Anhang.

Pädagogische Bemerkungen.

Zuerst wird die harmonische Teilung einer gegebenen Strecke nach einem gegebenen Verhältnis für das Teilungsverhältnis 2:1 erklärt. Hierzu wird das Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet und die sich in E schneidenden Diagonalen AC und BD, sowie die Mittellinie CF des Dreiecks ABC gezogen. Die Diagonale BD wird von der Mittellinie CF im Punkte S geschnitten. Dann ist: $SB:SE=2:1$ und $DB:DE$ auch $=2:1$, mithin: $SB:SE=DB:DE=2:1$. Die innen in S und außen in D nach demselben Verhältnis 2:1 geteilte Strecke BE wird eine nach jenem Verhältnis harmonisch geteilte Strecke genannt.

Alsdann wird die Aufgabe der harmonischen Teilung einer Strecke nach einem gegebenen Verhältnis $m:n$ allgemein gelöst und dabei zunächst vorausgesetzt, daß $m>n$ ist. Es wird zwar nur die in der Einleitung erwähnte Konstruktion behandelt, die sich in § 189 unseres Lehrbuches findet, wohl aber wird noch gezeigt, daß man für den Fall, in welchem $m<n$ ist, den Strahl durch den anderen Endpunkt der harmonisch zu teilenden Strecke zu legen und die Konstruktion mit der langen Strecke n zu beginnen hat und dabei doch dieselben Teilpunkte erhält. Dies geschieht, um zu erreichen, daß die eine Hälfte der Konstruktionsebene für den übrigen Teil der Figur frei bleibt.

Hierauf werden die Sätze von der Teilung der Grundlinie des Dreiecks durch die Halbierenden des Innen- und des Außenwinkels an der Spitze nebst ihren Umkehrungen bewiesen (§ 211 des Lehrbuches) und die beiden Konstruktionsfiguren zu einer einzigen vereinigt. Der auf der Grundlinie AB des Dreiecks ABC liegende Endpunkt der Innenwinkelhalbierenden heißt D und E der auf der Verlängerung von AB gelegene Endpunkt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Außenwinkelhalbierenden, sodaß im Dreieck DEC der Winkel bei C ein Rechter ist. Dann werden die Seiten CA und CB des Dreiecks ABC auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel S aus abgetragen und die durch die Abtragung erhaltenen Punkte P und Q verbunden. SP ist $= CA$ und $SQ = CB$. Ferner werden durch Ziehen von Parallelen zu PQ beliebig viele andere Streckenpaare SP', SQ'; SP'', SQ''; .... gewonnen, welche sich wie $SP : SQ = CA : CB$ verhalten. Zugleich werden die Grenzen angegeben, innerhalb welcher die Ziehung der Parallelen nur erfolgen darf, um Streckenpaare zu erhalten, die sich nicht nur wie $CA : CB$ verhalten, sondern auch als Seiten von Dreiecken über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB dienen können. Hierzu werden DA und DB auf den Schenkeln SP und SQ vom Scheitel S aus abgetragen, so daß $SK = DA$ und $SL = DB$ ist und K und P auf dem einen, L und Q auf dem anderen Schenkel des Winkels liegen. Ist dann noch $SM = EA$ und $SN = EB$, und liegt M mit K, N mit L auf demselben Schenkel, so liefern alle Parallelen zwischen KL und MN brauchbare Seiten zur Konstruktion von Dreiecken, die die Grundlinie AB gemeinsam haben und deren andere Seiten sich wie $CA : CB$ verhalten. Alsdann wird z. B. mit SP' und SQ' als Seiten über AB als Grundlinie das Dreieck ABC' gezeichnet, so daß $C'A = SP'$ und $C'B = SQ'$ ist, und mit Hilfe der vorher bewiesenen Umkehrungen der Sätze von der Teilung der Grundlinie durch die Halbierenden des Innen- und des Außenwinkels an der Spitze gezeigt, daß die Halbierenden der Winkel an der Spitze C' des Dreiecks ABC' auch durch D, bez. E gehen. Dieselbe Konstruktion wird mit noch einigen Streckenpaaren CP'', CQ''; CP''', CQ'''; . . . wiederholt und dadurch werden die Dreiecke ABC'', ABC''' . . . gefunden. Da schließlich die Winkel DCE, $DC'E$, $DC''E$, . . . Rechte sind, so muß der Kreis über dem Durchmesser DE durch die Punkte C, C', C'' . . . hindurchgehen. Zuletzt wird der Kreis gezeichnet und „Apollonischer Kreis“ genannt.

Formulierung des Apollonischen Satzes: Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche die Grundlinie gemeinsam haben, während die beiden anderen Seiten jedes Dreiecks in einem gegebenen, für alle Dreiecke gleichen, Verhältnis stehen, ist der Kreis über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die gemeinschaftliche Grundlinie nach jenem Verhältnis harmonisch teilen.

Zum Schlusse bringe ich ein von den Schülern ausgearbeitetes einfaches Beispiel.

Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus dem Verhältnis der Grundlinie zu ihrer Mittellinie, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Reifeprüfungsaufgabe Ostern 1906.) (Fig. 16.)

Formulierung. Gegeben sind die Strecken k, l, m, n und r; gesucht wird das Dreieck ABC, in welchem: 1. $AD = DB$; 2. $AB : CD = k : l$; 3. $CA : CB = m : n$ und 4. $MA = MB = MC = r$ ist.

Konstruktion. Ich ziehe $A'B' = k$ und schlage den Apollonischen Kreis, der $A'B'$ nach dem Verhältnis $m : n$ harmonisch teilt. Alsdann halbiere ich $A'B'$ in D' und schlage um D' mit l einen Kreisbogen, der den Apollonischen Kreis z. B. in C' schneidet. C' verbinde ich mit A' und B', zeichne den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks $A'B'C'$ und verbinde M mit A', B' und C'. Ferner schlage ich um M mit r den Kreis, der MA' in A, MB' in B und MC' in C schneidet. Schließlich verbinde ich A, B und C miteinander.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Den auf $A'B'$ liegenden Schnittpunkt des Apollonischen Kreises nenne ich E' und F' den auf der Verlängerung von $A'B'$. Die Grundlinie AB des Dreiecks ABC halbiere ich in D und ziehe CD. C' verbinde ich mit D'.

1. $AD = DB$ nach Hilfskonstruktion.

CD Mittellinie des Dreiecks ABC.

2. $MA = MB$ als Radien desselben Kreises.
$MA' = MB'$ „ „ „ „ .

$AB \parallel A'B'$, denn haben gleichschenklige Dreiecke den Winkel an der Spitze gemeinsam, so sind ihre Basen parallel.
$BC \parallel B'C'$, wie ebenso bewiesen werden kann.
$AC \parallel A'C'$, „ „ „ „ „ .

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, denn Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten sind ähnlich.
CD Mittellinie des Dreiecks ABC, wie bewiesen.
$C'D'$ „ „ „ $A'B'C'$ nach Konstruktion und Hilfskonstruktion.

$CD : C'D' = AB : A'B'$, denn entsprechende Mittellinien ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie entsprechende Seiten.

$AB : CD = A'B' : C'D'$ durch Vertauschung der Glieder in der obigen Proportion.
$A'B' = k$ nach Konstruktion.
$C'D' = l$ „ „ .

$AB : CD = k : l$, denn gleiche Größen kann ich für einander setzen.

3. $E'A' : E'B' = F'A' : F'B' = m : n$ nach der Konstruktion der harmonischen Teilpunkte.
$C'A' : C'B' = E'A' : E'B' = F'A' : F'B'$ nach dem Satze des Apollonius.

$C'A' : C'B' = m : n$, denn sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, wie bewiesen.

$CA : CB = C'A' : C'B'$, denn in ähnlichen Dreiecken verhalten sich zwei Seiten des einen wie die entsprechenden des anderen.

$CA : CB = m : n$, denn gleiche Größen kann ich für einander setzen.

4. $MA = MB = MC = r$ nach Konstruktion.

Der Kreis um M mit r ist der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis.

Determination. Ohne Beschränkung darf ich voraussetzen, daß $m > n$ ist. Ich erhalte ein Dreieck, wenn: $D'E' < l < D'F'$, d. h. wenn:

$$\frac{k(m-n)}{2(m+n)} < l < \frac{k(m+n)}{2(m-n)} .$$

ist. Setze ich das eine gegebene Verhältnis $\frac{l}{k} = \varkappa$ und das andere $\frac{m}{n} = \lambda$, so ist auch:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} < 2\varkappa < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung: Die Formulierungsfigur betreffend ist zu erwähnen, daß die Streckenpaare k, l und m, n zwei verschiedenen, dem Ausgangsdreieck ähnlichen Dreiecken entnommen werden müssen. Entnimmt der Schüler die gegebenen Streckenpaare nur einem ähnlichen Dreieck, so verfällt er häufig in den Fehler, außer den gegebenen Verhältnissen $c:t_c$ und $a:b$ noch eins der vier Verhältnisse $a:c$, $b:c$, $a:t_c$ und $b:t_c$ als bekannt zu betrachten und zur Konstruktion zu verwenden. Eine ähnliche Gefahr liegt besonders dann vor, wenn die beiden gegebenen Streckenpaare von einem Punkte, z. B. von der Spitze des Dreiecks, ausgehen. In diesem Falle macht der Schüler leicht den Fehler, nur das eine gegebene Verhältnis und von dem anderen die eine Strecke zu benutzen. Ist z. B. die Aufgabe gestellt: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Grundlinie, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und dem Verhältnis der Mittellinie nach der Grundlinie zur Halbierenden des Außenwinkels an der Spitze, so wird folgende falsche Konstruktion ausgeführt: Der Schüler zeichnet zunächst den Apollonischen Kreis, der die Grundlinie nach dem Verhältnis der ihr anliegenden Seiten harmonisch teilt, nnd schlägt dann um die Mitte der Grundlinie als Zentrum einen Kreisbogen, dessen Radius der der Mittellinie entsprechenden Strecke in dem anderen gegebenen Verhältnis gleich ist.

Die die gegebenen Verhältnisse bestimmenden Strecken werden behufs Erzielung größerer Genauigkeit der Konstruktion stets ähnlichen Dreiecken entnommen, die größer sind, das Ausgangsdreieck. In der Konstruktionsfigur werden sämtliche Geraden und Kreise mit Ausnahme des gesuchten Gebildes gestrichelt, und wenn die Konstruktionsfigur zur Beweisfigur vervollständigt wird, so sind sämtliche hinzukommenden, zum Beweise notwendigen Strecken oder Kreise zu strichpunktieren. Es wird streng darauf geachtet, daß nichts in der Konstruktion vorkommt, was in den Beweis gehört.

Wenn die Aufgabe determiniert wird, so hat dies vollständig zu geschehen; eher ist die Determination wegzulassen, als daß eine unvollständige Determination gestattet wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung: Die Formulierungsfigur betref en-
paare k, l und m, n zwei verschiedenen, dem ken
entnommen werden müssen. Entnimmt der Sc nur
einem ähnlichen Dreieck, so verfällt er häufig in er-
hältnissen $c:t_c$ und $a:b$ noch eins der vier Ve als
bekannt zu betrachten und zur Konstruktion zu egt
besonders dann vor, wenn die beiden gegebenen B.
von der Spitze des Dreiecks, ausgehen. In dies len
Fehler, nur das eine gegebene Verhältnis und zu
benutzen. Ist z. B. die Aufgabe gestellt: Ein Dr nie,
dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und der
Grundlinie zur Halbierenden des Außenwinkels che
Konstruktion ausgeführt: Der Schüler zeichnet zu die
Grundlinie nach dem Verhältnis der ihr anliegen ägt
dann um die Mitte der Grundlinie als Zentrum e der
Mittellinie entsprechenden Strecke in dem andere

Die die gegebenen Verhältnisse bestimmen ng
größerer Genauigkeit der Konstruktion stets ähnlich nd,
das Ausgangsdreieck. In der Konstruktionsfigur ise
mit Ausnahme des gesuchten Gebildes gestriche zur
Beweisfigur vervollständigt wird, so sind sämtlic ot-
wendigen Strecken oder Kreise zu strichpunktier laß
nichts in der Konstruktion vorkommt, was in d

Wenn die Aufgabe determiniert wird, so hat ist
die Determination wegzulassen, als daß eine un rd.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Herrn Kollegen GEISSLER für die freundliche Unterstützung bei der Durchsicht der Druckbogen meinen Dank zu sagen, ist mir eine angenehme Pflicht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf