Johannes Kepplers Leben und Entdeckungen.

Der erste Abschnitt in der Geschichte der modernen Astronomie, in welchem diese auf deutschem Boden durch Niklas Koppernigk (Coppernicus) und Johannes Keppler eine vollständige Neugestaltung erhielt, reicht von der Wiederherstellung der Wissenschaften bis zur ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Diese wissenschaftliche Bewegung begann im 15. Jahrhundert und verdankte ihren Ursprung dem wirtschaftlichen Aufschwung und einer Reihe von Erfindungen, unter denen der Buchdruck und das Schiesspulver eine hervorragende Stelle einnahmen. Die Erzeugnisse der Druckereien machten eine schnelle und weite Ausbreitung des Wissens erst möglich, und die neue Feuerwaffe leitete eine Umgestaltung der Gesellschaft ein, welche dieselbe für die Aufnahme geistiger Beschäftigung im hohen Grade empfänglich machte. Auch die Einwirkung der Reste griechischer Litteratur, die nach der 1453 erfolgten Eroberung Constantinopels dem Abendlande in reicherem Masse zuflossen, ist nicht gering anzuschlagen. Deutsche Astronomen haben um ihr erstes Bekanntwerden in unserem Vaterlande wesentliche Verdienste. So sammelte Johann Müller aus Königsberg in Franken, welcher sich nach seinem Geburtsort gewöhnlich Regiomontanus nannte, in Italien von 1461—1468 fast sämtliche noch erhaltene mathematische und astronomische Schriften der Griechen und brachte sie in die Heimat. Aber nicht bloss durch die Verbreitung, sondern auch durch die Erweiterung der Wissenschaft hat Regiomontan, der in allen Zweigen des Wissens eine ausgebreitete Kenntnis besass, seinen Namen bekannt gemacht. Seine Trigonometrie, welche er während des Aufenthalts in Italien verfasste, gab dieser für die Astronomie so wichtigen mathematischen Disciplin die Gestalt, welche sie heute noch besitzt. Die für die 30 Jahre von 1475—1505 berechneten Ephemeriden waren von einer bisher unerreichten Genauigkeit und trugen seinen Namen durch das ganze Europa. Der Nürnberger Martin Behaim brachte sie nach Lissabon, wo sie Bartholomeu Dias, Vasco da Gama, Christoforo Colombo und Alberico Vespucci erhielten. Die ersten, besonders Colombo, benutzten sie vielfach auf ihren Entdeckungsreisen und Vespucci bestimmte mit ihrer Hilfe die Längendifferenz zwischen Venezuela und Nürnberg zu $82^1/_2{}^0$ aus einer Konjunktion des Mondes und Mars, welche den 23. August 1499 an dem Ort der Beobachtung $5^1/_2$ Stunde früher eintrat, als in Nürnberg, für dessen Meridian die Ephemeriden berechnet waren.

Während so die Entdeckung und geographische Bestimmung der Westhälfte des Erdballs durch die deutsche Astronomie befördert wurde, erstand im fernen Osten unsers Vaterlandes der Mann, welcher das wahre Weltsystem begründete und mit dem Ernst des Forschers nach allen Seiten ausbildete. Der Nachweis des Coppernicus von der Bewegung der Erde um die Sonne hat nicht nur auf die Astronomie, sondern auch auf alle übrigen Wissenschaften einen unbeschränkten Einfluss geübt. Diese bedeutende Errungenschaft war für den erwachenden Europäischen Geist die erste wissenschaftliche That von grösserer Erheblichkeit und wegen der Kühnheit ihres dem unmittelbaren Schein der Wahrnehmung und der allgemeinen Anschauung der Menschen widersprechenden Gedankens von besonders aufklärender Wirkung. Es erscheint deshalb auch ganz natürlich, dass der Begründer der modernen Physik ihr bekanntester Verbreiter wurde. 70 Jahre waren seit der Veröffentlichung der Arbeit des Coppernicus vergangen, als Galilei vermittelst seines Fernrohrs die Venusphasen entdeckte und dadurch die Bewegung dieses Planeten um die Sonne bestätigte. Bisher hatten nur die Mathematiker und Astronomen sich von der Richtigkeit des heliozentrischen Systems zu überzeugen vermocht, seit jener Entdeckung wurde es für jedermann möglich.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Deshalb erkannten die zahlreichen Peripatetiker, „welche“, mit Galilei zu reden, „die Philosophie für ein Buch hielten, wie die Aeneide oder die Odyssee, und der Ansicht waren, nicht in der Welt oder in der Natur, sondern nur in der Vergleichung der Texte sei die Wahrheit zu suchen“, dass ihr Ansehn auf dem Spiele stand, und bemühten sich, die weitere Verbreitung der Lehren des Coppernicus zu verhindern. Da sie aber einsahen, dass das Rüstzeug des Aristoteles und Ptolemäus doch allzu rostig geworden war, um damit gegen die neue Weltanschauung anzukämpfen, so versuchten sie, derselben auf anderm Wege beizukommen. Es ist bekannt, wie es diesen Gegnern gelang, zunächst im Jahre 1616 die „Kreisbewegungen“ des Coppernicus auf den Index zu bringen und 16 Jahre später Galilei wegen seiner „Dialoge über die beiden Weltsysteme“ zum Widerruf verurteilen zu lassen. Dieser Erfolg gab das Signal für eine ganze Reihe von Schriften, welche angeblich das heliozentrische Weltsystem stürzen sollten: Morin brüstete sich, er habe der Erde die Flügel ausgerissen und für immer begraben, und der Jesuit Riccioli schmiedete 77 Beweise gegen die Bewegung der Erde. Die Parteigänger des Ptolemäus überzeugten sich indessen bald selbst, dass ihre Bemühungen fruchtlos waren, und die Zahl der Anhänger des heliozentrischen Systems immer grösser wurde.

Während die Gegner so bestrebt waren, die alte Astronomie zu retten, hatten sie ganz übersehen, dass Johannes Keppler bereits auf Grund des Coppernicanischen Systems die Astronomie neu begründet hatte. Coppernicus hatte wohl das Weltsystem des Ptolemäus als falsch erwiesen, den ganzen astronomischen Apparat desselben aber herüber genommen und sich damit den Weg verschlossen, sein eigenes in allen Konsequenzen durchzuführen. Keppler erkannte diesen Fehler und erwarb sich das Verdienst, die Gesetze der Planetenbewegung zu entdecken und dadurch das Fundament der modernen Astronomie zu legen. Jene Gesetze sind es besonders, welche ihm einen Namen gemacht haben und auch wegen ihrer grossen Tragweite stets seinen ersten Ruhmestitel bilden werden. Will man aber von der ausserordentlichen Erfindungsgabe des Kepplerschen Genies eine rechte Vorstellung gewinnen, so muss man auch seine bedeutenden Leistungen in Physik und Mathematik in Rechnung bringen. Ehe wir indessen diese wissenschaftlichen Leistungen darstellen, ist es notwendig, einen kurzen Abriss seines Lebens zu geben. Die mannigfachen Schicksale desselben haben seinen Studien mehrfach die Richtung vorgezeichnet und sind dadurch von grossem Einfluss auf dieselben geworden.

1. Kepplers Leben bis zur Übersiedelung nach Prag.

Johannes Keppler ist am 27. Dezember 1571 zu Weil der Stadt in Würtemberg als der älteste Sohn von Heinrich Keppler und Katharine Guldenmann geboren. Er war, wie er selbst erzählt, ein Siebenmonatkind und in jüngeren Jahren schwächlich und vielfach krank. Seine Kindheit ist keine glückliche gewesen. Der Vater, ein unstäter Mann, und die Mutter, eine reizbare und streitsüchtige Frau, lebten häufig in Unfrieden. So kam es, dass jener, als Johannes kaum 2 Jahre alt war, seiner Neigung zum Waffenhandwerk nachgab und in Belgien unter Alba Kriegsdienste nahm. Während dieser Abwesenheit wurde seine Frau von der Pest befallen. Davon genesen folgte sie, vielleicht durch die schlechte Behandlung der Schwiegermutter getrieben, ihrem Manne, um denselben zur Heimkehr zu bewegen, und kehrte mit ihm bald darauf zurück. Inzwischen war Johannes an den Blattern erkrankt und schwebte dabei in Gefahr, das Augenlicht zu verlieren. Wieder in der Heimat zogen die Eltern nach Leonberg, wo sie ein Haus gekauft hatten. Der Vater Kepplers ging indessen 1576 zum zweiten Male nach Belgien, blieb aber nur kurze Zeit daselbst. Nach den Aufzeichnungen seines Sohnes geriet er das Jahr darauf in Gefahr gehängt zu werden, und kurz nachher zerriss ihm ein explodierendes Pulverhorn das Gesicht. Eine Bürgschaft brachte ihn 1579 um den grössten Teil seines Vermögens; dadurch war er genötigt, sein Haus und seinen Grundbesitz zu verkaufen. Alsdann zog er nach Ellmendingen, wo er ein vielbesuchtes Wirtshaus pachtete. Seit 1584 war er wieder in Leonberg und lebte dort, bis ihn 1589 ein Streit mit seiner Frau veranlasste, abermals Kriegsdienste zu suchen. Hiervon kehrte er nicht zurück.

In Leonberg und Ellmendingen hatte Johannes Keppler die Lateinschule besucht, allerdings wegen des mehrfachen Wohnungswechsels und der sonstigen häuslichen Verhältnisse mit grossen Unterbrechungen. Nur seinem Fleiss und seiner Begabung hatte er es zu danken, dass er dabei nicht sehr zurückblieb. Da er schwächlich war, beschlossen seine Eltern, ihn Theologie studieren zu lassen. Sie brachten ihn, als er 13 Jahre alt war, auf die Klosterschule nach Adelberg. Diese besuchte er während zweier Jahre und darauf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3 Jahre lang die von Maulbronn. Alsdann bezog er die Universität Tübingen und fand im theologischen Stift Aufnahme. Daselbst herrschte eine ebenso strenge Zucht, als in den Klosterschulen, in welchen er seine Vorbildung erhalten hatte. Die ersten beiden Jahre hörte Keppler nach damaliger Sitte Vorlesungen in der Artistenfakultät. In derselben lehrte Mästlin Mathematik und Astronomie. Dieser hat Keppler in das Coppernicanische Weltsystem eingeführt und auch sonst auf den künftigen Reformator der Astronomie einen grossen Einfluss gehabt. Keppler hat seinem Lehrer, der stets ohne Neid die Leistungen seines grösseren Schülers anerkannte, dafür bis an dessen Ende die treueste Anhänglichkeit bewahrt.

Nach zweijährigem Studium erlangte Keppler die Magister-Würde und hatte nun 3 Jahre Theologie zu studieren. Diese Zeit war noch nicht ganz abgelaufen, als die Stelle eines Mathematikers am Gymnasium zu Graz durch den Tod des bisherigen Inhabers frei wurde, und die damals protestantischen Stände Steiermarks sich nach Tübingen wegen eines Nachfolgers wendeten. Dort schlug man Keppler vor. Dieser entschloss sich zur Annahme der Stelle nur mit Widerstreben und mit dem ausdrücklichen Vorbehalt, dass er seinem Recht auf eine andere Laufbahn nicht entsage. Er hätte viel lieber das angesehenere Amt eines Geistlichen übernommen, zumal er gern und mit grossem Erfolg predigte. Übrigens schreckte ihn nicht die Entfernung des Orts, sondern die unerwartete und verachtete Art des Berufs; wenige Jahre später dachte er indessen anders, eine eingehendere Beschäftigung mit der Astronomie hatte ihn ganz dieser Wissenschaft gewonnen. Im Frühjahr 1594 ging er nach Steiermark und trat sein Amt an.

Da am Gymnasium in Graz für die mathematischen Vorlesungen nicht viel Zuhörer vorhanden waren, im zweiten Jahr der amtlichen Thätigkeit Kepplers sogar gar keine, übertrug man ihm auch andere Unterrichtsgegenstände, wie Arithmetik, Virgil und Rhetorik. Ausserdem hatte er jährlich einen Kalender zu machen und die Prognostica dazu zu schreiben. Er hat diejenigen für 1595—1599 geliefert, von welchen die Prognostica von 1598 und 1599 noch erhalten sind. Auf seine astrologischen Neigungen und Ansichten werde ich später im Zusammenhang zurückkommen; hier mag die Angabe genügen, dass er mit seinen Prophezeiungen in den beiden ersten Kalendern entschiedenes Glück hatte und seitdem für ein grosses astrologisches Licht gehalten wurde.

In Graz hat Keppler sich eifrig mit mathematischen, astronomischen und optischen Arbeiten beschäftigt und 1596 seine erste astronomische Schrift den „Prodromus“ oder das „Mysterium Cosmographicum“ herausgegeben. Dieselbe ist allerdings in ihrer Durchführung verfehlt, lässt aber in ihren Grundanschauungen bereits den künftigen Erforscher der Gesetze der Planetenbewegung erkennen. Seine Absicht war, die Bewegung der Erde, welche Coppernicus durch mathematische Beweise begründet hatte, auf physische oder metaphysische zu stützen. Daher stellte er sich die Aufgabe, die Ursachen für Zahl, Grösse und Bewegung der Planetensphären zu bestimmen. Er ging dabei von der Annahme aus, zwischen den Radien jener Sphären müsse ein ganz bestimmtes Verhältnis bestehen. Da die Coppernicanischen Zahlen ein solches nicht erkennen liessen, machte er die kühne Voraussetzung, dass zwischen Mars und Jupiter und zwischen Merkur und Venus noch je ein Planet einzuschalten sei, welche man aber wegen ihrer Kleinheit nicht sehen könne. Als er trotzdem nicht zum Ziele kam, verfiel er auf eine andere Idee. Er nahm an, die Zwischenräume zwischen den Planetenbahnen seien durch die fünf regulären Körper bestimmt, und zwar derart, dass jedem derselben die nächstinnere Sphäre einbeschrieben und die nächstäussere umbeschrieben sei. Daraus ergab sich die Sechszahl der Planeten und auch die Radien ihrer Sphären. Dieselben stimmten innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler mit den Zahlen des Coppernicus überein, ausgenommen für die Sphäre des Merkur, welche dem regulären Oktaeder einbeschrieben war. Keppler half sich damit, dass er hier anstatt des Radius der in das Oktaeder einbeschriebenen Kugel den Radius des seinem Diagonalquadrat einbeschriebenen Kreises nahm. Dieses Auskunftsmittel war natürlich willkürlich, und es gelang Keppler auch nicht, dasselbe gehörig zu rechtfertigen. Ebenso willkürlich war die Reihenfolge, in welche er die regulären Körper zwischen den Planetenbahnen verteilte. Ich will daher die Einzelheiten dieser Spekulationen auf sich beruhen lassen, darf aber nicht verschweigen, dass Keppler denselben einen grossen Wert beilegte. Er glaubte in ihnen das Geheimnis des Weltbaus entdeckt zu haben, und als er 25 Jahre später eine neue Ausgabe des Prodromus besorgte, sprach er sich dahin aus, es sei kaum ein Erstlingsversuch glänzender ausgefallen, als der seine. Darin kann man ihm Recht geben, wenn auch in anderem Sinn, als er es meinte. Die leitende Idee, die Bewegung der Planeten in ihren Bahnen verlaufe nach bestimmten algebraisch und geometrisch formulierbaren Gesetzen, war durchaus rationell, und dasselbe gilt von der Überlegung, Coppernicus sei mehr dem Ptolemäus, als dem Grundgedanken seines eigenen Systems gefolgt, wenn er die Planetenbahnen auf das Centrum der Erdbahn und nicht auf die Sonne selbst bezog. Diese Einsicht veranlasste Keppler schon damals die Planeten sich in Ebenen bewegen zu lassen, welche durch

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

den Mittelpunkt der Sonne gingen und gegen die Ekliptik eine unveränderliche Neigung hatten. Wenn ihn daher auch dieser erste Versuch durch seine Fragestellung nach der Anzahl der Planeten vom richtigen Wege ablenkte, so dürfen wir nicht vergessen, dass sein Unternehmen an und für sich angemessen war, und dass die rationellen Bestandteile desselben weiteren Bemühungen, welche mit den nötigen Mitteln der Forschung ausgestattet waren, grosse Aussicht auf Erfolg versprachen.

Der Prodromus brachte den Grazer Astronomen mit Galilei und Tyge Brahe in Verkehr. Beiden hatte er ein Exemplar seines Werkes gleich nach dessen Erscheinen zugeschickt. Galilei schrieb nach Empfang des Buches alsbald wieder: „Ich habe zwar erst die Vorrede Deines Buches gelesen, aber daraus „zu meiner Freude gesehen, dass ich in Dir einen Genossen in der Erforschung der Wahrheit gefunden „habe. Dazu freue ich mich um so mehr, als das Zeitalter so wenig Freunde der Wahrheit aufweist. „Dein Buch will ich gerne lesen, da ich das System des Coppernicus schon lange als richtig erkannt „habe. Zu seiner Begründung und zur Widerlegung der Gegner habe ich bereits vieles niedergeschrieben, „aber ich habe bisher nicht gewagt, es zu veröffentlichen. Davon schreckt mich zurück, dass sich Copper-„nicus nur bei wenigen unsterblichen Ruhm erworben hat, während unzähligen (so gross ist nämlich die „Anzahl der Thoren) seine Lehre lächerlich und verwerflich erscheint. Ich würde es dagegen wagen, meine „Gedanken bekannt zu machen, wenn es mehr Forscher wie Dich gäbe“. Keppler antwortete sofort und bat Galilei ihm sein Urteil mitzuteilen, wenn er den Prodromus gelesen habe. Alsdann fügte er hinzu: „Fasse „Mut, Galilei, und gehe voran. Wenn ich recht urteile, werden nur wenige von den hervorragenden „Mathematikern Europas anderer Meinung sein wie wir; so gross ist die Macht der Wahrheit“. Da aber Galilei nicht wieder schrieb, so stockte der Briefwechsel für mehrere Jahre.

Tyge Brahe erhielt Kepplers Schreiben verspätet. Gerade damals war er durch die Verfolgungen seiner Gegner gezwungen, die von ihm auf der Insel Hveen im Sunde erbaute Uranienburg zu verlassen. Er hatte sich zunächst nach Wandsbeck bei Hamburg begeben, wo er bei dem ihm befreundeten Grafen von Rantzau Aufnahme fand. Von hier aus antwortete er Keppler. Dem Prodromus zollte er seinen Beifall, hätte es aber lieber gesehen, wenn ihm sein System zu Grunde gelegt worden wäre. Auch lud er Keppler ein, zu ihm zu kommen und ihm bei der Bearbeitung seines reichen Schatzes astronomischer Beobachtungen zu helfen. Dieselben füllten 21 Folianten und enthielten die Bemühungen von 35 Jahren, denen Tyge Brahe besonders in den letzten 25 Jahren eine grosse Sorgfalt gewidmet hatte. Diese Beobachtungen, welche in der Hand Kepplers später von so grosser Bedeutung werden sollten, waren nicht bloss die vorzüglichsten, welche bisher angestellt waren, sondern sie waren auch mit der grössten Genauigkeit ausgeführt, die sich ohne Fernrohr erreichen lässt. Da dies allgemein bekannt war, so wäre Keppler gern der Einladung gefolgt, zumal er hoffen durfte, durch die verbesserten Werte der Excentricität der Planetenbahnen, von welchen Tyge Brahe in seinem Briefe sprach, sein kosmisches System bestätigen zu können. Die weite Entfernung von Graz nach Hamburg hielt ihn indessen von dem Unternehmen ab.

Zwei Jahre nach der Herausgabe des Prodromus fing man an, in Steiermark die Protestanten zu verfolgen. Zunächst wurden die Prediger und Lehrer in Graz des Landes verwiesen, in der Absicht, dadurch dem Protestantismus die Leitung zu nehmen. Infolgedessen war auch Keppler gezwungen, die Hauptstadt Steiermarks zu verlassen. Er ging vorläufig nach Ungarn, wurde aber schon nach vier Wochen wieder zurückberufen. Diese Vergünstigung verdankte er der Vermittelung der Jesuiten. Dieselben waren eifrig bemüht, tüchtige Gelehrte zu gewinnen, und hofften, Keppler, in dem sie den Astronomen schätzten, zu bekehren. Diesen Versuch haben sie später wiederholt, und ich werde an einer andern Stelle Gelegenheit haben, darauf zurückzukommen. Erwähnen will ich aber, dass sie Keppler, als sie sich von der Vergeblichkeit ihrer Bekehrungsversuche überzeugt hatten, sogar antrugen, er möge ihrem Orden dienen, ohne seinen Glauben zu ändern.

Nach seiner Rückkehr aus Ungarn hat Keppler länger als ein Jahr ohne amtliche Thätigkeit wissenschaftlichen Arbeiten gelebt, denn die ständische Schule hatte natürlich nach dem Wegzug ihrer Lehrer geschlossen werden müssen. Da die Verfolgung bald darauf auch auf die Bürger ausgedehnt wurde, sah Keppler ein, dass für die Dauer seines Bleibens in Graz nicht sei, und wandte sich an Mästlin mit dem Ersuchen, ihm eine Professur in Tübingen auszuwirken. An ein Pfarramt dachte er schon seit längerer Zeit nicht mehr. Da er von Mästlin keine Antwort erhielt, schrieb er drei Monate später noch einmal. Dieser Brief war kaum abgegangen, als ein zweites Einladungsschreiben von Tyge Brahe einlief. Derselbe war inzwischen als kaiserlicher Mathematiker nach Prag berufen und forderte Keppler auf, ebenfalls dorthin zu kommen. Letzterer reiste sofort ab und war von Anfang Januar bis Anfang Juni 1600 in Prag.

Da auch ein neuer Versuch Kepplers in Tübingen fruchtlos geblieben war, weil die Professoren

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ihn als einen Eindringling betrachteten, so entschloss er sich, Tyge Brahes Mitarbeiter zu werden. Er kehrte zunächst nach Graz zurück, um seine Verhältnisse zu ordnen und seine Familie abzuholen. Drei Jahre vorher hatte er nämlich eine reiche Witwe geheiratet, welche einen beträchtlichen Grundbesitz zu eigen hatte. Ehe er aber die Güter seiner Frau verkauft hatte, erhielt er im August die Anweisung, entweder seinen Glauben zu ändern, oder sofort auszuwandern. Da er also genötigt war, seine Abreise zu beschleunigen, verpachtete er den Besitz und zog schon im folgenden Monat nach Prag. Das Jahr darauf ist er während der Monate April bis August noch einmal in Graz gewesen. Der Zweck seiner Reise war offenbar, den Verkauf oder eine günstigere Verpachtung der Güter, als sie sich in der Eile hatte machen lassen, und sonstige Familienangelegenheiten zu ordnen.

2. Keppler in Prag.

Im Oktober 1601 starb Tyge Brahe ganz unerwartet. Die dadurch erledigte Stelle eines kaiserlichen Mathematikers erhielt Keppler nebst einem Gehalt von 500 Gulden. Damit war dieser von einer drückenden Abhängigkeit befreit. Er war des öftern mit seinem Vorgesetzten in Streit geraten, wie man daraus ersieht, dass er sich in Briefen an seine Freunde mehrfach über das herrische und hochfahrende Wesen desselben beklagte.

Noch auf dem Sterbebette hat der dänische Astronom den Versuch gemacht, Keppler zur Aufgabe des Coppernicanischen Systems und zur Annahme des seinigen zu bewegen. Nach diesem sollten sich Mond, Sonne und Fixsterne um die Erde, die Schaar der Planeten aber um die Sonne bewegen. Tyge Brahe hat kaum versucht, dieses System zu rechtfertigen. Er gab an, dass religiöse Bedenken ihn hinderten, das Coppernicanische Weltsystem anzunehmen; ebenso sehr oder vielleicht noch mehr hat ihn indes seine Eitelkeit dazu getrieben, ein eigenes aufzustellen. Im übrigen hat er stets mit grosser Achtung von Coppernicus gesprochen. Er hatte das von dem Frauenburger Domherrn gefertigte Triquetrum, auf welchem die Teilstriche bloss mit Tinte marquiert waren, zum Geschenk erhalten und es in der Uranienburg neben dem Bilde des Coppernicus aufgehängt. Darunter hatte er folgende Worte geschrieben: „Die Erde erzeugt in mehreren Jahrhunderten kein zweites Genie von dieser Grösse. Die Riesen türmten umsonst Berge auf, um den Himmel zu erreichen. Vertrauend auf die Kraft seines Geistes, erhob er, schwach an Körper, mit diesen gebrechlichen Stäben sich zu den höchsten Höhen des Olymp“. Es bleibt indessen wenig von den Leistungen des Coppernicus übrig, wenn etwa sein System falsch ist. Damit hat es aber auch zu Tyge Brahes Zeit keine Not gehabt, denn die Voraussetzung zweier Mittelpunkte der Bewegung war allzu unwahrscheinlich. Ausser seinem Schüler Christian Severin aus Longberg (daher gewöhnlich Longomontanus genannt) hat sich Niemand dazu bekannt, und auch dieser hat Tyge Brahes System nicht unverändert angenommen, sondern die Rotation der Erde gelehrt, um die tägliche Bewegung der Sterne zu erklären. Es ist also kein Wunder, dass Keppler dem heliozentrischen System treu blieb, zumal er durch dasselbe bereits die erwähnten Entdeckungen in der Planetentheorie gemacht hatte.

Nach dem Tode Tyge Brahes kaufte Kaiser Rudolph II. den gesamten Nachlass des dänischen Astronomen und stellte ihn Keppler zur Verfügung. Dieser übernahm dafür die Verpflichtung, das Beobachtungsmaterial zu bearbeiten und besonders die bereits von Tyge Brahe geplanten Rudolfinischen Tafeln herauszugeben. Keppler fuhr zunächst in der Bearbeitung der Marstheorie fort, welche er schon bei Lebzeiten Tyge Brahes vorgenommen hatte. Diese Vorarbeit war notwendig, da die Tafeln sich ohne die Gesetze der Planetenbewegung nicht berechnen liessen. Die Erben Tyge Brahes waren mit solchem Aufschub indessen wenig zufrieden. Sie hatten zwar eine beträchtliche Summe als Kaufpreis für den Nachlass bereits erhalten, aber eine grössere noch zu beanspruchen, welche sie wegen Geldmangels in der kaiserlichen Kasse nicht eintreiben konnten. Sie wünschten daher, um so weit wie möglich die Erbschaft zu regulieren, die Herausgabe der Werke ihres Vaters zu beschleunigen und verklagten Keppler, welcher nach ihrer Meinung dieselbe unnötiger Weise verzögerte, beim Kaiser. Den kaiserlichen Räten war das Drängen der Braheschen Erben auf Bezahlung schon lange lästig gefallen, sie unterstützten daher diese Klage in der Hoffnung, sich dadurch Ruhe zu verschaffen. Keppler aber machte auf die Schwierigkeit der Arbeit aufmerksam und erklärte, dass er sie nicht sobald vollenden könne; um aber den Erben zu genügen, liess er es sich gefallen, dass J. Pistorius beauftragt wurde, die Herausgabe des Nachlasses zu überwachen. Dieses Abkommen hinderte Keppler übrigens nicht, nach seinem Ermessen die Ausführung der Arbeit einzurichten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gleichzeitig mit der Marstheorie hatte Keppler die Bearbeitung der Optik vorgenommen, die Resultate dieser Bemühungen gab er 1604 in der „optischen Astronomie“ heraus. Dieselbe enthält eine Untersuchung über die atmosphärische Strahlenbrechung und die erste genügende Erklärung der Vorgänge beim Sehen. Unter den Anwendungen auf die Astronomie findet sich die Methode, durch eine Sonnenfinsternis die Längendifferenz zweier Orte zu bestimmen. Dieselbe wurde zunächst nicht beachtet, sondern erst am Ende des vorigen Jahrhunderts durch Lalande der Vergessenheit entrissen.

Keppler stellte während dieser Zeit auch eine Anzahl von Beobachtungen an. Er bestimmte eine Reihe von Marsörtern und erweiterte das Fixsternverzeichnis Tyge Brahes. Ferner beobachtete er die neuen Sterne von 1600 und 1604 sowie 1607 den später von Halley berechneten Kometen. Die praktische Astronomie war allerdings Kepplers Hauptstärke nicht; davon hielt ihn nicht bloss die Schwäche seiner Augen, welche er durch die Erkrankung an den Pocken davongetragen hatte, sondern auch seine Vorliebe für die Spekulation ab. Zu den erwähnten Beobachtungen benutzte er übrigens nicht die Instrumente Tyge Brahes. Die Erben hatten dieselben wegen der restierenden Kaufgelder zurückbehalten und auch nicht freigegeben, da sie diese niemals erhielten. Ohne wieder benutzt zu sein, sind sie im dreissigjährigen Kriege nach der Schlacht am weissen Berge zerstört.

Im Jahre 1609 gab Keppler das lange erwartete Marswerk heraus unter dem Titel: „Neue Astronomie, welche nach den Ursachen forscht, oder himmlische Physik“. Dasselbe enthält die beiden ersten Gesetze der Planetenbewegung und ist die Grundlage für die moderne Astronomie geworden. Wie er diese Gesetze entdeckt und begründet hat, wird in einem besonderen Abschnitt behandelt werden, hier soll kurz die Art skizziert werden, wie er seine Entdeckungen in diesem Hauptwerk darstellte. Unter allen seinen Schriften ist es das rationellste; es ist vollständig frei von Mystik und zeichnet sich dadurch vorteilhaft aus vor seiner Erstlingsarbeit und besonders auch vor der später geschriebenen „Weltharmonie“. Er lässt uns überall in seine Werkstatt blicken. Wir erhalten Kenntnis von dem Gange seiner Forschung und selbst von den Irrtümern, welchen er unterlag. So berichtet er uns, wie er von falschen Voraussetzungen ausgehend zu dem Flächensatz kam, und worin sein Fehlschluss bestand. Weil seine mathematischen Mittel nicht ausreichten, die falsche Ableitung durch eine richtige zu ersetzen, forderte er die Mathematiker seiner Zeit auf, die betreffende Aufgabe zu lösen. Er glaubte ihnen damit ein ihres Studiums würdiges Problem zu bieten, zumal sie so oft sich mit Dingen beschäftigten, deren Nutzen nicht einzusehen wäre. Das Buch ist durch seine stete Rücksichtnahme auf das System des Ptolemäus und dasjenige Tyge Brahes sehr wenig übersichtlich ausgefallen. Man darf Keppler aber nicht deswegen tadeln. Wollte er die Berechtigung seiner eigenen Vorstellungen nachweisen, so musste er vor allem die Unhaltbarkeit der früheren zeigen. Sonst konnte er nicht darauf rechnen, bei seinen Zeitgenossen Gehör zu finden.

In demselben Jahr, als Keppler die neue Astronomie herausgab, hatte Galilei ein Fernrohr konstruiert und dasselbe gegen den Himmel gerichtet. Zuerst hatte er den Mond beobachtet, alsdann bemerkt, dass die Milchstrasse aus einer grossen Menge von einzelnen Sternen bestehe und im Januar 1610 die Jupitermonde entdeckt. Diese Beobachtungen veröffentlichte er in seinem „Sternenboten“. Keppler erhielt denselben bald nach dem Erscheinen und schrieb darüber seine „Auseinandersetzung mit dem Sternenboten“, welche er Galilei sandte. Gleichzeitig schrieb er auch an diesen und beglückwünschte ihn wegen seiner Entdeckungen. Galilei antwortete umgehend und sprach Keppler seinen Dank aus für das Vertrauen, welches er seinen Angaben geschenkt hatte, ohne ihre Wahrheit prüfen zu können. Mit den Professoren von Florenz hatte Galilei dagegen die merkwürdige Erfahrung gemacht, dass sie versuchten, die Jupitermonde mit logischen Beweisen vom Himmel zu reissen, und sich beharrlich weigerten, das Fernrohr auch nur anzublicken, geschweige durch dasselbe nach dem Jupiter zu sehen.

Die Entdeckung der Jupitermonde hatte Keppler anfangs beunruhigt, weil er glaubte, es könne sich um neue Planeten handeln. Als er aber genauere Nachricht erhielt, sah er, er habe unnötiger Weise gefürchtet, die neuen Himmelskörper könnten sein kosmographisches Mysterium als falsch erweisen. Bald darauf erhielt er durch den Erzbischof von Köln ein holländisches Fernrohr und konnte nun selbst diese Trabanten beobachten. Wichtiger als der Bericht, den er darüber veröffentlichte, ist es, dass diese Beobachtungen ihn zur Optik zurückführten. In seiner zweiten optischen Schrift, welche den Titel „Dioptrik“ führt, und im Jahre 1611 erschien, gab er die Theorie des Fernrohrs und beschrieb das nach ihm benannte astronomische. Anfertigen hat er ein solches nie lassen, dazu fehlten ihm die nötigen Glasstücke und der Optiker, welcher sie hätte schleifen können. Auch den weiteren astronomischen Entdeckungen Galileis, den Sonnenflecken, der dreifachen Gestalt des Saturn und den Venusphasen schenkte Keppler seine Aufmerksamkeit. Dabei bemerkte er, dass er selbst schon einen Sonnenflecken gesehen, denselben aber

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

irrtümlich für den Merkur gehalten hatte, wie er 1607 in einer besonderen Schrift „über den vor der Sonne gesehenen Merkur“ berichtet hatte.

Zu diesen vielfachen wissenschaftlichen Anregungen und Leistungen stand die persönliche Lage Kepplers in einem grossen Gegensatz. Während der ganzen Zeit war ihm sein Gehalt schlecht ausgezahlt worden, die kaiserliche Kasse schuldete ihm schliesslich 4000 Gulden. Da nun Keppler auch aus dem steirischen Besitz seiner Frau nur wenig hatte herausschlagen können, so war er genötigt, sich nach einer anderen Anstellung umzusehen. Er machte zunächst wiederum einen Versuch, in Tübingen eine Professur zu erhalten. Der Herzog von Würtemberg und seine Räte waren auch bereit, den damals schon in weiten Kreisen bekannten Astronomen für die heimische Universität zu gewinnen. Diesmal stellte sich das Konsistorium hindernd in den Weg. Keppler hatte in seinem Bewerbungsschreiben mitgeteilt, er könne wegen seiner Stellung zur Abendmahlsfrage die Konkordienformel nur bedingungsweise unterschreiben, sich aber zu der Verpflichtung bereit erklärt, nichts gegen dieselbe zu unternehmen. Da er ausserdem die Feindseligkeit der Lutheraner gegen die Kalvinisten missbilligte, so lehnte das Konsistorium seine Anstellung ab. Keppler nahm darauf eine Gymnasialprofessur in Linz an, konnte sie aber nicht sogleich antreten, da der von seinem Bruder Matthias abgesetzte und in der Burg zu Prag eingeschlossene Kaiser Rudolph II. ihn nicht fortziehen liess. Während dieser Zeit verlor Keppler seinen ältesten Sohn an den Pocken, an welchen drei von seinen Kindern schwer erkrankt gewesen waren, und einige Monate darauf seine Frau, nachdem sie schon seit lange schwermütig gewesen war, am Typhus.

Im Januar 1612 starb Kaiser Rudolph II. Der neue Kaiser Matthias bestätigte Keppler in dem Amt eines kaiserlichen Mathematikers. Da die Kasse jetzt aber eben so leer war, wie früher, siedelte dieser 1612 nach Linz über und trat die das Jahr zuvor angenommene Professur an. Die Besoldung für dieselbe betrug 400 Gulden.

3. Keppler in Linz.

Als Keppler 1612 in Linz ankam, forderte der dortige Pfarrer Hitzler, ein Tübinger Theologe, ihn auf, die Konkordienformel zu unterschreiben und schloss ihn, da er sich weigerte, vom Abendmahl aus. Eine Beschwerde Kepplers bei dem Würtembergischen Konsistorium hatte keinen Erfolg. Man nannte ihn einen Wolf in Schafskleidern, und als die Sache einige Jahre darauf abermals zur Sprache kam, erklärte der Konsistorialrat Erasmus Brüning, man könne doch eines Schwindelhirnleins und Letzköpfleins wegen seine Meinung nicht ändern.

Auf dem 1613 abgehaltenen Reichstag zu Regensburg war Keppler zugegen, um die allgemeine Einführung des gregorianischen Kalenders zu empfehlen. Die Annahme des dahin zielenden kaiserlichen Antrags unterblieb indessen wegen des Widerstandes der protestantischen Fürsten. Nach seiner Rückkehr von Regensburg verheiratete sich Keppler zum zweiten Male. Diese Ehe scheint glücklicher gewesen zu sein, als die erste; die derselben entstammenden Kinder starben aber sämtlich in frühem Alter, die jüngsten kurz nach dem Tode des Vaters.

Der Herbst 1613 brachte eine reichliche Weinlese. Keppler ging daher aus, um den nötigen Vorrat für den Haushalt zu kaufen. Dabei bemerkte er, dass die Verkäufer in höchst einfacher Weise mittelst einer Visierrute den Inhalt der Fässer bestimmten. Da ihm Zweifel kamen, ob dieses Verfahren auch vollkommen zuverlässig sei, dachte er weiter darüber nach und fand es in der That „sicher und gewiss“. Als Frucht dieser Bemühungen gab er 1615 lateinisch die „Stereometrie der Fässer“ heraus, von welcher 1616 auch eine populäre Bearbeitung in deutscher Sprache, als „Österreichisches Weinvisierbüchlein“, erschien. Diese Schrift ist wichtig, weil sie die ersten Keime der Infinitesimalrechnung enthält und die weitere Ausbildung dieser Methode vielfach beeinflusst hat. Anklänge an seine Behandlung der Körperberechnung finden sich bereits in der „neuen Astronomie“. Er sagt da: „Ich erinnerte mich, dass einst Archimedes, als er das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser suchte, den Kreis in unendlich viele Dreiecke teilte; denn das ist die verborgene Kraft seines durch das Unmögliche führenden Beweises“.

Im Jahre 1619 erschien die „Weltharmonie“, an welcher Keppler schon seit 1597 gearbeitet hatte. In dem letzten Buch dieses Werkes, der Lieblingsarbeit Kepplers, findet sich das dritte Gesetz der Planetenbewegung, von welchem er mit Recht besonders entzückt war. Ihm galt es gleich, ob es sofort oder nach 100 Jahren gelesen würde. Seine volle Würdigung hat es erst erfahren, als Newton daraus die Konsequenzen zog und seine Wichtigkeit dadurch ins rechte Licht setzte. Mit Ausnahme dieses Gesetzes

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und etwa der geometrischen Untersuchungen über regelmässige Vielecke und Körper enthält die „Weltharmonie“ aber wenig rationelles. In der Hauptsache ist sie eine weitere Ausbildung der mystischen und pythagoräisierenden Gedanken des Prodromus. Keppler nahm daher das kosmographische Mysterium in dieselbe auf. Seinem vermeintlichen geometrischen Grundgesetz der fünf regulären Körper fügte er noch ein ebenso verfehltes musikalisches der Harmonien hinzu. Diese Harmonien, nach denen das Werk seinen Namen erhalten hat, sollten in der elliptischen Theorie die Grösse der Excentricität der Planetenbahnen erklären, wie die regulären Körper ihre Ausdehnung und Anzahl.

Fast gleichzeitig mit der „Weltharmonie“ gab Keppler die „drei Bücher über die Kometen“ heraus; sie sind seine Hauptschrift über den Gegenstand. Veranlasst wurde dieselbe durch drei im Jahre vorher erschienene Kometen, von welchen der dritte einen so schönen Schweif gehabt hatte, wie er seit 150 Jahren nicht gesehen war. Keppler hielt die Kometen für zum Sonnensystem gehörige Meteore und glaubte, der Himmel wimmele von ihnen, wie das Meer von Fischen. Seine Gesetze der Planetenbewegung wendete er nicht auf sie an; vielmehr liess er sie sich in geraden Linien bewegen. Erst Dörffel aus Plauen wies am Ende des 17. Jahrhunderts nach, der Komet von 1680 habe eine parabolische Bahn um die in deren Brennpunkt stehende Sonne beschrieben. Dagegen machte schon Keppler unstreitig den ersten rationellen Versuch, die Entstehung der Kometenschweife zu erklären. Nach seiner Ansicht besteht ein Komet vollständig aus dunstförmigem Stoff, welcher durch die andauernde Einwirkung der Sonne zerstreut wird. Die dünneren Teilchen erzeugen dabei, dem Antriebe der Sonnenstrahlen folgend, den Schweif, während die dichteren die neblige Hülle um den Kern bilden.

Zum Teil gleichzeitig, zum Teil etwas später gab Keppler sein „Lehrbuch der Coppernicanischen Astronomie“ in sieben Büchern heraus; die erste Hälfte erschien 1618, die zweite 1621. Dasselbe enthält, in der damals gebräuchlichen Form von Frage und Antwort, in den drei ersten Büchern die sphärische, im vierten die physische und in den letzten die theoretische Astronomie. Die „Coppernicanische Astronomie“ ist das erste Lehrbuch, welches zur Einführung in das heliozentrische System geschrieben wurde, und Keppler hielt es daher für nötig, sich wegen der vielen darin vorkommenden Neuerungen zu entschuldigen. Er machte darauf aufmerksam, dass die ganze Philosophie (so nannte man damals die Naturwissenschaften) eine Neuerung und ein Kampf gegen die alte Unwissenheit sei. Das Kepplersche Buch war zu jener Zeit sehr geschätzt, wie man aus dem Urteil des Engländers Horrocks ersieht, welcher es neben der „neuen Astronomie“ seinen Landsleuten besonders zum Studium empfahl. Da es nichts wesentliches enthält, was nicht auch in Kepplers grundlegenden Werken vorkäme, bedarf es eines näheren Eingehens auf dasselbe nicht. Ich will aber seiner Vorstellungen vom Bau des Weltalls erwähnen, weil sie darin am eingehendsten auseinandergesetzt sind. Nach ihm ist das Weltall eine Kugel und besteht aus drei Teilen. Die Mitte nimmt die Sonne ein, die Oberfläche bildet die feste Fixsternsphäre, und im Zwischenraume bewegen sich, getrieben durch die Kraft der Sonne, die Planeten. Die Ausdehnung des Planetensystems hielt er für die mittlere geometrische Proportionale zwischen der Ausdehnung der Sonne und der Fixsternsphäre. Die Ansicht Giordano Brunos von den unzähligen Welten war ihm bekannt, aber er verwarf sie. Von ihrer Annahme hielt ihn nicht etwa der Mangel an Kühnheit im Denken ab, welche er überall bewiesen hat, sondern seine pythagoräisierenden Vorstellungen.

In die Zeit seines Linzer Aufenthalts fällt auch noch seine Schrift über die Logarithmen. Fast gleichzeitig hatten Byrgi und Napier dieselben erfunden, und Napier seine Entdeckung 1614 in seinem „Canon der Logarithmen“ bekannt gemacht. Keppler lernte sie zuerst aus einer Arbeit seines Freundes Behr, der gewöhnlich Ursinus heisst, im Jahr 1618 kennen, begriff sofort ihre Wichtigkeit für seine astronomischen Tafeln und begründete ihre Theorie in seiner 1624 herausgegebenen „Chilias der Logarithmen“. Die Veranlassung zur Abfassung dieser Schrift erhielt er auf einer Reise nach Würtemberg, auf welcher er bemerkt hatte, dass seine Zeitgenossen sich nicht in die neue Erfindung hineindenken konnten. Keppler verwendete die Logarithmen bereits in seinen Ephemeriden für das Jahr 1620, besonders aber in seinen im Jahr 1627 zu Ulm gedruckten Rudolfinischen Tafeln.

Auch in Oberösterreich wurde Keppler von mannigfachen Schicksalsschlägen betroffen. Ende 1615 erhielt er die Nachricht, dass seine Mutter in den Verdacht der Hexerei gekommen sei, und dass sie und ihre in Würtemberg wohnenden Kinder gegen die Verläumder einen Injurienprozess angestrengt hätten. Keppler glaubte, die Angelegenheit werde sich leicht ordnen lassen, sah sich aber bald in seiner Hoffnung getäuscht. Der Untervogt Einhorn, welcher in der Sache in für ihn gravierender Weise beteiligt war, brachte es durch seine Schurkerei zu Wege, dass der Injurienprozess in einen Hexenprozess umzuschlagen drohte. Katharine Keppler wäre dadurch aus der Klägerin zur Verklagten geworden. Infolgedessen reiste

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sie und ihr Sohn, der Zinngiesser Christoph Keppler, nach Linz, um sich bei dem Astronomen persönlich Rats zu erholen. Dieser wandte sich in der Angelegenheit seiner Mutter brieflich nach Stuttgart und bat sie, inzwischen bei ihm zu bleiben, bis ihr Prozess entschieden sei. Davon wollte die alte Frau jedoch nichts wissen, weil sie fürchtete, sie könne durch ihre Abwesenheit den Verdacht eines bösen Gewissens erregen. Da Keppler seine Mutter nicht zurückhalten konnte, reiste er ihr nach und übertrug die weitere Führung des Prozesses einem Freunde. Der Vogt Einhorn sah ein, dass unter solchen Umständen nichts zu machen sei und verschleppte die Sache, in der Hoffnung, es würde sich später eine günstigere Gelegenheit ergeben. Diese bot sich 1619, als Keppler durch den Tod des Kaisers Matthias bis zu seiner erst 1622 erfolgten Neubestätigung in dem Amt eines kaiserlichen Mathematikers durch Ferdinand II. des kaiserlichen Schutzes beraubt war. Die Feinde seiner Mutter glaubten ihn jetzt nicht mehr fürchten zu müssen, und Einhorn gestattete ihnen die Einbringung der Gegenklage auf Zauberei. Keppler konnte nicht sofort seiner Mutter zu Hülfe eilen. Herzog Maximilian von Bayern war im Sommer 1620 plötzlich in Österreich eingefallen und hatte Linz belagert. Sobald dieses von den Bayern eingenommen war, brachte Keppler seine Familie nach Regensburg und reiste dann selbst nach Würtemberg, um seine Mutter persönlich zu verteidigen. Die Niederschlagung des Hexenprozesses konnte er nicht erreichen. Die damals bereits 74jährige Frau wurde sogar zur Territion verurteilt, d. h. es wurden ihr die Folterwerkzeuge gezeigt und der Gebrauch und die Wirkung derselben erläutert. Als sie dabei mutig ihre Unschuld beteuerte, wurde sie freigesprochen. Bei der Verteidigung hat Keppler den Hexenglauben selbst nicht angegriffen, sondern ist nur gegen die Grausamkeit und Unvernunft des üblichen Verfahrens gegen Zauberei in die Schranken getreten. Er führte den Richtern die hilflose Lage derjenigen vor Augen, welche in den Verdacht der Zauberei gekommen waren und zeigte, dass es für eine Witwe unmöglich sei, sich trotz aller Unschuld hinreichend zu verteidigen, wenn sie von einem mächtigen Feinde verfolgt werde. Die Zauberei möge schrecklich sein, aber noch schrecklicher sei es, wenn eine Unschuldige durch diese Anklage gefährdet werde. Wenn Keppler gegen den Hexenglauben selbst nicht vorging, so lag die Veranlassung dazu nicht etwa bloss in irgend welcher Rücksichtnahme auf die Richter. Er war wirklich von einem solchen Glauben nicht frei. Aber wir dürfen ihn deshalb nicht tadeln, weil zu seiner Zeit der Hexenglaube ein Stück des Kirchenglaubens bildete.

$1^1/_4$ Jahr hatte Keppler in Würtemberg zur Verteidigung seiner Mutter zubringen müssen. Erst im November 1621 konnte er wieder nach Linz zurückkehren, wo er die nächsten vier Jahre verhältnismässig ruhig lebte. 1625 aber begann die Protestantenverfolgung in Oberösterreich, so wie früher in Steiermark, mit der Austreibung der Lehrer und Prediger. Diese Gegenreformation rief einen Bauernaufstand hervor, welcher eine 14wöchentliche Belagerung von Linz zur Folge hatte. Obgleich Keppler als kaiserlicher Mathematiker sich eine Ausnahmestellung hätte verschaffen können, zog er es doch vor, da nach der Bezwingung der Bauern die Protestanten noch härter verfolgt wurden, Linz zu verlassen. Er erwirkte sich die Erlaubnis, die inzwischen fertig gestellten Rudolfinischen Tafeln an einem sichern Orte drucken lassen zu dürfen. Seine Familie brachte er wieder nach Regensburg und er selbst ging nach Ulm, wo die lange erwarteten Tafeln endlich das Jahr darauf erschienen. In der Vorrede erzählt er, dass er 26 Jahre an ihnen gearbeitet habe. Dieser lange Aufschub war nicht allein durch die Schwierigkeit der Aufgabe und seine sonstigen Arbeiten, welche er während dieses Vierteljahrhunderts herausgegeben hatte, bewirkt worden, sondern vor allem dadurch, dass er die ganze Zeit über aus Geldmangel nur selten einen Rechner hatte bezahlen können. Die Rudolfinischen Tafeln übertrafen nicht nur alle vorhergehenden, sondern auch diejenigen, welche von andern Autoren einige Zeit nachher erschienen. Von allgemeinem Interesse ist die darin enthaltene Methode Kepplers, die Sonnenfinsternisse zu berechnen, welche im wesentlichen noch heute von den Astronomen angewandt wird, während das Problem vorher nicht einmal gestellt war.

Zu dieser Zeit sind von katholischer Seite abermals Versuche gemacht, Keppler zu bekehren. Der Jesuit Curtz stellte ihm die Einigkeit der Katholiken und den Zwiespalt und Hader der Protestanten und der Jesuit Gulden die Vorzüglichkeit der katholischen gegen die protestantische Religion vor. Diese Gründe haben damals manchen zum Übertritt vermocht, den Pater Gulden selber. Er stammte aus einer jüdischen Familie St. Gallens, welche sich zum Protestantismus bekehrt hatte und war früher Goldschmied gewesen. Als er 20 Jahre alt war, trat er zu Freisingen zum Katholizismus über und in den Jesuitenorden ein; gleichzeitig änderte er seinen Namen Habakuk in Paul. Die Jesuiten liessen ihn Mathematik studieren. Nach ihm führt die bekannte Regel zur Berechnung der Oberfläche und des Volumens von Rotationskörpern ihren Namen; wir werden ihm daher bei der Besprechung der einschlägigen Arbeiten Kepplers wieder begegnen. Der andere Jesuit, Curtz, welcher nach dem Tode Kepplers das Beobachtungsmaterial Tyge

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Brahes herausgab, hat auch vor dem Bekehrungsversuch mit Keppler korrespondiert. So schickte er ihm einen Brief des Jesuiten Terrentius, welcher sich aus Hangtscheu, wo die Jesuiten eine Niederlassung hatten, wegen der chinesischen Kalenderreform an die Mathematiker von Ingolstadt wandte. Keppler antwortete darauf 1627 und liess seinen Brief 1630 drucken. In jenem Schreiben fragte Terrentius, ob bereits Kepplers „Hipparch" erschienen sei. Diese Schrift war schon zu Prag begonnen und sollte eine Untersuchung über die Grösse und Entfernung von Sonne, Erde und Mond enthalten. Zu Linz hatte Keppler sie fortgesetzt, aber wieder liegen lassen, und nachdem die Rudolfinischen Tafeln vorlagen, stand er ganz davon ab, sie besonders herauszugeben. Er wollte sie zu einem Teil eines Buches machen, welches dem Almagest des Ptolemäus entsprechen sollte, aber nicht zu Stande kam, weil ihn der Tod an der Ausführung hinderte.

4. Kepplers letzte Lebensjahre und Tod.

Unter den Kaisern Matthias und Ferdinand II. erhielt Keppler seinen Gehalt als kaiserlicher Mathematiker meistens gar nicht ausgezahlt, so dass die Rückstände 1627 auf 12000 Gulden angelaufen waren. Als er sich infolgedessen in jenem Jahr wiederum an den Kaiser wandte und zum so und so vielten Mal auf Bezahlung drängte, wies ihn dieser an Wallenstein, der soeben mit dem Herzogtum Mecklenburg belehnt war. Wallenstein erklärte sich zur Zahlung bereit und lud Keppler nach Sagan ein, wo er Hof hielt. Er hatte die astrologischen Kenntnisse desselben schon früher in Anspruch genommen und hoffte von ihnen auch in Zukunft Nutzen ziehen zu können. Keppler nahm an, siedelte im Sommer 1628 nach Sagan über und blieb dort bis zum Herbst 1630. Der Herzog von Friedland sah sich bald in der Hoffnung getäuscht, ihn für seine astrologischen Neigungen günstig zu stimmen und suchte ihn daher mit einer Professur in Rostock abzufinden. Keppler weigerte sich aber, dieselbe ohne Genehmigung des Kaisers anzunehmen, weil er sonst seine Geldansprüche aufgäbe.

In Sagan hat Keppler die Ephemeriden für die Jahre 1621—36 herausgegeben. Dabei wurde er von seinem Schwiegersohn Bartsch unterstützt. Ferner ist aus der Saganer Zeit die Aufforderung an die Astronomen zu erwähnen, die im Jahre 1631 stattfindenden Vorübergänge des Merkur und der Venus vor der Sonne zu beobachten. Ich erzählte schon, dass Keppler zu Prag einen Merkurdurchgang gesehen zu haben glaubte, aber seinen Irrtum gewahr wurde, als Galilei die Sonnenflecken entdeckte. Beim Eintritt der von ihm berechneten Vorübergänge lebte er nicht mehr, seine Aufforderung blieb indessen nicht unbeachtet. Der für den 1. November vorausgesagte Merkurdurchgang wurde von Gassendi verfolgt. Er trat $4^h\ 49^m\ 30^s$ vor der von Keppler angegebenen Zeit ein. Der auf den 6. Dezember vorausgesagte Durchgang der Venus wurde nicht beobachtet, weil er nach Untergang der Sonne erfolgte. Keppler hatte angegeben, dass der nächste Vorübergang der Venus erst im Jahre 1761 einträte, sich aber geirrt, da ein solcher in der That schon im Jahr 1639 stattfand. Die Rudolfinischen Tafeln ergaben, wie Horrocks feststellte, für dieses Jahr einen Vorübergang 8′ unterhalb der Sonne, die damals sehr verbreiteten Laensberghischen einen solchen durch den oberen Teil ihrer Scheibe. Obgleich also die letztern das Phänomen anzeigten, war ihr Resultat in Wirklichkeit falscher, als das aus den Kepplerschen Tafeln folgende, weil die Venus im untern Teil der Sonnenscheibe durchging. Laensbergh selber hielt seine Tafeln für bei weitem besser, als die Rudolfinischen, befand sich aber mit dieser Meinung in einem grossen Irrtum. Wenn die Astronomen die ersten auch eine Reihe von Jahren vielfach gebraucht haben, so veranlasste sie dazu nur die übersichtliche Einrichtung derselben. Sie standen sonst den Prutenischen Tafeln näher, als den Kepplerschen und waren gegen die letzten, da sie noch nach den alten Theorien berechnet waren, ein offenbarer Rückschritt. Den Durchgang von 1639 hat Horrocks beobachtet und daraus den scheinbaren Durchmesser der Venus bestimmt. Zu diesem Zweck hatte Keppler jene Beobachtungen vorgeschlagen, ihre Bedeutung für die Bestimmung der Sonnenparallaxe hat erst Halley erkannt.

Die Ephemeriden und die Aufforderung an die Astronomen waren die letzten Leistungen Kepplers. Als Wallenstein im Jahre 1630 auf dem Reichstag zu Regensburg seines Feldherrnamtes entsetzt wurde, verliess Keppler Sagan und begab sich schleunig, um seine Ansprüche zu wahren, nach Regensburg. Dort starb er wenige Tage nach seiner Ankunft noch nicht ganz 59 Jahre alt am Fieber, das er sich durch die Anstrengung der nach damaliger Sitte zu Pferde zurückgelegten Reise zugezogen hatte. Seine Frau scheint ihn nur kurze Zeit überlebt zu haben. Von seinen Kindern erreichten das reifere Alter nur die an Bartsch verheiratete Tochter Susanne und der, wie diese, aus der ersten Ehe stammende Sohn Ludwig,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welcher in Königsberg in Preussen Arzt war. Der letztere hat nach dem Tode des Vaters mehrfach Versuche gemacht, die Gehaltsrückstände desselben wenigstens zum Teil beizutreiben, jedoch ohne Erfolg zu haben.

Der Nachlass Kepplers wurde durch einen Enkel, den Sohn von Ludwig Keppler, welcher der letzte Nachkomme des Astronomen im Mannsstamme war, an Hewelke verkauft. Nach dessen Tode kaufte ihn 1707 Michael Hansch. Dieser beabsichtigte die Werke Kepplers herauszugeben, liess aber nur einen Band, welcher eine Auswahl von Briefen enthielt, erscheinen. Dazu hatte er aus der kaiserlichen Kasse eine Unterstützung erhalten unter der Bedingung, die benutzten Handschriften abzuliefern. So kamen drei Bände des Kepplerschen Nachlasses nach Wien, die andern 19 Bände versetzte Hansch, da er zur Fortsetzung der Herausgabe nicht die genügenden Mittel auftreiben konnte, in Frankfurt a. M. Auf Antrag Leonhard Eulers wurden dieselben von der russischen Regierung ein halbes Jahrhundert nachher angekauft und der Petersburger Akademie übergeben. Später kamen sie an die Sternwarte zu Pulkowa und wurden von dort 1847 an Christian Frisch überlassen, welcher 1858—71 Kepplers sämtliche Werke in acht Bänden herausgab. Diese Gesamtausgabe enthält das ganze noch vorhandene Material. Die Briefe sind jedem einzelnen Werke, auf welches sie sich beziehen, vorgedruckt, und den Schriften selbst folgen wie diese in lateinischer Sprache geschriebene Anmerkungen. Sehr vollständig ist das dem letzten Bande beigegebene Register, welches die Orientierung wesentlich erleichtert. Bilder existieren von Keppler zwei; eines gehörte seinem Freunde Bernegger in Strassburg und war in den Besitz der dortigen Universitätsbibliothek übergegangen, ist aber 1870 bei der Belagerung verbrannt. Das andere, ein Ölbild auf Holz, hatte seinen Geschwistern gehört und ist heute noch vorhanden. Beide sind photographisch vervielfältigt. In unserem Jahrhundert sind Keppler zwei Denkmäler gesetzt, das eine 1808 von dem Fürstbischof C. von Dalberg in Regensburg, das andere zur dritten Säkularfeier seiner Geburt in Weil der Stadt. Das letztere stellt ihn auf einem hohen Postamente in sitzender Stellung dar, die Linke stützt er auf einen Himmelsglobus, in ihr hält er eine Rolle, auf welcher eine Ellipse gezeichnet ist; sein Blick ist nach oben gerichtet, als ob er mit dem geöffneten Zirkel, den er in der Rechten hält, den Himmel ausmessen will. An den vier Ecken des Piedestals stehen die Statuen von Mästlin, Coppernicus, Tyge Brahe und Jost Byrgi, die Seiten desselben füllen Reliefs, Ereignisse aus dem Leben Kepplers darstellend.

---

5. Würdigung Kepplers.

Vom Erscheinen seines Prodromus an erfreute sich Keppler bei seinen Zeitgenossen eines grossen Ansehns. Dasselbe steigerte sich von Jahr zu Jahr und verbreitete sich weit über die Grenzen Deutschlands. Italien und England boten ihm sogar 1617 und 1620 einen Lehrstuhl der Astronomie an. Solchem Ruf konnte er allerdings nicht folgen, da er damit seine Ansprüche an die kaiserliche Kasse aufgegeben hätte. Aber selbst, wenn dieses Hindernis nicht vorhanden gewesen wäre, würde ihn sein deutsches Bewusstsein abgehalten haben, ins Ausland zu gehen. Nach Italien überzusiedeln, musste ihm auch wegen des Unterschieds in der Religion und wegen der 1616 erfolgten Suspendierung der „Kreisbewegungen“ des Coppernicus nicht ratsam erscheinen. Seine Bücher fanden einen grossen Leserkreis und wurden sogar in Italien in einer beträchtlichen Anzahl von Exemplaren verkauft, obgleich sie nach 1616 meistens auf den Index kamen. Kepplers Ruf gründete sich hauptsächlich auf seine optischen und chronologischen Arbeiten, die Stereometrie der Fässer, die Rudolfinischen Tafeln und die Ephemeriden. Von der Wichtigkeit seiner drei Gesetze der Planetenbewegung hatten dagegen seine Zeitgenossen keine Ahnung. Auch Galilei, der sie vielleicht am ersten hätte würdigen können, wusste nichts von ihnen. In den 1632, also zwei Jahre nach dem Tode Kepplers und 23 Jahre nach dem Erscheinen der „neuen Astronomie“, herausgekommenen „Dialogen über die beiden wichtigsten Weltsysteme“ sagte er: Die Form der Planetenbahnen kenne man nicht, denn der Mars spiele noch immer den Astronomen mit. Es befremdet vielleicht, dass Galilei die grösste Entdeckung Kepplers vollständig übersah. Diese Thatsache wird indessen leicht begreiflich, wenn man erwägt, dass unter Galileis Bemühungen die mechanischen und physikalischen Untersuchungen im Vordergrunde standen. Der 1641 leider schon im Alter von 22 Jahren verstorbene Horrocks war der erste, welcher Kepplers astronomische Errungenschaften schätzte. Dieselben fanden also ihre früheste Anerkennung und Verbreitung auf englischem Boden, auf welchem auch später ihre ganze Tragweite erwiesen wurde. Seitdem Newton auf ihrem Grunde die Gravitationslehre aufgebaut hatte, wurde die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bedeutung der Gesetze der Planetenbewegung besser gewürdigt. Über die Art aber, wie der Urheber dieser Gesetze zu ihnen kam, hat man oft eine falsche Meinung gehabt; man hat sogar geglaubt, er habe sie durch willkürliche Vermutungen und blindes Probieren entdeckt. Diese Behauptung bedarf kaum der Widerlegung, da Naturgesetze auf solche Weise niemals nachgewiesen wurden. Übrigens habe ich bereits bei der Besprechung des Prodromus darauf aufmerksam gemacht, dass Keppler schon in dieser ersten Schrift von vollständig zutreffenden Grundanschauungen ausging, und die spätere Darstellung wird zeigen, wie das unerschütterliche Vertrauen in die Richtigkeit derselben ihn Schritt für Schritt zu seinen grossen Entdeckungen leitete. Dass er dabei auch auf Umwege geriet und selbst in offenbare Irrtümer verfiel, darf nicht Wunder nehmen. Die Mitteilung der ersten und die Erzählung, wie er zu den letzten kam, und wie er sie zu widerlegen suchte, hat viel dazu beigetragen, die oben erwähnte Ansicht zu erzeugen. Wir sollten indessen Keppler deswegen nicht tadeln, sondern ihm vielmehr für die treue Zeichnung des Weges, auf dem er zu seinen Entdeckungen gelangte, Dank wissen. Dieses hervorragende Beispiel induktiver Forschung ist gerade durch die fragliche Darlegung besonders instruktiv ausgefallen. Andererseits hat man den Nutzen, welchen die Braheschen Beobachtungen für Keppler hatten, bei weitem überschätzt. Es ist zuzugeben, dass er ohne sie das Material zur Erforschung seiner Gesetze wahrscheinlich nicht hätte erlangen können. Da es ihm an Mitteln fehlte, würde er die zur Beschaffung desselben erforderlichen Instrumente und die nötigen Gehülfen, deren er wegen der Schwäche seiner Augen um so mehr bedurft hätte, schwerlich haben auftreiben können. Die Beobachtungen Tyge Brahes waren also ein notwendiges, aber nicht das wichtigste Erfordernis der Kepplerschen Leistung. Der dänische Astronom selber hätte sie niemals in ähnlicher Weise verwerten können. Dazu war er viel zu sehr von alten Vorurteilen eingenommen. In erster Linie war es das Kepplersche Nachdenken, durch welches die Gesetze der Planetenbewegung entdeckt wurden. Die Beobachtungen hatten bei den einzelnen Nachweisungen eine verhältnismässig untergeordnete Rolle zu spielen, sie dienten nur dazu, die Kepplerschen Gedanken auf ihre Richtigkeit zu prüfen und ausserdem die Elemente der Planeten zu bestimmen. Das Wesentliche waren also die bahnbrechenden Vorstellungen Kepplers, und diese hatte er bereits mehrere Jahre, bevor er zu Tyge Brahe kam, gefasst.

Die astronomischen Leistungen Kepplers überragen seine übrigen bedeutend; aber auch diese, welche mit Ausnahme der stereometrischen Arbeit im Dienste der Astronomie standen, sind weitere Belege für sein grosses Genie. Will man daher ein vollständiges Bild von Kepplers reicher Thätigkeit geben, so darf man auf ihre Darstellung nicht verzichten. In der Optik hat sich Keppler durch die richtige Theorie des Sehens und die Angabe der Konstruktion des astronomischen Fernrohrs einen bleibenden Namen gemacht. Die Dioptrik verdankt ihm ihre erste zutreffende Begründung und auch den Namen. Für die Mathematik hatte er eine vorzügliche Begabung, und er würde jedenfalls in ihr ganz hervorragendes geleistet haben, wenn seine vielseitige astronomische Thätigkeit ihn zu einer eingehenden Beschäftigung mit dieser Wissenschaft hätte kommen lassen. Schon gelegentliche Bemerkungen legen davon Zeugnis ab, z. B. sein Vorschlag, den oskulierenden Kreis als Mass der Krümmung zu benutzen und seine Ansicht über die Maxima und Minima, welche wenige Jahrzehnte nachher bei Fermat zu einer vollständigen Theorie derselben führte. Von grösster Bedeutung aber ist der Einfluss, welchen Keppler auf die spätere Entwickelung der modernen Methoden des Infinitesimalkalküls durch seine Einführung des unendlich Kleinen in die Geometrie ausgeübt hat. Diese Fülle von wahrhaft grossen und neuen Entdeckungen werde ich in der folgenden Darstellung im einzelnen zu zeichnen versuchen. Hier mache ich noch darauf aufmerksam, dass gerade seine aussergewöhnliche mit einer bewunderungswerten Kraft der Phantasie und einer völlig vorurteilsfreien Denkungsweise verbundene Erfindungsgabe, ihn befähigten, so Grosses zu leisten. In dieser Weise hat schon Galilei ihn beurteilt. „Ich schätze Keppler“, sagte er nach dessen Tode „wegen seines vorurteilsfreien und feinen Geistes ungemein hoch, seine Art zu philosophieren ist aber von der meinigen verschieden“. Keppler selbst war sich der Bedeutung, welche diese Eigenschaften als Erfordernisse der wissenschaftlichen Forschung haben, vollkommen bewusst. Man ersieht dies aus seinem Urteil über den Begründer des heliozentrischen Weltsystems, welches dem Galileis über ihn selbst durchaus ähnlich war. Dasselbe lautete: Coppernicus war ein Mann von grossem Genie, und was auf dem Gebiete der Astronomie von besonderer Bedeutung ist, von freier Sinnesart“.

Neben einem festen Charakter besass Keppler eine milde und versöhnliche Gemütsart. Er missbilligte, wo er es konnte, den Streit und Hader der Parteien, welche zu seiner Zeit natürlich mit den Konfessionen zusammenfielen. Eine Folge davon war, dass er sowohl von protestantischer als von katholischer Seite verfolgt wurde. Die Jesuiten vertrieben ihn zweimal in den durch sie veranlassten Protestantenverfolgungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

aus seinem Wohnsitz, und andererseits versuchten sie mehrfach, ihn zu bekehren und zu gewinnen. Dass sie einen Erfolg in dieser Beziehung für möglich hielten, beweist jedenfalls, dass sie über seinen Charakter vollständig im unklaren waren; wahrscheinlich hielten sie die Milde seines Wesens für Schwäche. Darin hatten sie sich allerdings gründlich getäuscht; der Mann, der Niemand persönlich verletzte, hat, wo es darauf ankam, seine Meinung zu vertreten, dieselbe stets mit der äussersten Entschiedenheit verfochten, auch wenn sie dem Geist der Zeit schnurstracks entgegen lief. Ausser diesen Verfolgungen widerfuhr ihm sogar der Schimpf, dass seine Mutter als Hexe verklagt wurde. Einen Mann von weniger festem Charakter hätte schon eine geringere Zahl von Schicksalsschlägen zu Boden geworfen, den schwäbischen Astronomen scheinen dieselben nur gestählt und zu immer neuen geistigen Anstrengungen ermutigt zu haben.

Ehe ich aber auf Kepplers Leistungen eingehe, dürfte es nötig sein, seine astrologischen Ansichten klar zu stellen und auch den Einfluss zu zeichnen, welchen seine mystischen Neigungen auf seine wissenschaftlichen Anschauungen hatten. Bezüglich der ersten ist zunächst festzustellen, dass in der Fülle der astrologischen Schriften, welche uns aufbewahrt sind, eine grosse Anzahl auf Bestellung und daher im Geschmack und nach den Wünschen der Auftraggeber angefertigt wurden. Die Beschäftigung mit solchen Gelegenheitsarbeiten ist übrigens Keppler nie erwünscht gewesen, er hat sie stets als eine Last empfunden, welche nicht abschütteln zu können, da die schlechte Bezahlung seines Gehalts ihn zu diesem Nebenerwerb zwang, er lebhaft beklagte. Sehen wir daher von diesen Schriften ab, so können wir konstatieren, dass er von dem groben Aberglauben in der Astrologie frei war. Die Sterne liess er auf den Charakter des Menschen wirken, den entscheidenden Einfluss auf dessen Schicksal schrieb er dagegen den Leidenschaften und den äusseren Umständen zu. Ausserdem sollten die Sterne die Witterung beeinflussen. Er wies deshalb die Astrologie nicht ganz zurück, warnte vielmehr diejenigen seiner Zeitgenossen, welche „den sternguckerischen Aberglauben billig verwarfen“, sie möchten nicht das Kind mit dem Bade ausschütten. Die mystischen Teile der Kepplerschen Naturanschauung sind häufig unrichtig beurteilt worden. Man hat in ihnen wohl einen nationalen Zug gefunden und sie deshalb als etwas echt deutsches empfehlen zu müssen geglaubt. Eine solche Auffassung ist nicht zu billigen, selbst wenn die schwäbische Abstammung unseres Astronomen für die in Rede stehenden Anschauungen nicht gleichgültig sein sollte. Keppler hat allerdings selbst in diesen schweifenden Vorstellungen sein Genie selten verleugnet, zu wirklichen Einsichten aber ist er durch seine mystischen Neigungen niemals geführt. Oft genug sind sie ihm geradezu hinderlich gewesen, sie hielten ihn z. B. ab, die Brunosche Weltanschauung anzunehmen. Soweit die Mystik Kepplers für die Beurteilung seines Charakters von Bedeutung ist, und soweit sie ihre Schatten auch auf seine eigentlichen Leistungen hat fallen lassen, habe ich die Ergebnisse der betreffenden Spekulationen, wie sie sich im „kosmographischen Mysterium“ und in der „Weltharmonie“ offenbaren, bereits dargelegt. Da sie ein weiteres Interesse nicht in Anspruch nehmen können, werde ich sie im folgenden auf sich beruhen lassen.

6. Die Stereometrie der Fässer.

Das Kepplersche Buch über die Weinfässer, insbesondere das österreichische, zerfällt in drei Teile: die archimedische Stereometrie nebst einem Anhange, die Stereometrie des österreichischen Fasses und die Anwendung derselben. Im ersten Teile leitete Keppler die Resultate der Archimedischen Inhaltsbestimmung der Körper ab. Er trug dieselben aber nicht in der von dem griechischen Mathematiker angewendeten Exhaustionsmethode vor, sondern führte zum ersten Male den Begriff des unendlich Kleinen in die Geometrie ein. Um den Unterschied dieser Verfahrungsarten sichtbar zu machen, führe ich den Beweis an, welchen beide für den Satz gaben: „Der Kreis ist gleich einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete seinem Halbmesser und dessen andere seinem Umfang gleich ist“. Denselben bewies Archimedes indirekt, indem er zeigte, dass der Kreis unmöglich grösser oder kleiner sein könne als jenes Dreieck. Dazu beschrieb er einmal in, das andere Mal um den Kreis erst ein Quadrat, dann ein regelmässiges Achteck etc., bis in jenen beiden Fällen das betreffende Polygon grösser oder kleiner als das Dreieck hätte werden müssen und zeigte, dass dies eben unmöglich sei. Keppler bemerkte, der Sinn dieses Beweises scheine ihm folgender zu sein: Der Kreisumfang habe ebenso viele Teile wie Punkte, nämlich unendlich viele; dieselben könnten alle als Grundlinien einer Reihe von gleichschenkligen Dreiecken angesehen werden, welche ihre gemeinsame Spitze im Mittelpunkt hätten und insgesamt den Kreis ausmachten. Aus dieser Bemerkung folgte der Archimedische Satz sofort. In gleicher Weise fasste Keppler den Kegel als aus

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

unendlich vielen Pyramiden, den Cylinder als aus unendlich vielen Prismen etc. bestehend auf. Diese Vorstellung kam darauf hinaus, dass er eine Linie gleichsam aus punktuellen, eine Fläche aus linearen, einen Körper aus flächenähnlichen Elementen zusammengesetzt sein liess.

Archimedes schrieb zwei stereometrische Werke, das eine über die Kugel und den Cylinder und das andere über die Konoide und Sphäroide. Das erse behandelte die Kugel, den Cylinder und den Kegel, das letzte die Körper, welche durch Umdrehung von Kegelschnitten um ihre Axen entstehen; das Rotationshyperboloid mit einer Mantelfläche, welches durch Umdrehung der Hyperbel um die konjugierte Axe ensteht, kam aber in der Schrift nicht vor. Keppler erweiterte im Anhang zum ersten Teil die Zahl dieser Körper, indem er die Kegelschnitte sich um eine beliebige in ihrer Ebene liegende Gerade drehen liess. Dadurch stieg die Anzahl der Körper, die des Archimedes mit eingeschlossen, auf 92. Ein grosser Teil dieser Aufgaben war indessen für den damaligen Stand der Geometrie zu schwierig, und es ist deshalb nicht zu verwundern, dass es Keppler nicht gelang, dieselben zu lösen. In solchen Fällen wandte er Analogien und Wahrscheinlichkeitsschlüsse an, welche ihn jedoch oft irre führten. Unter den im Supplement richtig gelösten Aufgaben sind zwei von besonderem Interesse durch die bemerkenswerte Art der Ausmessung der behandelten Körper. Die erste betrifft den Ring, welcher entsteht, wenn ein Kreis um eine beliebige Gerade, oder eine Ellipse um eine zu ihren Hauptaxen parallele Gerade rotiert. Keppler zerlegte den Körper in unendlich viele Scheiben von möglichst geringer Dicke. Da diese Scheiben nach innen dünner, nach aussen dicker waren als in der Mitte, jedoch so, dass die letzte Dicke das Mittel der beiden ersten war, so schloss er, jede von ihnen wäre gleich einem Cylinder, der die erzeugende Figur als Basis und die mittlere Dicke als Höhe hätte. Die letzte war der unendlich kleine in die Scheibe fallende Bogen, welcher bei der Drehung durch den Mittelpunkt der erzeugenden Figur beschrieben wurde. Deshalb ergab sich der ganze Ring gleich einem Cylinder, welcher die erzeugende Figur als Basis und den Umfang des durch ihren Mittelpunkt beschriebenen Kreises zur Höhe hatte. Zum Schluss bemerkte Keppler, sein Beweis setze nur voraus, die erzeugende Figur liege zu beiden Seiten der Geraden, welche sich durch ihren Mittelpunkt parallel zur Rotationsaxe ziehen lasse, symmetrisch.

In dem zweiten der oben erwähnten Probleme berechnete Keppler vermittelst einer beachtenswürdigen Umformung den Körper, welcher durch Umdrehuug eines Kreisabschnittes um eine Sehne entsteht. Er zeichnete in dem Abschnitte den auf der Sehne senkrechten Durchmesser, konstruierte in dessen in der Peripherie liegendem Endpunkt ein Lot gleich dem Umfang des bei der Drehung durch diesen Punkt beschriebenen Kreises und über dem Kreise einen geraden Cylinder von der Höhe jenes Lotes. Alsdann legte er durch die Sehne und den oberen Endpunkt jenes Lotes eine Ebene. Der dadurch entstandene Cylinderhuf war gleich dem gesuchten Körper. Um dies nachzuweisen, dachte er die Fläche des Abschnittes durch Parallelen zur Sehne in „gleichbreite, möglichst schmale, gleichsam linienförmige“ Teile zerlegt und über denselben die zugehörigen Stücke des Cylinderhufs konstruiert. Da die Höhe eines jeden derselben gleich dem Umfang des Kreises war, welchen seine Basis bei der Drehung des Abschnittes beschrieb, so waren sie gleich den entsprechenden „Cylindermänteln“ des Umdrehungskörpers. War der Kreisabschnitt grösser als der Halbkreis, so errichtete er auf dem zur Begrenzungssehne parallelen Durchmesser und einer zu ihr parallelen und in gleichem Abstand, wie sie, von dem erwähnten Durchmesser stehenden Sehne senkrechte Ebenen und legte durch ihre Schnittlinien mit der Deckfläche des Hufs zu dessen Grundfläche parallele Ebenen. Der über der unteren dieser beiden parallelen Flächen liegende Teil des Hufs war gleich einer Halbkugel vom Radius der erzeugenden Figur und der über der obern liegende gleich dem Körper, der durch Rotation des an der erzeugenden Figur fehlenden Segments um seine Sehne entstanden gedacht werden konnte. Aus dieser Konstruktion ergab sich, falls das Kreissegment grösser war als der Halbkreis, das Volumen des zu berechnenden Rotationskörpers gleich der Summe eines Körpers, welcher durch Umdrehung des kleineren der beiden Segmente, in welche die Begrenzungssehne den ganzen Kreis teilte, um den zu ihr parallelen Durchmesser entstand und des Cylinders, welcher das Segment selbst zur Basis und den Umfang eines Kreises mit einem Radius gleich dem Abstand der Begrenzungssehne vom Mittelpunkt des Kreises zur Höhe hatte. War der Kreisabschnitt kleiner als der Halbkreis, so war der gesuchte körperliche Inhalt gleich der Differenz dieser beiden Körper. Die gleichen Sätze erwies Keppler auch für ein Ellipsensegment, dessen Sehne senkrecht auf einer der Axen stand.

Zwanzig Jahre nach der Kepplerschen Schrift, also 1635, erschien das erste Buch von Guldens Werk über den Schwerpunkt und Cavalieris Geometrie des Unteilbaren. In der Fortsetzung seines Werks, welche 1640—42 erschien, veröffentlichte Gulden die seinen Namen führende aber schon bei Pappus vorkommende Regel, nach welcher jede durch die Rotation einer Linie oder einer Oberfläche gebildete Figur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

das Produkt der erzeugenden Grösse in den Weg ihres Schwerpunkts ist. Einen genügenden Beweis konnte er dafür nicht erbringen, wie ganz erklärlich ist, da dazu die Betrachtung des unendlich Kleinen gehört hätte, wovon er aber nichts wissen wollte. Er tadelte vielmehr Keppler und Cavalieri wegen ihrer wenig strengen Beweise und hielt sich, weil er die neue Methode offenbar nicht recht begriff, mehr an die Weise des Euklid und Archimedes. Ausserdem behauptete der Jesuit, Cavalieri habe seine Methode von Keppler entlehnt. Dagegen konnte sich der dem Orden der Jesuaten angehörende Cavalieri in seinen 1647 erschienenen „mathematischen Übungen" leicht verteidigen. Wenn stets, sagte er, wo irgend welche Ähnlichkeit zwischen den Prinzipien zweier Schriftsteller auftrete, eine geistige Abhängigkeit des späteren folge, so liege ein solcher Verdacht in hohem Masse gegen Gulden vor, da seine Regel nur die Verallgemeinerung eines Kepplerschen (des ersten der beiden vorher besprochenen) Theorems sei. Ferner erwies er die Brauchbarkeit seiner eigenen Methode, indem er einen wirklichen Beweis für die Guldensche Regel lieferte. Übrigens erhielt Cavalieri die erste Idee des Unteilbaren vielleicht von seinem Lehrer Galilei. Dieser hatte die Absicht, über denselben Gegenstand zu schreiben, wie wir aus einem Brief ersehen, den Cavalieri im Jahre 1626 an ihn schrieb. Das von Galilei versprochene Buch ist wegen der Verfolgungen, denen er in seinen letzten Lebensjahren ausgesetzt war, nicht erschienen, aber in den 1638 zu Leiden herausgekommenen „Discorsi" findet sich an mehreren Stellen die Anwendung des Unteilbaren. Er fasste den Kreis als ein regelmässiges Polygon von unendlich vielen Seiten auf und fügte hinzu, die Seiten eines solchen Polygons von begrenzter Seitenzahl seien Grössen und teilbar, die Seiten des Kreises keine Grössen und unteilbar. An einem anderen Orte lesen wir die Bemerkung, nicht 100 oder 1000 Unteilbare machten eine teilbare Grösse aus, aber wohl eine unendliche Zahl.

Im zweiten Teil der Kepplerschen Stereometrie finden sich wiederholt Bemerkungen, welche einen klaren Einblick in das Wesen der Maxima und Minima erkennen lassen und an Fermats Ausgangspunkte erinnern, der dritte Teil dagegen hat kein allgemeines Interesse. Über die erwähnte Frage sagte er: „Ändert man die Dimensionen eines Maximums nach beiden Seiten, so ist die Abnahme des Inhalts im Anfang unmerklich". An einer anderen Stelle heisst es: „Geht man von einer kleineren Grösse zum Maximum und von da wiederum zu einer kleineren Grösse über, so ist innerhalb einer gewissen Grenze eine Änderung nicht bemerkbar". Im Altertum wurden ähnliche Fragen behandelt von Appollonius von Perga. Derselbe stellte im fünften Buch seiner Kegelschnitte eine Reihe von Sätzen zusammen über die längsten und kürzesten Linien, die sich von einem Punkt an den Umfang eines Kegelschnittes ziehen lassen und einige analoge über die konjugierten Durchmesser und den Parameter dieser Curven im siebenten Buch jenes Werks. Ausserdem wären die Sätze zu nennen, welche uns Pappus im fünften Buch seiner mathematischen Sammlungen aufbewahrte. Aber alle einschlagenden Lösungen der griechischen Mathematiker waren vollständig verschieden von den erwähnten Kepplerschen Vorstellungen, welche über die Maxima und Minima gänzlich neue und originale Gedanken enthielten.

7. Die regulären Polygone und Polyeder.

Die Bearbeitung der regulären Polygone und Polyeder findet sich in der Weltharmonie. Das erste Buch jener Schrift behandelt die regelmässigen Vielecke, das zweite die daraus zusammengesetzten Figuren und die regelmässigen und halbregelmässigen Körper. Ausser den Euklidischen besprach Keppler auch die sternförmigen, von ihm Sterne genannten, Vielecke. Die richtige Bezeichnung der Ecken dieser Figuren gab er bereits in der Einleitung zum Prodromus. Daher betrachtete er nur diejenigen Figuren als Sternpolygone, welche sich in einem Zuge zeichnen liessen, so dass er also z. B. das aus zwei gleichseitigen Dreiecken bestehende Sternsechseck nicht berücksichtigte. Er teilte die regulären Vielecke in Klassen ein, indem er als zu derselben Klasse gehörig alle diejenigen ansah, welche eine doppelte, vierfache, achtfache u. s. w. Anzahl von Seiten hatten, als das zu derselben gehörige von kleinster Seitenzahl. Die einzelnen Klassen fingen daher mit dem regelmässigen Dreieck, Viereck, Fünfeck, Siebeneck, Neuneck u. s. w. an. Ferner bemerkte Keppler, dass sich unter den Polygonen von kleinster Seitenzahl das regelmässige Dreieck, Viereck, Fünfeck zeichnen lasse und aus Dreieck und Fünfeck das regelmässige Fünfzehneck. Diese vier Klassen zog er allein in Betracht, da er nur diejenigen regulären Polygone gelten liess, welche sich zeichnen liessen. Für das Siebeneck hatten Cardan und Dürer und für das Neuneck Bruno Konstruktionen gegeben, die natürlich falsch waren. Keppler erkannte dies an der algebraischen Berechnung

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der regelmässigen Siebenecksseite, welche Jost Byrgi auf seine Veranlassung durch eine geschickte Anwendung des Satzes von Ptolemäus auf die Seiten und Diagonalen des regelmässigen Siebenecks gefunden hatte. Diese Lösung des Freundes und mehrjährigen Mitarbeiters von Keppler auf der Sternwarte zu Prag lautete in unserer heutigen algebraischen Bezeichnung:

$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0$$

wo x das Verhältnis der regulären Siebenecksseite zum Radius des umbeschriebenen Kreises bezeichnet. Eine ähnliche Lösung für das Neuneck fand sich in den Manuskripten und ist von Christian Frisch in einer Anmerkung abgedruckt. Keppler bemerkte, dass die kleinste der drei positiven Wurzeln dieser Gleichung die Seiten des regelmässigen Siebenecks und die anderen die der beiden siebeneckigen Sterne geben. Er liess aber diese algebraische Lösung nicht gelten, sondern warf ihr vor, dass sie unbestimmt sei und daher nicht die Vollkommenheit der geometrischen Konstruktion erreiche. Darin irrte er allerdings; es ist ebenso wenig möglich, die Seite eines regelmässigen Polygons zu zeichnen, ohne die Seiten der zugehörigen Sternfiguren mitzukonstruieren, als es möglich ist, die eine ohne die andere zu berechnen. Man erkennt dies aus der Konstruktion für die regelmässige Zehneckseite, welche auch gleichzeitig die Seite des regelmässigen Sternzehnecks ergiebt. Zeichnet man ferner ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die Hypotenuse gleich $r\sqrt{5}$ und die Höhe auf derselben gleich r ist, so sind seine Katheten die Seiten des Fünfecks und des Sternfünfecks, die Höhenabschnitte der Hypotenuse die Seiten des Zehnecks und des Sternzehnecks, welche sich in einen Kreis mit dem Radius r beschreiben lassen. Gegen das Ende des ersten Buchs zeigte Keppler noch, dass die von Pappus, Clavius, Viète vorgeschlagene Teilung eines Winkels in drei, fünf, sieben oder eine andere ungerade Anzahl von Teilen falsch war, wodurch er bestätigte, dass die vier von ihm angegebenen Klassen regelmässiger Vielecke die einzig konstruierbaren wären. Erst durch Gauss ist nachgewiesen, dass sich der Kreis auch noch in weitere gleiche Teile, z. B. in 17, zerlegen lässt.

Im zweiten Buch der Weltharmonie besprach Keppler zuerst die fünf regulären Körper Euklids, dann zwei von ihm erfundene Sternpolyeder, schliesslich die beiden von 12 und 30 Rhomben begrenzten und die 13 angeblich von Archimedes herrührenden halbregulären Körper. Die beiden Sternpolyeder das zwölfeckige und zwanzigeckige Sternzwölfflach sind von ihm erdacht und zuerst beschrieben worden. Nach S. Günther hat der Nürnberger Goldschmied Wenzel Jamitzer in seiner „Perspektive der regelmässigen Körper“ schon vor Keppler ein reguläres Sternpolyeder abgebildet, dasselbe war aber das sterneckige Zwölfflach, gehörte also zu den beiden erst von Poinsot gefundenen regulären Sternpolyedern. Poinsot war der erste Mathematiker, welcher sich nach Keppler wieder mit diesem Gegenstande befasste. Er fand, ohne von Kepplers betreffender Leistung etwas zu wissen, die vier möglichen Sternpolyeder; den Beweis, dass es keine weiteren gebe, lieferte Cauchy. Es verdient bemerkt zu werden, dass dieses entlegene Gebiet, welches Keppler im Dienste seiner Mystik zu erforschen suchte, erst im Anfang unseres Jahrhunderts, als die nach Kepplers Tode erfundenen modernen Methoden der Geometrie und des Infinitesimalkalküls vollständig ausgebaut waren, durch den Begründer der neuen Theorie der Rotation der Körper so zu sagen neu entdeckt wurde.

8. Die Logarithmen.

Seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften war es das Bestreben der Astronomen, die trigonometrischen Tafeln zu vervollkommnen. Während die Sehnentafel des Almagest von $^1/_2{}^0$ zu $^1/_2{}^0$ fortschritt, enthielt schon die Sinustafel des Regiomontan diese Funktion von Minute zu Minute für den Radius 10000000. Zu Anfang des 16. Jahrhunderts waren nach dem Zeugnis Kepplers die besten trigonometrischen Tafeln die von Joachim aus Rhaetien (Rhäticus) angefangenen und von Valentin Otho vollendeten und besonders die von Pitiscus berechneten. Dieser Angabe fügte Keppler hinzu, wenn Jost Byrgi mit seiner Tafel ans Tageslicht käme, werde er die Zahlen viel schärfer geben, und an einer anderen Stelle erzählte er, Byrgi habe zur Sinusrechnung die Dezimalbrüche erdacht. Die erwähnte Tafel erschien indessen, wie Byrgis meiste Arbeiten, nicht im Druck. Jene vollständigeren und genaueren Tafeln erforderten selbstverständlich eine grössere Menge von Rechnung, und es machte sich daher das Bedürfnis geltend, Erleichterung in derselben zu schaffen. Keppler benutzte als solche die abgekürzte Multiplikation und Division, welche der Erfinder, des Messtisches, Johann Prätorius, angegeben hatte, und wusste auch den Fehler dieses Verfahrens richtig zu schätzen. Eine weitere Vereinfachung der trigonometrischen Rechnung war die sogenannte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Prostaphäresis. Dieselbe bestand in einer passenden Umformung trigonometrischer Formeln, durch welche darin vorkommende Produkte in Summen oder Differenzen verwandelt wurden. Die erste Anwendung derselben wurde, von Albategnius abgesehen, durch Tyge Brahe oder Wittich gemacht. Der letztere brachte die erwähnte Methode nach Kassel, wo sie durch Jost Byrgi in geschickter Weise auf weitere Fälle angewandt wurde. Wittich scheint sie nicht selbständig gefunden zu haben; Tyge Brahe beschwerte sich nämlich auch sonst über jenen, der einige Monate auf der Uranienburg in Hveen gewesen war, dass er dort gesehenes als eigene Erfindung an andere mitgeteilt habe. Jost Byrgi hatte aber noch grössere Verdienste um die Vereinfachung der Rechnung; er stellte bereits 1602 eine Logarithmentafel fertig und erdachte somit dieses wichtigste Hilfsmittel der Rechnung zuerst. In der Veröffentlichung der Erfindung aber kam ihm der schottische Baron Napier zuvor, welcher 1614 seine „Beschreibung des bemerkenswerten Kanons der Logarithmen“ herausgab. Diese enthielt nur die Tafel; die Methode, nach welcher sie berechnet wurde, findet sich erst in der 1619 nach dem Tode Napiers durch seinen Sohn herausgegebenen erweiterten Auflage des erwähnten Werks.

Durch die Verbreitung des Napierschen Werkes in Deutschland wurde Byrgi endlich veranlasst, seine Tafel erscheinen zu lassen. Sie kam 1620 zu Prag unter dem Titel „Progresstabul“ heraus, aber ohne den ebenfalls längst fertigen dazu gehörigen „gründlichen Unterricht“. Derselbe wurde neuerdings in der Danziger Stadtbibliothek aufgefunden und 1856 durch Dr. Gieswald veröffentlicht. In der Vorrede „an den treuherzigen Leser“ erzählt Byrgi, dass er zu aller Zeit gesucht habe, Tafeln zu erfinden, welche die üblichen besonderen Tafeln für das Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren und Radizieren überflüssig machten. Diesen Vorteil erreichte er durch die Vergleichung einer geometrischen und einer arithmetischen Reihe. Dieselben korrespondieren in der Weise, dass dem Multiplizieren in der einen, ein Addieren in der andern, ebenso dem Dividieren ein Subtrahieren, dem Potenzieren ein Multiplizieren, dem Radizieren ein Dividieren entspricht. Solche Reihen hatte schon Michael Stifel zusammengestellt, ohne aber weitere Konsequenzen daraus zu ziehen. Die „Arithmetica integra“ Stifels war Byrgi allerdings unbekannt, da er kein Latein verstand; er hatte den Gedanken von Stifel durch die Schriften zweier unbedeutender Mathematiker Simon Jakob und Moritz Zons kennen gelernt. Setzt man in den Reihen:

$$\begin{array}{lllll} a & ab & ab^2 & ab^3 \ldots\ldots\ldots & ab^k \ldots\ldots \\ 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \ldots\ldots\ldots & k\alpha \ldots\ldots \end{array}$$

$a = 10^8$, $b = 1{,}0001$ und $\alpha = 10$, so ergiebt die geometrische die von Byrgi schwarze und die arithmetische die von ihm rote genannten Zahlen. Diese Bezeichnung findet ihre Erklärung darin, dass Byrgi zum Unterschiede die einen mit schwarzen die anderen mit roten Lettern drucken liess. Er gebrauchte jede rote Zahl als Logarithmus der in der Reihe über ihr stehenden schwarzen Zahl. Durch die angegebene Wahl der Zahlen a, b, α erhielt er eine Tafel, welche sich für die fehlenden Werte leicht interpolieren liess. Dieselbe hatte eine andere Einrichtung als die heute üblichen, da sie nach den Logarithmen geordnet war, welche immer um 10 fortschreitend von 0 bis 230270 gingen. Der „gründliche Unterricht“ gab eine vollständige Anweisung für den Gebrauch der Tafel.

Napier berechnete eine Tafel der Logarithmen des Sinus von Minute zu Minute. Seine Erklärung der Logarithmen lautete folgendermassen: „Der Logarithmus eines Sinus ist die Zahl, welche so nahe wie möglich eine Linie angiebt, die gleichförmig zugenommen hat, während die Linie des Sinustotus proportionaliter bis zu jenem Sinus abgenommen hat, wobei beide Bewegungen gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit beginnen“. Unter proportionaliter abnehmen verstand er, dass die in gleichen Zeitabschnitten beschriebenen Segmente zu den Linien, von welchen sie genommen wurden, proportinal wären, oder wie wir sagen würden, dass diese Linien in geometrischer Proportion abnähmen. Setzte er den Sinustotus gleich a und einen beliebigen andern Sinus gleich s, so war die Strecke a—s, welche der Sinustotus zurückgelegt hatte, während er von a bis s abnahm, kleiner als die Strecke, welche der sich gleichförmig bewegende Logarithmus zurücklegte. Es war daher nach Napier

$$\log s > a - s \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1^a)$$

Dies ergab sich daraus, dass die erste Bewegung verzögert, die zweite gleichförmig und die Anfangsgeschwindigkeit dieselbe war. Dachte er sich ferner, die Bewegung hätte schon vor dem Anfangspunkte bestanden, so nahm der Sinus von $\frac{a^2}{s}$ bis a in derselben Zeit ab, in welcher er hinter dem Anfangspunkte von a bis s abnahm, und es ergab sich daher, da jetzt die Geschwindigkeit des Sinus grösser war, als die seines Logarithmus

$$\log s < a\,\frac{a-s}{s} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1^b)$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wählte er dann die beiden Sinus s_1 und s_2 so, dass $\frac{a}{s} = \frac{s_1}{s_2}$ war, so folgte $\log s_2 - \log s_1 = \log s$, und es ergab sich ausserdem, da $\frac{a}{s_1} = \frac{s}{s_2} = \frac{a-s}{s_1-s_2}$ war,

$$a\,\frac{s_1-s_2}{s_2} > \log s_2 - \log s_1 > a\,\frac{s_1-s_2}{s_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2).$$

Hatte Napier einen Logarithmus durch die Gleichungen 1) und 2) zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, so wählte er als seinen wirklichen Wert das arithmetische Mittel derselben. Zunächst setzte er nun den Sinustotus gleich 10000000 und erhielt aus den Gleichungen 1a) und 1b) $1{,}0000001 > \log 9999999 > 1$; er setzte daher $\log 9999999 = 1{,}00000005$. Der genaue Wert auf 15 Dezimalstellen ist 1,000000050000003. Alsdann berechnete Napier eine geometrische Reihe von 101 Gliedern, welche mit den Grössen 10000000 und 9999999 anfing und mit 9999900,000495 schloss. Da jedes Glied um den 10000000 Teil des vorhergehenden kleiner wurde, so liess sich dieselbe durch blosse Subtraktion finden. Der Logarithmus des letzten Gliedes war 100 mal so gross, als der des ersten, folglich war $\log 9999900{,}000495 = 100{,}000005$ und deshalb nach 2) $100{,}000495 < \log 9999900 < \log 100{,}000505$. Daher setzte Napier, indem er wieder das arithmetische Mittel nahm, $\log 9999900 = 100{,}0005$. Ferner berechnete er in ähnlicher Weise, wie vorher, eine zweite geometrische Reihe von 51 Gliedern, deren beide erste 10000000 und 9999900 waren, und deren letztes er gleich 9995001,222927 fand, während es in Wirklichkeit 9995001,224804 hätte sein müssen. Er machte jedenfalls bei den aufeinander folgenden Subtraktionen einen Rechenfehler, der nun auch die folgenden Resultate beeinflusste. So fand er nach 2) $\log 9995000$ gleich 5001,248, welcher gleich 5001,250417 hätte sein sollen. Zuletzt berechnete Napier 69 geometrische Reihen von je 21 Gliedern. Diese Reihen hatten den Quotienten 0,9995 und ihre ersten Glieder waren die 69 Glieder einer geometrischen Reihe, welche mit den Grössen 10000000 und 9900000 begann und mit 5048858,890 schloss. Napier hätte statt der 69 Reihen zu 21 Gliedern auch eine Reihe von 1449 Gliedern berechnen können; er wählte aber das erste, weil die Rechnung dadurch genauer wurde. Aus diesen Reihen fand er in der oben angegebenen Weise die Logarithmen aller Zahlen zwischen 10000000 und 5000000 und zwar den der letzten Zahl gleich 6931469,22. Um die übrigen zu finden, verfuhr er folgendermassen. Er bemerkte: wenn $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ wäre, so wäre $\log \alpha - \log \beta = \log \gamma - \log \delta$, ferner wäre $\log \alpha^n - \log \beta^n = n (\log \alpha - \log \beta)$. Daher ergab sich, da $\log 10000000 = 0$ war, $\log 5000000 = \log 1 - \log 2$, ferner $3 \log 5000000 = \log 1 - \log 8$ und $\log 8000000 = \log 8 - \log 10$, folglich $\log 1 - \log 10 = 3 \log 5000000 + \log 8000000$, wo die beiden letzten Logarithmen bereits berechnet waren. Da $\log 1 - \log 10 = \log 1000000$ war, so war $\log 1000000$ bekannt, und es liessen sich weiter der Reihe nach die Logarithmen von 100000, 10000, 1000, 100, 10, 1 und dann die von 2, 4, 8, 16 etc. finden. Schliesslich fand er alle übrigen, indem er die Zahlen unter 5000000 mit solchen Faktoren multiplizierte, dass die Logarithmen dieser Faktoren und des erhaltenen Produkts bereits berechnet waren.

Wie man aus dem Obigen ersieht, besteht zwischen den Napierschen Logarithmen und den jetzt üblichen eine gewisse Verschiedenheit. Die Napierschen nehmen nämlich mit abnehmender Zahl zu, und es ist bei ihnen $\log 10^7$ nicht $\log 1$ gleich 0. Es liesse sich jedoch fragen, mit welchem der heutigen Logarithmensysteme sie die meiste Ähnlichkeit haben. Früher wurden unsere natürlichen Logarithmen allgemein als Napiersche bezeichnet; neuerdings aber ist wegen der angegebenen Unterschiede und der daraus folgenden Konsequenzen mehrfach behauptet worden, beide Systeme hätten nichts mit einander gemeinsam. Überträgt man, wie es zur Unterstützung dieser Ansicht geschehen ist, unsere Begriffe der Basis und des Moduls, die aber Napier vollständig fremd waren, auf dessen Logarithmen, so ist allerdings der Modul seines Systems — 1, die Basis $e^{-0{,}0000001}$, während diese Grössen im natürlichen System 1 und e heissen. Trotz dieser Unterschiede dürften aber die Napierschen Logarithmen doch als natürliche zu bezeichnen sein. Das Wesentliche des natürlichen Systems ist nicht, dass es die Basis e hat, sondern dass sein Modul gleich 1 ist. Nun war freilich der Modul des Napierschen Systems — 1, nicht 1. Das rührte aber nur daher, dass er seine Logarithmen dem heutigen Gebrauch entgegen mit wachsendem Argument abnehmen liess. Die Napierschen Vorstellungen waren übrigens durchaus allgemein; man kann aus ihnen in einfachster Weise die ganze Theorie der Logarithmen ableiten.

Keppler erkannte sofort den grossen Nutzen der Logarithmen und entschloss sich deshalb, sie für die Rudolfinischen Tafeln zu verwenden. Seine Zeitgenossen waren zum grossen Teil entweder im Gebrauch derselben nicht sicher, oder zweifelten gar, ob ihre Anwendung auch hinreichend zuverlässig sei. Da man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sich hauptsächlich daran stiess, dass Napier von geometrischen Vorstellungen ausging, so suchte Keppler Abhilfe zu schaffen, indem er die Theorie der Logarithmen auf die Betrachtung der Verhältnisse der Zahlen gründete. Durch diese Ableitung wurde das neue Rechnungsmittel ausführlicher entwickelt, als es durch Napier geschehen war. Ein noch grösseres Verdienst um die Logarithmen hat sich Keppler aber durch ihre sofortige Verwendung für die astronomische Rechnung erworben, womit er wesentlich zu ihrer schnellen Verbreitung beitrug. Die von ihm aufgestelle Tafel hatte einen Vorzug vor der Napierschen, sie enthielt die Logarithmen der Zahlen, welche immer um 100,00 fortschritten, von 100,00 bis 100000,00. Damit aber aus der Tafel zugleich die Logarithmen des Sinus entnommen werden konnten, gab er in einer besonderen Spalte die Winkel an, für welche der Sinus gleich der nebenstehenden Zahl war, den Sinustotus gleich 100000,00 gesetzt. Für die astronomische Rechnung fügte er ausserdem zwei Spalten hinzu, welche den Sinus für den Radius 24 und 60 nach der Sexagesimalrechnung enthielten. Vordrucken liess er dieser Tafel die Logarithmen von 0,01 bis 0,09, 0,1 bis 0,9, 1 bis 9 und 10 bis 90. Berechnet wurde die Tafel in der Art, dass er erst die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 1000 suchte und alsdann die Zahlen und die Logarithmen mit 100,00 multiplizierte, um seine Tafel mit den vorhandenen Sinustafeln in Übereinstimmung zu bringen, in denen der Sinustotus entweder gleich 100000 oder gleich 10000000 gewählt war. Die Anweisung für den Gebrauch gab er in einem besondern aus acht Kapiteln bestehenden Supplement. Auch den Rudolfinischen Tafeln gab er eine Logarithmentafel bei, welche speziell für die astronomische Rechnung eingerichtet war. In dieser nahmen die Winkel gleichförmig, nicht wie in der ersten ungleichförmig, zu.

Den Logarithmus erklärte Keppler entsprechend der Bedeutung des Wortes in folgender Art: Das Mass irgend eines Verhältnisses zwischen 1000 und einer kleineren Zahl heisst der Logarithmus der letzteren. Er stellte deshalb vor die Theorie seiner Logarithmen eine solche der Proportionen, bei deren Ableitung er sich an Euklid anschloss. Zunächst bemerkte er, wenn eine Anzahl Grössen derselben Art in irgend welcher Ordnung aufeinander folgten, so wäre das Verhältnis zweier von ihnen aus dem Verhältnis aller Paare von je zwei benachbarten dazwischenliegenden zusammengesetzt. Stand also eine beliebige Anzahl von Grössen in stetiger Proportion, so war das Verhältnis der ersten Grösse zur $(n + 1)^{\text{sten}}$ gleich der n^{ten} Potenz des Verhältnisses je zweier aufeinanderfolgender zu setzen. Alsdann zeigte Keppler, dass die Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder einer stetigen Proportion in demselben Verhältnis, wie sie selbst, ständen. Ordnete er also die Grössen in abnehmender Reihe, so nahmen auch ihre Differenzen ab. Hiess die stetige Proportion $a : b = b : c = c : d$, und war $a > b > c > d$, so war auch $a - b > b - c > c - d$. Waren indessen die Grössen a, b, c nahezu einander gleich, so waren es auch ihre Differenzen. In diesem Fall wählte Keppler $a - b$ als Mass jener Verhältnisse. Galt ferner die stetige Proportion $1000 : a = a : b = b : c = c : d$, und nahm er q als Mass des Verhältnisses $1000 : a$, so folgte das von $1000 : b = 1000^2 : a^2$ gleich 2 q, das von $1000 : c = 1000^3 : a^3$ gleich 3 q, das von $1000 : d = 1000^4 : a^4$ gleich 4 q etc. Nach der obigen Erklärung des Logarithmus war aber das Mass des Verhältnisses $1000 : a$ der Logarithmus von a, das des Verhältnisses $1000 : b$ der Logarithmus von b etc. Daher ergab sich aus $1000 : a = a : b = b : c = c : d$, $\log b = \log (a^2 : 1000) = 2 \log a$, $\log c = \log (a^3 : 1000^2) = 3 \log a$, $\log d = \log (a^4 : 1000^3) = 4 \log a$ etc. Ebenso folgte aus $a : b = c : d$, $\log d = \log b + \log c - \log a$, weil $\frac{1000}{d} = \frac{1000}{b} \cdot \frac{1000}{c} : \frac{1000}{a}$ war.

Bei der Berechnung der Logarithmen ging Keppler von dem Verhältnis $2^{10} : 10^3$ oder $1024 : 1000$ aus und fand dasselbe gleich $1000 : 976,5625$. Um genauer rechnen zu können, nahm er an Stelle von $1000 : 976,5625$ das Verhältnis $100000,00 : 97656,25$. Er bestimmte nun die mittlere geometrische Proportionale zu 100000,00 und 97656,25 gleich 98821,17. Alsdann suchte er diejenige zu 100000,00 und 98821,17 und so fort bis zur 24ten mittleren Proportionale. Die Differenz zwischen dieser letzten und 100000,00 wurde nahezu gleich der Differenz zwischen der 24ten und 23ten. Deshalb wählte er sie als Logarithmus der 24ten mittleren Proportionale. Dieser Logarithmus gab mit 2^{24} multipliziert den Logarithmus von 97656,25 gleich 2371,6526 und $\log 102400 = -2371,6526$. In gleicher Weise verfuhr Keppler mit dem Verhältnis $1000 : 500$ und fand $\log 50000 = 69314,71928$. Ferner erhielt er $2^{10} : 1 = 1000 : \frac{500^{10}}{1000^9}$ und daher $\log 100 = 10 \log 50000 + \log 102400 = 690775,5402$. Bei der letzten Rechnung hatte er einen Fehler gemacht, er gab $\log 100 = 690775,5422$ an. Aus der Proportion $1 : 10 = 10 : 100 = 100 : 1000$ bekam er darauf die Logarithmen von 1000 und 10000 und auf ähnliche Art die von 200, 2000, 20000. Danach ging er zur Bestimmung der Logarithmen der 100 höchsten Zahlen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

von 1000 bis 900 über. Dabei bediente er sich an Stelle des geometrischen des arithmetischen Mittels, weil sich dieselben für jene Verhältnisse wenig von einander unterschieden. Hier und in der Folge waren die so erhaltenen Zahlen und Logarithmen noch mit 100,00 zu multiplizieren. Aus $960 = 15 . 2^6$ berechnete er alsdann den Logarithmus von 15 und die von 30 und 3, aus 990 den von 11, aus 980 den von 7 und so fort den der Primzahlen bis 31. Darauf suchte er die Logarithmen der 95 Primzahlen von 100—900. Nachdem diese gefunden waren, liessen sich die Logarithmen der noch fehlenden Zahlen leicht berechnen. Die so erhaltenen Logarithmen waren mit den Napierschen vollkommen identisch.

Um dieselbe Zeit, wie Kepplers Logarithmentafel, erschien auch die von Briggs, in welcher $\log 1 = 0$ und $\log 10 = 1$ gesetzt war. Diese Idee rührt aber nicht allein von Briggs her; er beabsichtigte zunächst nur $\log (1 : 10) = 1$ zu setzen, also wie bisher die Logarithmen mit den Zahlen abnehmen zu lassen. Als er dies Vorhaben Napier mitteilte, machte dieser ihn darauf aufmerksam, es würde am besten sein, zugleich die Logarithmen mit den Zahlen wachsen zu lassen.

9. Kepplers optische Untersuchungen.

In der Optik hat sich Keppler durch seine Untersuchungen über die Strahlenbrechung, durch die Erklärung des Vorgangs beim Sehen und die Angabe der Konstruktion des nach ihm benannten astronomischen Fernrohrs bekannt gemacht. Ausserdem hat er auch in einer Anzahl anderer optischer Fragen die Bahn gebrochen. So fand er den Hauptsatz der Photometrie. Das Licht wird nach ihm von einem leuchtenden Körper ausgeschleudert, oder es strömt von diesem aus und zwar nach allen Seiten und in geraden Linien. Treffen die einzelnen Lichtstrahlen dabei auf kein Hindernis, so setzen sie ohne Änderung der Intensität ihren Weg bis ins Unbegrenzte fort. Daraus schloss er, die Stärke oder Dichtigkeit, mit welcher die um den Ausgangspunkt der Lichtstrahlen liegenden Kugelflächen beleuchtet würden, ständen im umgekehrten Verhältnis dieser Flächen. Wir pflegen anstatt dessen zu sagen, die Intensität des Lichts nimmt mit dem Quadrate der Entfernung vom Ausgangspunkt ab. Über die Geschwindigkeit des Lichts hatte Keppler dagegen eine irrtümliche Ansicht. Er nahm an, es pflanze sich momentan bis auf jede noch so grosse Entfernung fort. Galilei dachte hierüber richtiger und hat sogar einen Versuch angestellt, um die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen. Sie sollte durch abwechselnde Lichtsignale gemessen werden, welche an zwei eine Meile von einander entfernt liegenden Stationen gegeben wurden. Dieser Versuch war im Prinzip ganz richtig, führte aber wegen der Grösse der zu messenden Geschwindigkeit auch dann, als die Akademie del Cimento ihn in der doppelten Entfernung wiederholen liess, zu keinem Resultat.

Die Kenntnisse, welche man zu Kepplers Zeit über das Brechungsgesetz hatte, waren die nachstehenden. Man wusste, dass ein Lichtstrahl bei seinem Übertritt aus einem dünneren Medium in ein dichteres dem Einfallslot zugebrochen wird. Genauere Messungen des Einfalls- und Brechungswinkels hatte im 2. Jahrhundert unserer Zeitrechnung Claudius Ptolemäus und im 13. Vitellio vorgenommen. Der letztere hatte auch festgestellt, dass die betreffenden Winkel dieselben blieben, ob der Lichtstrahl aus dem schwächer brechenden Medium in das stärker brechende übergehe oder umgekehrt. Keppler war der erste, der es versuchte, eine Beziehung zwischen dem Einfalls- und Brechungswinkel zu finden. Bei seinen Betrachtungen setzte er voraus, der Strahl komme aus dem schwächer lichtbrechenden Medium, der Einfallswinkel wäre also grösser als der Brechungswinkel. Als Mass für die Brechung wählte er die Differenz dieser beiden Winkel. Verglich er sein Brechungsmass mit dem entsprechenden Einfallswinkel, so ergab sich, dass dasselbe in stärkerem Verhältnis wuchs als dieser Winkel. Um dem Unterschied nachzukommen, betrachtete er es als aus zwei Teilen zusammengesetzt: der eine, welchen er das einfache Brechungsmass nannte, war dem Einfallswinkel proportional, der andere gleich dem Produkt des ersten Teils in den um 1 verminderten Sekans des Brechungswinkels. Das wirkliche Brechungsgesetz fand er also nicht; dasselbe entdeckte wenige Jahre später W. Snell. Keppler zeigte noch, wie sich aus einer Beobachung vermittelst seines Brechungsgesetzes für jeden beliebigen Einfallswinkel der Brechungswinkel finden liess. Eine solche Rechnung, deren Details kein Interesse mehr haben und daher übergangen werden können, führte er für das Wasser durch. Die erhaltenen Resultate stimmten mit den Beobachtungen Vitellios, welche allerdings nicht sehr genau waren, in den Grenzen der Beobachtungsfehler überein. Daher sah Keppler sein Brechungsgesetz als richtig an. Bei seiner Untersuchung über die Brechung des Lichts in Linsen vernachlässigte er den zweiten Teil seines Brechungsmasses. Er nahm also in diesem Fall Einfalls- und Brechungswinkel einander

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

proportioniert an. Diese Voraussetzung genügte, wie er aus den Beobachtungen nachwies, vollkommen, da es sich bei dem in Frage stehenden Problem nur um Einfallswinkel unter 30° handelte. Während es Keppler nicht gelang das Brechungsgesetz selber zu finden, glückte es ihm eine von der Brechung abhängige Erscheinung zu erklären. Er entdeckte die totale Reflexion und bestimmte den Grenzwinkel für dieselbe beim Übertritt des Lichts aus Glas in Luft durch Versuche, die er an einem Glaswürfel anstellte, zu 42°.

Für die Ursache der Brechung hielt Keppler die Dichtigkeit des lichtbrechenden Mediums. In einem sehr dichten Medium sollte der gebrochene Strahl nahezu ins Einfallslot fallen und von diesem um so stärker abweichen, je weniger dicht jenes Medium sei. Durch diese Ansicht wurde Keppler in den Stand gesetzt, die Dichtigkeit der Luft mit der des Wassers zu vergleichen. Für einen Einfallswinkel von 80° fand er das einfache Brechungsmass zwischen Luft und Wasser gleich 19° 17′, zwischen Äther und Luft aus seiner später zu besprechenden Refraktionstafel gleich 59″, daher zwischen Äther und Wasser gleich 19° 18′. Die beiden letzten Winkel standen im Verhältnis $1 : 1177^2/_3$. Keppler nahm jedoch nicht dieses, sondern ein anderes daraus abgeleitetes Verhältnis als das der gesuchten Dichtigkeit von Luft und Wasser an, ohne indessen recht zu wissen, ob er sich für die 3., 2. oder 3/2te Potenz desselben entscheiden sollte. Es muss bemerkt werden, dass bereits Cardan aus der Brechung das Gewicht des Wassers im Verhältnis zur Luft bestimmt hatte. Nach ihm sollte Wasser 50mal so schwer sein als Luft. Hätte Keppler das oben angegebene Verhältnis selbst gewählt, so wäre sein Resultat bei weitem genauer gewesen als das Cardansche, ja noch richtiger als das von Galilei durch direkte Abwägung gefundene Verhältnis 1 : 400. Schon Harriot machte Keppler darauf aufmerksam, dass die Brechung nicht im Verhältnis der Dichtigkeit des Mediums zunehme. Er teilte zum Beweise eine Reihe von Versuchen mit, aus welchen sich ergab, dass Stein-, Terpentin- und Olivenöl trotz ihrer geringeren Dichtigkeit ein grösseres lichtbrechendes Vermögen haben als z. B. Wasser. Die Kepplersche Berechnung der Dichtigkeit der Luft bleibt aber immerhin interessant, zumal die Frage nach der Abhängigkeit des Brechungsexponenten von der Dichtigkeit des Mediums auch heute noch eine offene ist.

Claudius Ptolemäus war der erste, welcher die schon vor ihm bekannte atmosphärische Strahlenbrechung im allgemeinen richtig kennzeichnete. Nach ihm verschwand dieselbe im Zenith und nahm von dort bis zum Horizont allmählich zu. Er bestimmte indessen ihre Grösse nicht und brachte sie daher auch bei seinen Beobachtungen nicht in Rechnung. Die erste wirkliche, aber noch sehr unvollkommene Messung der atmosphärischen Strahlenbrechung führte Tyge Brahe aus. Derselbe erhielt die Refraktion für alle Sterne nicht gleich gross. Vielmehr stellte er drei Refraktionstafeln auf, eine für die Strahlen der Sonne, eine für die des Mondes und eine für die der Fixsterne. Die Horizontalrefraktion fand er ziemlich gut für die Sonne zu 34′, für den Mond zu 33′ und für die Fixsterne zu 30′. Diese Refraktionen nahmen nach seinen Bestimmungen mit der Höhe der Himmelskörper in verschiedenem Verhältnis ab. Die Brechung der Strahlen der Fixsterne hörte danach schon bei 20°, die des Mondes bei 45° auf und die der Sonnenstrahlen betrug bei 45°, wo die Tafel schloss, noch 5″. Tyge Brahe hatte angenommen, dass die Luft bis zum Monde reiche und von dort aus allmählich in den Äther übergehe. Er suchte die Ursache der Strahlenbrechung in Dünsten, welche in der Luft, besonders in der Nähe des Erdbodens, suspendiert seien und glaubte, sie sei ausserdem von der Entfernung der Himmelkörper abhängig. Keppler sah die Ursache derselben in dem Übertritt der Strahlen aus dem Äther in die Luft, analog dem Vorgang beim Übertritt der Strahlen aus Luft in Wasser. Die Luft setzte er in ihrer ganzen Ausdehnung gleich dicht voraus und ihre Oberfläche scharf begrenzt. Bei dieser Annahme ergab sich die Strahlenbrechung für alle Sterne gleich gross und ausserdem die Höhe der Atmosphäre bei weitem niedriger, als sie bisher angenommen war. Ja, dieselbe wurde so niedrig, dass Keppler voraussetzen musste, die aus grösseren Höhen stammenden Strahlen der Dämmerung würden von trockenen Dünsten reflektiert, welche über der Atmosphäre gerade so schweben sollten, wie die Wasserdämpfe über dem Meer. Wäre ihm die Höhe der Atmosphäre bekannt gewesen, so hätte es nur der Bestimmung einer Brechung bedurft, um eine Refraktionstafel für jede beliebige Höhe eines Sternes zu berechnen. Um ausserdem diese unbekannte Höhe festzustellen, musste er zwei Brechungen zu Hilfe nehmen. Zunächst versuchte er seiner Rechnung die Brahesche Tafel für die Refraktion der Sonne zu Grunde zu legen, kam aber nicht zum Ziel. Den Grund erkannte er darin, dass Tyge Brahe seine Tafel aus Beobachtungen gewonnen hatte, welche zu verschiedenen Zeiten angestellt waren. Solche Beobachtungen sollten nicht unmittelbar mit einander vergleichbar sein, da die Höhe und Dichte der Atmosphäre täglich wechsele, und deshalb die Refraktion gleichzeitig sich ändere. Keppler wies darauf hin, man erkenne schon an den Differenzen der Refraktionen in jener Tafel, dass ihre Angaben nicht in Einklang seien. Er musste sich daher nach anderen Beobachtungen umsehen und fand dieselben in

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

9 Positionsbestimmungen der Sonne von 0° 35′ bis 3° 50′ Höhe, welche Tyge Brahe am 16. Januar 1587 von 3^h 26^m bis 3^h 58^m auf Hveen gemacht hatte. Aus der Vergleichung derselben mit den wahren Orten der Sonne, welche er aus Tyge Brahes Progymnasmata nahm, fand er die gesuchten Refraktionen, und zwar für die kleinste und grösste Höhe zu 31′ 10″ und 14′ 22″. Nun setzte er für die kleinste Höhe 0° 35′ den Brechungswinkel in der Luft gleich 87° 30′ voraus, wodurch der Einfallswinkel im Äther gleich 88° 1′ 10″ wurde. Dividierte er ferner die ganze Refraktion 31′ 10″ durch den Sekans von 87° 30′, so ergab sich nach seinem vorher besprochenen Brechungsgesetz die einfache Refraktion für 88° 1′ 10″ gleich $82^1/_2$″, also für 1° gleich $56^1/_2$‴. Alsdann fand er den Radius der Erde gleich 1 gesetzt, die Höhe der Atmosphäre gleich 0,0009. Nach diesen beiden Bestimmungen liess sich nun für die Höhe 3° 50′ die Refraktion berechnen. Da sich dieselbe noch einmal so gross ergab, als sie in Wirklichkeit sein sollte, so war der Brechungswinkel 87° 30′ für die Höhe 0° 35′ zu klein genommen. Keppler nahm darauf diesen Brechungswinkel in der Luft zu 89° an und fand durch ähnliche Rechnungen wie vorher die einfache Refraktion für 1° gleich 22‴ und die Höhe der Atmosphäre gleich 0,0001005. Für die Höhe von 3° 50′ ergab sich hier die Refraktion nur wenig mehr als halb so gross, wie sie sein sollte. Da der Brechungswinkel für 0° 35′ Höhe diesmal zu gross war, musste er zwischen 87° 30′ und 89° liegen. Keppler wählte ihn gleich 88° und eine der früheren analoge Rechnung zeigte, dass diese Annahme, welche 44‴ als einfache Refraktion für 1° ergab, hinreichend genau mit der beobachteten Berechnung für die Höhe 3° 50′ übereinstimmte. Da die einfache Brechung so bestimmt war, liess sich nun für jeden Einfallswinkel im Äther zunächst die einfache Brechung und dann durch Multiplikation mit dem Sekans des Brechungswinkels die gesamte Refraktion berechnen. Dabei wurde, weil der Brechungswinkel noch nicht bekannt war, derselbe näherungsweise dadurch gefunden, dass die Brechung für den um 1° kleineren Einfallswinkel von dem neuen abgezogen wurde. Multiplizierte Keppler alsdann den Sekans des näherungsweise erhaltenen Brechungswinkels mit der einfachen, so bekam er die gesamte Refraktion. Ergab sich diese sehr verschieden von der vorhergehenden, so wurde die Operation je nachdem 2 mal, 3 mal etc. wiederholt.

Die von Keppler berechnete Tafel war für seine Zeit recht genau, die grössten Fehler betrugen kaum 1′, lagen also vollständig innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. Bei der Durchführung der dritten sich als richtig erweisenden Voraussetzung kam die Höhe der Atmosphäre, den Radius des Erdkörpers gleich 1 gesetzt, gleich 0,0005578 heraus. Wenn Keppler daher den Erdradius, wie die Geographen seiner Zeit allgemein annahmen, gleich 860 deutschen Meilen setzte, so war die Höhe der Atmosphäre gleich einer halben deutschen Meile, reichte also nur gerade bis an die Gipfel der höchsten Berge. Zu erwähnen ist noch, dass der ältere Cassini mehr als ein halbes Jahrhundert später nach den Kepplerschen Prinzipien, ohne ihren Urheber zu nennen, ebenfalls eine Refraktionstafel berechnete. Der einzige Unterschied bestand darin, dass er seiner Rechnung das Snellsche Brechungsgesetz zu Grunde legte.

Noch glücklicher wie in der Theorie der Brechung des Lichts war Keppler in der Theorie des Sehens. Seine grossen Verdienste in der Erklärung dieses Vorganges treten deutlich hervor, wenn man die Leistungen seiner Vorgänger dagegen hält. Die Griechen hatten vom Sehen eine sehr unvollkommene Vorstellung. Sie glaubten, es gehe von dem Auge ein Strahl aus, der den gesehenen Gegenstand gleichsam betaste und dadurch zum Bewusstsein bringe; bisweilen fand sich die Ansicht, dass die Gegenstände ebenfalls Strahlen aussenden, welche sich mit den Augenstrahlen vermischen. Richtiger dachten darüber die modernen Physiker; sie liessen die Strahlen von jedem leuchtenden Punkt nach allen Seiten ausgehen, unter diesen jedoch nur einen ins Auge eintreten. Maurolico machte ferner die wichtige Entdeckung, dass die Krystalllinse dazu diene, die Strahlen im Auge zu brechen, aber er wusste nicht, dass in demselben ein förmliches Bild der gesehenen Körper entstehe. Porta beschrieb die dunkele Kammer und verglich den Vorgang des Sehens mit dem Zustandekommen der Bilder in derselben. Die Pupille sollte der Öffnung oder Linse im Fensterladen, die Krystalllinse der Wand entsprechen, auf welcher sich in der dunkeln Kammer die Bilder darstellen. Dieser Vergleich war gut gewählt, aber unglücklich durchgeführt. Porta blieb offenbar hinter seinem Vorgänger zurück, da er den Zweck der Linse nicht richtig erkannte. Zutreffend war indessen seine Bemerkung, die Pupille verengere sich im Hellen und erweiterte sich im Dunkeln. Für die Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit und ihre Abhilfe durch Brillengläser hatten Maurolico wie Porta keine hinreichende Erklärung.

Diese Anschauungen überholte Keppler in seiner Auseinandersetzung über das Sehen bei weitem. Zunächst beschrieb er nach den Anatomen Plater und Jessen den Bau des Auges und setzte alsdann die Wirkung seiner einzelnen Teile auseinander. Er gab an, es trete von jedem einzelnen Punkte des gesehenen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Gegenstandes aus ein Strahlenkegel mit dem Punkt als Spitze in das Auge ein. Dieser Lichtkegel wird nach ihm durch die Hornhaut gebrochen, dann durch die Pupille in das Innere des Auges eingelassen und durch die Krystalllinse abermals so gebrochen, dass die Strahlen sich wieder in einem Punkte auf der Netzhaut vereinigen. Weiter zeigte er, dass alle diese Vereinigungspunkte auf der Netzhaut ein umgekehrtes verkleinertes Bild darstellen. Weshalb wir die Gegenstände aufrecht sehen, suchte er in folgender Art zu erklären. Er meinte, der Lichtreiz beim Sehen werde als ein Stoss empfunden, und deshalb müsse jeder gesehene Punkt seinem Bildpunkt auf der Netzhaut gerade gegenüber liegen. Wie die Bilder auf der Netzhaut zum Bewusstsein kämen, untersuchte er nicht; darüber wollte er die Physiologen entscheiden lassen. Ferner bemerkte er auch, dass auf der Netzhaut nur von Gegenständen in einer ganz bestimmten Entfernung ein deutliches Bild entstehen könne, falls das Auge nicht die Fähigkeit habe, sich für verschiedene Entfernungen zu akkommodieren. Sonst würde, wenn der Gegenstand sich nähere, das Bild hinter die Netzhaut fallen, wenn er sich entferne, davor. Keppler nahm an, im ersten Fall verlängere sich das Auge, im zweiten verkürze es sich; diese Veränderungen der Länge des Auges liess er durch das Zusammenziehen des Ciliarkörpers entstehen. Obgleich die Akkommodation des Auges in dieser Weise nicht stattfindet, befähigte ihn seine Vorstellung doch, die Wirkung der Brillen bei Kurz- und Weitsichtigkeit aufzuklären. Über diese Frage hatte er, wie er selbst erzählt, drei Jahre nachgedacht. Er führte richtig aus, dass die Konvexgläser die Strahlen so brechen, als ob die von einem naheliegenden Punkt ausgehenden Strahlen von einem weiterliegenden herkommen. Dadurch ergab sich, wie ein Weitsichtiger vermittelst eines Konvexglases in der Nähe sehen kann, während ohne dieses Glas die Strahlen sich erst hinter der Netzhaut schneiden. In ähnlicher Weise liess er sich über konkave Gläser und ihren Gebrauch durch Kurzsichtige aus.

Keppler hat auch zuerst auf die Irradiation des Lichts aufmerksam gemacht. Veranlasst wurde er dazu durch die Beobachtung Tyge Brahes, dass die dunkle Scheibe des Mondes bei einer Sonnenfinsternis kleiner erscheine, als die helle des Vollmondes und durch seine eigene, dass bei einer Mondfinsternis die erleuchtete Sichel einen grösseren Durchmesser habe, als der verfinsterte Teil der Mondscheibe. Er deutete die Erscheinung richtig als eine optische Täuschung, irrte aber in der Erklärung derselben. Für weit entfernte Gegenstände, glaubte er, konvergierten die von einem Punkte herkommenden Strahlen bereits vor der Netzhaut, und es bilde sich daher jeder Punkt als kleiner Kreis auf ihr ab. Ob dieser Kreis voll, oder nur in einem mehr oder weniger grossen centralen Teil wahrgenommen werde, sollte von der Empfindsamkeit der Netzhaut abhängen. Infolgedessen war nach ihm die Grösse der Irradiation nicht nur von der Beschaffenheit der Augen abhängig, sondern sie konnte für gewisse Personen vollkommen unmerklich werden. Diese Folgerungen entsprachen den Erscheinungen nicht, da sie aus falschen Voraussetzungen abgeleitet waren. Es ist durchaus nicht richtig, dass die Bilder entfernter Gegenstände vor der Netzhaut entstehen, da das Auge sich auch in diesem Fall akkommodiert. Ebenso wenig ist das Phänomen auf ferne Gegenstände oder gewisse Personen beschränkt.

Für die Brechung des Lichts in Linsen setzte Keppler, wie ich schon erzählte, das Verhältnis des Einfalls- und Brechungswinkels konstant. Beim Übergang aus Luft in Glas war nach seiner Bestimmung dieses Brechungsverhältnis gleich 3 : 2. Daraus fand er dann die Hauptbrennweite einer plankonvexen Linse und die einer bikonvexen, wenn die beiden brechenden Flächen denselben Radius hatten. Seine Ableitung gab die der ersten gleich dem Durchmesser, die der andern gleich dem Radius der konvexen Fläche. Für eine bikonvexe Linse mit brechenden Flächen von verschiedenem Radius gab er dieselbe nicht an, zeigte aber, sie sei kleiner als der grössere und grösser als der kleinere Radius jener Flächen. Eine genaue Bestimmung für diesen Fall lieferte Cavalieri. Er fand, wenn man mit d und δ die Durchmesser der brechenden Flächen und mit f die Hauptbrennweite der Linse bezeichnet, zur Berechnung von f die Proportion $(d + \delta) : d = \delta : f$. Die Vereinigungsweite nicht paralleler Strahlen gab erst Barrow; Keppler fand dieselbe nur in einem besonderen Falle. Er bemerkte nämlich, dass die von einem Punkt in der doppelten Hauptbrennweite eines Konvexglases ausgehenden Strahlen sich in derselben Entfernung hinter dem Glase vereinigen. Dadurch wurde es ihm möglich, die Lage der Bilder für Konvexlinsen wenigstens im allgemeinen anzugeben und zu entscheiden, ob dieselben reell oder virtuell, verkehrt oder aufrecht seien. Von der Grösse des Bildes endlich wies er den bekannten Satz nach, dass sie sich zur Grösse des Gegenstandes verhalte, wie ihre beiderseitige Entfernung von der Linse. Die entsprechenden Sätze bewies er ebenso für Hohlgläser. Durch diese Ableitungen war Keppler instand gesetzt, die Wirkung zweier oder mehrerer Linsen im Fernrohr zu erklären. Er gab verschiedene Konstruktionen desselben an, ohne jemals ein solches herstellen zu lassen. Zuerst beschrieb er das aus zwei Bikonvexlinsen bestehende,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

welches später das astronomische oder Kepplersche genannt wurde. Dasselbe hat vor dem Galileischen den Vorzug eines grösseren Gesichtsfeldes und den weiteren, dass es durch Anbringung eines Fadenkreuzes zu Messungen brauchbar gemacht werden kann. Von dem letzteren hatte Keppler allerdings keine Ahnung; das Mikrometer wurde zum ersten Male 1640 von Gascoigne angewendet. Da das Fernrohr mit zwei konvexen Linsen für die Betrachtung von Gegenständen an der Erdoberfläche wegen seiner umgekehrten Bilder unbequem ist, gab Keppler noch eine zweite aus drei Linsen bestehende Konstruktion an, durch welche jenem Übelstande abgeholfen werden konnte. Beide Konstruktionen wurden durch den Pater Scheiner ausgeführt. Die zweite bewährte sich aber nicht und wurde später von dem Kapuziner Schyrl durch das aus vier Konvexlinsen bestehende sogenannte terrestrische Fernrohr ersetzt. Ausser diesen beiden hat Keppler noch zwei andere beschrieben, zu denen er auch konkave Linsen anwendete. An diese reiche Zahl von optischen Untersuchungen lassen sich noch einige andere reihen. So bemerkte er die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei Linsen und die ovale Form von Sonne und Mond in der Nähe des Horizontes. Diese Leistungen sind sämtlich original. Von denen seiner Vorgänger konnte Kepper kaum einigen Nutzen ziehen, da ihm von früheren Arbeiten über Optik nur das Buch des Vitellio bekannt war. Nach dem letzten benannte er seine erste optische Abhandlung „Paralipomena in Vitellionem". Dieser bescheidene Titel entspricht jedoch sehr wenig dem reichen Inhalt der Schrift.

---

10. Die Gesetze der Planetenbewegung.

Keppler hatte bei seiner Untersuchung der Bewegung des Planeten Mars stets auf die älteren astronomischen Vorstellungen Rücksicht zu nehmen. Darum dürfte es für das Verständnis des Folgenden nötig sein, die Bahnbestimmung der Planeten durch seine Vorgänger wenigstens in den Hauptzügen vorzuführen. Unter den älteren griechischen Astronomen hatten Hiketas und Ekphantos aus Syrakus die Axendrehung der Erde gelehrt und Aristarch von Samos behauptet, die Erde bewege sich mit den übrigen Planeten längs des Tierkreises um die Sonne. Der Gedanke des Aristarch blieb aber auf die Weiterbildung der Astronomie ohne Einfluss, da er erst in die Zeit fiel, als die schöpferischen Antriebe des griechischen Geistes bereits zurücktraten. In der Foge nahm man wie früher an, die Wandelsterne führten ihre Eigenbewegung um die im Centrum des Weltalls feststehende Erde aus. Diese Bewegungen, dachte man sich, gingen wie der tägliche Lauf der Gestirne in zur Erde konzentrischen Kreisen und mit gleichbleibender Geschwindigkeit vor sich. Erst Hipparch, der grösste praktische Astronom der Griechen, zeigte, die konzentrischen Bahnen der Irrsterne seien nicht haltbar und ersetzte sie für die Sonne und den Mond durch excentrische Kreise. Die zweifache Ungleichheit der Planeten dagegen, welche ihrem Wesen nach schon vor ihm gekennzeichnet und durch eine Vereinigung von mehreren Kreisen erklärt war, stellte er nicht geometrisch dar, er begnügte sich, die siderischen und synodischen Umläufe jener Himmelskörper mit grosser Genauigkeit zu bestimmen. Von dem Versuch, jene Bahnen festzustellen, hielt ihn wohl die Scheu ab, die geometrischen Erklärungsmittel noch weiter zu häufen. Sein Nachfolger Claudius Ptolemäus hatte in dieser Beziehung weniger Bedenken; er kombinierte die bereits früher gefundenen Hilfsmittel, um den Erscheinungen gerecht zu werden. Die zweite Ungleichheit, welche sich in den Stillständen und Rückgängen der Planeten bemerkbar macht, und von ihrem Stande zur Sonne abhängt, erklärte er durch die gleichförmige Bewegung der Planeten im Epicykel während eines synodischen Umlaufs. Liess er den Mittelpunkt des Epicykels gleichförmig auf einem excentrischen Kreise innerhalb des siderischen Umlaufs sich bewegen, so stellte er die erste Ungleichheit wohl in den Apsiden und Quadranten aber nicht in den Oktanten richtig dar. Diese Abweichung von den Beobachtungen schaffte er fort, indem er den Epicykel auf einen zweiten excentrischen Kreis setzte, aber nach wie vor um den Mittelpunkt des ersten sich gleichförmig bewegen liess Damit verliess er, ohne sich dessen bewusst zu werden und ganz gegen seine Absicht, die gleichförmige Kreisbewegung. Der zweite excentrische Kreis, der sogenannte Deferens, hatte denselben Radius wie der erste oder Äquans. Ptolemäus setzte den Mittelpunkt des Deferens mitten zwischen die Erde und das Punktum Äquans auf die durch diese Punkte gehende Apsidenlinie. Diese Lage des Mittelpunktes der Bahn spielte später bei den Kepplerschen Untersuchungen unter dem Namen der Halbierung der Excentricität eine grosse Rolle. Vom Apogeum aus beschrieb der Mittelpunkt des Epicykels um die drei Punkte, Centrum des Äquans, der Bahn und der Erde verschieden grosse Winkel, Der erste wuchs der Bewegungszeit proportional, diente deshalb als Mass derselben und hiess die mittlere.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der zweite die excentrische, der dritte die wahre Anomalie des Planeten. Da es sich im folgenden allein um die oberen Planeten handeln wird, stellen wir nur für diese die Verbindung der Bewegung des Planeten mit der der Sonne dar. Sie wurden so in Zusammenhang gebracht, dass der Radius vom Mittelpunkt des Epicykels zum Planeten dem Radius von der Sonne nach dem Mittelpunkt ihrer Bahn parallel war. Infolgedessen gaben die Planeten die zweite Ungleichheit nicht auf, wenn sie mit der Sonne, sondern wenn sie mit demjenigen Punkte in Konjunktion oder Opposition waren, in welchem sich die Sonne befinden würde, falls sie gleichförmig um die Erde liefe, ihre Bahn also nicht excentrisch wäre.

Bei Coppernicus trat die Erde in die Reihe der Planeten ein und bewegte sich mit ihnen um die Sonne. Daher ergab sich die zweite Ungleichheit als Abbild der Erdbewegung, und es blieb nur die erste zu erklären übrig. Das Axiom von der gleichförmigen Kreisbewegung der Himmelskörper behielt Coppernicus bei und führte es sogar noch strenger durch als Ptolemäus. Er bediente sich nämlich als Ersatz für den Äquans des Epicykels. Die Planetentheorie war nach ihm folgende. Der Planet bewegte sich in einem Epicykel, dessen Radius gleich dem dritten Teil der Excentricität der Planetenbahn war, und beschrieb denselben rechtläufig in derselben Zeit, wie der Epicykel den excentrischen Kreis. Der letztere wurde von ihm aber nicht auf die Sonne selbst, sondern auf ihren mittleren Ort, d. h. den Mittelpunkt der Erdbahn bezogen. Hierdurch beging er offenbar eine Inkonsequenz, zu der er durch die Herübernahme der Rechnungsmittel des Ptolemäus veranlasst wurde.

Um die Breite der Planten richtig erklären zu können, hätte Ptolemäus die Ebene des Epicykels der Ekliptik parallel legen müssen. Anstatt dessen nahm er sie gegen dieselbe geneigt an und verwickelte dadurch seine Theorie unnötigerweise. Coppernicus bemerkte nun wohl, dass die Änderung in der Breite durch die Bewegung der Erde beeinflusst werde. Daraus allein vermochte er sie aber nicht zu erklären, weil er die viel zu grossen Zahlen des Ptolemäus verwendete. Er half sich durch Librationen der Planetenbahnen, welche merkwürdigerweise von der Bewegung der Erde abhängen mussten. Diese Schwankungen und die Voraussetzung des Coppernicus, die Planetenbahnen gingen durch den mittleren Ort der Sonne, betrachtete Keppler von Anfang an als höchst unwahrscheinlich. Es schien ihm schon im „Prodromus“ eine unmittelbare Folge des heliocentrischen Systems zu sein, dass die Planeten sich in Ebenen bewegten, welche nebst den Apsidenlinien ihrer Bahnen durch die Sonne selbst gingen und gegen die Ekliptik eine unveränderliche Neigung hätten. Als er nach Prag kam, arbeitete Christian Severin gerade an der Theorie des Mars. Keppler hielt dies für ein grosses Glück, da er dadurch gleich auf den Planeten fiel, der sich für die Untersuchung der Planetenbahnen am besten eignete. Der Mars hat nämlich eine grosse Excentricität, und ausserdem ist für ihn am leichtesten eine hinreichende Zahl von Beobachtungen in allen Teilen seiner Bahn zu beschaffen. Als Keppler die von Severin angestellten Rechnungen einsah, fand er, dass Tyge Brahe ebenso wie Coppernicus die Apsidenlinie durch den mittleren Ort der Sonne legte. Brahe machte dafür geltend, es sei ihm vollständig geglückt, die erste Ungleichheit des Mars durch die Beziehung desselben auf den mittleren Ort der Sonne zu erklären. Auf diese Bemerknng antwortete Keppler, er hoffe dasselbe eben so gut durch seine Ansicht zu erreichen. Die zweite Ungleichheit, fügte er hinzu, werde entscheiden, welche von beiden Annahmen die richtige sei. Er begann sofort, die Sache zu untersuchen und fand, seine Theorie stelle in der That, wenn nur das Punktum Äquans nicht verlegt werde, die erste Ungleichheit in derselben Weise dar wie die frühere. Für die zweite Ungleichheit aber ergab sich ein Unterschied von mehr als ein 1^0. Im Verlauf der Untersuchung bemerkte Keppler, dass Tyge Brahe die Örter des Mars in der Ekliptik nicht richtig auf die Örter in seiner Bahn reduziert hatte. Da durch dieses Versehen für die erste Ungleichheit ein Fehler entstehen konnte, der viel grösser war, als die Änderungen, welche infolge der Verlegung der Marsbahn durch die Sonne eintreten konnten, so liess sich Keppler nicht mehr abhalten, die Elemente der Marsbahn auf Grund seiner Ideen zu bestimmen. Zunächst suchte er die Knoten der Marsbahn. Er fand dieselben aus zwei aufeinanderfolgenden Positionen, in welchen der Mars einmal südlich, einmal nördlich von der Ekliptik gestanden hatte, indem er daraus die Zeit seines Durchgangs durch den Knoten und dann seinen Ort in der noch kreisförmig vorausgesetzten Bahn suchte. Es ergab sich der aufsteigende Knoten in $1^s\ 16^1/_3{}^0$, der absteigende in $7^s\ 16^1/_3{}^0$, der nördliche Limes also in $4^s\ 16^1/_3{}^0$ und der südliche in $10^s\ 16^1/_3{}^0$. Alsdann bestimmte Keppler die Neigung der Marsbahn gegen die Ekliptik auf drei verschiedene Arten. Er bemerkte zunächst, dieselbe könne aus einer Beobachtung gefunden werden, bei welcher der Mars gleich weit von Sonne und Erde abstehe. Dann erscheine nämlich der Mars von der Sonne oder von der Erde aus gesehen unter derselben Breite. Messe man also, wenn der Mars gleichzeitig im Limes stehe, seine geocentrische Breite, so habe man unmittelbar die Neigung seiner Bahn. Eine Beobachtung, die beide Bedingungen erfüllte, hatte er nicht zur Verfügung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dagegen fand er zwei solche, in welchen der Mars nahezu im Limes stand, aber das eine Mal von der Erde weiter entfernt war als von der Sonne und das andere Mal ihr näher stand. Im ersten Fall fand er die geocentrische Breite 1° 36′ 45″, im zweiten 1° 53′ 30″. Da die Neigung zwischen beiden liegen musste, schätzte er sie zu 1° 50′. Die zweite Methode setzte voraus, die Erde stände in der Knotenlinie der Marsbahn und der Mars wäre in der Quadratur. Unter dieser Bedingung war seine geocentrische Breite unmittelbar gleich der Neigung seiner Bahn. Stand er nicht in der Quadratur, die Erde aber in der Knotenlinie, so liess sich die Neigung durch eine einfache trigonometrische Rechnung aus der beobachteten Breite berechnen. Es ist nämlich, wenn n die Neigung, b die beobachtete geocentrische Breite und e den Marsabstand in der Ekliptik vom Knoten bezeichnet, $\operatorname{tg} n = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin e}$. Keppler wählte für seine Berechnung statt der Tangenten die Winkel selbst. Dieses Verfahren war wegen der Kleinheit der Winkel hinreichend genau. Die zweite Methode ergab dasselbe Resultat für die Neigung der Marsbahn, wie die erste, nämlich 1° 50′. Die dritte Methode erforderte die Kenntnis des Verhältnisses der Radien der Erd- und Marsbahn. In diesem Fall liess sich aus jeder Oppositionsbestimmung oder, wie man damals sagte, aus jeder akronychischen Beobachtung die fragliche Neigung ableiten. In der That bildeten bei derselben Sonne, Erde und Mars ein Dreieck, in welchem jene Radien und ausserdem der dem Marsradius gegenüberliegende Winkel als Supplement der geocentrischen Breite des Mars bekannt war. Zunächst ergab sich die heliocentrische Breite der betreffenden Position, und aus dieser konnte, ebenso wie bei der verallgemeinerten zweiten Methode, die Breite abgeleitet werden. Da er auch dieses Mal dieselbe Neigung fand wie vorher, so hielt sich Keppler für berechtigt, die Planetenbahnen als fest anzusehen. Er hatte also den wichtigen Nachweis geliefert, dass seine Grundvorstellung zutreffend war.

Nach diesem ersten Erfolg machte sich Keppler an die Aufgabe, die Marsbahn zu bestimmen. Dazu benutzte er eine Anzahl Oppositionsbestimmungen des Mars, da der Planet in diesen von der zweiten Ungleichheit, d. h. von dem Stande der Erde, unabhängig ist. Solcher Beobachtungen hatte er im ganzen 12 zur Verfügung. Die ersten zehn waren von Tyge Brahe während der Jahre 1580—1600 angestellt, die beiden letzten von ihm selbst 1602 und 1604. Diese Beobachtungen führte Keppler, um sie mit seinen Vorstellungen in Einklang zu bringen, auf den wahren Sonnenort zurück. Bei der Ausführung der Aufgabe ging er von der Annahme aus, der Mars bewege sich in einem excentrischen Kreise, dessen Apsidenlinie, wie es seine bereits erwiesene Grundanschauung erforderte, durch die Sonne gehe, und es gebe auf derselben ein besonderes Punktum Äquans, um welches der Planet sich gleichförmig bewege. Diese Voraussetzung nannte er die stellvertretende Hypothese. Der gesuchte Kreis hätte sich aus drei Beobachtungen bestimmen lassen. Da Keppler aber gleichzeitig die Lage des Mittelpunkts der Marsbahn zwischen Sonne und Punktum Äquans mitberechnen wollte, um zu untersuchen, ob Ptolemäus recht hatte, wenn er denselben in seiner Theorie in die Mitte zwischen Erde und Punktum Äquans legte, so wählte er vier Beobachtungen zu der fraglichen Feststellung. Die Apsidenlinie war nach den früheren Bestimmungen angenähert gegeben. Auf ihr wählte er zunächst das Punktum Äquans so, dass sich die Visierlinien von diesem und von der Sonne nach dem Mars in vier auf einem Kreise liegenden Punkten schnitten. Alsdann war der Mittelpunkt dieses Kreises zu bestimmen. Lag derselbe, wie es sein musste, auf der Apsidenlinie, so war endlich zu prüfen, ob der so berechnete Kreis die übrigen acht Beobachtungen mit hinreichender Genauigkeit darstelle. Diese Rechnung konnte Keppler nur auf indirektem Wege ausführen; er hatte sie 70mal zu machen, ehe er alles in Ordnung brachte. Aber er hatte dadurch auch eine Kreisbahn gefunden, die excentrisch um die Sonne laufend, die andern akronychischen Beobachtungen bis auf 2′ 12″, d. h. bis auf die unvermeidlichen Beobachtungsfehler darstellte. In diesem Kreise lag für die Epoche 1587 das Aphel in 4ˢ 28° 48′ 35″ das Perihel also in 10ˢ 28° 48′ 35″. Ferner fand er, den Radius der Marsbahn gleich 1 gesetzt, die Entfernung der Sonne und des Mittelpunkts der Bahn 0,11332 und die Entfernung dieses Mittelpunkts vom Punktum Äquans 0,07232. Trotz der oben erwähnten Übereinstimmung von 2′ 12″ war die stellvertretende Hypothese falsch. Keppler erkannte dies aus der direkten Bestimmung der Excentricität durch die Messung der Marsentfernung von der Sonne im Aphel und Perihel. Dieselbe ergab sich für eine akronychische Beobachtung des Mars in der Nähe jener Punkte aus dem Dreieck Sonne, Erde, Mars, vorausgesetzt, dass die Entfernung Sonne — Erde bekannt war. In jenem Dreieck war nämlich ein Winkel gleich der heliocentrischen Breite, welche sich leicht aus der Neigung der Bahn ausrechnen liess, und ein anderer gleich dem Supplement der geocentrischen Breite. Nahm er nun den Radius Vektor der Erdbahn nach Tyge Brahes oder nach eigener Rechnung, so fand er die Apheldistanz des Mars gleich 1,6315 oder 1,6735 und die Periheldistanz gleich 1,3900 und 1,3708, den Radius der Erdbahn gleich 1 gesetzt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergab sich die Excentricität, welche gleich der halben Differenz jener Distanzen ist, gleich 0,12075 oder 0,15135. Bezog er diese Excentricität auf den Radius der Marsbahn als Einheit, so fand sie sich gleich 0,08000 oder 0,09943. Da sie vorher, sehr verschieden von dem jetzigen Resultat, gleich 0,11332 gefunden wurde, so musste jene Rechnung von irgend welcher falschen Voraussetzung ausgegangen sein. Die ihr zu Grunde liegende Annahme war aber, dass die Bahn des Mars ein Kreis sei, und dass der Planet um einen Punkt in seiner Apsidenlinie in gleichen Zeiten gleiche Winkel beschreibe. Es war daher eine von diesen Annahmen falsch, oder auch alle beide. Um sich davon desto sicherer zu überzeugen, stellte Keppler noch eine weitere Untersuchung an. Er bemerkte, die zuletzt bestimmte Excentricität wäre etwa die Hälfte der vorher gefundenen zusammengesetzten 0,11332 + 0,07232 = 0,18564. Daher fragte er sich, ob nicht am Ende doch Ptolemäus mit der Bisektion der zusammengesetzten Excentricität recht gehabt habe. Verlegte er aber demgemäss den Mittelpunkt der Bahn, so ergaben die berechneten Örter des Planeten gegen die beobachteten einen Fehler bis zu 8′ und sogar bis zu 9′, der viermal so gross war, als die Beobachtungsfehler. Bei der Genauigkeit der Beobachtungen war ein solcher Fehler unmöglich. Dieses Resultat war für Keppler nach seiner eigenen Angabe die Veranlassung, die ganze Astronomie zu reformieren. Um zunächst über die vorliegende Frage zu entscheiden, bestimmte er die Excentricität auch noch aus ausserakronychischen Beobachtungen in der Nähe des Aphels und Perihels. Daraus ergab sich wiederum die Bisektion der Excentricität. Da sie aber jedesmal verschieden gross gefunden wurde, so ergab sich, es könne kein Punktum Äquans geben. Denn sollte die Excentricität unveränderlich bleiben, so musste sich das Punktum Äquans auf der Apsidenlinie hin und her bewegen, was aber der Einfachheit der Natur widerstreitet.

Um das erhaltene Ergebnis weiter verfolgen zu können, musste Keppler zunächst die zweite Ungleichheit, d. h. die Bahn der Erde, untersuchen. Ptolemäus hatte für die Erde oder nach seiner Anschauung für die Sonne den Mittelpunkt der Bahn und den der gleichförmigen Bewegung zusammengelegt, während er für die Planeten diese Punkte trennte, und Coppernicus diese Vorstellung beibehalten, obgleich er die Erde unter die Planeten versetzte. Dagegen bemerkte Keppler ganz richtig, wenn überhaupt ein Planet ein Punktum Äquans habe, so müsse es die Erde auch haben. In der Vermutung, Punktum Äquans und Centrum der Bahn seien für die Erdbahn zu trennen, wurde er durch eine Nachricht bestärkt, welche ihm Tyge Brahe 1598 nach Steiermark hatte zukommen lassen. Danach sollte der jährliche Kreis des Coppernicus oder der Epicykel des Ptolemäus im Vergleich zum Excenter nicht immer von derselben Grösse sein, sondern in allen drei obern Planeten eine merkbare Änderung erzeugen, die beim Mars bis zu einem Unterschied von 1° 45′ steigen könne. Keppler hatte allerdings nachgewiesen, dass der Mars kein Punktum Äquans habe. Dieses Ergebnis konnte ihn aber nicht hindern, jenen Punkt vorläufig für die Erdbahn beizubehalten. Es hatte sich nämlich bei der Untersuchung gezeigt, dass allein die grosse Excentricität der Marsbahn die Voraussetzung eines besondern Punktum Äquans als unhaltbar hatte erkennen lassen. Da die Excentricität der Erdbahn viel geringer war, musste sie sich also aus der stellvertretenden Hypothese mit hinreichender Genauigkeit ergeben. Um die Frage zu entscheiden, stellte Keppler folgende Überlegung an. Die siderische Umlaufszeit des Mars beträgt 687 Tage, die der Erde $365^1/_4$ Tag. Während der Mars also nach einer vollständigen Revolution wieder an seinen früheren Ort zurückkehrt, hat die Erde nicht ganz zwei solche Umläufe gemacht, sondern ist vom Centrum der gleichförmigen Bewegung aus um 42° 54′ 2″ hinter dem Mars zurückgeblieben. Nennen wir mit Keppler diesen Längenunterschied zwischen Mars und Erde die Kommutation, so können wir sagen, die Kommutation ist am Ende einer Marsrevolution um 42° 54′ 23″ kleiner oder grösser geworden, je nachdem die Erde dem Mars in der Länge voraus oder nach war. Nach einem siderischen Umlauf des Mars würde die Kommutation dieselbe sein, wie vorher, wenn sie beidemal 21° 27′ wäre, nach zwei, wenn sie 42° 54′, nach drei, wenn sie 64° 22′, nach vier, wenn sie 85° 49′ betrüge. Ist das Punktum Äquans auch zugleich der Mittelpunkt des excentrischen Kreises, wie es bisher vorausgesetzt wurde, so muss sich für zwei solche Beobachtungen die Entfernung Erde — Punktum Äquans gleich gross ergeben. Findet das nicht statt, so wird sich der dann eintretende Unterschied für jene Entfernungen am deutlichsten zeigen, wenn man zwei Beobachtungen wählt, in welchen die gleiche Kommutation den möglichst grossen Unterschied von 85° 49′ hat, und die Erde das eine Mal nahezu im Perihel, das andre Mal im Aphel steht. Solche Beobachtungen fand Keppler unter den Braheschen nicht, dagegen hatte er ein Paar zur Verfügung, welches zwei aufeinanderfolgenden gleichen Kommutationen von 64° 22′ entsprach. Die Dreiecke, welche bei ihnen Punktum Äquans, Erde und Mars bildeten, hatten die Distanz Punktum Äquans — Mars gemeinsam und an dem ersten Endpunkt dieser Strecke die Kommutation 64° 22′ gleich, an dem zweiten, wie die Beobachtungen ergaben, die jährliche Parallaxe be-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

trächtlich verschieden. Daher ergaben sich auch die den letzteren gegenüber liegenden Entfernungen Punktum Äquans — Erde verschieden gross, der Mittelpunkt der gleichförmigen Bewegung fiel also nicht mit demjenigen der Bahn zusammen. Da Keppler ausser den eben benutzten Positionen der Erde auch ihre Apsidenlinie der Lage nach kannte, so konnte er den Mittelpunkt der Erdbahn finden und alsdann die Entfernung desselben von Punktum Äquans berechnen. Er erhielt dieselbe gleich 0,01837, während Tyge Brahe die Entfernung Sonne — Punktum Äquans gleich 0,03584 angegeben hatte. Daraus ergab sich, weil die Hälfte der zusammengesetzten Excentricität 0,03584 nur wenig von 0,01837 verschieden war, dass das Centrum der Erdbahn wahrscheinlich in der Mitte zwischen Sonne und Punktum Äquans liege. Um die Bisektion der Excentricität der Erdbahn über allen Zweifel sicher zu stellen, untersuchte Keppler, durch den ersten Erfolg kühner gemacht, die Frage noch auf eine andere Art. Er wählte dazu vier beliebige aufeinanderfolgende Marspositionen, in welchen dieser Planet sich in demselben Punkte seiner Bahn befand und berechnete daraus ebensoviele Distanzen der Erde nach dem Punktum Äquans. Setzte er die Marsdistanz gleich 1, so erhielt er dieselben gleich 0,66774, 0,67467, 0,67794, 0,67478. Die erforderliche Rechnung war einfach; in den vier Dreiecken, in welchen die gesuchten Strecken vorkamen, waren, ausser der Marsdistanz, nach den Beobachtungen sämtliche Winkel bekannt. Diese Bestimmung ist die erste wirkliche Messung am Himmel und hat deshalb ein besonderes Interesse. Da durch die Richtung und Länge der vier Leitstrahlen ebenso viele Örter der Erdbahn sicher gegeben waren, ein Kreis sich aber aus drei Punkten bestimmen lässt, so konnte Keppler aus eben so vielen von jenen Örtern den Bahnkreis suchen und —, nachdem er ihn gefunden, durch den vierten Ort prüfen. Je nachdem er nun die drei Örter wählte, fand er für die Apsidenlinie eine andere Lage diesseits oder jenseits von $3^s\ 5^1/_2{}^0$ für das Aphel und $9^s\ 5^1/_2{}^0$ für das Perihel, durch welche Punkte sie nach Tyge Brahes Beobachtungen ging. Eines dieser Resultate gab für das Perihel einen Unterschied von 20^0 gegen die richtige Lage. Dieser Fehler erklärte sich indessen sehr gut dadurch, dass bei der Ausrechnung ein Winkel von $97^0\ 50'\ 30''$ aus einem solchen von $52'$, der sicherlich nicht genau war, bestimmt wurde. Alsdann suchte Keppler auch die Excentricität. Dieselbe erhielt er etwas zu klein gleich 0,01530. Jedenfalls aber machte der erhaltene Wert die Bisektion der Excentricität wahrscheinlich, da die letztere nach Tyge Brahe gleich 0,03584 war. Um ihre Grösse mit möglichster Sicherheit festzustellen, wählte Keppler noch eine zweite Gruppe von vier Beobachtungen aus und unterwarf sie ähnlichen Rechnungen wie die erste. Auch hier erhielt er für die Apsidenlinie nicht genau dieselben Resultate, welche Tyge Brahe aus den Beobachtungen festgestellt hatte. Alle diese Unterschiede rührten aber, wie er zeigte, nur von der Ungenauigkeit der Beobachtungen her. Wenn er nämlich die für die Rechnung benutzten Beobachtungen innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler änderte, so stimmten sie mit den Angaben Tyge Brahes vollständig überein. Soviel aber ergab sich aus denselben als gewiss, dass die Excentricität nur halb so gross sein konnte, als sie bisher angenommen war. Als wahrscheinlichen Wert fand er für sie 0,01800. Keppler zeigte alsdann, wie sich unter der Annahme der Bisektion der Radius Vektor berechnen liess und gab eine Tafel, welche mit den Beobachtungen hinreichend übereinstimmte und dadurch seine Idee vollkommen bestätigte.

Die bisherigen Bemühungen hatten für Keppler zwei wesentliche Ergebnisse geliefert, welche ihm für die weitere Untersuchung den Weg vorzeichneten. Einmal hatte er festgestellt, es gebe keinen bestimmten Punkt, um welchen sich die Planeten in ihrer Bahn gleichförmig bewegen. Andererseits hatte er gezeigt, die Gesetze der Bewegung seien für die Erde dieselben wie für die übrigen Planeten. Mit dem Punktum Äquans fiel gleichzeitig die bisher an ihm gemessene mittlere Anomalie fort. Keppler hatte also für einen Ersatz dieses Masses der Bewegungszeit zu sorgen. Das Resultat für die Erdbahn machte es gewiss, dass die Bewegung der Planeten eine gemeinsame mechanische Ursache habe. Da die Untersuchung dieser Ursache auch das neue Mass für die mittlere Anomalie liefern musste, so forschte Keppler ihr zuerst nach. Die bewegende Kraft konnte entweder in der Sonne oder in den Planeten ihren Sitz haben. War das letztere der Fall, so hätte er annehmen müssen, sie ändere sich periodisch mit der Annäherung und Entfernung der Planeten von der Sonne. Da dies nicht wahrscheinlich war, so schloss er, sie habe in der Sonne, dem Centrum des Weltalls und dem Urquell des Lichts und der Wärme, ihren Ursprung. Eine weitere Untersuchung ergab, diese Kraft nehme mit dem Abstande von ihrer Quelle ab. Es zeigte sich nämlich, unter der Voraussetzung einer kreisförmigen Bahn und der Halbierung der Excentricität, dass die Geschwindigkeit des Planeten im Aphel und Perihel seiner Entfernung von der Sonne umgekehrt proportional sei. Dazu bemerkte Keppler, die bewegende Kraft könne sich mit der Vergrösserung des Abstandes nicht verlieren, die Verringerung ihrer Wirkung werde vielmehr durch die Verteilung auf einen grösseren Raum hervorgerufen. Diese Abnahme ihrer Intensität verglich er mit der

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Abnahme der Stärke der Erleuchtung bei wachsender Entfernung von der Lichtquelle. Man könnte daher vermuten, er habe die Intensität der bewegenden Kraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung gesetzt. Statt aber diese Kraft nach allen Richtungen wirken zu lassen, liess er sie sich nur in der Bahn bethätigen. Damit fand er die Abnahme derselben umgekehrt proportional der einfachen Entfernung des Planeten von der Sonne. Um die bewegende Kraft der Sonne zu erklären, nahm er an, dieser Himmelskörper sei ein Magnet. Dies schien ihm deshalb wahrscheinlich, weil auch die Erde ein Magnet ist und den Mond in Bewegung setzt. Diese Vorstellung lenkte ihn offenbar vom rechten Wege ab und führte ihn auch zu keinen neuen Folgerungen. Von Interesse ist dagegen eine andere. Er liess die Sonne in derselben Richtung um ihre Axe rotieren, in welcher sich die Planeten um ihren Centralkörper bewegen. Merkwürdiger Weise sollte diese Axe auf der Ekliptik senkrecht stehen. Zu dieser Voraussetzung lag offenbar keine Veranlassung vor, da die Erde ein Planet, wie die übrigen, ist. Aus der Abnahme der Umlaufszeiten der Planeten mit der Verringerung ihres Bahnradius schloss Keppler, die Rotationsdauer der Sonne müsse kleiner sein, als die Revolutionszeit des Merkur. Eine wirkliche Bestimmung derselben fand er auf folgende Art. Zwischen den Halbmessern der Erde und der Mondbahn besteht nach seiner Angabe dasselbe Verhältnis, wie zwischen denen der Sonne und der Merkurbahn. Deshalb glaubte er, die Rotationszeit der Sonne verhalte sich zu der der Erde, wie die Umlaufszeit des Merkur zu der des Mondes. Die Rechnung ergab einen Zeitraum von etwa drei Tagen. Nach der Entdeckung der Sonnenflecken musste Keppler zugeben, dass er sich in diesem Resultate geirrt habe, dagegen fand er zu seiner Freude die Rotation der Sonne selbst bestätigt.

Nach diesen allgemeinen Erörterungen kehrte Keppler zur Untersuchung der Bewegung der Planeten zurück. Als Axiom galt es ihm, ein Planet werde von Natur in Ruhe verharren, wenn er allein da sei. Wenn aber die Sonne auf ihn wirke, werde er durch die bewegende Kraft derselben längs des Tierkreises geführt. Diese Bewegung müsse gleichförmig sein, falls der Planet immer dieselbe Entfernung von der Sonne habe. Das finde aber nicht statt, denn in Wirklichkeit ändere der Planet seine Entfernung fortwährend. Den Grund dieser stetigen Änderung sah er in den Planeten eigentümlichen Kräften. Er verglich die Bewegung der Planeten mit der eines Nachens, welcher zugleich durch die Strömung und die Ruder fortgetrieben werde. Damit kam er der Wahrheit offenbar nahe, ohne sie jedoch zu erfassen.

Hätte Keppler die einfachsten Grundgedanken über die Zusammensetzung der Bewegungen und Kräfte gekannt, so würde der angeführte Vergleich des Planeten mit einem Nachen ihn sicherlich zum Flächensatz geführt haben. Da ihm die erforderlichen mechanischen Einsichten nicht zu Gebote standen, kam er dazu auf andere Art. Er setzte voraus, der vorher bewiesene Satz, nach welchem sich die Geschwindigkeiten eines Planeten im Aphel und Perihel umgekehrt wie seine Entfernungen von der Sonne verhalten, gelte für alle Punkte der Bahn. War das aber der Fall, so verhielten sich auch die Zeiten, in welchen der Planet möglichst kleine einander gleiche Teile des Excenters beschreibt, wie die Abstände jener Teile von der Sonne. Hieraus ergab sich weiter, die Zeiten, in welchen ein Planet beliebige Bogen seiner Bahn zurücklege, ständen in demselben Verhältnis wie die Summen der nach ihren Punkten gezogenen Leitstrahlen. Damit war die Aufgabe gestellt, diese Summe zu bestimmen. Keppler glaubte, dieselbe werde durch den Sektor repräsentiert, in welchem die Leitstrahlen liegen. Er dachte sich, wie die Punkte eines Bogens diesen Bogen, so machten auch die nach seinen Punkten gezogenen Leitstrahlen den Sektor aus, in welchem sie alle enthalten sind. Daraus schloss er endlich, der Halbkreis verhalte sich zur halben Umlaufszeit wie ein beliebiger von den Leitstrahlen beschriebener Sektor, zu der Zeit in welcher der Planet seinen Bogen durchläuft. Dieser von Keppler für sein erstes Gesetz geführte Beweis war nicht richtig. Sowohl der Satz von der Geschwindigkeit des Planeten in seiner Bahn, als auch die Substituierung des Sektors für die Summe seiner Leitstrahlen, galt nur im Aphel und Perihel. Ausserdem beruhte der Beweis auf der Voraussetzung der Kreisbahn. Man hat deshalb die Ansicht geäussert, Keppler sei zu dem fraglichen Gesetz durch zwei sich aufhebende Irrtümer gelangt. Dieselbe ist jedoch nur für den versuchten Beweis, aber nicht für die Auffindung des Gesetzes richtig. Übrigens kannte Keppler den Fehler seines Beweises sehr wohl und legte ihn selbst dar. Aber er fügte auch hinzu, derselbe sei von geringem Gewicht. So durfte er sich in der That auslassen, da er durch vollkommen angemessene Gedanken zu dem neuen Gesetz gekommen war. Er glaubte, jener Sektor enthalte das Mass des gesamten Kraftaufwandes, durch welchen die Distanzen ihre Wirkung in der Anhäufung der verwendeten Zeit erweisen. Wenn übrigens Keppler den gesuchten mechanischen Beweis nicht erbrachte, so ist der Grund allein darin zu suchen, dass ihm keine ausreichende Mechanik zur Verfügung stand. Es fehlten ihm schon die einfachsten Principien dieser Wissenschaft. So war ihm zwar, wie wir weiter oben sahen, der erste von selbst einleuchtende Teil

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des Trägheitsgesetzes bekannt, von dem zweiten Teil desselben aber, nach welchem ein einmal in Bewegung gesetzter Körper diese in der ursprünglichen Richtung mit der erteilten Geschwindigkeit fortsetzt, wusste er nichts. Er glaubte vielmehr, die Körper ständen still, sobald die bewegende Kraft zu wirken aufhöre. Natürlich war es Keppler trotzdem möglich, das neue Gesetz auf seine Richtigkeit zu prüfen, denn es blieb ihm unbenommen, dasselbe an den Beobachtungen zu bewahrheiten. Das hat er auch gethan. Zu dieser Erprobung konnte die Feststellung der Erdbahn dienen, da für dieselbe, wie die Untersuchung gezeigt hatte, die Voraussetzung der Kreisbewegung hinreichend mit der Erfahrung in Einklang war. Ehe wir das Ergebnis dieser Erörterung anführen, wollen wir zusehen, in welcher Art Keppler die neuen Vorstellungen in die Rechnung einführte. Denken wir uns, der Planet habe vom Aphel aus irgend ein Stück seiner noch kreisförmig vorausgesetzten Bahn zurückgelegt, so nannte er den dabei von dem Leitstrahl durchstrichenen Sektor, welcher nach seinem ersten Gesetz das Mass der Zeit ist, die mittlere Anomalie. Dieselbe oder vielmehr der sie darstellende Sektor besteht aus zwei Teilen. Der eine ist der Sektor des excentrischen Kreises und misst den von dem Planeten beschriebenen Bogen; daher hiess er bei Keppler wie dieser die excentrische Anomalie. Der andere ist ein Dreieck, welches die Excentricität zur Basis und den Sinus der excentrischen Anomalie zur Höhe hat. Diesen nannte er die physische Gleichung. Der Winkel, den der Planet bei seiner Bewegung um die Sonne beschreibt, hiess die wahre Anomalie. Dieselbe ist um den Winkel, welcher in dem die physische Gleichung darstellenden Dreieck der Excentricität gegenüberliegt, die sogenannte optische Gleichung, kleiner als die excentrische Anomalie. Keppler berechnete nun nach diesen neuen Anschauungen die Örter der Erde in ihrer Bahn. Die Ausführung der Rechnung war sehr einfach, da bei der geringen Excentricität der Erdbahn die optische Gleichung, d. h. der sie messende Sektor, gleich der physischen ist. Keppler berechnete also für eine beliebige excentrische Anomalie die physische Gleichung und verwandelte sie in den entsprechenden Winkel. Addierte er denselben zur excentrischen Anomalie, so erhielt er die mittlere, subtrahierte er ihn davon, so erhielt er die wahre. Die Resultate verglich er mit den Angaben Tyge Brahes. Der grösste Unterschied fand in den Oktanten statt, betrug aber nur 33″. Da er denselben vernachlässigen konnte, so hatte er also das erste Gesetz durch seine Anwendung bestätigt.

Nach diesen Untersuchungen über die Erdbahn kehrte Keppler wieder zum Mars zurück. Er hatte vorher aus der Entfernung eines Marsortes von der Sonne die Entfernung verschiedener Erdörter berechnet und alsdann den Radius der Erdbahn erhalten. Ebensogut liess sich nun umgekehrt die Entfernung jenes Marsortes durch den Erdradius ausdrücken. Waren auf diese Weise drei Marsörter bestimmt, so liess sich wieder durch dieselben ein Kreis legen und die Excentricität und Apsidenlinie suchen. Wählte Keppler aber verschiedene Gruppen von drei solchen Beobachtungen, so erhielt er jedesmal einen anderen Kreis, und mit demselben wechselte auch die Lage der Apsidenlinie und die Grösse der Excentricität. Daraus schloss er, die Marsbahn lasse sich nicht durch einen Kreis darstellen und könne überhaupt, ebenso wie ihre Apsidenlinie und Excentricität, nicht aus drei Beobachtungen festgestellt werden. Er trennte die Untersuchung der Bahn von derjenigen der Apsidenlinie und Excentricität und brachte zunächst die letztere in Ordnung. Dazu wählte er fünf Marspositionen, in welchen dieser Planet die gleiche heliocentrische Länge in der Nähe des aus der stellvertretenden Hypothese mit hinreichender Genauigkeit bekannten Aphels hatte. Diese Beobachtungen waren in genügender Übereinstimmung mit einander, wenn Keppler das Aphel des Mars in $4^s\ 29^0\ 20'\ 12''$ und die Marsdistanz in der Ekliptik gleich 1,66700 annahm. Dividierte er diese ekliptische Marsdistanz durch den Cosinus des Neigungswinkels, so erhielt er die Distanz in der Bahn gleich 1,66780. Durch ähnliche Rechnungen erhielt er für das Perihel 1,38500. Infolgedessen ergab sich die mittlere Distanz gleich 1,52640 und die Excentricität gleich 0,14140. Alle diese Längenbestimmungen waren im Masse des Erdradius gemacht. Übertrug er sie auf den Radius der Marsbahn, so fand sich die Excentricität gleich 0,09264, während er in der stellvertretenden Hypothese die zusammengesetzte Excentricität gleich 0,18364, oder die einfache unter der Voraussetzung der Bisektion gleich 0,09282 gefunden hatte. Das neue Resultat war mit dem letzten in hinreichender Übereinstimmung und damit die Bisektion der Excentricität auch für den Mars bewiesen. Das Aphel fand er in $4^s\ 29^0\ 20'\ 12''$, das Perihel in $10^s\ 29^0\ 54'\ 53''$. Nahm er die Differenz und berücksichtigte ausserdem die Präcession mit 48″, so ergab sich ein Unterschied von $6^s\ 0^0\ 33'\ 53''$. Die Zwischenzeit betrug $10^h\ 6^1/_2{}^m$ mehr als die halbe Umlaufszeit des Mars oder $343^d\ 11^h\ 46^m$. Die Bestimmung des Aphels und Perihels oder doch eines derselben konnte also nicht richtig sein, da in diesem Fall ihr Längenunterschied 180^0, und die Zwischenzeit gleich der halben Umlaufszeit des Mars hätte sein müssen. Es galt also, das erhaltene Resultat zu korrigieren. Dazu stellte Keppler nachstehende Überlegung an. Die von den Leitstrahlen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

beschriebenen Flächen sind für gleiche Zeiten gleich. Sind diese Zeiten klein genug, dass die Flächen als Kreissektoren angesehen werden können, so verhalten sich die zurückgelegten Bogen umgekehrt wie die Quadrate der Abstände. Daraus ergab sich, da die mittlere tägliche Bewegung des Mars 31′ 27″ ist, die tägliche Bewegung im Aphel 26′ 13″ und im Perihel 38′ 2″. Befindet sich daher der Mars zu einer gewissen Zeit 26′ 13″ hinter dem Aphel, so wird er nach einer halben Revolution 38′ 2″ hinter dem Perihel sein, er wird also 11′ 49″ mehr beschrieben haben als 180°. Alsdann verteilte Keppler die vorher über die halbe Umlaufszeit gefundenen $10^h\ 6^1/_2{}^m$ zu einer Hälfte auf die Zeit vor dem Aphel, zur andern auf die nach dem Perihel. In $5^h\ 3^1/_4{}^m$ beschreibt der Mars im ersten Fall 5′ 16″, im zweiten 8′ 1″. Nach Abzug dieser Winkel hatte der Mars nicht mehr 33′ 53″, wie sich oben ergab, sondern nur noch 20′ 36″ zu viel beschrieben. Das musste nach den früheren Überlegungen darin seinen Grund haben, dass der Mars bei der fraglichen Beobachtung bereits über das Aphel hinaus war. Nun war gefunden, in diesem Falle entsprächen 11′ 49″ einem Tage. Daher gehörte zu 20′ 36″ $1^d\ 17^h$ 54′ oder eine Bewegung von 45′ 22″ im Aphel. Es waren also in der Lage des Aphels zwei Verbesserungen zu machen. Einmal musste dasselbe wegen der Verteilung des Zeitüberschusses von $11^h\ 6^1/_2{}'$ um 5′ 16″ vorgerückt werden, und dann musste es wegen der 20′ 36″, die sich der Mars noch über 180° bewegte, 45′ 42″ zurückverlegt werden. Daraus ergab sich dasselbe in 4^s 28° 39′ 46″ und das Perihel in 10^s 28° 39′ 46″.

Nachdem nun Keppler auch für den Mars die Bisektion der Excentricität bewiesen hatte, berechnete er bei seiner Bahn die Anomalien ebenso wie vorher bei der Erdbahn nach dem neuen Flächensatz. Für die excentrische Anomalie 90° ergab sich danach die mittlere 95° 18′ 28″ und die wahre 84° 42′ 26″. Bestimmte er für die mittlere Anomalie 95° 18′ 28″ die wahre nach der stellvertretenden Hypothese, so erhielt er 84° 42′ 2″ also nur einen Unterschied von 24″. Während diese Differenz in den Quadranten zu vernachlässigen war, stellte sich das Ergebnis ganz anders für die Oktanten. Zur excentrischen Anomalie 45° gehörte nach dem neuen Gesetz eine mittlere Anomalie 48° 45′ 12″ und eine wahre 41° 28′ 54″. Dagegen folgte aus der stellvertretenden Hypothese für die mittlere 48° 45′ 12″ die wahre 41° 20′ 33″. Der Unterschied betrug also 8′ 21″. Bei der excentrischen Anomalie 135° ergab sich ein ähnlicher Unterschied von 8′ 1″, jedoch in entgegengesetzter Richtung. Die frühere Untersuchung hatte nun aber festgestellt, dass die stellvertretende Hypothese die heliocentrischen Längen mit hinreichender Genauigkeit ergebe. Da also die Resultate derselben richtig sein mussten, so konnte nur das nach dem neuen Gesetze ermittelte falsch sein. Dieses ergab aber zwischen den excentrischen Anomalien 45° und 135° eine um 16′ 22″ zu kleine Bewegung des Leitstrahls. Daraus folgte, dass die die Zeiten messenden Sektoren in diesem Intervall zu gross wären. Also konnte die Marsbahn kein Kreis sein, sie musste vielmehr eine ovale Gestalt haben, die nach den mittleren Längen zu enger war als der Kreis. Ehe Keppler aber diese Folgerung als erwiesen annahm, unterwarf er sie einer Prüfung. Er berechnete drei Marsdistanzen aus den Beobachtungen und verglich sie mit den entsprechenden, welche die vorausgesetzte Kreisbahn ergab. Die letzten lieferten allemal ein grösseres Resultat als die ersten, und zwar war der Unterschied gegen das Aphel am geringsten, in der Nähe der mittleren Entfernung am grössten. Dadurch war die ovale Gestalt der Marsbahn erwiesen.

Dieses Ergebnis führte zu der neuen Aufgabe, die ovale Bahn festzustellen. Keppler setzte zunächst voraus, dieselbe sei eine Eilinie. Das Aphel legte er an das spitze, das Perihel an das breite Ende der Kurve. Er glaubte, diese Form der Planetenbahn geometrisch abgeleitet zu haben. Da seine Deduktionen aber nicht sehr schlüssig sind, wollen wir sie übergehen. Um auf die Ooide den Flächensatz anwenden zu können, hatte Keppler zunächst ihren Inhalt zu bestimmen. Dazu kam er, indem er sie mit einer Ellipse verglich, von der sie sich nach seiner Rechnung wenig unterschied. Ausserdem hatte er aber die Ooide oder Ellipse, welche sie vertritt, von einem gegebenen Punkt auf der Axe aus im Verhältnis der Bewegungszeit zu teilen. Die Lösung dieser Aufgabe lässt sich auf die der gleichen für den Kreis zurückführen. Diese Behauptung erweist sich folgendermassen. In der Ellipse habe ein Planet vom Aphel aus einen beliebigen Bogen beschrieben, und es sei der Sektor gezeichnet, welcher dabei vom Radius Vektor durchmessen wird. Alsdann zeichne man um den Mittelpunkt der Ellipse mit der halben grossen Axe als Radius einen Kreis, fälle von dem Orte des Planeten auf die grosse Axe ein Lot und verlängere dasselbe rückwärts, bis es den Kreis trifft. Verbindet man noch den Schnittpunkt mit der Sonne, so verhält sich der so entstandene Kreissektor mit der Spitze in der Sonne zu dem von dem Leitstrahl des Planeten beschriebenen Sektor der Ellipse wie die halbe grosse Axe zur halben kleinen Axe der Ellipse, oder wie der Kreis zur Ellipse. Ist also der Kreis von der Sonne aus in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zerlegt, so ist es auch die Ellipse. Ausserdem ergiebt sich damit die wahre Ano-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

malie. Es stehen nämlich die Tangenten der Winkel, welche an den Spitzen der Sektoren des Kreises und der Ellipse liegen ebenfalls im Verhältnis der grossen und kleinen Axe der letztern. Keppler löste das Problem auf indirekte Art durch aufeinanderfolgende Näherungen. Er nahm zuerst für den Bogen des Kreissektors, oder die excentrische Anomalie, einen Wert an und berechnete daraus den Kreissektor. Hatte derselbe nicht die gewünschte Grösse, so wurde der Bogen so lange vergrössert oder verkleinert, bis eine genügende Übereinstimmung erzielt war. War das geschehen, so suchte er den Winkel an der Spitze des Kreissektors und daraus die wahre Anomalie. Diese Aufgabe ist unter dem Namen des Kepplerschen Problems berühmt. Die Lösung desselben hängt von der Ausrechnung der Gleichung $x + e \sin x = 2s$ ab, in welcher x die gesuchte excentrische Anomalie, e die Excentricität und s der Kreissektor mit der Spitze in der Sonne ist. Eine grosse Anzahl von Mathematikern und Astronomen haben sich bemüht, die Kepplersche Näherungsmethode durch ein direktes Verfahren zu ersetzen. Es würde zu weit führen, diese Versuche auch nur aufzuzählen, aber es mag bemerkt werden, dass man bei keiner von diesen Methoden mit so wenig Rechnungen zum Ziele kommt als bei dem Näherungsverfahren Kepplers. Der letztere hielt eine direkte Lösung des Problems für unmöglich, weil der Bogen und sein Sinus heterogen seien.

Als Keppler mit diesem neuen Hilfsmittel die Örter des Planeten in der Ooide berechnete, fand er auf verschiedenen Wegen stets ein von dem Ergebnis der stellvertretenden Hypothese abweichendes Resultat. Dasselbe veranlasste ihn, eine grössere Anzahl von Abständen des Mars und der Sonne aus den Beobachtungen zu berechnen. Diese Rechnung führte er aus, indem er die Abstände für zwei nahe gelegene Örter suchte und die erhaltenen Resultate korrigierte. Die berechneten Distanzen des Mars ergaben sich in gleicher Entfernung zu beiden Seiten des Aphels gleich. Daraus folgte einmal, dass das Aphel richtig bestimmt war und dann vor allem, dass die Apsidenlinie durch die Sonne selbst geht. Alsdann bestimmte Keppler auf eine neue Art eine andere Reihe von Abständen des Mars und der Sonne aus zwei wenig von einander abstehenden Beobachtungen kurz vor und nach der Opposition, welche gleichzeitig gestattete, die Örter in der Bahn zu verificieren. Er nahm für die beiden Entfernungen des Mars von der Sonne einen beliebigen Wert an und berechnete daraus den Winkel, um welchen sich der Mars in der Zwischenzeit fortbewegt hatte. Wurde derselbe zu gross gegen die Tafeln, so war die Marsdistanz zu klein angenommen und umgekehrt. Daraus liess sich nach einigen Versuchen die Marsdistanz mit grosser Genauigkeit bestimmen. Das Ergebnis war die Widerlegung seines Ovals. Während für den Kreis die mittleren Distanzen zu gross waren, waren sie für die Ooide zu klein. Die Wahrheit lag also zwischen beiden Linien.

Dies hatte Keppler kaum gezeigt, als er zufällig bemerkte, dass in der Kreisbahn der Sekans der grössten optischen Gleichung $5^0\ 18'$, welche der excentrischen Anomalie 90^0 entspricht, gleich 1,00429 ist. Derselbe übertrifft den Radius genau um das Stück, um welches die Kreisbahn für die excentrische Anomalie 90^0 zu gross ist. Die gleiche Beziehung fand Keppler auch für jede andere excentrische Anomalie in Übereinstimmung mit den Beobachtungen. Daraus folgte, dass er die wahre Bahn erhielt, wenn er die Entfernungen der Kreisbahn im Verhältnis des Kosinus der optischen Gleichung verkleinerte. Infolgedessen konnte er dieselbe auf folgende Art konstruieren. Er zeichnete zunächst auf der Axe den Mittelpunkt der Bahn und den Ort der Sonne und beschrieb über derselben als Durchmesser einen Kreis. Alsdann verband er einen beliebigen Punkt des Kreises mit dem Ort der Sonne und dem Mittelpunkt der Bahn. Der Winkel, den diese beiden Linien mit einander bilden, war die optische Gleichung des Punktes. In diesem Winkel fällte er nun von dem Ort der Sonne auf den andern Schenkel ein Lot und beschrieb mit dem Stück, welches das Lot auf diesem abschneidet, um den Ort der Sonne einen Kreis. Die beiden Punkte, in welchen derselbe die durch den Punkt auf der Kreislinie zur Axe gezogene Senkrechte schneidet, sind zwei Punkte der gesuchten Bahn. Die so erhaltene Linie ist eine Ellipse mit der Sonne in einem ihrer Brennpunkte. Die Bahn der Planeten war damit definitiv bestimmt; denn die Ellipse zeigte sich bei der Probe mit den Beobachtungen in jeder Beziehung in Übereinstimmung.

Die Resultate der Kepplerschen Forschung sind von grosser Bedeutung, da sie einen wichtigen Fortschritt in der Wissenschaft darstellen. Bisher hatte man eine Reihe von hypothetischen Epicykeln erdacht, welche höchstens als Mittel gelten konnten, die Beobachtungen mit annähernder Sicherheit wiederzugeben. Keppler dagegen hatte nach einem einheitlichen Plan die Beobachtungen Tyge Brahes bearbeitet und die wirklichen Naturgesetze der Planetenbewegung gefunden. Aber er hatte noch einen andern Gedanken, den er schon seit seinen ersten astronomischen Bemühungen gehegt hatte. Er war der Ansicht, es müsse zwischen den Entfernungen und den periodischen Zeiten der Planeten ein bestimmtes Verhältnis bestehen. Da mit der Entfernung der Planeten nicht bloss die Bahn länger, sondern auch die bewegende

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Kraft der Sonne geringer wird, so konnte das gesuchte Verhältnis kein einfaches sein. Dies bemerkte Keppler bald; da er aber keine Mittel besass, den fraglichen Satz aus einfachen Thatsachen abzuleiten, musste er eine Reihe von Versuchen anstellen. Bei der Bearbeitung der Marstheorie hatte er den Gedanken gefasst, die bewegende Kraft der Sonne nehme im umgekehrten Verhältnis der einfachen Entfernung ab. Daraus schloss er, es könnten sich die Umlaufszeiten wie die Quadrate der mittleren Entfernungen verhalten. Diese Ansicht stimmte indessen wenig mit den aus den Braheschen Beobachtungen berechneten mittleren Entfernungen überein. Endlich fand er am 8. März 1618 das richtige Gesetz, nach welchem die Quadrate der Umlaufszeiten sich wie die Kuben der mittleren Entfernung von der Sonne verhalten.

Dieses dritte Gesetz der Planetenbewegung hat später für die Wissenschaft eine besonders grosse Bedeutung erlangt. Newton gründete auf dasselbe das Gravitationsgesetz und schuf dadurch ein Mittel, die Kepplerschen Gesetze aus mechanischen Principien abzuleiten und die Bewegung der Himmelskörper aus einer gemeinsamen Quelle zu berechnen. Überall, wo Massen ins Spiel kamen, musste sich die Attraction bethätigen. Es liessen sich auch die Störungen, welche durch die gegenseitige Anziehung der Planeten bewirkt werden, in Rechnung ziehen; ja, es gelang in der Folge, aus den Störungen auf noch nicht entdeckte Planeten zu schliessen. Diese Tragweite des Gesetzes hat die Leistung Newtons in besonders hellem Lichte erscheinen lassen. Seine Landsleute haben sogar behauptet, die Gravitation sei die grösste Entdeckung, welche jemals gemacht wurde. Sehen wir aber zu, was Newton an wirklich selbständigen Ideen zu seiner Ableitung hinzuthat, so findet sich nur die Analogie, das Gravitieren der Himmelskörper sei ein dem Fallen der Körper an der Erdoberfläche entsprechender Vorgang. Ähnliche Vorstellungen hatte aber auch schon Keppler gehabt. Er sprach die Ansicht aus, wenn die Anziehung der Erde aufhöre, werde das Wasser des Meeres sich erheben und in den Mond überfliessen. Ferner äusserte er sich dahin, Erde und Mond würden sich nähern, wenn sie nicht durch eine Kraft in ihrer Bahn erhalten würden, und es würde der Mond $^{53}/_{54}$, die Erde $^{1}/_{54}$ des Weges zurücklegen. Trotz dieser richtigen Anschauungen konnte es ihm nicht gelingen, das fragliche Gesetz abzuleiten. Dazu hätte er ausser den Ergebnissen der Galileischen Mechanik auch die Huyghensche Theorie der Centralbewegung nötig gehabt. Nur der Umstand, dass ihm die erforderlichen mechanischen Einsichten nicht zu Gebote standen, hat die Entdeckung der Gravitation fast ein Jahrhundert verzögert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf