vorkommt. Dadurch wird die Aufgabe, eine Anzahl gleich großer Summanden zu addieren, zu einer einfachen Aufgabe der folgenden Rechnungsart, der Multiplikation.

Erklärung: Multiplizieren heißt, die erste gegebene Zahl so oft als Summand setzen, wie die zweite angiebt.

Die erste gegebene Zahl, also der wiederholt zu nehmende Summand, wird Multiplikand, die zweite gegebene Zahl Multiplikator, die gesuchte Zahl Produkt genannt. Dieses ist also eine Summe gleicher Summanden.

Das Rechenzeichen der Multiplikation, $\times$ oder ., wird mal gelesen. Sehr oft setzt man Multiplikand und Multiplikator ohne Rechenzeichen neben einander, schreibt also ab statt $a \times b$ oder a.b. Das darf jedoch nie geschehen, wenn die zu multiplizierenden Zahlen als bestimmte Zahlen beide in Ziffern gegeben sind.

a^2 ist statt a.a, a^3 statt a a.a, a^4 statt a.a.a.a gebräuchlich. a^2 wird a Quadrat oder auch a hoch 2, a^3 a hoch 3 oder auch a Kubus, a^4 a hoch 4 gelesen.

Definitionsgleichung: $\mathbf{ab} = \overbrace{\mathbf{a} + \mathbf{a} \ldots\ldots + \mathbf{a}}^{\mathbf{b}}$.

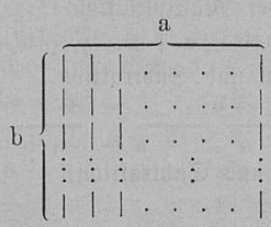
§ 15.

Lehrsätze.

$$6 \times 9 = 9 \times 6, \quad 7 \times 15 = 15 \times 7.$$

I. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.

Zum Beweise zeichnen wir b Horizontalreihen von je a Strichen so untereinander, daß sie zugleich a senkrechte Reihen von je b Strichen bilden.



Zählen wir die Striche, den Horizontalreihen folgend, in der Art wie beim Beweise des ersten Additionssatzes, so erhalten wir bei 2 Reihen $a + a$, bei 3 Reihen $a + a + a$, bei b Reihen

$\overbrace{a + a \ldots + a}^{b}$, also nach der Erklärung der Multiplikation $= a.b$. Folgen wir dagegen den senkrechten Reihen, so ist das Ergebniß $\overbrace{b + b \ldots + b}^{a} = b.a$. Nach dem Grundsatze des Zählens ist dann $ab = ba$.

Multiplikand und Multiplikator können miteinander vertauscht werden.

Sie erscheinen daher als gleichartig und erhalten die gemeinsame Benennung Faktoren.

Die Reihenfolge der Faktoren hat auf den Wert des Produkts keinen Einfluß.

Der Satz gilt auch für drei und mehr Faktoren, denn da $ab = ba$, $ac = ca$, $bc = cb$ ist und von gleichen Größen die eine statt der andern gesetzt werden darf, so ist

$$\mathbf{abc = bac = bca = cba = cab = acb}.$$

Für das Resultat ist es gleichgültig, ob wir a mit b und das erhaltene Produkt mit c, oder sogleich das schon bekannte Produkt (a b) mit c multiplizieren. Daher sind die Produkte $a.b\,c$ und $(ab).c$, $a.c.b$ und $(ac).b$, $b.c.a$ und $(bc).a$ gleichen Wertes und aus der Gleichung $a\,b.c = a.c.b = b.c.a$ folgt als Zusatz zu I. $(\mathbf{ab}).\mathbf{c} = (\mathbf{ac}).\mathbf{b} = (\mathbf{bc}).\mathbf{a}$.

Ein Produkt wird mit einer Zahl multipliziert, wenn man den einen Faktor derselben multipliziert und den andern unverändert läßt.

Z. B. $600.3 = (6.100).3 = 18.100 = 1800$.

$$23.4 = 20.4 + 3.4 = 92.$$

$$\text{II. } (\mathbf{a} + \mathbf{b}).\,\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

Beweis. $(a + b).c = \overbrace{(a + b) + (a + b) \ldots + (a + b)}^{c}$ nach der Definition der Multiplikation,

$$= a + b + a + b \ldots + a + b$$

nach III der Addition und Subtraktion,

$$= \overbrace{a + a \ldots + a}^{c} + \overbrace{b + b \ldots + b}^{c}$$

nach I der Addition und Subtraktion,

$$= ac + bc.$$

V. l. n. r. Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit der Zahl multipliziert und die Resultate addiert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. r n. l. Produkte mit gleichem Faktor werden addiert, wenn man die Summe der ungleichen Faktoren mit dem gleichen Faktor multipliziert.

$$997 . 6 = (1000 - 3) . 6 = 6000 - 18.$$

$$\text{III.} \quad (\mathbf{a} - \mathbf{b})\ \mathbf{c} = \mathbf{ac} - \mathbf{bc}.$$

Beweis. $(a - b) . c = \overbrace{(a - b) + (a - b) \ldots + (a - b)}^{c}$
$= a - b + a - b \ldots + a - b$

$= \overbrace{a + a \ldots + a}^{c} - \overbrace{b - b \ldots - b}^{b}$

n. II der Addition und Subtraktion,

$= ac - (b + b \ldots + b)$ n. d. Def.

und nach IV der Addition und Subtraktion,

$= ac - (bc) = ac - bc.$

Wie wird die Formel v. l. n. r., wie v. r. n. l. gelesen?

Zusatz von II u. III. $(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) . \mathbf{m} = \mathbf{am} + \mathbf{bm} - \mathbf{cm}$.

Zu lesen v. l. n. r.

$$\text{IV.} \begin{cases} (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{ac} + \mathbf{ad} + \mathbf{bc} + \mathbf{bd}, \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{ac} - \mathbf{ad} + \mathbf{bc} - \mathbf{bd}, \\ (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{c} - \mathbf{d}) = \mathbf{ac} - \mathbf{ad} - \mathbf{bc} + \mathbf{bd}. \end{cases}$$

Beweis. Wird zunächst $(a + b)$ als Summe und $(c + d)$ als Zahl behandelt, so ist nach Satz II

$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$ u. dies n. demselben Satze

$= (ac + ad) + (bc + bd) = ac + ad + bc + bd$

nach Satz III der Addition und Subtraktion.

Ähnlich ist $(a + b)(c - d) = a(c - d) + b(c - d) = (ac - ad) + (bc - bd) = ac - ad + bc - bd.$

$(a - b)(c - d) = a(c - d) - b(c - d) = (ac - ad) - (bc - bd)$
$= ac - ad - bc + bd$ nach Satz IV der Add. u. Subtr.

V. l. n. r. Summen und Differenzen werden mit einander multipliziert, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multipliiziert. Dabei geben gleiche Vorzeichen +, ungleiche —.

Zusätze zu IV. $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$,

$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2$,

$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$.

Die Formeln II—IV werden, von rechts nach links gelesen, zum Zerlegen in Faktoren, d. h. zum Verwandeln von Summen, Differenzen und algebraischen Summen in Produkte benutzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 16.

Das Multiplizieren mit algebraischen Zahlen.

Von den vier einfachen Aufgaben der algebraischen Multiplikation, nämlich

$$(+a).(+b), (-a).(+b), (+a).(-b), (-a).(-b),$$

ist die erste von der Aufgabe a b nicht verschieden; und auch die zweite ist nach der im § 14 gegebenen Erklärung zu deuten, da die Forderung, — a bmal als Summand zu nehmen, nach der Lehre von der Addition algebraischer Zahlen erfüllt werden kann. Dagegen ist die Anwendung jener nur für einen besonderen Fall gegebenen Erklärung auf $(+a).(-b)$ und $(-a).(-b)$ nicht möglich, da die Forderung, es solle etwas $(-b)$ mal geschehen, keinen Sinn hat.

Die richtige Deutung dieser Aufgaben folgt aus der besonderen Natur der negativen Zahlen. Da $+b$ und $-b$ entgegengesetzte Größen sind, so muß auch das Multiplizieren mit ihnen von entgegengesetzter Bedeutung sein. Nun heißt $(+a).(+b)$ die Zahl a bmal als Summand setzen, daher muß $(+a).(-b)$ den Sinn haben, daß a bmal als Subtrahend, oder was dasselbe ist, — a bmal als Summand gesetzt werden soll.

Ebenso steht $(-a).(-b)$ im Gegensatz zu $(-a).(+b)$ und heißt daher $(-a)$ bmal als Subtrahend oder auch $+a$ bmal als Summand nehmen.

Erklärung. Multiplizieren mit algebraischen Zahlen heißt, je nachdem die zweite gegebene Zahl positiv oder negativ ist, die erste Zahl selbst oder deren entgegengesetzten Wert so oft als Summand nehmen, wie der Zahlbetrag der zweiten Zahl angiebt.

Definitionsgleichungen.

$$(+a).(+b) = \overbrace{(+a)+(+a)\ldots+(+a)}^{b} = \overbrace{a+a\ldots+a}^{b},$$
$$(-a).(+b) = (-a)+(-a)\ldots+(-a) = -a-a\ldots-a,$$
$$(+a).(-b) = (-a)+(-a)\ldots+(-a) = -a-a\ldots-a,$$
$$(-a).(-b) = (+a)+(+a)\ldots+(+a) = a+a\ldots+a.$$

Zu derselben Deutung des Multiplizierens mit einem negativen Multiplikator führt die Fortsetzung der Gleichungen.

$$(+a).3 = a+a+a, (+a).2 = a+a, (+a).1 = a, (+a).0 = 0,$$

in denen von Gleichung zu Gleichung links der Multiplikator um eine Einheit, rechts die Summe um ein a vermindert ist, zu

$$(+a).(-1) = -a, (+a).(-2) = -a-a, (+a).(-b) = -a-a\ldots-a.$$

In ähnlicher Art gelangen wir von

$(-a).3 = -a-a-a, (-a).2 = -a-a, (-a).1 = -a, (-a).0 = 0,$

zu

$(-a).(-1) = +a, (-a)(-2) = +a+a, (-a).(-b) =$

$\overbrace{+a+a\ldots+a}^{b}.$

Lehrsatz V. $(+\mathbf{a}).(+\mathbf{b}) = +\mathbf{ab}$, $(+\mathbf{a}).(-\mathbf{b}) = -\mathbf{ab}$,
$(-\mathbf{a}).(+\mathbf{b}) = -\mathbf{ab}$, $(-\mathbf{a}).(-\mathbf{b}) = +\mathbf{ab}$.

Bew. Nach den Definitionsgleichungen des algebraischen Multiplizierens ist sowohl $(+a).(+b)$, wie $(-a).(-b) =$

$\overbrace{+a+a\ldots+a}^{b} = +ab$, und $(-a).(+b)$, wie $(+a).(-b) =$

$\overbrace{-a-a\ldots-a}^{b} = -\overbrace{(a+a\ldots+a)}^{b} = -(ab) = -ab.$

Die Lösung der einfachen Aufgabe des algebraischen Multiplizierens zerfällt in die Bestimmung des Vorzeichens und die Berechnung des Zahlbetrags.

Beim Multiplizieren zweier algebraischen Zahlen geben gleiche Vorzeichen +, ungleiche —, und der Zahlbetrag des Resultats ist das Produkt der gegebenen Zahlbeträge.

IV. Abschnitt.

Das Dividieren.

§ 17.

Erklärungen.

48 sei ein gegebenes Produkt, 8 dessen einer Faktor. Wie groß ist der andere Faktor?

Wenn nicht, wie bei der einfachen Multiplikationsaufgabe, die beiden Faktoren gegeben sind, sondern das Produkt und dessen einer Faktor, so wird der andere Faktor durch Division gefunden.

Erklärung. Dividieren heißt, zu einem Produkt und dessen einem Faktor den andern Faktor finden.

Erläuterung der Aufgabe. Ist a das gegebene Produkt, b der gegebene Faktor, so soll entweder festgestellt werden, wie oft b von a subtrahiert werden kann, oder, welche Zahl bmal von a subtrahiert werden kann. In jenem Falle ist b als Multiplikand,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in diesem als Multiplikator gedacht. Das eine Verfahren der Lösung entspricht dem Messen der Geometrie, das andere ist das Dividieren oder Teilen im engeren Sinne, da dabei die Zahl a in b gleiche Teile zerlegt werden muß.

Wer jedoch etwa 48 durch 8 dividieren soll, wird in der Regel weder prüfen, wie oft er 8 von 48 subtrahieren kann, noch wird er die gegebenen 48 Einheiten in 8 gleiche Gruppen zerlegen. Vielmehr beruht die praktische Ausführung der Division fast immer auf gedächtnismäßiger Kenntnis der Ergebnisse von Multiplikationsaufgaben und besonders des Einmaleins, sie schließt sich daher an die vorhin gegebene Erklärung an.

Das gegebene Produkt heißt der Dividend, der gegebene Faktor der Divisor, der gesuchte Faktor der Quotient.

Als Rechenzeichen des Dividierens wird : oder auch der sogenannte Bruchstrich benutzt. $a:b$ oder $\frac{a}{b}$ lies a geteilt durch b oder a durch b.

Zu dem Dividenden 48 und dem Divisor 8 gehört als Quotient eine Zahl der natürlichen Reihe, also eine ganze Zahl. In einem solchen Falle nennen wir den Dividenden ein Vielfaches des Divisors, diesen einen Teiler von jenem. Wird aber z. B. zu dem Dividend 48 der Divisor 5 genommen, so ist vorerst nur das Vielfache von 5, das zunächst unter 48 liegt, also 45 durch 5 zu dividieren. Um die vorgeschriebene Rechnung auch für $48 - 45 = 3$, den sogenannten Divisionsrest, ausführen zu können, muß jede seiner Einheiten in 5 gleiche Teile zerlegt gedacht werden. Die Division führt dann auf einen Bruch, dessen Teile Zähler und Nenner heißen.

$\frac{1}{b}$, lies 1 durch b oder ein btel, entsteht durch Zerlegung der ursprünglichen Einheit in b gleiche Teile, die nun selbst als neue Einheiten zu behandeln sind. Mit diesen können wir, gleichwie mit den ursprünglichen Einheiten, auf- und abwärts zählen, auch die Erklärungen und Lehrsätze der gewöhnlichen wie der algebraischen Addition und Subtraktion auf sie anwenden. Es muß nur die Bedingung erfüllt sein, daß sie unter einander gleichartig sind.

$\frac{a}{b}$ kann als Ergebniß des Zählens mit der Einheit $\frac{1}{b}$ oder auch als die Summe von a Einheiten, deren jede $\frac{1}{b}$ ist, oder endlich als der bte Teil von a ursprünglichen Einheiten angesehen werden. Ein Bruch wird echt oder unecht genannt, je nachdem sein Zähler größer oder kleiner als sein Nenner ist. Der unechte Bruch ist einer gemischten Zahl gleich, die die Summe einer ganzen Zahl und eines echten Bruches ist. $\frac{48}{5} = 9\frac{3}{5}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Benennungen Quotient und Bruch, Dividend und Zähler, Divisor und Nenner werden in der Arithmetik nicht streng unterschieden.

Die Aufgabe $\frac{a}{b} \cdot c$ bedeutet, daß die Gruppe von a Einheiten, deren jede $\frac{1}{b}$ ist, cmal als Summand zu nehmen ist. Das giebt ac solcher Einheiten, also $\frac{ac}{b}$.

Die Aufgabe $c \cdot \frac{a}{b}$ bedeutet, daß der bte Teil von c Einheiten, also $\frac{c}{b}$, amal als Summand zu nehmen ist; $c . \frac{a}{b} = \frac{c . a}{b}$.

Es ist daher nicht nur $\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b}$, sondern es sind überhaupt nach diesen Erklärungen und nach dem, was über das Addieren und Subtrahieren von Brucheinheiten festgestellt ist, die Sätze der Multiplikation auch dann richtig, wenn unter den Faktoren Brüche vorkommen.

Definitionsgleichungen der Division:

Quotient × Divisor = Dividend, $(a : b) . b = a$,

oder Bruch × Nenner = Zähler, $\frac{a}{b} \cdot b = a$.

$$\frac{a . b}{b} = a, \quad \frac{a}{a} = 1, \quad \frac{a}{1} = a.$$

§ 18.

Lehrsätze.

Wenden wir die Erklärung des Addierens auf gleichartige Brucheinheiten an, so ist $\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$, $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, also auch

$$\text{I.} \quad \frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Die Multiplikation der rechten Seite der Formel mit dem gegebenen Faktor c zeigt, daß sie den gesuchten Faktor darstellt, denn es ist $\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right) \cdot c = \frac{a}{c} \cdot c + \frac{b}{c} c$ nach Satz II der Multiplikation, $= a + b$, also gleich dem gegebenen Produkte.

V. l. n. r. Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch die Zahl dividiert und die Resultate addiert.

V. r. n. l. Brüche mit gleichem Nenner werden addiert, indem man die Summe der Zähler durch den gleichen Nenner dividiert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Herleitungen der übrigen Sätze dieses Paragraphen und meistens auch die zu ihrer Veranschaulichung dienenden Beispiele sind weggelassen. Die rechten Seiten der Formeln werden durch Multiplikation als die gesuchten Faktoren erwiesen.

$$\text{II.}\quad \frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}.$$

Bew. $\left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}\right).c = \frac{a}{c}.c - \frac{b}{c}.c$ nach Satz III der Mult., $= a - b$.

Die Gleichung ist von links nach rechts und von rechts nach links zu lesen.

Zusatz zu I und II: $\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$.

$$\text{III.}\quad \frac{ab}{c} = \frac{a}{c}.b = \frac{b}{c}.a.$$

Bew. $\frac{a}{c}.b.c = \frac{a}{c}.c.b = ab, \frac{b}{c}.a.c = \frac{b}{c}.c.a = b.a.$

V. l. n. r. Ein Produkt wird durch eine Zahl dividiert, wenn man den einen Faktor durch die Zahl dividiert und den andern unverändert läßt.

Der Satz, den die Formel von rechts nach links zeigt, kommt vollständig in Formel VI vor. Zu vergleichen sind die Erklärungen am Ende des vorigen Paragraphen.

$$\text{IV.}\quad \frac{a}{b.c} = \frac{a:b}{c} = \frac{a}{c}:b.$$

Bew. $\frac{a:b}{c}.b.c = \frac{a:b}{c}.c.b = (a:b).b = a, \left(\frac{a}{c}:b\right).b.c = \frac{a}{c}.c = a.$

V. l. n. r. Eine Zahl wird durch ein Produkt dividiert, indem man sie erst durch dessen einen Faktor dividiert und das Resultat sodann durch den andern.

$$5760 : 60 = 576 : 6 = 96.$$

V. r. n. l. Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert, indem man den Zähler durch die Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt, oder indem man den Zähler unverändert läßt und d n Nenner mit der Zahl multipliziert.

$$\tfrac{6}{7} : 2 = \tfrac{3}{7},\ \tfrac{5}{7} : 2 = \tfrac{5}{14}.$$

Wann wird das eine und wann das andere Verfahren angewandt?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{V.}\quad \frac{a.b}{c.d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} \cdot \left(= \frac{a}{d} \; \frac{b}{d} \right).$$

$$\text{Bew.}\quad \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} . c . d = \frac{a}{c} . c . \frac{b}{d} . d = a . b.$$

V. r. n. l. Brüche werden multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

Wird $a = b$ gesetzt, so ist $\frac{a.b}{c.b} = \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{b} = \frac{a}{c} . 1 = \frac{a}{c}$, also

$$\text{Zusatz zu V.}\quad \frac{a.b}{c.b} = \frac{a}{c}.$$

Der Wert eines Bruches bleibt beim Heben und Erweitern, d. h., wenn im Zähler und Nenner ein gleicher Faktor weggelassen oder hinzugefügt wird, unverändert.

Brüche von ungleichem Nenner können nach diesem Satz auf einen gleichen Nenner, ihren Generalnenner, gebracht und dann sowohl addiert wie subtrahiert werden. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$.

$$\text{VI.}\quad a : \frac{b}{c} \text{ oder } \frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

$$\text{Bew.}\quad \frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{acb}{bc} \text{ n. dem vorigen Satze, } = \frac{a}{1} = a,$$

$$\frac{a}{b} \cdot c \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{b} . b = a.$$

V. l. n. r. Eine Zahl wird durch einen Bruch dividiert, indem man sie entweder mit dem Nenner multipliziert und das Resultat durch den Zähler dividiert, oder indem man sie erst durch den Zähler dividiert und dann das Resultat mit dem Nenner multipliziert.

$$7 : \tfrac{4}{5} = \tfrac{35}{4},\ 8 : \tfrac{4}{5} = 2 . 5 = 10.$$

V. r. n. l. Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man entweder den Zähler mit der Zahl multipliziert und den Nenner unverändert läßt, oder indem man den Zähler unverändert läßt und den Nenner durch die Zahl dividiert.

$$\tfrac{3}{7} . 2 = \tfrac{6}{7},\ \tfrac{3}{8} . 2 = \tfrac{3}{4}.$$

$$\text{VII.}\quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \text{ also } = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bew. $\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bd} = \frac{a}{b}$.

Erklärung. Zahlenpaare, wie $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{3}$, $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$, 5 und $\frac{1}{5}$, a und $\frac{1}{a}$ heißen reziproke Zahlen. Das Produkt zweier reziproker Zahlen ist gleich 1.

Es ist einerlei, ob man durch eine Zahl dividiert oder mit der ihr zugehörigen reziproken Zahl multipliziert.

§ 19.

Das Dividieren mit algebraischen Zahlen.

Bei den einfachen Aufgaben der algebraischen Division, $(+a):(+b)$, $(-a):(+b)$, $(+a):(-b)$, $(-a):(-b)$; oder

$$\frac{+a}{+b}, \frac{-a}{+b}, \frac{+a}{-b}, \frac{-a}{-b},$$

gilt die in § 17 gegebene Erklärung. Das Vorzeichen des gesuchten Faktors ist in Rücksicht auf den Vorzeichensatz der algebraischen Multiplikation zu nehmen. Da z. B. in $(-a):(+b)$ das gegebene Produkt negativ ist, so müssen die beiden Faktoren ungleiche Vorzeichen haben. Der gegebene Faktor ist positiv, der gesuchte mithin negativ.

VIII. $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}, \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}, \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}, \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

Bei der Division algebraischer Zahlen geben gleiche Vorzeichen +, ungleiche —, und der Zahlbetrag des Resultats ist der Quotient der gegebenen Zahlbeträge.

§ 20.

Besondere Fälle der Division.

Der Bruch $\frac{1}{m}$ ist um so kleiner, je größer m ist, und bei sehr großem m nähert er sich dem Werte 0.

Es ist $\frac{1}{\infty} = 0$ und für ein a von begrenztem Werte auch $\frac{a}{\infty} = 0$.

$$\frac{0}{a} = 0, \frac{a}{0} = \frac{a}{\frac{1}{\infty}} = \frac{a}{0} = \infty.$$

Für das Dividieren durch eine Summe, durch eine Differenz oder durch eine algebraische Summe giebt es keinen einfachen Satz. Doch können derartige Aufgaben nach einem Verfahren behandelt werden, das dem bei der Division durch eine mehrstellige Zahl entspricht und auf einer Anwendung des Zusatzes zu I und II im § 18 beruht. Zur Erläuterung einige Beispiele.

Soll $(24\,ac + 12\,bd - 9\,b - 32\,ad) : (3\,c - 4\,d)$ berechnet werden, so werden zunächst Dividend und Divisor nach derselben Regel geordnet, etwa so, daß die Glieder mit dem Faktor a denen mit dem Faktor b, die mit dem Faktor c denen mit dem Faktor d vorangehen. Der Verlauf der Rechnung gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{array}{l}
(24\,ac - 32\,ad - 9\,bc + 12\,bd) : \underline{\underline{(3\,c - 4\,d)}} \\
\underline{24\,ac - 32\,ad} \qquad\qquad\qquad\qquad 8\,a - 3\,b. \\
\qquad\qquad - 9\,bc + 12\,bd \\
\qquad\qquad \underline{- 9\,bc + 12\,bd.}
\end{array}$$

Zunächst wird das 1. Glied des Dividenden durch das 1. Glied des Divisors dividiert, der erhaltene Teilquotient 8a mit dem ganzen Divisor $3\,c - 4\,d$ multipliziert und das Produkt vom Dividenden subtrahiert. Der Rest des Dividenden ist der Dividend der weiteren Rechnung. Dessen erstes Glied wird durch das 1. Glied des Divisors dividiert und dann fortgefahren, wie schon oben angegeben ist. Die Rechnung besteht also in einer Zerlegung des Dividenden in Glieder, die in der Regel algebraische Summen sind, und deren Division durch den gegebenen Divisor.

$$\left(bc - \frac{c^2}{9} + \tfrac{16}{25}a^2 - \frac{9}{4}b^2\right) : \left(\tfrac{4}{5}a + \frac{c}{3} - \tfrac{3}{2}b\right)$$

$$= \left(\tfrac{16}{25}a^2 - \tfrac{9}{4}b^2 + bc - \frac{c^2}{9}\right) : \underline{\underline{\left(\tfrac{4}{5}a - \tfrac{3}{2}b + \frac{c}{3}\right)}}.$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\tfrac{16}{25}a^2 - \tfrac{6}{5}ab + \tfrac{4}{15}ac} \qquad\qquad \tfrac{4}{5}a + \tfrac{3}{2}b - \tfrac{1}{3}c^2. \\
\qquad + \tfrac{6}{5}ab - \tfrac{9}{4}b^2 - \tfrac{4}{15}ac + bc \\
\qquad \underline{+ \tfrac{6}{5}ab - \tfrac{9}{4}b^2 \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}bc} \\
\qquad\qquad\qquad - \tfrac{4}{15}ac + \tfrac{1}{2}bc - \dfrac{c^2}{9} \\
\qquad\qquad\qquad \underline{- \tfrac{4}{15}ac + \tfrac{1}{2}bc - \dfrac{c^2}{9}}.
\end{array}$$

Hier zeigen erst die Produkte der Teilquotienten mit dem Divisor die algebraischen Summen, in die der Dividend zerlegt werden muß.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es soll 1 durch 1 – x dividiert werden:

$$
\begin{array}{l}
1 \;:\; (1-x) \\
\underline{1-x} \quad 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \\
\quad + x \\
\quad \underline{x - x^2} \\
\qquad x^2 \\
\qquad \underline{x^2 - x^3} \\
\qquad\quad x^3 \ldots
\end{array}
$$

Die Division führt zu einer Summe mit unendlich vielen Summanden.

$(a^6 - b^6) : (a - b) = a^5 + a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 + ab^4 + b^5,$

$(a^5 - b^5) : (a - b) = a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4,$

$(a^6 - b^6) : (a + b) = a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5,$

$(a^5 + b^5) : (a + b) = a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4.$

Ist n eine ganze Zahl so ist $a^n + b^n$ durch $a - b$ stets ohne Rest teilbar, durch $a + b$ nur dann, wenn n eine gerade Zahl ist; ferner ist $a^n + b^n$ durch $a - b$ überhaupt nicht und durch $a + b$ nur dann ohne Rest teilbar, wenn n eine ungerade Zahl ist.

§ 21.

Erklärung der Verhältnisse und Proportionen.

In unserm Denken und Urteilen kommt dem Vergleichen eine sehr große Bedeutung zu. Wir vergleichen z. B. Waren nach Beschaffenheit, Gewicht und Preis, Pflanzen nach Blatt-, Blüten- und Fruchtbildungen u. s. w. In der Mathematik werden Größen, in der Arithmetik insbesondere Zahlengrößen verglichen.

Zwei Zahlen a und b können gleich oder ungleich befunden werden. In diesem Falle können wir bei einem genaueren Vergleichen weiter entscheiden, entweder um wieviel a größer oder kleiner als b ist, oder welches Vielfache a von b, d. h. wie oft a in b enthalten ist. Die eine Frage wird durch Subtraktion, die andere, die allein für die folgende Betrachtung den Ausgang bilden soll, durch Division der verglichenen Zahlen beantwortet. Der dann gefundene Quotient oder Bruch, $a : b$ oder $\frac{a}{b}$, heißt als Resultat einer Vergleichung das geometrische Verhältnis oder kürzer das Verhältnis von a zu b, und a und b selbst werden das Vorderglied und das Hinterglied des Verhältnisses genannt.

Auch Verhältnisse können wir untereinander vergleichen. Liegt dann der Fall vor, daß zwei Verhältnisse, etwa $a : b$ und $c : d$, einander gleich sind, so heißt die Gleichung $a : b = c : d$ eine geometrische Proportion oder auch schlechthin eine Proportion.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine Proportion ist eine Gleichung zwischen zwei Verhältnissen.

Jede Proportion hat zwei Vorder- und zwei Hinterglieder, zwei innere und zwei äußere Glieder. Sind ihre inneren Glieder sich gleich, wie in $a : b = b : c$, so ist sie stetig, dann ist b die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel zwischen a und c.

In der Gleichung $a : b = c : d$ können nur drei der Buchstaben willkürliche Zahlwerte beigelegt werden, nicht auch dem vierten. In $a : b = c : x$ wird x durch die für a, b und c angenommenen Werte bestimmt, denn es ist $x = \frac{b.c}{a}$. Ebenso muß in $a : b = x : d$ das Glied $x = \frac{ad}{b}$, in $a : x = c : d$ das Glied $x = \frac{ad}{c}$, in $x : b = c : d$ das Glied $x = \frac{bc}{d}$ sein. Diese Gleichungen geben die Lösung der Aufgabe, zu drei gegebenen Zahlen die vierte Proportionale zu finden.

§ 22.

Lehrsätze der Proportionen.

Wenn die Proportion $a : b = c : d$ richtig ist, so folgt, wie durch Multiplikation der Gleichung mit bd erwiesen wird, daß

$$ad = bc \text{ ist.}$$

In einer Proportion ist das Produkt der inneren Glieder dem Produkte der äußeren Glieder gleich.

Besteht umgekehrt die Gleichung $ad = bc$, so gilt, wie die Division durch bd auf beiden Seiten zeigt, auch die Proportion

$$a : b = c : d.$$

Aus einer Gleichung zwischen zwei Produkten erhält man eine richtige Proportion, wenn man die beiden Faktore des einen Produktes zu äußeren, die des anderen zu innern Gliedern nimmt.

Bei den folgenden Formeln folgen nicht nur II aus I und I aus II, sondern auch III—XI aus I.

I. $\mathbf{a : b = c : d}$.

II. $\mathbf{ad = bc}$.

III. $\mathbf{a : c = b : d}$. (Aus I zunächst II und dann Division durch c.d.)

IV. $\mathbf{d : b = c : a}$. (II durch ab.)

V. $\mathbf{d : c = b : a}$. (II durch ac.)

VI. $\mathbf{b : a = d : c}$. (Aus I Schluß auf V, dann Vertauschung der Seiten.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VII. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}):\mathbf{a}=(\mathbf{c}+\mathbf{d}):\mathbf{c}$. (Schluß von I auf VI, dann Addition von VI zu $\frac{a}{a}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{c}}$.)

VIII. $(\mathbf{a}-\mathbf{b}):\mathbf{a}=(\mathbf{c}-\mathbf{d}):\mathbf{c}$. (Subtraktion der Gleichung VI von $\frac{a}{a}=\frac{c}{c}$.)

IX. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}):\mathbf{b}=(\mathbf{c}+\mathbf{d}):\mathbf{d}$
X. $(\mathbf{a}-\mathbf{b}):\mathbf{b}=(\mathbf{c}-\mathbf{d}):\mathbf{d}$ } (Addition und Subtraktion von $\frac{b}{b}=\frac{d}{d}$ zu I.)

XI. $(\mathbf{a}+\mathbf{b}):(\mathbf{a}-\mathbf{b})=(\mathbf{c}+\mathbf{d}):(\mathbf{c}-\mathbf{d})$. Division von VII durch VIII oder IX durch X.)

In einer Proportion können daher vertauscht werden:

die inneren wie die äußern Glieder (III, IV, V), die Vorderglieder mit den Hintergliedern (VI);

und es verhält sich in einer Proportion

die Summe oder Differenz des ersten und zweiten Gliedes zum ersten oder zweiten Gliede wie die Summe oder Differenz des dritten und vierten Gliedes zum dritten oder vierten Gliede (VII—X),

auch die Summe des 1. u. 2. Gliedes zu deren Differenz wie die Summe des 3. u. 4 Gliedes zu deren Differenz.

XII. Wenn $\mathbf{a}:\mathbf{b}=\mathbf{c}:\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}:\mathbf{b}=\mathbf{c}:\mathbf{y}$ ist, so muß $\mathbf{x}=\mathbf{y}$ sein, denn es ist $x=\frac{bc}{a}$ und $y=\frac{bc}{a}$. Ebenso folgt aus $a:b=x:d$ und $a:b=y:d$, $x=y$ u. s. w.

Stimmen zwei Proportionen in drei gleichstehenden Gliedern überein, so haben sie auch das vierte Glied gleich.

Die Lehrsätze der Arithmetik, die für beliebig große Zahlen richtig sind, werden durch je eine Formel dargestellt, die die Behauptung enthält. Warum sind zur Darstellung eines Proportionssatzes zwei Formeln nötig?

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

V. Abschnitt.

Das Potenzieren.

§ 23.

Erklärung der Potenzen mit positiven ganzen Exponenten.

Das Resultat der Multiplikation, das Produkt, kann aus zwei oder aus mehr Faktoren gebildet sein. Sind diese unter einander gleich, wie bei 5.5 5.5, so wird die Aufgabe wieder zu einer einfachen mit nur zwei gegebenen Zahlen, wenn mit einer Zahl der Faktor genannt, mit einer zweiten Zahl bestimmt wird, wie oft er vorkommen soll. Die so gewonnene neue Rechnungsart ist die Potenzrechnung. Sie ist in ähnlicher Art mit der Multiplikation verbunden, wie diese selbst mit der Addition.

Erklärung. Potenzieren heißt, die erste gegebene Zahl so oft als Faktor nehmen, wie die zweite gegebene Zahl angiebt.

Von den gegebenen Zahlen heißt die erste die Basis oder Grundzahl, die zweite der Exponent. Die gesuchte Zahl wird die Potenz genannt.

Die Bezeichnung der Potenzaufgabe ist schon in § 14 aufgeführt. a^m ist danach a hoch m zu lesen.

Definitionsgleichung. $\mathbf{a^m = \overbrace{a.a....a}^{m}}$

§ 24.

Lehrsätze.

Es ist wohl $4^2 = 2^4$, doch 3^5 nicht gleich 5^3, 2^7 nicht gleich 7^2 und allgemein a^b nicht gleich b^a. Es können also Basis und Exponent nicht mit einander vertauscht werden.

Für das Potenzieren einer Summe oder einer Differenz mit einem beliebig großen Exponenten giebt es keinen einfachen Satz. Doch sind die Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab + b^2$ schon in § 15 vorgekommen. Durch Multiplikation der ersten dieser Gleichungen mit $(a + b)$, der zweiten mit $(a - b)$ auf beiden Seiten werden ferner die Formel erhalten

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3,$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3.$$

$$60^2 = 3600 = 6^2 . 10^2.$$

I. $\mathbf{(a.b)^m = a^m . b^m}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bew. $(ab)^m = \overbrace{ab.ab....ab}^{m}$ nach der Definition der Pot.,

$$= \overbrace{a.a....a}^{m}.\overbrace{b.b....b}^{m} = a^m.b^m.$$

Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die erhaltenen Resultate mit einander multipliziert.

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dem gleichen Exponenten potenziert.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}^{2}_{2}.$$

$$\text{II. } \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Bew. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a.a....a}^{m}}{b.b....b}$ n. Satz V d. Div.,

$$= \frac{a^m}{b^m}.$$

Die Formel ist v. l. n. r. und v. r. n. l. zu lesen.

$$a^4.a^3 = a^7.$$

$$\text{III. } a^m.a^n = a^{m+n}.$$

Bew. $a^m.a^n = \overbrace{a.a..a}^{m}.\overbrace{a.a\ .\ .a}^{n} = \overbrace{a.a.a....a}^{m+n} = a^{m+n}.$

Produkte mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man diese mit der Summe der Exponenten potenziert.

Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit jedem Summanden potenziert und die erhaltenen Resultate multipliziert.

$\frac{a^7}{a^3} = a^4$, $\frac{a^3}{a^7}$ durch Heben $= \frac{1}{a^4}$.

IV. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, falls $m > n$ ist, doch $= \frac{1}{a^{m-n}}$, falls $n > m$ ist.

Bew. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a.a....a}^{m}}{\overbrace{a.a....a}^{n}}$. Dieser Bruch kann durch den Faktor a nmal gehoben werden, wenn $m > n$, und mmal, wenn

$n > m$ ist. Dadurch wird a^{m-n} oder $\frac{1}{a^{n-m}}$ erhalten.

Setzen wir $n = m$, so ergiebt sich a^{m-n} oder $a^0 = 1$.

V. $a^{m.n} = (a^m)^n = (a^n)^m$.

Bew. $a^{m.n} = a^{\overbrace{m + m \ldots + m}^{n}}$ nach der Erkl. der Multipl.,

$= \overbrace{a^m . a^m \ldots a^m}^{n}$ nach Satz III d. Potenzierens,

$= (a^m)^n$.

$a^{m.n} = a^{n.m}$, also $= (a^n)^m$.

Eine Zahl wird mit einem Produkt potenziert, indem man sie erst mit dem einen Faktor und das Resultat mit dem andern Faktor potenziert.

Eine Potenz wird potenziert, indem man die einfache Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert.

§ 25.

Potenzen mit negativen Exponenten.

Die in § 23 für das Potenzieren gegebene Erklärung gilt auch, wenn die Basis ein Bruch oder negativ ist, da sowohl Brüche als negative Zahlen mit einander multipliziert werden können; sie paßt aber nicht mehr, wenn der Exponent negativ oder ein Bruch ist.

Auch hier folgt die Deutung für a^{-m} aus dem Gegensatz des Negativen zum Positiven. Während die Zahl a bei a^{+m} mmal als Faktor gesetzt werden soll, ist sie bei a^{-m} mmal als Divisor, oder statt dessen ihr reziproker Wert $\frac{1}{a}$ mmal als Faktor zu nehmen. Daher gilt die Definitionsgleichung:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}, \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

Erklärung. Potenzieren mit algebraischen Zahlen heißt, jenachdem die zweite gegebene Zahl positiv oder negativ ist, die erste gegebene Zahl selbst oder ihren reziproken Wert so oft als Faktor nehmen, wie der Zahlbetrag der zweiten Zahl angiebt.

Zu derselben Erklärung gelangen wir, wenn wir die Gleichungen $a^3 = a.a.a$, $a^2 = a.a$, $a^1 = a$, fortführen zu $a^0 = 1$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$, $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ u. s. w.

Überall ist hier von Gleichung zu Gleichung auf der linken Seite der Exponent um je eine Einheit durch Subtraktion, auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der rechten Seite das Produkt um je einen Faktor a durch Division verkleinert. Als besonderer Fall tritt wieder die Formel

$$a^0 = 1 \text{ auf.}$$

$$\tfrac{1}{9} = 3^{-2},\ \tfrac{1}{7} = 7^{-1},\ \tfrac{4}{7} = 4.7^{-1},\ \tfrac{1}{64} = 64^{-1} = 8^{-2} = 4^{-3} = 2^{-6},$$

$$\tfrac{1}{10} = 10^{-1},\ \tfrac{1}{100} = 10^{-2} \text{ u. s. w.}$$

Die Zahl 7845,632 ist gleich $7.10^3 + 8.10^2 + 4.10^1 + 5.10^0 + 6.10^{-1} + 3.10^{-2} + 2.10^{-3}$.

Jede Zahl des dezimalen Zahlensystems ist von links nach rechts nach fallenden, von rechts nach links nach steigenden Potenzen von 10 geordnet.

Die Sätze des vorigen Paragraphen können sämtlich auch für negative Exponenten bewiesen werden. Es ist z. B.

$$(a.b)^{-m} = \frac{1}{(ab)^m} = \frac{1}{a^m\ b^m} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{b^m} = a^{-m}.b.^{-m}.$$

Bei Potenzen mit negativen Exponenten können diese auch zunächst in Potenzen mit positiven Exponenten umgewandelt und dann die Rechnungen nach den Potenzsätzen der gewöhnlichen Form ausgeführt werden.

Die Potenzen mit gebrochenen Exponenten von der Form $a^{\frac{m}{n}}$ werden im Anschluß an die folgende Rechnungsart erklärt.

VI. Abschnitt.

Das Radizieren.

§ 26.

Das Ausziehen der Quadratwurzeln.

A. Erklärungen. Die Quadratwurzel aus a ist die Zahl, deren Quadrat a ist. Sie wird mit $\sqrt{a}$ bezeichnet.

$\sqrt{9} = 3$, da $3^2 = 9$ ist, $\sqrt{100} = 10$, da $10^2 = 100$ ist u. s. w.

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel zu finden, wird mit Hülfe von Lehrsätzen der vier Grundrechnungsarten gelöst.

B. Vorbemerkungen zur Lösung der Aufgabe.

Welches sind die Quadrate der Zahlen von 1—20?

Das Quadrat einer einstelligen Zahl ist ein- oder zweistellig, das einer zweistelligen Zahl drei- oder vierstellig, das einer dreistelligen Zahl fünf- oder sechsstellig u. s. w. Es kann z. B. das Quadrat keiner dreistelligen Zahl 4 Stellen haben, da das Quadrat

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der kleinsten dreistelligen Zahl, 100, gleich 10000, also schon fünfstellig ist; auch kann das Quadrat keiner dreistelligen Zahl 7 Stellen haben, da die kleinste siebenstellige Zahl, 1000000, schon das Quadrat einer vierstelligen Zahl ist.

Das Quadrat einer nstelligen Zahl hat 2 n — 1 oder 2 n Stellen.

Die Quadrate von Zahlen, die Zehner darstellen, wie 20, 70, 360 u. s. w., sind Hunderte. Denn solche Zahlen sind als Produkte einer ganzen Zahl n mit 10 zu betrachten, und $(n.10)^2$ ist gleich $n.10.n.10 = n^2.100$ also gleich reinen Hunderten.

Das Produkt von Zehnern mit Einern ist gleich Zehnern. Denn n.10 mit m Einern multipliziert ist m.n 10, d. i. das Produkt einer ganzen Zahl mit 10.

Es sollen Quadratwurzeln aus Quadratzahlen, d. h. aus solchen Zahlen genommen werden, die das Quadrat einer ganzen Zahl sind. Dann ist die Wurzel aus einer ein- oder einer zweistelligen Zahl stets einstellig, da das Quadrat einer einstelligen Zahl ein oder zwei Stellen hat, die Wurzel aus einer drei- oder einer vierstelligen Zahl ist zweistellig, da das Quadrat einer zweistelligen Zahl 3 oder 4 Stellen hat, u. s. w.

Allgemein hat die Quadratwurzel aus einer nstelligen Zahl $\frac{n}{2}$ oder $\frac{n+1}{2}$ Stellen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

C. Die Lösung der Aufgabe.

Es sei etwa $\sqrt{4096}$ zu berechnen. Wir teilen die gegebene Zahl von den Einern an in Gruppen von je 2 Stellen, $\sqrt{40|96}$. Die Anzahl der Gruppen ist nach den unter B dieses Paragraphen zuletzt gegebenen Ausführungen die Stellenanzahl der Quadratwurzel, daher besteht diese im vorliegenden Falle aus Zehnern und Einern. Wir bezeichnen jene mit a, diese mit b, die Wurzel mit a + b. Die gegebene Zahl 4096 ist dann gleich $(a + b)^2$ oder $a^2 + 2\,ab + b^2$. Nun besteht a^2, als das Quadrat von Zehnern, nur aus Hunderten, ist also allein in 40 Hundert enthalten. So finden wir $a^2 = 36$ Hunderten, $a = 6$ Zehnern. Der Rest $4096 - a^2 = 496$ enthält noch $2\,ab + b^2$. Davon besteht 2 ab als Produkt von Zehnern und Einern nur aus Zehnern, ist daher nur in den 49 Zehnern zu suchen. Da $2a = 12$ Zehnern ist, so kann b höchstens gleich 4 sein. Für diesen Wert ist $2ab + b^2 = 496$. Die Rechnung wird folgendermaßen angeordnet:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\sqrt{40|96} = 64.$$
$$a^2 = 36$$
$$\overline{496\,|\,12}$$
$$2\,ab + b^2 = 496$$

Die Zahl rechts vom Strich hinter 496 bedeutet die Anzahl der Zehner von 2 ab.

Bei der Rechnung $\sqrt{24|31} = 49.$

$$\begin{array}{l} 16 \\ \hline 8318| \\ 801 \\ \hline 30 \end{array}$$

wird bei der Division 83 : 2a zunächst für b ein zu großer Wert gefunden. Das kann vorkommen, da 83 die Zehner aus b^2 mit enthält. Der Rest der Rechnung, 30, giebt an, um wieviel die gegebene Zahl größer ist als die nächst kleinere Quadratzahl. Diese selbst ist gleich der Summe der Subtrahenden 1600 + 801 = 2401, und ihre Quadratwurzel ist = 49.

Soll etwa die Wurzel $\sqrt{68|72|41}$ berechnet werden, so dürfen wir das dreistellige Resultat, weil Hunderte in Zehner verwandelt werden können, wieder als aus Zehnern und Einern bestehend ansehen. Nun ist die größte Quadratzahl in 6872 nicht ohne weiteres bekannt, wir können sie jedoch nach dem Verfahren finden, das wir bei der Rechnung $\sqrt{2431}$ u. s. w. angewandt haben.

$$\sqrt{68|72} = 82.$$
$$a_1{}^2 = 64$$
$$\overline{472|16}$$
$$2\,a_1 b_1 + b_1{}^2 = 324$$
$$\overline{148}$$

Demnach ist $a^2 = 6724$ und $a = 82$, oder genauer, $a^2 = 6724$ Hunderten und $a = 82$ Zehnern.

Dann ergiebt sich $\sqrt{68|72|41} = 829.$

$$a^2 = 67\,24$$
$$\overline{14841|164}$$
$$2\,ab + b^2 = 14841$$

Die letzte Rechnung kann mit der vorläufigen Berechnung von a^2 und a zusammengezogen werden zu

$$\sqrt{68|72|41} = 829.$$
$$\begin{array}{l} 64 \\ \hline 472|16 \\ 324 \\ \hline 14841|164 \\ 14841 \\ \hline \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

In entsprechender Art ist bei 7 und mehr Stellen der gegebenen Zahl zu verfahren. Die vorläufige Berechnung von a führt dann auf die ihr noch vorangehende Berechnung von a_1 zurück u. s. w. Sämtliche Teilrechnungen werden dabei zusammengezogen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$$\sqrt{6|28|49|48|72|04} = 250698.$$

```
4
228 | 4
225
  34948 | 500
  30036
   491272 | 5012
   451161
    4011104 | 50138
    4011104
```

$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$, da $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ ist.

Um die Quadratwurzel eines Bruches zu erhalten, wird die Wurzel des Zählers durch die des Nenners dividiert. Der Decimalbruch 25,8064 ist gleich $\frac{258064}{10000}$. Der Nenner ist hier und immer, wenn in ihm die Anzahl der Nullen hinter der Eins eine gerade ist, eine reine Quadratzahl, deren Quadratwurzel leicht anzugeben ist. Hat der Decimalbruch rechts vom Komma eine ungerade Anzahl von Stellen, so wird er vor der Quadratwurzelausziehung durch das Anhängen einer Null erweitert. Dadurch wird die Berechnung der Quadratwurzel aus einem Dezimalbruche in jedem Falle der Hauptsache nach zur Berechnung der Quadratwurzel seines Zählers. Das Dezimalkomma der Wurzel kann an die richtige Stelle nach oder auch während der Berechnung ihres Zählers gesetzt werden. Beispiel:

$$\sqrt{75,|75|96|16} = 8,704.$$

```
64
1175 | 16
1169
   69616 | 1740
   69616
```

Die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl ist, wenn sie nicht wieder eine ganze Zahl, auch keinem echten oder unechten Bruche gleich.

Wäre etwa $18 = \frac{p}{q}$, wo p und q ganze Zahlen sein sollen, die keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so müßte $18 = \frac{p^2}{q^2}$, also gleich einem Bruche sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$\sqrt{18}$ ist > 4, doch < 5. Um den Wert dieser Wurzel genauer zu finden, schreiben wir 18 in der Form des Dezimalbruches 18,0000.... und radizieren sodann

$$\sqrt{18,|00|}\ldots = 4{,}2426\ldots$$

```
16
 200 | 8
 164
   3600 | 84
   3376
     22400 | 848
     16964
       543600 | 8484
       509076
         34524
```

$\sqrt{18}$ ist $> 4{,}2426$, doch $< 4{,}2427$. Durch weitere Ausführung der Rechnung kann die gesuchte Zahl wohl in noch engere Grenzen eingeschlossen, doch niemals genau gefunden werden. Zahlen dieser Art heißen irrational. Rationale Zahlen.

Ist aus einem gewöhnlichen Bruche die Quadratwurzel zu nehmen, so wird er in der Regel erst in einen Dezimalbruch verwandelt, und es wird dann aus diesem die Wurzel gezogen.

Das Radizieren im allgemeinen.

§ 27.

Erklärungen.

In ähnlicher Weise wie für die Addition und für die Subtraktion kann auch für das Potenzieren eine Umkehrung gesucht werden. Dann ist als erste gegebene Zahl die Potenz und dazu als zweite gegebene Zahl entweder der Exponent oder die Basis zu nehmen. Weil aber die Basis und der Exponent nicht vertauschbar sind, so führt die Umkehrung des Potenzierens zu zwei neuen Rechnungsarten, dem Radizieren oder Wurzelausziehen und dem Logarithmieren.

Addieren, Multiplizieren und Potenzieren werden direkte, Subtrahieren, Dividieren, Radizieren und Logarithmieren indirekte Operationen genannt.

Erklärung. Radizieren oder Wurzelausziehen heißt, zu einer gegebenen Potenz und dem gegebenen Exponenten die Basis finden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Potenz 81 und dem Exponenten 4 ist die Basis 3, denn $3^4 = 81$,
" " $\frac{27}{125}$ " " " 3 " " " $\frac{3}{5}$, " $(\frac{3}{5})^3 = \frac{27}{125}$,
" " $\frac{1}{8}$ " " " -3 " " " 2, " $2^{-3} = \frac{1}{8}$
u. s. w.

Die gegebene Potenz wird Radikand genannt, der Exponent behält diesen Namen oder wird genauer als Wurzelexponent bezeichnet, die gesuchte Basis heißt Wurzel oder Radix.

Das Rechenzeichen des Radizierens, $\sqrt{}$, ist eine Umbildung des Anfangsbuchstabens r von radix. $\sqrt[n]{a}$ wird nte Wurzel aus a gelesen, statt $\sqrt[2]{a}$ wird allgemein $\sqrt{a}$ geschrieben und Quadratwurzel aus a gelesen. Auch ist der Ausdruck Kubikwurzel aus a für $\sqrt[3]{a}$ gebräuchlich.

Die Lösung einfacher Wurzelaufgaben, wie $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt[4]{81} = 3$, $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$, $\sqrt[-3]{\frac{1}{8}} = 2$ beruht auf der Kenntnis der Resultate der entsprechenden Potenzaufgaben. Die Wurzeln aus rationalen Zahlen sind meistens irrational. Vergl. § 25 am Ende.

Definitionsgleichungen.

Wurzel hoch Wurzelexponent = Radikand,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a.$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

§ 28.

Lehrsätze.

I. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.

Bew. Da $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b$, also gleich der gegebenen Potenz ist, so stellt die rechte Seite der Formel die links gesuchte Basis dar.

II. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Bew. $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$.

Die Formeln I und II sind v. l. n. r. und v. r. n. l. zu lesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

III. $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}$, wenn $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist.

Bew. $\left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^m\right]^n = \left[\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right]^m = a^m$, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m.n}{n}} = a^m$.

IV. $\sqrt[m.n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

Bew. $\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{m.n} = \left[\left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^m\right]^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$; ebenso $\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n.m} = a$.

Eine Zahl wird mit einem Produkte radiziert, indem man sie erst mit dem einen Faktor radiziert und das Resultat dann mit dem andern.

Eine Wurzel wird radiziert, indem man den einfachen Radikanden mit dem Produkte der Exponenten radiziert.

V. $\sqrt[m.n]{a^{p.n}} = \sqrt[m]{a^p}$

Der Satz lehrt, daß bei einer Wurzel aus einer Potenz der Wurzel- und der Potenzexponent gegen einander durch denselben Faktor gehoben und erweitert werden können.

§ 29.

Potenzen mit Bruchexponenten.

Nach Satz III der Wurzelrechnung ist $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, doch unter der Annahme, daß $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist, so daß $a^{\frac{m}{n}}$ nur der Form nach einen Bruchexponenten enthält.

Um zu erkennen, welche Bedeutung $a^{\frac{m}{n}}$, oder $a^{m:n}$ beizulegen ist, wenn der Exponent ein echter oder unechter Bruch ist, vergleichen wir die Ausdrücke a^m, $a^{m.n}$ und $a^{m:n}$ nach ihren Exponenten mit einander. Von den drei Exponenten ist aus dem ersten der zweite durch Multiplikation mit n, der dritte durch Division mit n, also die entgegengesetzte Operation entstanden. Da nun $a^{m.n}$ die n. Potenz von a^m ist, muß im Gegensatz dazu $a^{m:n}$ die n. Wurzel aus a^m bedeuten.

Daher hat die Gleichung $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ als Definitionsgleichung allgemeine Geltung.

Die Potenzsätze können auf Grund der eben gegebenen Erklärung auch für Potenzen mit Bruchexponenten bewiesen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Es ist z. B. $(a.b)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m.b^m} = \sqrt[n]{a^m}.\sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}}.b^{\frac{m}{n}}$.

§ 30.

Imaginäre Zahlen.

$\sqrt{9} = 3$ und $= -3$, da auch $(-3)^2 = 9$ ist. Ebenso $\sqrt{4} = \pm 2$, $\sqrt{2} = \pm 1{,}4142\ldots$

Was ist $\sqrt{-9}$?

Unter den bisher besprochenen Zahlen, welche reelle heißen, giebt es keine, die wir dieser Wurzel gleich setzen können.

Nun ist $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$. Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ wird die imaginäre Einheit genannt und mit i bezeichnet.

$\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = 2i$, $\sqrt{-9} = 3i$, $\sqrt{-16} = 4i$ u. s. w., $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$.

i, $2i$, $3i$ u. s. w., $-i$, $-2i$, $-3i$ u. s. w., $\frac{3}{4}i$, $i\sqrt{5}$ u. s. w. sind imaginäre Zahlen.

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ u. s. w.

VII. Abschnitt.

Das Logarithmieren.

§ 31.

Erklärungen.

Logarithmieren heißt, zu einer gegebenen Potenz und deren Grundzahl den Exponenten finden.

Es muß also geprüft werden, wie oft die Basis als Faktor zu nehmen ist, damit als Resultat der Rechnung die gegebene Potenz erhalten werde. Die Aufgabe ist in vielen Fällen leicht zu lösen. So ist zur Potenz 8 und der Basis 2 der Exponent 3, da $2^3 = 8$ ist, zur Potenz $\frac{1}{4}$ und der Basis 2 der Exponent -2, da $2^{-2} = \frac{1}{4}$ ist.

Die gegebene Potenz heißt Logarithmand, Numerus oder Zahl, der gesuchte Exponent der Logarithmus, die Basis oder Grundzahl behält diese Benennungen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Rechenzeichen des Logarithmierens ist log und $\log a_{(b)}$ heißt, daß der Logarithmus von a zur Grundzahl b genommen werden soll.

$\log 81_{(3)} = 4$, denn $3^4 = 81$, $\log \frac{1}{125}{}_{(5)} = -3$, denn $5^{-3} = \frac{1}{125}$, $\log 9_{(27)} = \frac{2}{3}$, denn $27^{\frac{2}{3}} = 9$.

Definitionsgleichung: Basis hoch Logarithmus = Logarithmand,

$$b^{\log a_{(b)}} = a.$$

Die Gleichungen $b^n = a$, $\sqrt[n]{a} = b$, $\log a_{(b)} = n$ sind so unter einander verbunden, daß mit einer von ihnen zugleich auch die beiden andern richtig sind.

Die Logarithmen, die zur Grundzahl 10 genommen sind, heißen gemeine oder Briggs'sche Logarithmen und ihre geordnete Zusammenstellung wird das Briggs'sche Logarithmensystem genannt. Es ist üblich, kurz log a statt $\log a_{(10)}$ zu schreiben. Aus $\log a = x$ folgt dann $10^x = a$ und die Definitionsgleichung erhält die einfachere Form

$$10^{\log a} = a.$$

Im Folgenden sollen nur die Briggs'schen Logarithmen behandelt werden.

§ 32.

Lehrsätze.

I. $\log (a.b) = \log a + \log b$.

Bew. $10^{\log a + \log b} = 10^{\log a}.10^{\log b}$ n. Satz III der Potenzrechnung, $= a.b$.

Es stellt also die rechte Seite der Formel I den gesuchten Exponenten zur Basis 10 und der gegebenen Potenz ab dar.

II. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

Bew. $10^{\log a - \log b} = \frac{10^{\log a}}{10^{\log b}} = \frac{a}{b}$.

III. $\log (a^n) = n \log a$.

Bew. $10^{n \log a} = (10^{\log a})^n = a^n$.

IV. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{x}{n} \log a$.

Bew. $10^{\frac{\log a}{n}} = \sqrt[n]{10^{\log a}} = \sqrt[n]{a}$.

Die vier Formeln sind von r. n. l. und von l. n. r. zu lesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

§ 33.

Eigenschaften der Briggs'schen Logarithmen.

$\log 1 = 0$, da $10^0 = 1$ ist, $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$ u. s. w., $\log 0{,}1 = -1$, da $10^{-1} = \frac{1}{10}$ ist, $\log 0{,}01 = -2$, $\log 0{,}001 = -3$ u. s. w., $\log \infty = \infty$, $\log 0 = -\infty$, denn $\log 0 = \log \frac{1}{\infty} = \log 1 - \log \infty = 0 - \infty = -\infty$.

Der Logarithmus einer negativen Zahl ist keiner reellen Zahl gleich. Der Logarithmus einer positiven Zahl ist positiv oder negativ, je nachdem der Numerus größer oder kleiner als 1 ist.

Besteht der Logarithmand aus einem gemeinen Bruche oder enthält er einen Bruch, so wird dieser in der Regel in einen Dezimalbruch verwandelt. Bei der einfachen Aufgabe des Logarithmierens ist daher der Numerus entweder als ganze Zahl oder in Dezimalbruchform gegeben.

$\log 56$ ist > 1, doch < 2. Wäre nun $\log 56$ einem unechten Bruche gleich, etwa $= \frac{p}{q}$, wo p und q gegen einander nicht hebbar sein sollen, so müßte $10^{\frac{p}{q}} = 56$, also $10^p = 56^q$ sein. Das ist unmöglich und deshalb auch die gemachte Annahme.

Der Logarithmus einer rationalen Zahl, die nicht eine Potenz von 10 mit positivem oder negativem ganzzahligen Exponenten ist, kann keinem echten oder unechten Bruche gleich sein. Er wird daher nur annähernd in der Form eines Dezimalbruches angegeben.

$\log 5476$ ist $> \log 1000$, doch $< \log 10000$, also > 3, doch < 4. Annähernd ist

$\log 5476 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{3{,}73864}$,

$\log 54760 = \log 5476 + \log 10 = 3{,}73856 + 1 = \mathbf{4{,}73864}$,

$\log 547600 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{5{,}73864}$,

$\log 54{,}76 = \log 5476 - \log 100 = 3{,}73846 - 1 = \mathbf{1{,}73864}$,

$\log 5{,}476 \ldots\ldots\ldots\ldots = \mathbf{0{,}73863}$,

$\log 0{,}5476 = \log 5{,}476 - \log 10 \ldots\ldots = \mathbf{0{,}73864 - 1}$,

$\log 0{,}005476 = \log 5{,}476 - \log 1000 \ldots = \mathbf{0{,}73864 - 3}$.

Bei den Logarithmen von positiven Zahlen, die kleiner als 1 sind, wird verfahren wie in den beiden letzten Beispielen, nämlich die angedeutete Subtraktion nicht ausgeführt. Dann besteht immer der Logarithmus aus einer ganzen Zahl, die positiv, negativ oder, wie bei $\log 5{,}476$, gleich Null sein kann, und dem stets positiven echten Dezimalbruche. Jener Teil des Logarithmus wird die Kennziffer oder Charakteristik, dieser die Mantisse genannt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist der Numerus größer als 1, so ist die Kennziffer positiv oder Null, und zwar ist sie um eine Einheit kleiner, als die Anzahl der Ziffern des Numerus vor dem Dezimalkomma.

Ist der Numerus kleiner als 1, so ist die Kennziffer negativ, und zwar hat sie ebenso viel Einheiten, als der als Dezimalbruch gegebene Numerus Nullen an der Spitze hat.

Nach dem letzten Satze in § 25 gilt in allen Fällen, wenn der Numerus als ganze Zahl oder in Dezimalbruchform gegeben ist, der Satz:

Die Kennziffer des Logarithmus ist stets gleich dem Exponenten der höchsten Potenz von 10 im Numerus.

In den Beispielen der letzten Zusammenstellung haben alle Logarithmen dieselbe Mantisse. Es ist das eine Folge der Beziehung, in der die gewählten Numeren zu einander stehen. Gehen wir von einem derselben, etwa von 5,476 aus, so können wir aus ihm die anderen durch bloße Verschiebung des Dezimalkommas, d. h. durch Multiplikation oder durch Division mit einer Potenz von 10 hervorgehen lassen. Die Logarithmen der andern Nummern erscheinen dann gleich log 5,476 $\pm$ dem Logarithmus einer Potenz von 10. Da dieser stets eine ganze Zahl ist, so ändert sich bei einer Verschiebung des Dezimalkommas im Numerus nur der Kennziffer, nicht auch die Mantisse.

Zu allen Nummern, die aus einander durch bloße Verschiebung des Dezimalkommas hervorgehen, gehört dieselbe Mantisse.

Die Berechnung der Mantissen für Numeren, die nicht Potenzen von 10 mit ganzen Exponenten sind, gehört nicht zu den Aufgaben der Realschule. Soll zu einem Numerus der Logarithmus gefunden werden, so ist die Kennziffer nach der oben gegebenen Regel zu bestimmen und dann die Mantisse aus einer Logarithmentafel zu entnehmen. Mit Hülfe dieser Tafel können auch leicht zu gegebenen Logarithmen die Numeren, d. h. die Resultate des Potenzierens von 10 mit beliebigen Exponenten gefunden werden. Es ist dann zunächst nach der Mantisse die Ziffernfolge des Numerus, dann nach der Kennziffer die Stellung des Dezimalkommas im Numerus zu bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ist 1, so ist die
Kennzi zwar ist sie
um ein Anzahl der
Ziffer malkomma.

Ist , so ist die
Kennzi sie ebenso
viel Ei albruch ge=
gebene tze hat.

Nach Fällen, wenn
der Nume uchform gegeben
ist, der S

Die us ist stets
gleich d Potenz von
10 im N

In d lung haben alle
Logarithme Folge der Be=
ziehung, inander stehen.
Gehen wir aus, so können
wir aus i g des Dezimal=
kommas, d ision mit einer
Potenz v garithmen der
andern Nu + dem Loga=
rithmus ei ine ganze Zahl
ist, so änd malkommas im
Numerus r isse.

Zu a nder durch
bloße V mmas her=
vorgehe e.

Die Be nicht Potenzen
von 10 mit zu den Auf=
gaben der r Logarithmus
gefunden w oben gegebenen
Regel zu be r Logarithmen=
tafel zu er nen auch leicht
zu gegebene Resultate des
Potenzierens unden werden.
Es ist dan iffernfolge des
Numerus, des Dezimal=
kommas im

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN® Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf