PLANIMETRISCHE KONSTRUKTIONSAUFGABEN

MIT VERWENDUNG DER

HARMONISCHEN TEILUNG

UND DES

APOLLONISCHEN KREISES

VON

PROF. DR. PHIL. **PAUL STARKE**

BEIGABE
ZUM ACHTEN JAHRESBERICHT DER STÄDTISCHEN IV. REALSCHULE
MIT GYMNASIALKLASSEN ZU LEIPZIG

LEIPZIG 1909
DRUCK VON JACHNER & FISCHER

Bibliothek des Städt. Gymnasiums Düsseldorf

qee 10 (1909)

777 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

PLANIMETRISCHE KONSTRUKTIONSAUFGABEN

MIT VERWENDUNG DER

HARMONISCHEN TEILUNG

UND DES

APOLLONISCHEN KREISES

VON

PROF. DR. PHIL. **PAUL STARKE**

Bibliothek des Städt. Gymnasiums * Düsseldorf *

LEIPZIG 1909

DRUCK VON JACHNER & FISCHER

777 6

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Planimetrische Konstruktionsaufgaben

mit Verwendung

der harmonischen Teilung und des Apollonischen Kreises.

Bei der unterrichtlichen Beschäftigung mit Konstruktionsaufgaben, zu deren Lösung die harmonische Teilung und der Apollonische Kreis verwendet werden können, sind von mir eine Reihe neuer Aufgaben und neue Lösungen schon bekannter Aufgaben gefunden worden, die der Mitteilung an die Fachgenossen in der Beigabe zu unseren Schulnachrichten wert erscheinen. Um zu vermeiden, bereits Bekanntes zu bringen, habe ich außer dem an unserer, sowie an hiesiger I. und III. Realschule eingeführten Lehr- und Aufgabenbuch von Fischer (Leipzig, Grunow) die reichhaltigen Sammlungen von Borth (Leipzig, Reisland), Lieber und von Lühmann (Berlin, Simion), Gandtner und Junghans (Berlin, Weidmannsche Buchhandlung), Gustav Hoffmann (Leipzig, Reisland), A. Hoffmann (Paderborn und Münster, Schöningh) und E. R. Müller (Kleyers Encyklopädie, Bremerhaven, Vangerow) durchgesehen und mit den von mir gefundenen Aufgaben verglichen. Mehrere dieser Sammlungen, wie Borth, Lieber und von Lühmann und E. R. Müller, widmen dem Apollonischen Kreise eigene Paragraphen. Sämtliche Aufgaben, die sich über den Gegenstand in den erwähnten Sammlungen finden, habe ich weggelassen mit Ausnahme einiger, die in die aufgestellten Gruppen gehören oder solcher, für die von mir neue Lösungen versucht worden sind.

Zunächst erinnere ich an die Lösungen einiger Grundaufgaben, die im Folgenden immer gebraucht werden.

1. Eine gegebene Strecke nach einem gegebenen Verhältnis harmonisch zu teilen.

Unter mehreren Lösungen, die für diese Aufgabe gegeben werden können, verdient folgende den Vorzug: Die zu teilende Strecke heißt AB, das Teilungsverhältnis ist $m:n$ und zunächst wird $m > n$ vorausgesetzt. Von dem einen Endpunkt A der Strecke AB us wird ein beliebiger Strahl gezogen und auf ihm m von A bis M abgetragen, dann

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die Strecke n von M aus vorwärts bis N und rückwärts bis N'. N und N' werden mit B verbunden und durch M zu NB die Parallele MA' und zu $N'B$ die Parallele MB' gezogen. A' ist der innere, B' der äußere, auf der Verlängerung von AB liegende Teilpunkt.

Vorstehende Konstruktion hat vor einer anderen, ebenso bekannten, bei welcher von A aus ein Strahl und durch B die Parallele zu ihm gezogen wird, den Vorzug, daß sie die eine Hälfte der Zeichenebene stets frei läßt. Denn ist $m < n$, so erhält man dieselben Teilpunkte, wenn man den Strahl durch B legt und mit der langen Strecke n und der kurzen m obige Konstruktion ausführt.

Ist außer dem Teilungsverhältnis $m:n$ die Strecke $A'B'$ gegeben, so findet man die Punkte B und A durch harmonische Teilung von $B'A'$ nach dem Verhältnis $(m+n):(m-n)$, wenn $m > n$ vorausgesetzt wird. B ist der innere, A der äußere Teilpunkt. Denn aus $A'A : A'B = B'A : B'B$ folgt $BB' : BA' = AB' : AA'$, und wenn $AB = c$ gesetzt wird, so ist $AA' = \frac{mc}{m+n}$, $AB' = \frac{mc}{m-n}$, mithin $AB' : AA' = (m+n):(m-n)$. Die harmonische Teilung nach dem Verhältnis $(m+n):(m-n)$ kann man so ausführen, daß man auf dem von B' ausgehenden Strahle $B'P = a$ und $B'P' = b$ abträgt und die Mitte Q von $P'P$ bestimmt. Dann verfährt man mit den Punkten B', P, P' und Q so, wie in der vorigen Konstruktion mit A, N, N' und M.

Wenn ferner T die Mitte von AB ist, so besteht die Gleichung: $\overline{TA}^2 = TA' \cdot TB'$. Denn aus $A'A : A'B = B'A : B'B$ folgt zunächst: $A'A \cdot B'B = B'A \cdot A'B$ oder: $(TA + TA') \cdot (TB' - TA) = (TA + TB') \cdot (TA - TA')$, woraus durch Ausmultiplikation obige Gleichung hervorgeht.

2. Zu drei in einer Geraden liegenden Punkten den vierten harmonischen zu finden.

Auch diese Aufgabe kann auf verschiedenen Wegen gelöst werden. Bemerkenswert ist die Lösung mit Anwendung des Satzes, nach welchem jede der drei Diagonalen des vollständigen Vierseits durch die beiden anderen harmonisch geteilt wird, weil man zu ihrer Ausführung nur des Lineals bedarf. Hier kommt in Rücksicht auf spätere Anwendungen folgende Lösung in Betracht: (Fig. 1) Das eine zugeordnete Paar sind die Punkte A und B, das andere W_c und W'_c, welche Bezeichnungen wegen des Zusammenhanges der vorliegenden Aufgabe mit einer gewissen Dreiecksaufgabe gewählt werden. Durch A und B wird ein beliebiger Kreis gelegt; die Mitte des kurzen Bogens ist D, die des langen E. Ist dann noch der innere Teilpunkt W_c von AB gegeben, so wird einer der Punkte D oder E, etwa D, mit W_c verbunden und die Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte C mit dem Kreise verlängert. Dann wird C mit E verbunden und die Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte W'_c mit der gegebenen, die Punkte A, B und W_c enthaltenden Geraden verlängert. Ähnlich findet man W_c, wenn A, B und W'_c gegeben sind. Verbindet man die Mitte E des langen Bogens mit W_c und verlängert die Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte C' mit dem Kreise, wodurch man das stumpfwinklige Dreieck ABC' erhält, so muß die Verlängerung von DC' auch durch W'_c gehen, da der letztere Punkt eindeutig bestimmt ist, wenn bei gegebenen A, B und W_c die Punkte A und B das eine zugeordnete Paar sein sollen.

Sind die Punkte W_c, W'_c und T_c, die Mitte von AB, gegeben, so findet man A und B, wenn man über $W'_c W_c$ als Durchmesser den Kreis schlägt, einen seiner Punkte

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

C mit W_c und W'_c verbindet und die Verbindungslinien bis zu ihren Schnittpunkten D und E mit der in T_c auf W'_cW_c errichteten Senkrechten verlängert. DE ist der Durchmesser des Kreises, der W'_cW_c in A und B schneidet.

Man hat also die Aufgabe gelöst: Eine gegebene Strecke W'_cW_c durch die Punkte A und B harmonisch zu teilen, so daß ein auf der Verlängerung von W'_cW_c liegender, gegebener Punkt T_c Mitte von AB wird.

Mit dieser Aufgabe hängt die Dreiecksaufgabe t_c, w_c, w'_c, eng zusammen. t_c ist die nach der Grundlinie führende Mittellinie des Dreiecks ABC, w_c die Halbierende des Innenwinkels und w'_c die des Außenwinkels an der Spitze. Durch w_c und w'_c ist das rechtwinklige Dreieck W'_cW_cC bestimmt, durch t_c der Punkt T_c, also ist auch der Durchmesser DE des dem Dreieck ABC umschriebenen Kreises mit dem Zentrum M bestimmt, mithin auch die Grundlinie AB. Der Kreis mit dem Durchmesser W'_cW_c und dem Mittelpunkt M_c ist der Apollonische Kreis, der $BA = c$ nach dem Verhältnis $a:b$ der der Grundlinie anliegenden Seiten harmonisch teilt.

Auf vorstehende Dreiecksaufgabe lassen sich zahlreiche andere Aufgaben zurückführen.

3. Zwei gegebene Strecken so aufeinander zu legen, daß ihre Endpunkte zugeordnete harmonische Paare sind.

Diese Aufgabe löst Petersen (Methoden und Theorien zur Auflösung geometrischer Konstruktionsaufgaben, Kopenhagen 1879. Aufgabe 307, S. 59) dadurch (Fig. 2), daß er zunächst die vierte Ecke F des Parallelogramms $FDW_cW'_c$ zeichnet. Dann ist $\sphericalangle FW'_cE$ ein Rechter. Legt man also AB, die eine der gegebenen Strecken, hin und durch ihre Endpunkte A und B einen beliebigen Kreis, dessen auf AB senkrechter Durchmesser DE ist, und trägt in D die andere gegebene Strecke $FD = W_cW'_c$ unter rechtem Winkel an ED an, so schneidet der Kreis über FE als Durchmesser die Verlängerung von AB in W'_c; die Verbindungslinie W'_cE schneidet den durch A und B gehenden Kreis in C; CD schneidet AB in W_c.

Petersen gibt an derselben Stelle noch die Möglichkeit einer anderen Lösung an, welche auf der in der ersten Fundamentalaufgabe abgeleiteten Formel $\overline{TA}^2 = TA' \cdot TB'$ beruht. Sind nämlich (Fig. 3) $AB = c$ und $A'B' = c'$ gegeben, so kennt man — und das ist die Petersensche Andeutung — wegen $TB' - TA' = c'$ Produkt und Differenz von TB' und TA'; also lassen sich TB' und TA' selbst mit Hilfe des Tangentensatzes finden. Denn zeichnet man einen Kreis mit dem Mittelpunkt T' und dem Radius $\frac{c'}{2}$, legt an ihn eine Tangente von der Länge $\frac{c}{2}$ und zieht von dem nicht auf dem Kreise liegenden Endpunkte T der Tangente die Sekante durch den Mittelpunkt des Kreises, so ist A' der T nähere, B' der fernere Endpunkt des Durchmessers. Ein zweiter Kreis um T als Mittelpunkt und mit dem Radius $\frac{c}{2}$ liefert A und B. Man kann also kürzer sagen: Es werden zwei sich rechtwinklig schneidende Kreise mit dem Radien $\frac{c}{2}$ und $\frac{c'}{2}$ gezeichnet und die Zentrale gezogen. Die Endpunkte des einen Durchmessers von der Länge c sind A und B, die des anderen von der Länge c' sind A' und B'.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zieht man in dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC die bis zur Hypotenuse fortgesetzte Halbierende CA' des rechten Winkels und die Außenwinkelhalbierende CB', so sind, wenn B' auf der Verlängerung von AB liegt, A, B und A', B' zugeordnete harmonische Paare; überdies stehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ABC und $A'B'C$ in der Beziehung zueinander, daß die Katheten des einen die Winkelhalbierenden des anderen sind. Daß dann die Radien TC und $T'C$ einen rechten Winkel bilden, läßt sich einfach beweisen, denn ist $\sphericalangle CAB = \alpha$, so ist $\sphericalangle CTB = 180^0 - 2\alpha$ und $\sphericalangle CT'B = 2\alpha - 90^0$.

Eine dritte Lösung der vorliegenden Aufgabe ist folgende: (Fig. 4) $AB = c$ und $BF = W_c W'_c$ werden unter rechtem Winkel aneinander angetragen und der Kreis über AF als Durchmesser geschlagen. Der auf AB senkrechte Durchmesser ist DE, der auf BF senkrechte CG. CD schneidet AB in W_c und die Verlängerung von EC schneidet die von AB in W'_c. Die Richtigkeit der Konstruktion ist unmittelbar ersichtlich, denn zunächst sind A, B und W_c, W'_c zugeordnete harmonische Punktepaare; ferner ist die Höhe des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks $W'_c W_c C$ halb so lang wie BF. Diese Lösung habe ich dadurch gefunden, daß ich die der Dreiecksaufgabe c, h_c, $\alpha - \beta$ (Grundlinie, Höhe und Differenz der Winkel an der Grundlinie), welche sich z. B. bei Fischer (S. 149) und bei Borth (S. 47) findet, für $\alpha - \beta = 90^0$ spezialisierte, d. h. für solche Dreiecke ABC, in denen $w_c = w'_c$ ist.

Noch ist zu erwähnen, daß die Lösung der vorliegenden Aufgabe auch auf die der ersten Grundaufgabe zurückgeführt werden kann. Denn sind c und c' die gegebenen Strecken und $\varkappa$ das gesuchte Teilungsverhältnis, das > 1 vorausgesetzt wird, so besteht, wenn c nach dem Verhältnis $\varkappa$ harmonisch geteilt ist, zwischen c, c' und $\varkappa$ die Relation:

$$\frac{c}{c'} = \frac{\varkappa^2 - 1}{2\varkappa}.$$

Nur die positive Wurzel $\varkappa = \dfrac{c + \sqrt{c^2 + c'^2}}{c'}$ der quadratischen Gleichung $\varkappa^2 - \dfrac{2c\varkappa}{c'} - 1 = 0$ ist hier brauchbar. Nach jenem Verhältnis ist die Strecke c harmonisch zu teilen. Man kann sich jedoch auf die Aufsuchung des inneren Teilpunktes beschränken und von ihm aus c' auf c abtragen. Letztere Konstruktion ist in Fig. 5 ausgeführt. $AB = c$ und $AC = c'$ sind in A unter rechtem Winkel aneinander angetragen. Alsdann sind auf der Verlängerung von $BC = \sqrt{c^2 + c'^2}$ $CD = c$ und $DE = c'$ aufgetragen. Zu EA ist durch D die Parallele gezogen, die AB in B' schneidet. $B'A'$ ist $= c'$.

Die vorliegende Fundamentalaufgabe löst zugleich die Dreiecksaufgabe: c, w_c, w'_c. Auch auf diese Aufgabe sind viele andere reduzierbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Dreieck.

A. Das Verhältnis a : b.

a) Die Basis c.

Ausgehend von den Fundamentalaufgaben c, h_c, $a:b$; c, t_c, $a:b$; c, w_c, $a:b$ und c, w'_c, $a:b$ habe ich zunächst unter die gegebenen Stücke eine Strecke aufgenommen, welche in der neueren Planimetrie, die in den letzten zweibis drei Jahrzehnten entstanden ist, und in der Brocardschen Geometrie eine Rolle spielt. Das ist die Symmediane, die Winkelgegentransversale der Mittellinie (Mediane), d. h. die von der Spitze des Dreiecks nach der Grundlinie gezogene Strecke, die mit der einen der Grundlinie anliegenden Seite denselben Winkel bildet, wie die Mittellinie mit der anderen. Sie heißt t'_c; ihr auf der Grundlinie gelegener Endpunkt T'_c.

Aus der Erklärung der Symmediane folgt, daß die 4 Punkte T_c, der Endpunkt der Mittellinie t_c, W_c, der Endpunkt der Innenwinkelhalbierenden w_c, T'_c und W'_c, der Endpunkt der Außenwinkelhalbierenden w'_c, harmonische Punkte sind; T_c und T'_c bilden das eine zugeordnete Paar, W_c und W'_c das andere. Dies gilt allgemein für ein beliebiges Paar Winkelgegentransversalen t und t' mit den auf der Grundlinie AB liegenden Endpunkten T und T'; die Punkte T und T' sind das eine zugeordnete Paar, W_c und W'_c das andere. Und der durch die Spitze C des Dreiecks ABC gehende Apollonische Kreis, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, ist identisch mit dem Apollonischen Kreise, der TT' nach dem Verhältnis $t:t'$ harmonisch teilt.

Für jedes Paar Winkelgegentransversalen CT und CT' im Dreieck ABC besteht der Satz:

$$\frac{TA}{TB} \cdot \frac{T'A}{T'B} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2.$$

Dieser Satz wird in dem Werke von Fuhrmann, Synthetische Beweise planimetrischer Sätze (Berlin, Simion, 1890), S. 94, wie folgt, bewiesen: Man zieht durch B bis zum Schnittpunkt S mit der Verlängerung von AC die Parallele BS zu TC und durch A bis zum Schnittpunkt S' mit der Verlängerung von BC die Parallele AS' zu $T'C$; dann ist:

$$\frac{TA}{TB} = \frac{CA}{CS} \text{ und } \frac{T'A}{T'B} = \frac{CS'}{CB};$$

also durch Multiplikation:

$$\frac{TA}{TB} \cdot \frac{T'A}{T'B} = \frac{CA}{CS} \cdot \frac{CS'}{CB}.$$

Nun ist $\triangle BCS \sim \triangle ACS'$; also:

$$\frac{CS'}{CS} = \frac{CA}{CB}.$$

Setzt man den für das Verhältnis $\frac{CS'}{CS}$ gefundenen Wert in die letzte Gleichung ein, so ist der Satz bewiesen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ich gebe für obigen Satz folgenden Beweis, der sich von dem vorigen dadurch unterscheidet, daß er keine Hilfslinien benutzt und überdies das Verhältnis der Winkelgegentransversalen zu berechnen gestattet. In den Dreiecken TBC und $AT'C$ sind die Winkel bei C einander gleich, und da die Dreiecke gleichhoch sind, so besteht die Relation:

$$\frac{CB \cdot CT}{CA \cdot CT'} = \frac{BT}{AT'}.$$

Da ferner auch in den gleichhohen Dreiecken $T'BC$ und ATC die Winkel bei C einander gleich sind, so hat man:

$$\frac{CB \cdot CT'}{CA \cdot CT} = \frac{BT'}{AT}.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich:

$$\left(\frac{CB}{CA}\right)^2 = \frac{BT}{AT} \cdot \frac{BT'}{AT'} \text{ oder:}$$

$$\frac{TA}{TB} \cdot \frac{T'A}{T'B} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2.$$

Damit ist der Beweis geliefert.

Dividiert man obige Gleichungen durcheinander, so erhält man:

$$\left(\frac{CT}{CT'}\right)^2 = \frac{BT}{BT'} \cdot \frac{AT}{AT'}.$$

Wendet man die in den letzten Gleichungen enthaltenen Sätze zunächst auf die beiden Winkelhalbierenden w an, welche ihre eigenen Gegentransversalen sind, so folgt aus:

$$\left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \frac{TA}{TB} \cdot \frac{T'A}{T'B} :$$

$$\frac{CA}{CB} = \pm \frac{WA}{WB}.$$

Das positive Vorzeichen gilt für die Außenwinkelhalbierende w'_c, weil W'_cA und W'_cB gleiche Richtung haben; das negative Zeichen gilt für die Innenwinkelhalbierende w_c, weil W_cA und W_cB entgegengesetzte Richtung haben. Es ist also:

$$+\frac{W'_cA}{W'_cB} = -\frac{W_cA}{W_cB}$$

oder das Doppelverhältnis:

$$\frac{W'_cA}{W'_cB} : \frac{W_cA}{W_cB} \text{ ist} = -1.$$

Die zweite Gleichung:

$$\left(\frac{CT}{CT'}\right)^2 = \frac{BT}{BT'} \cdot \frac{AT}{AT'}$$

führt für beide Winkelhalbierende zu der Identität $1 = 1$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bei Anwendung derselben Sätze auf Mittellinie und Symmediane ergibt sich aus:

$$\left(\frac{CA}{CB}\right)^2 = \frac{TA}{TB} \cdot \frac{T'A}{T'B} :$$

$$\frac{T'_c A}{T'_c B} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2,$$

d. h. die Symmediane teilt die Grundlinie im Verhältnis der Quadrate der anliegenden Seiten. Dieser Satz ist wichtig, weil aus ihm hervorgeht, daß durch c und $a:b$ der Punkt T'_c bestimmt ist.

Die Spezialisierung des zweiten Satzes ergibt zunächst:

$$\frac{t_c^2}{t'^2_c} = \frac{c^2}{4 \cdot BT'_c \cdot AT'_c}.$$

Da nun $BT'_c + AT'_c = c$ und, wie oben gefunden:

$$\frac{BT'_c}{AT'_c} = \frac{a^2}{b^2}$$

ist, so erhält man:

$$BT'_c = \frac{a^2 c}{a^2 + b^2},$$

$$AT'_c = \frac{b^2 c}{a^2 + b^2},$$

mithin:

$$\frac{t_c^2}{t'^2_c} = \frac{(a^2 + b^2)^2}{4 a^2 b^2},$$

$$\frac{t_c}{t'_c} = \frac{a^2 + b^2}{2 ab},$$

$$\frac{t_c + t'_c}{t_c - t'_c} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2;$$

und unter der Voraussetzung, daß $a > b$ ist:

$$\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{\frac{t_c + t'_c}{t_c - t'_c}},$$

folglich:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{t_c + t'_c} + \sqrt{t_c - t'_c}}{\sqrt{t_c + t'_c} - \sqrt{t_c - t'_c}}$$

$$= \frac{t_c + \sqrt{t_c^2 - t'^2_c}}{t'_c}.$$

Aus der Formel: $\frac{t_c}{t'_c} = \frac{a^2 + b^2}{2 ab}$ geht übrigens hervor, daß $t_c > t'_c$ ist, wenn a und b voneinander verschieden sind.

Durch die Dreiecksseiten a, b, c allein ausgedrückt ergibt sich für t'_c der Wert:

$$t'_c = \frac{ab\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}{a^2 + b^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Formel: $\frac{t_c}{t'_c} = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ wird in dem zitierten Werke Fuhrmanns auf Seite 100 in folgender Weise abgeleitet: Gebrauch gemacht wird von dem auf Seite 93 bewiesenen Satze: Das Produkt zweier Winkelgegentransversalen, die eine bis zur Gegenseite, die andere bis zum Umkreise gerechnet, ist konstant, nämlich gleich dem Produkt der einschließenden Seiten. (Dieser leicht beweisbare Satz findet sich auch — in anderer Formulierung — in dem an unserer Realschule eingeführten Lehrbuche.)

Verlängert wird die Mittellinie t_c; der auf dem Umkreise des Dreiecks ABC liegende Endpunkt der Verlängerung heißt D; dann ist nach obigem Satze:

$$t_c'(t_c + T_cD) = ab.$$

T_cD aber ist $= \frac{c^2}{4t_c}$, also ergibt sich durch Einsetzung in die vorige Gleichung:

$$\frac{t'_c(4t_c^2 + c^2)}{4t_c} = ab,$$

oder, weil $4t_c^2 + c^2 = 2(a^2+b^2)$ ist:

$$\frac{t_c}{t'_c} = \frac{a^2+b^2}{2ab}.$$

Der eben benutzte Satz läßt sich umkehren. Seine Umkehrung heißt: Ist das Produkt zweier von der Spitze des Dreiecks ausgehenden Strecken, von denen die eine bis zur Grundlinie, die andere bis zum Umkreise führt, gleich dem Produkte der der Grundlinie anliegenden Seiten, so sind die Strecken Winkelgegentransversalen. Auch von letzterem Satze läßt sich eine Anwendung machen. Verbindet man nämlich die Spitze C des Dreiecks ABC mit dem anderen Schnittpunkte U'_c des Apollonischen und des Umkreises und nennt r_c den Apollonischen, r den Umkreisradius und $\triangle$ die Dreiecksfläche, so ist $r = \frac{abc}{4\triangle}$, $r_c = \frac{abc}{a^2-b^2}$ und da sich die beiden Kreise rechtwinklig schneiden (wie nachher bei Einführung der Winkelgegentransversale der Höhe gezeigt wird):

$$\overline{CU'_c}^2 = \frac{4r^2r_c^2}{r^2+r_c^2} = \frac{4a^2b^2c^2}{16\triangle^2 + (a^2-b^2)^2}.$$

Aber $16\triangle^2 = [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = 2(a^2+b^2)c^2 - c^4 - (a^2-b^2)^2$, mithin: $16\triangle^2 + (a^2-b^2)^2 = 4c^2t_c^2$; also ist: $t_c \cdot CU'_c = ab$; d. h. die Verlängerung der Symmediane $CT'_c = t'_c$ geht durch den Schnittpunkt U'_c des Apollonischen und des Umkreises; folglich ist der Treffpunkt U_c der Verlängerung der Mittellinie $CT_c = t_c$ mit dem Umkreise der in bezug auf die Mittelsenkrechte zur Grundlinie AB oder in bezug auf den Umkreisdurchmesser DE symmetrische Punkt von U'_c. (Auf vorstehenden Satz bin ich bei der Zeichnung der Figuren 6 und 7 gekommen.)

Für unsere Zwecke von geringerer Bedeutung als die Symmediane, aber doch auch von Interesse, ist die Winkelgegentransversale der Höhe, also die von der Spitze nach der Grundlinie führende Strecke $CH'_c = h'_c$, die mit der einen der Grundlinie anliegenden Seite denselben Winkel bildet, wie die Höhe mit der anderen. Daraus folgt, daß auf h' der Umkreismittelpunkt M des Dreiecks ABC liegt, falls das Dreieck spitzwinklig ist für ein bei C rechtwinkliges Dreieck fallen die Punkte M, H'_c und T_c zusammen, und

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

wenn das Dreieck stumpfwinklig ist, liegt M auf der Verlängerung von h'_c. Ferner ist der von der Höhe und ihrer Gegentransversale gebildete Winkel $= \alpha - \beta$, nämlich doppelt so groß wie der Winkel zwischen Höhe und Innenwinkelhalbierender w_c; und wenn M_c der Mittelpunkt des Apollonischen Kreises mit dem Durchmesser $W'_c W_c$ ist, so ist der von dem Apollonischen Radius CM_c mit der Grundlinie gebildete Winkel $CM_c A$ als Außenwinkel an der Spitze des gleichschenkligen Dreiecks $CW'_c M_c$ auch $= \alpha - \beta$.

Mithin ist das Dreieck $M_c H'_c C$ rechtwinklig bei C; die Höhe h_c dieses rechtwinkligen Dreiecks ist auch die Höhe des Dreiecks ABC; die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist h'_c, die andere ist der Apollonische Radius r_c, sodaß r_c, h_c und h'_c ein Datum bilden.

Bezeichnet man zur Berechnung des Teilungsverhältnisses $\frac{H'_c B}{H'_c A}$ die von der Höhe h_c auf der Grundlinie gebildeten Abschnitte mit p und q, sodaß $H_c B = p$, $H_c A = q$ und $\frac{H_c B}{H_c A} = \frac{p}{q}$ ist, so hat man nach dem oben bewiesenen Satze:

$$\frac{q}{p} \cdot \frac{H'_c A}{H'_c B} = \frac{b^2}{a^2},$$

$$\text{also:} \quad \frac{H'_c B}{H'_c A} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{q}{p} = \frac{a^2 (c^2 + b^2 - a^2)}{b^2 (c^2 - b^2 + a^2)}.$$

Das Bestehen dieser Gleichung ist der Grund, aus welchem die Winkelgegentransversale h'_c für unsere Zwecke von geringerer Bedeutung ist als die Symmediane, denn durch c und $a:b$ ist der Punkt H'_c nicht bestimmt.

Zur Berechnung des Verhältnisses $\frac{h_c}{h'_c}$ hat man zunächst:

$$\frac{h_c^2}{h'^2_c} = \frac{pq}{BH'_c \cdot AH'_c};$$

$$\text{und da:} \quad BH'_c = \frac{a^2 qc}{a^2 q + b^2 p},$$

$$AH'_c = \frac{b^2 pc}{a^2 q + b^2 p},$$

$$\text{so ist:} \quad \frac{h_c^2}{h'^2_c} = \frac{(a^2 q + b^2 p)^2}{a^2 b^2 c^2},$$

$$\text{folglich:} \quad \frac{h_c}{h'_c} = \frac{a^2 q + b^2 p}{abc}$$

$$= \frac{(a^2 + b^2) c^2 - (a^2 - b^2)^2}{2abc^2}.$$

Derselbe Wert muß sich für:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{pq + h_c^2}{ab} \quad \text{ergeben.}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$pq = \frac{c^4 - (a^2 - b^2)^2}{4c^2},$$

$$h_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 - (a^2 - b^2)^2}{4c^2},$$

mithin:

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}{2abc^2}.$$

Für h'_c erhält man den Wert:

$$h'_c = \frac{abc\sqrt{2(a^2 + b^2)c^2 - c^4 - (a^2 - b^2)^2}}{(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}$$

oder:

$$h'_c = \frac{abc\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}}{(a^2 + b^2)c^2 - (a^2 - b^2)^2}.$$

Die gegenseitige Lage der Punkte A, B, H_c, H'_c, T_c, T'_c, W_c und W'_c betreffend ist zuerst zu bemerken, daß ohne die Allgemeinheit zu beschränken $a > b$ vorausgesetzt werden darf. Diese Voraussetzung soll im Folgenden stets gemacht werden. Für ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Fig. 6) ist der von a und h'_c gebildete Winkel kleiner als der zwischen a und t_c, da der Umkreismittelpunkt M innerhalb des Dreiecks und auf der Mittelsenkrechten zu AB liegt. Da ferner $T_cB < W_cB$ ist, so ist auch $\sphericalangle a, t_c < \frac{\gamma}{2}$, und weil $\sphericalangle a, h'_c < \sphericalangle a, t_c$ ist, so muß auch $\sphericalangle b, h_c < \sphericalangle b, t'_c$ sein. Die Folge der 8 Punkte ist also die nachstehende:

$$W'_c,\ A,\ H_c,\ T'_c,\ W_c,\ T_c,\ H'_c,\ B.$$

Für ein bei C rechtwinkliges Dreieck fällt H'_c mit T_c und T'_c mit H_c zusammen; also hat man jetzt die Punktfolge:

$$W'_c,\ A,\ H_c(T'_c),\ W_c,\ T_c(H'_c),\ B.$$

Ist das Dreieck bei C stumpfwinklig (Fig. 7), so ist, weil jetzt M außerhalb des Dreiecks ABC, aber auch auf der Mittelsenkrechten zu AB liegt, $\sphericalangle a, t_c < \sphericalangle a, h'_c$, also $\sphericalangle b, t'_c < \sphericalangle b, h_c$ und die Punktfolge ist die:

$$W'_c,\ A,\ T'_c,\ H_c,\ W_c,\ H'_c,\ T_c,\ B.$$

Bei einem in A rechtwinkligen Dreieck fällt H_c mit A und H'_c mit B zusammen. Punktfolge: W'_c, $A(H_c)$, T'_c, W_c, T_c, $B(H'_c)$.

Ist das Dreieck ABC bei A stumpfwinklig, so sind 3 Fälle zu unterscheiden:

1. $\alpha - \beta < 90^0$. Punktfolge: W'_c, H_c, A, W_c, T_c, B, H'_c.

2. $\alpha - \beta = 90^0$. Dieser Fall ist bemerkenswert, weil der Punkt H'_c im Unendlichen liegt, wie sich auch aus der Formel $\frac{h_c}{h'_c} = \cos(\alpha - \beta)$ ergibt. H_c fällt mit dem Mittelpunkte M_c des Apollonischen Kreises zusammen. Punktfolge: $W'_c, H_c(M_c), A, T'_c, W_c, T_c, B, H'_c \infty$.

3. $\alpha - \beta > 90^0$. Jetzt liegt H'_c auf derselben Seite wie H_c und die Punktfolge ist diese: H'_c, W'_c, H_c, A, T'_c, W_c, T_c, B.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu bemerken ist bezüglich der Länge der Strecken w_c und w'_c, daß für alle Dreiecke in denen $\alpha - \beta < 90^0$ ist, $w'_c > w_c$ ist, weil dann $\frac{\alpha - \beta}{2}$ kleiner ist als sein Komplement. Für $\alpha - \beta = 90^0$ ist $w'_c = w_c$ und für $\alpha - \beta > 90^0$: $w'_c < w_c$. Sollen die Längen sämtlicher Strecken untereinander verglichen werden, so sind weitergehende Unterscheidungen notwendig. Es genügt jedoch, sich auf einen besonderen Fall zu beschränken. Ist nämlich im spitzwinkligen Dreieck ABC $\beta > \frac{\alpha - \beta}{2}$, d. h. $3\beta > \alpha$, so ist $w'_c > a > h'_c > t_c > w_c > t'_c > h_c$.

Die Einführung neuer Strecken bildet die eine Möglichkeit zur Vermehrung der Aufgaben. Eine andere besteht darin, für das Verhältnis $a:b$ außer den schon bekannten Quotienten $u:v$, $u':v'$ und $h_b:h_a$ (u, v sind die von W_c, u', v' die von W'_c auf AB bestimmten Abschnitte, h_b und h_a die von B, bez. A ausgehenden Höhen) neue, dem Quotienten $a:b$ gleiche Quotienten zu finden. Ein solches Verhältnis ist das oben erhaltene: $\frac{a}{b} = \frac{t_c + \sqrt{t_c^2 - t'^2_c}}{t'_c}$. Zu weiteren, dem Verhältnis $a:b$ gleichen Quotienten gelangt man durch Einführung der von den Endpunkten der Grundlinie AB auf die Winkelhalbierenden w_c und w'_c gefällten Lote. Sind L_a und L_b die Fußpunkte der Senkrechten von A und B auf w_c und $AL_a = l_a$, $BL_b = l_b$, so ist $a:b = l_b:l_a$. Überdies teilen L_a und L_b w_c harmonisch. Denn es besteht der Satz: (Fuhrmann, S. 58) Fällt man von zwei Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Halbierungslinie des Winkels an der dritten Ecke, so wird die Winkelhalbierende durch die Fußpunkte harmonisch geteilt. Zum Beweise und zugleich zur Bestimmung des Teilungsverhältnisses hat man: $W_cL_b : W_cL_a = l_b : l_a = a:b$ und $CL_b : CL_a$ auch $= a:b$; also wird L_bL_a durch W_c und C nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch geteilt. Folglich wird $CW_c = w_c$ durch L_a und L_b nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch geteilt; der innere Teilpunkt ist L_a, der äußere L_b. Durch w_c und $a:b$ sind also die Punkte L_a und L_b bestimmt, und die in ihnen auf w_c, und zwar auf verschiedenen Seiten dieser Strecke, errichteten Senkrechten sind geometrische Örter für A, bez. B.

Haben L'_a, L'_b, l'_a und l'_b entsprechende Bedeutung für die Außenwinkelhalbierende w'_c, so ist auch $a:b = l'_b : l'_a$ und $CW'_c = w'_c$ wird durch L'_a und L'_b nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch geteilt; der innere Teilpunkt ist L'_a, der äußere L'_b. Durch w'_c und $a:b$ sind also letztere Punkte bestimmt, und die in ihnen auf w'_c auf beiden Seiten dieser Strecke errichteten Senkrechten sind gleichfalls geometrische Örter für A, bez. B.

Ein weiteres Mittel zur Vermehrung der dem Verhältnis $a:b$ gleichen Quotienten bildet die Einführung der Radien von Kreisen, deren Mittelpunkte auf dem Umfang des Dreiecks liegen und die die Seiten, bez. ihre Verlängerungen berühren. Diese Kreise sind von Harmuth (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Jahrgang XIII, 1907, S. 34) behandelt worden. Sie stellen das Bindeglied dar zwischen dem Inkreis und den angeschriebenen Kreisen des Dreiecks und den Kreisen, die ihre Mittelpunkte in den Ecken des Dreiecks haben und die Gegenseiten berühren, deren Radien also die Höhen sind. Die Verwendung dieser Harmuthschen Kreise erweist sich auch bei mehreren Konstruktions- und Berechnungsaufgaben als nützlich. Solcher Kreise gibt es sechs; ihre Mittelpunkte sind die auf den Seiten des Dreiecks gelegenen Endpunkte W_a, W_b, W_c;

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

W'_a, W'_b und W'_c der sechs Winkelhalbierenden w_a, w_b, w_c; w'_a, w'_b, w'_c. W_a und W_b sind die auf a, bez. b liegenden Endpunkte der Winkelhalbierenden w_a und w_b; W'_a und W'_b haben entsprechende Bedeutung für die Außenwinkelhalbierenden w'_a und w'_b. Den Radius des Kreises mit dem Mittelpunkt W_a nennt Harmuth ϱ'_a, den des Kreises mit dem Mittelpunkt W'_a ϱ''_a; entsprechende Bedeutung haben ϱ'_b, ϱ'_c; ϱ''_b und ϱ''_c. Die Fläche des Dreiecks ABC wird mit $\triangle$ bezeichnet, und es wird vorausgesetzt, daß $a > b > c$ ist.

Man hat: $2\triangle = (b+c)\varrho'_a = (a+c)\varrho'_b = (a+b)\varrho'_c$;

also:
$$b+c = \frac{2\triangle}{\varrho'_a},$$
$$a+c = \frac{2\triangle}{\varrho'_b}$$
und:
$$a+b = \frac{2\triangle}{\varrho'_c}.$$

Ferner bestehen die Gleichungen:
$$b-c = \frac{2\triangle}{\varrho''_a},$$
$$a-c = \frac{2\triangle}{\varrho''_b}$$
und:
$$a-b = \frac{2\triangle}{\varrho''_c}.$$

Daraus folgt:
$$\frac{1}{\varrho'_a} - \frac{1}{\varrho'_b} + \frac{1}{\varrho''_c} = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho'_a} - \frac{1}{\varrho'_c} + \frac{1}{\varrho''_b} = 0,$$
$$\frac{1}{\varrho'_b} - \frac{1}{\varrho'_c} + \frac{1}{\varrho''_a} = 0$$
und:
$$\frac{1}{\varrho''_a} - \frac{1}{\varrho''_b} + \frac{1}{\varrho''_c} = 0.$$

Diese Relationen zeigen, daß die sechs Radien nicht voneinander unabhängig sind, sondern viermal zu je dreien Data liefern. Nur die letzte Gleichung findet sich in der Harmuthschen Arbeit.

Aus den obigen Gleichungen lassen sich zahlreiche andere ableiten, namentlich in Verbindung mit dem Inkreisradius, den Radien der angeschriebenen Kreise und den Höhen. Uns interessiert jetzt nur die Beziehung:
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\varrho''_c}{\varrho'_c},$$
woraus:
$$\frac{a}{b} = \frac{\varrho''_c + \varrho'_c}{\varrho''_c - \varrho'_c}$$
hervorgeht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn wir nun zur Lösung von Aufgaben übergehen, so können wir zunächst folgenden Satz aussprechen:

Satz: Der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks $W'_c W_c C$ ist der Apollonische Kreis, der $BA = c$ im Verhältnis:

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{t_c + \sqrt{t_c^2 - t'^2_c}}{t'_c} = \frac{l_b}{l_a} = \frac{l'_b}{l'_a} = \frac{\varrho''_c + \varrho'_c}{\varrho''_c - \varrho'_c}$$

harmonisch teilt; der innere Teilpunkt ist W_c, der äußere W'_c. $W'_c W_c$ wird im Verhältnis:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{u-v} = \frac{u'+v'}{c} = \frac{h_b+h_a}{h_b-h_a} = \sqrt{\frac{t_c+t'_c}{t_c-t'_c}} = \frac{l_b+l_a}{l_b-l_a} = \frac{l'_b+l'_a}{l'_b-l'_a} = \frac{\varrho''_c}{\varrho'_c}$$

harmonisch geteilt; der innere Teilpunkt ist A, der äußere B.

In den folgenden Aufgaben sollen außer c und $a:b$ unter vorläufiger Außerachtlassung der Winkelgegentransversale h'_c die Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, t_a und t_b vorkommen. $t_a = AT_a$ und $t_b = BT_b$ sind die nach den Seiten a, bez. b führenden Mittellinien. Zieht man durch C zu $T_a A$ und zu $T_b B$ Parallelen, die die verlängerte Grundlinie bez. in P_a und P_b schneiden, so ist $CP_a = 2t_a$, $CP_b = 2t_b$ und $P_a A = AB = BP_b = c$. Durch c allein sind also die Punkte A, B, T_c, P_a und P_b bestimmt, durch c und $a:b$ noch W_c, W'_c und T'_c.

I. Außer c und $a:b$ ist eine der Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c und t_a gegeben.

1. c, h_c, $a:b$. Der Apollonische Kreis, der $BA = c$ nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, wird mit der Parallelen im Abstande h_c von AB geschnitten. Die Aufgabe hat also zwei, eine oder keine Lösung, je nachdem die Parallele den Kreis schneidet, berührt oder verfehlt. Andere lösbare Aufgaben sind: c, h_c, $u:v$; c, h_c, $u':v'$; c, h_c, $h_b:h_a$; c, h_c, $t_c:t'_c$; c, h_c, $l_b:l_a$; c, h_c, $l'_b:l'_a$ und c, h_c, $\varrho''_c:\varrho'_c$. Mit Hilfe eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks werden folgende Aufgaben gelöst: $c:h_c$, a, b; $c:h_c$, h_b, h_a; $c:h_c$, t_c, t'_c; $c:h_c$, l_b, l_a; $c:h_c$, l'_b, l'_a und $c:h_c$, ϱ''_c, ϱ'_c. Die Aufgaben $c:h_c$, u, v und $c:h_c$, u', v' lassen sich auf u, v, h_c, bez. u', v', h_c zurückführen, also ohne Verwendung eines ähnlichen Dreiecks lösen. Ist g irgend ein die Größe des gesuchten Dreiecks bestimmendes Stück, so sind auch die Aufgaben g, $c:h_c$, $a:b$; g, $c:h_c$, $u:v$ usw. bei Benutzung eines ähnlichen Dreiecks lösbar. Entsprechende Bemerkungen gelten für die Aufgaben in dieser und den folgenden Gruppen.

Zu erwähnen ist die Aufgabe $c:h_c$, a, b. Sie läßt sich auch ohne Verwendung des Apollonischen Kreises lösen. Borth (S. 111) gibt folgende Analysis:

Auf AB in A und auf BC in B werden Senkrechte errichtet, die sich in D schneiden. Dann ist $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ADB$. Ist nun H_c der Fußpunkt der Höhe h_c und $c:h_c = m:n$, so ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $H_c BC$ und ADB:

$$CH_c : AB = CB : BD,$$

oder: $$n : m = a : BD,$$

sodaß sich BD als vierte Proportionale zu n, m und a zeichnen läßt. Daher ist auch das rechtwinklige Dreieck BCD konstruierbar und — was hervorgehoben zu werden verdient — der Kreis über BD als Durchmesser stellt den geometrischen Ort für die Spitzen A aller Dreiecke ABC dar, welche die Seite $BC = a$ zur gemeinschaftlichen Basis haben und für die das Verhältnis einer anderen Seite c zu ihrer Höhe h_c konstant ist. Dieser Kreis wird von dem Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius b in A geschnitten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. c, t_c, $a:b$. Außer der bekannten ist folgende Apollonische Lösung möglich: Über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten c und $2t_c$ als Durchmesser wird ein Halbkreis geschlagen und dann der Apollonische Kreis gezeichnet, der die Hypotenuse nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch teilt. Das dadurch bestimmte zweite rechtwinklige Dreieck hat die Katheten $a+b$ und $a-b$.

Der besondere Fall a, b, $c:t_c$ der allgemeinen Aufgabe g, $a:b$, $c:t_c$ läßt sich ohne Benutzung eines ähnlichen Dreiecks lösen, wenn man $BC=a$ um sich selbst bis D verlängert und den Apollonischen Kreis schlägt, der $DB=2a$ im Verhältnis $2t_c:c$ harmonisch teilt. Ein Kreisbogen um C als Mittelpunkt mit dem Radius b liefert A. Eine zweite Lösung ist die Umkehrung der vorigen für c, t_c, $a:b$. Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $a+b$ und $a-b$ wird gezeichnet und über der Hypotenuse als Durchmesser ein Halbkreis geschlagen. Alsdann wird der Apollonische Kreis gezeichnet, der die Hypotenuse nach dem Verhältnis $c:2t_c$ harmonisch teilt. Die Katheten des entstehenden zweiten rechtwinkligen Dreiecks sind c und $2t_c$.

3. c, t'_c, $a:b$. Ist $a:b=m:n$ und $m^2:n^2=k:l$, so hat man BA nach dem Verhältnis $k:l$ innen zu teilen. Der A nähere Teilpunkt ist T'_c. Das Verhältnis $k:l$ findet man z. B. dadurch, daß man das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten m und n zeichnet. Die von der Höhe auf der Hypotenuse gebildeten Abschnitte verhalten sich wie $k:l$.

Man kann die Aufgabe auch auf die vorige reduzieren. Ist $a:b=m:n$, so hat man wegen:

$$\frac{t_c}{t'_c}=\frac{a^2+b^2}{2ab}:$$

$$2n:\left(m+\frac{n^2}{m}\right)=t'_c:t_c;$$

man findet also t_c als vierte Proportionale zu $2n$, $m+\frac{n^2}{m}$ und t'_c. Da ferner:

$$\frac{t_c+t'_c}{t_c-t'_c}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

ist, so folgt, wenn man das Verhältnis:

$$\frac{(m+n)^2}{(m-n)^2}=\frac{k}{l}$$

setzt: $$\frac{t_c+t'_c}{t_c-t'_c}=\frac{k}{l};$$

oder: $$\frac{t_c}{t'_c}=\frac{k+l}{k-l}.$$

Man hat also zunächst ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $m+n$ und $m-n$ zu zeichnen. Durch Fällung der Höhe findet man k und l. Schließlich erhält man t_c als vierte Proportionale zu $k-l$, $k+l$ und t'_c.

Weil endlich: $M_cB:M_cA=(r_c+u):(r_c-v)=\left(\frac{abc}{a^2-b^2}+\frac{ac}{a+b}\right):\left(\frac{abc}{a^2-b^2}-\frac{bc}{a+b}\right)=$ $=a^2:b^2=T'_cB:T'_cA$ ist, so wird BA innen in T'_c und außen in M_c nach dem Verhältnis $a^2:b^2$ harmonisch geteilt. Hat man also den Apollonischen Kreis geschlagen, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, so findet man T'_c als vierten, M_c zugeordneten, harmonischen Punkt zu B, A und M_c.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Aufgabe, zwei Strecken zu finden, die sich wie die Quadrate zweier gegebenen Strecken a und b verhalten, kann allgemein für beliebig hohe ganze positive und negative Exponenten wie folgt gelöst werden: (Fig. 8) Auf der langen Strecke $a = AB$ wird die kurze b von A bis C abgetragen. Dann werden durch B und C unter beliebigem Winkel Parallele gezogen und auf der durch B gehenden Parallelen $BD = a$ abgetragen. Durch D wird zu BA die Parallele gezogen, welche die durch C gehende Parallele in E schneidet. Trifft ferner die Verlängerung von AE die durch B gelegte Parallele in F, so ist:

$$BF : a = a : b,$$

mithin: $$BF : b = a^2 : b^2.$$

Zieht man jetzt durch F zu BA eine weitere Parallele, welche die durch C gelegte in G schneidet, und ist H der auf der Parallelen durch C liegende Schnittpunkt der Verlängerung von AG, so ist $BH : BF = a : b$ oder:

$$BH : b = a^3 : b^3.$$

Konstruktion und Rechnung können beliebig fortgesetzt werden.

Ist ferner I der Schnittpunkt der Verbindungslinie AD mit der durch C gehenden Parallelen, so ist $CI = b$. Schneidet dann die durch I zu AB gezogene Parallele die durch B in K, und ist L der auf der Parallelen durch C gelegene Schnittpunkt von AK, so besteht die Proportion:

$$CL : b = b : a,$$

folglich: $$CL : a = b^2 : a^2.$$

Ist schließlich M der Schnittpunkt der Parallelen zu AB durch L mit der durch B, N der Schnittpunkt von AM mit der Parallelen durch C, so hat man:

$$CN : CL = b : a$$

oder: $$CN : a = b^3 : a^3, \text{ usw.}$$

4. c, w_c, $a : b$. Außer der bekannten Lösung ergibt sich bei Anwendung eines früher abgeleiteten Satzes, nach welchem $CW_c = w_c$ innen in L_a nnd außen in L_b nach dem Verhältnis $(a + b) : (a - b)$ harmonisch geteilt wird, die folgende: CW_c wird innen nach dem Verhältnis $(a + b) : (a - b)$ geteilt und BA innen nach dem Verhältnis $a : b$. Dann läßt sich das rechtwinklige Dreieck AL_aW_c zeichnen. Schließlich findet man C durch Verlängerung von W_cL_a um L_aC und B durch Verlängerung von AW_c um W_cB.

Der Spezialfall a, b, $c : w_c$ der allgemeinen Aufgabe g, $a : b$, $c : w_c$ läßt sich ohne Hilfe eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks, wie folgt, erledigen: BC wird über C hinaus um CA bis D verlängert und AD gezogen. Setzt man $AD = d$, so hat man die Proportion $(a + b) : a = d : w_c$; also ist $\frac{d}{c} = \frac{a + b}{a} \cdot \frac{w_c}{c}$. Das Verhältnis $d : c$ ist also bekannt. Ist $c : w_c = m : n$ und konstruiert man die vierte Proportionale l zu a, $a + b$ und n, so ist $d : c = l : m$. Dann wird der Apollonische Kreis geschlagen, der $DB = a + b$ nach dem Verhältnis $l : m$ harmonisch teilt. Der um den Mittelpunkt C mit dem Radius b geschlagene Kreisbogen schneidet den Apollonischen Kreis in A.

5. c, w'_c, $a : b$. Eine der vorigen ähnliche Lösung wird außer der bekannten durch Benutzung des Satzes von der Teilung der Außenwinkelhalbierenden erhalten, nach welchem sich bei harmonischer Teilung von $CW'_c = w'_c$ nach dem Verhältnis $(a + b) : (a - b)$ die Lotfußpunkte L'_a und L'_b finden lassen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Aufgabe a, b, $c : w'_c$ wird ohne Verwendung eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks dadurch gelöst, daß auf $BC = a$ von C bis D b abgetragen und der Apollonische Kreis gezeichnet wird, der $BD = a - b$ nach dem bekannten Verhältnis $\frac{a-b}{a} \cdot \frac{w'_c}{c}$ harmonisch teilt. Ein um den Mittelpunkt C mit dem Radius b geschlagener Kreisbogen schneidet den Apollonischen Kreis in A.

6. c, t_a, $a : b$. Die erste Lösung dieser Aufgabe ist bekannt. Eine zweite erhält man durch folgende Überlegung. Verlängert man BC um sich selbst bis D und BA um sich selbst bis P_a, so ist, wie schon früher erwähnt, $CP_a = 2t_a$, ferner $DP_a = 2b$. Der Punkt D liegt also auf dem Apollonischen Kreise, der $P_aC = 2t_a$ nach dem Verhältnis $2b : a$ harmonisch teilt. Schlägt man nun um den Mittelpunkt P_a mit dem Radius $2c$ den Kreis, so ist noch die Hilfsaufgabe zu lösen: Durch C eine Strecke zu ziehen, welche von den Peripherien der beiden Kreise halbiert wird; der eine Endpunkt D der zu ziehenden Strecke liegt auf dem Apollonischen Kreise, der andere B auf dem Kreise um den Mittelpunkt P_a mit dem Radius $2c$. Diese Hilfsaufgabe wird dadurch gelöst, daß man den Mittelpunkt des einen Kreises, etwa des Apollonischen, mit C verbindet, die Verbindungslinie über C hinaus um sich selbst verlängert und um den gefundenen Punkt als Mittelpunkt einen dem Apollonischen gleichen Kreis schlägt, welcher den zweiten, um C als Mittelpunkt mit $2c$ als Radius gezeichneten, in den gesuchtenPunkten B schneidet. Die vorliegende Hilfsaufgabe hat also im Allgemeinen zwei Lösungen, und es scheint, als ob die Aufgabe c, t_a, $a : b$ auch zwei Lösungen habe. Dies ist aber nicht der Fall, denn man erhält zwar zwei Punkte B, welche aber symmetrisch zur Zentrale der drei Kreise liegen. Der Grund hierfür ist der, daß der Punkt C, durch welchen die von dem Apollonischen und dem Kreise um den Mittelpunkt C mit dem Radius $2c$ zu halbierende Strecke zu ziehen ist, auf der Zentrale der beiden Kreise liegt, die beiden sich ergebenden Dreiecke also kongruent sind.

Die erwähnte Hilfsaufgabe ist der einfachste Spezialfall einer allgemeinen Aufgabe, die später mehrfach gebraucht wird, nämlich durch einen gegebenen Punkt an zwei gegebene Kreise eine Strecke so zu ziehen, daß sie durch die Peripherien der beiden Kreise nach einem gegebenen Verhältnis geteilt wird.

Der gegebene Punkt heißt P, die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind M und M' und die gesuchten Punkte S und S'; S liegt auf dem Kreise um M; S' auf dem um M'. Das gegebene Teilungsverhältnis sei $PS : PS' = m : m'$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden, weil P sowohl auf der Verbindungslinie der gesuchten Punkte liegen kann als auch auf der Verlängerung von SS'. Liegt P auf SS', so verbinde man P mit dem Mittelpunkte M des einen Kreises, ziehe den Radius MS und zu ihm durch S' die Parallele, die die Verlängerung von MP in Q schneidet. Dann ist $PM : PQ = m : m'$, also Q bekannt. Ferner ist $MS : QS' = m : m'$, also läßt sich, da MS bekannt ist, auch QS' bestimmen. Der um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QS' geschlagene Kreis schneidet den Kreis um M' in den gesuchten beiden Punkten S', die die Aufgabe im Allgemeinen lösen.

Liegt P auf der Verlängerung von SS', so soll wieder das gegebene Teilungsverhältnis $PS : PS' = m : m'$ sein. Zieht man ferner den Radius MS und zu ihm durch S' die Parallele, die PM in Q schneidet, so liegt Q jetzt auf MP, aber es besteht wieder die Proportion:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$PM : PQ = m : m'$, wodurch Q bestimmt ist. Auch ist $MS : QS' = m : m'$, wodurch die Strecke QS' gefunden wird. Der Kreis um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QS' löst die Aufgabe.

Noch ist des besonderen Falles a, b, $c : t_a$ der allgemeinen Aufgabe g, $a : b$, $c : t_a$ zu gedenken, weil man hier ohne Zeichnung eines ähnlichen Dreiecks auskommt. Der Apollonische Kreis, der $BT_a = \frac{a}{2}$ im Verhältnis $c : t_a$ harmonisch teilt, liefert den einen Ort für A, der Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius b den anderen.

Schließlich ist der spezielle Fall t_c, $a : b$, $c : t_a$ der allgemeinen Aufgabe g, $a : b$, $c : t_a$ zu erwähnen. $CT_c = t_c$ wird über T_c hinaus um sich selbst bis D verlängert und der Apollonische Kreis geschlagen, der DC im Verhältnis $a : b$ harmonisch teilt. Dann wird auf T_cC der Punkt S durch Drittelung von T_cC bestimmt, sodaß $T_cS = \frac{1}{3} T_cC$ ist. S ist also der Schwerpunkt des Dreiecks ABC. Endlich wird der Apollonische Kreis gezeichnet, der T_cS nach dem Verhältnis $\frac{c}{2} : \frac{2}{3} t_a = 3c : 4t_a$ harmonisch teilt und einen zweiten Ort für A darstellt. Die allgemeine Aufgabe g, $a : b$, $c : t_a$ erfordert zu ihrer Lösung zwar ein dem gesuchten ähnliches Dreieck, aber nur einen Apollonischen Kreis.

II. Außer c und $a : b$ ist das Verhältnis je zweier der 7 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, t_a und t_b gegeben.

1. c, $a : b$, $h_c : t_c$. Bemerkenswert ist der besondere Fall h_c, t_c, $a : b$ der allgemeinen Aufgabe g, $a : b$, $h_c : t_c$. Zunächst wird das rechtwinklige Dreieck H_cT_cC gezeichnet und CT_c um sich selbst über T_c hinaus bis D verlängert. Der Apollonische Kreis, der $DC = 2t_c$ im Verhältnis $a : b$ harmonisch teilt, wird mit T_cC geschnitten und dadurch A gefunden. Die Aufgabe läßt noch eine zweite Lösung zu. Denn $h_c, \frac{1}{2}t_c$ und $p - q$ bilden ein Datum, da h_c und $\frac{p-q}{2}$ Katheten des rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse t_c sind. Also läßt sich die Aufgabe auf $p - q$, h_c, $a : b$ reduzieren. Letztere wird dadurch gelöst, daß der Apollonische Kreis, der $p - q$ im Verhältnis $a : b$ harmonisch teilt, mit der Parallelen im Abstande h_c zu $p - q$ geschnitten wird. Ist $p - q = BD$, so findet man A, wenn man mit dem Radius CD um den Mittelpunkt D einen Kreisbogen schlägt, der die Verlängerung von BD in A schneidet. Dabei wurde vorausgesetzt, daß α spitz ist. Ist α stumpf, so tritt $p + q$ an die Stelle von $p - q$.

2. c, $a : b$, $h_c : t'_c$. Die Aufgabe kann sowohl direkt als auch durch Zurückführung auf die vorige gelöst werden, da das Verhältnis $h_c : t_c$ durch $h_c : t'_c$ und $a : b$ bestimmt ist.

3. c, $a : b$, $h_c : w_c$. Der Spezialfall h_c, w_c, $a : b$ der allgemeinen Aufgabe g, $a : b$, $h_c : w_c$ hat besonderes Interesse. Fischer (S. 210) deutet folgende Lösung an, die auf dem Satze von der Teilung der Grundlinie durch die Halbierende des Winkels an der Spitze beruht. AC wird über C hinaus um CB bis D verlängert und D mit B verbunden. Ist $a : b = m : n$ und wird $BD = d$ gesetzt, so ist: $n : (m + n) = w_c : d$, wodurch d bestimmt ist. Dann wird durch Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks aus h_c und w_c der Winkel ABD gefunden, da CW_c parallel DB ist. Ferner wird w_c auf BD von B bis E abge-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

tragen und die Parallele durch E zum freien Schenkel der Winkels ABD mit der Mittelsenkrechten auf BD geschnitten. Der Schnittpunkt ist C. A ist der Schnittpunkt der Verlängerung von DE mit dem freien Schenkel des Winkels ABD.

Eine andere Lösung der Aufgabe besteht darin, den Apollonischen Kreis zu schlagen, der eine beliebige Strecke nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt und unter dem durch das rechtwinklige Dreieck aus h_c und w_c bestimmten Winkel $\sphericalangle c, w_c$ durch den inneren Teilpunkt den Strahl zu ziehen, der durch seinen Schnittpunkt mit dem Apollonischen Kreise und die Endpunkte der harmonisch geteilten Strecke ein dem gesuchten ähnliches Dreieck bestimmt. Das Dreieck selbst findet man dadurch, daß man w_c von C aus auf dem Strahle abträgt und durch den gefundenen Punkt zur harmonisch geteilten Strecke die Parallele zieht.

Ein Vorzug der Fischerschen Lösung ist der, daß das gesuchte Dreieck ohne Benutzung eines ihm ähnlichen gefunden wird. Will man sich dieses Vorteils nicht begeben, so ergänzt man das Dreieck H_cW_cC zum Dreieck W'_cW_cC und teilt W'_cW_c harmonisch nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$. Dadurch findet man A und B.

Eine vierte Lösung der gestellten Aufgabe erhält man, wenn man nach Zeichnung des rechtwinkligen Dreiecks H_cW_cC $CW_c = w_c$ nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch teilt und in den Teilpunkten L_a und L_b auf CW_c auf verschiedenen Seiten dieser Strecke Senkrechte errichtet, die die Verlängerungen von H_cW_c in A, bez. B schneiden.

Schließlich ist zu bemerken, daß die Aufgabe auch ohne die harmonische Teilung und den Apollonischen Kreis lösbar ist, da durch h_c und w_c der Winkel $\alpha-\beta$ bestimmt ist. Ist also $a:b = m:n$, so kann man aus m, n und $\alpha-\beta$ zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck zeichnen. Dieses findet man, nachdem man das Hilfsdreieck aus m und n als Seiten und $\alpha-\beta$ als eingeschlossenem Winkel gezeichnet hat, auf zweierlei Art. Man kann nämlich das Hilfsdreieck sowohl um die Höhe als auch um die Mittelsenkrechte auf der Grundlinie drehen.

Die Aufgabe a, b, $\alpha-\beta$ wird mit Hilfe des Apollonischen Kreises dadurch gelöst, daß man eine beliebige Strecke hinlegt und den Apollonischen Kreis schlägt, der sie nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Der unter dem gegebenen Winkel $\alpha-\beta$ gegen die Strecke geneigte Apollonische Radius bestimmt durch seinen Treffpunkt mit dem Kreise und die Endpunkte der harmonisch geteilten Strecke ein dem gesuchten ähnliches Dreieck.

4. c, $a:b$, $h_c:w'_c$. Die Aufgabe hängt eng mit der vorigen zusammen und der besondere Fall h_c, w'_c, $a:b$ läßt ebensoviele Lösungen zu wie h_c, w_c, $a:b$. Geringe Veränderungen erfährt nur die der Fischerschen entsprechende erste Lösung. Auf CB wird CA von C bis D abgetragen und $AD = d$ gezogen. d wird durch die Proportion $a:(a-b) = w'_c:d$ bestimmt und $\sphericalangle c, w'_c$ in A an AD angetragen. Den Punkt E findet man, wenn man w'_c von A aus auf der Verlängerung von AD abträgt. Die Mittelsenkrechte auf AD schneidet die Parallele durch E zum freien Schenkel des in A angetragenen Winkels in C. B ist der Schnittpunkt der Verlängerung von CD mit jenem Schenkel.

Wie eng beide Aufgaben zusammenhängen, sieht man besonders aus der dritten Lösung. Dort wird Dreieck H_cW_cC, hier Dreieck $H_cW'_cC$ zum Dreieck W'_cW_cC ergänzt.

5. c, $a:b$, $h_c:t_a$. Ist $h_c:t_a = m:n$, so wird zunächst das rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $2n$ und der einen Kathete m gezeichnet und der m gegenüberliegende Winkel in P_a an P_aA angetragen. Der freie Schenkel des Winkels wird mit dem Apollo-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

nischen Kreise geschnitten, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Die Aufgabe hat also zwei, eine oder keine Lösung, je nachdem der freie Schenkel des angetragenen Winkels den Kreis schneidet, berührt oder verfehlt.

6. c, $a:b$, $t_c:t'_c$. Die Aufgabe ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich, weil t_c, t'_c und $a:b$ ein Datum bilden.

7. c, $a:b$, $t_c:w_c$. Der Apollonische Kreis, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, wird von einem zweiten Apollonischen Kreise geschnitten, der T_cW_c nach dem zweiten gegebenen Verhältnis $t_c:w_c$ harmonisch teilt.

8. c, $a:b$, $t_c:w'_c$. Der zweite Apollonische Kreis teilt $T_cW'_c$ nach dem gegebenen Verhältnis $t_c:w'_c$ harmonisch.

9. c, $a:b$, $t_c:t_a$. Auch diese Aufgabe wird durch zwei Apollonische Kreise gelöst. Der zweite teilt P_aT_c nach dem Verhältnis $2t_a:t_c$ harmonisch. Bemerkenswert ist der besondere Fall t_c, t_a, $a:b$ der allgemeinen Aufgabe g, $a:b$, $t_c:t_a$, weil man hier mit einem Apollonischen Kreise auskommt. $CT_c=t_c$ wird über T_c hinaus um sich selbst bis D verlängert und der Apollonische Kreis geschlagen, der $DC=2t_c$ nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Dann wird T_cC in S gedrittelt, sodaß $T_cS=\frac{1}{3}T_cC$ ist, und um den Mittelpunkt S mit dem Radius $\frac{2}{3}t_a$ der Kreisbogen geschlagen, der den Apollonischen Kreis in A schneidet. (Borth, S. 115, Aufgabe 41.)

Eine besondere Lösung läßt auch die spezielle Aufgabe a, b, $t_c:t_a$ zu. Verlängert man nämlich AC über A hinaus um sich selbst bis D und über C hinaus um sich selbst bis E, so ist $BD=2t_a$, $CE=2t_c$, also ist der eine Ort für B der Apollonische Kreis, der $ED=3b$ nach dem Verhältnis $t_c:t_a$ harmonisch teilt, und der um den Mittelpunkt C mit dem Radius a geschlagene Kreisbogen der andere. In derselben Weise kann auch die allgemeine Aufgabe g, $a:b$, $t_c:t_a$ gelöst werden, nur daß man dann zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck erhält.

10. c, $a:b$, $t'_c:w_c$. Die Aufgabe wird durch zwei Apollonische Kreise gelöst. Der zweite teilt T'_cW_c harmonisch nach dem gegebenen Verhältnis $t'_c:w_c$.

11. c, $a:b$, $t'_c:w'_c$. Der zweite Apollonische Kreis teilt $T'_cW'_c$ harmonisch nach dem Verhältnis $t'_c:w'_c$.

12. c, $a:b$, $t'_c:t_a$. Der zweite Apollonische Kreis teilt $P_aT'_c$ harmonisch nach dem Verhältnis $2t_a:t'_c$.

13. c, $a:b$, $w_c:w'_c$. Die Aufgabe ist den schon behandelten Aufgaben c, $a:b$, $h_c:w_c$ und c, $a:b$, $h_c:w'_c$ verwandt. Man kann c, $a:b$, $w_c:w'_c$ sowohl mit Hilfe zweier Apollonischer Kreise lösen, deren zweiter $W_cW'_c$ nach dem gegebenen Verhältnis $w_c:w'_c$ harmonisch teilt, als auch mit Hilfe nur eines Apollonischen Kreises und des Winkels $\alpha-\beta$, der durch $w_c:w'_c$ bestimmt ist und an die Stelle des zweiten Apollonischen Kreises tritt. Der Spezialfall w_c, w'_c, $a:b$ wird am einfachsten dadurch erledigt, daß man W'_cW_c nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch teilt. In gleicher Weise kann man verfahren, wenn das Dreieck W'_cW_cC durch irgend zwei Stücke bestimmt und noch das Verhältnis $a:b$ gegeben ist. Hierfür lassen sich zahlreiche Beispiele anführen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

14. c, $a:b$, $w_c:t_a$. Der Apollonische Kreis, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, wird von einem zweiten Apollonischen Kreise geschnitten, der P_aW_c nach dem Verhältnis $2t_a:w_c$ harmonisch teilt. Der besondere Fall a, b, $w_c:t_a$ der allgemeinen Aufgabe g, $a:b$, $w_c:t_a$ wird dadurch gelöst, daß BC über C um CD bis D verlängert und $AD=d$ gezogen wird. Dann ist $d:w_c=(a+b):a$ oder $\frac{d}{t_a}=\frac{a+b}{a}\cdot\frac{w_c}{t_a}$. Also ist das Verhältnis $\frac{d}{t_a}$ bekannt. Ist $w_c:t_a=m:n$, und zeichnet man die vierte Proportionale l zu a, $a+b$ und m, so ist $d:t_a=l:n$. Der Apollonische Kreis, der $DT_a=b+\frac{1}{2}a$ nach dem Verhältnis $l:n$ harmonisch teilt, ist der eine Ort für A und der Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius b der andere. Auf dieselbe Weise kann auch die allgemeine Aufgabe g, $a:b$, $w_c:t_a$ gelöst werden, nur daß sich dann zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck ergibt.

15. c, $a:b$, $w'_c:t_a$. Der zweite Apollonische Kreis teilt W'_cP_a nach dem Verhältnis $w'_c:2t_a$ harmonisch. Der spezielle Fall a, b, $w'_c:t_a$ der allgemeinen Aufgabe g, $a:b$, $w'_c:t_a$ läßt sich mit nur einem Apollonischen Kreise erledigen. Auf CB wird CA von C bis D abgetragen und $AD=d$ gezogen. Dann ist $d:w'_c=(a-b):a$, also: $\frac{d}{t_a}=\frac{a-b}{a}\cdot\frac{w'_c}{t_a}$. Mithin ist das Verhältnis $d:t_a$ bekannt. Ist $b<\frac{a}{2}$, so liegt D zwischen T_a und C. Der eine Ort für A ist der Apollonische Kreis, der $T_aD=\frac{a}{2}-b$ nach dem bekannten Verhältnis $d:t_a$ harmonisch teilt, der andere ist der Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius b. Ist $b=\frac{a}{2}$ oder $a:b=2:1$, so fällt D mit T_a zusammen; d wird $=t_a$ und das Verhältnis $w'_c:t_a$ auch $=2:1$. Die Aufgabe ist unbestimmt. Der Apollonische Kreis, welcher $BA=c$ nach dem Verhältnis $2:1$ harmonisch teilt, ist also der geometrische Ort der Spitzen C aller Dreiecke ABC, für welche die Punkte W'_c und P_a zusammenfallen. Ist $b>\frac{a}{2}$, so liegt D zwischen T_a und B.

Auch die allgemeine Aufgabe g, $a:b$, $w'_c:t_a$ kann also mit Hilfe nur eines Apollonischen Kreises gelöst werden, liefert aber zunächst ein dem gesuchten ähnliches Dreieck.

16. c, $a:b$, $t_a:t_b$. Die gewöhnlich gegebene Lösung dieser Aufgabe benutzt zwei Apollonische Kreise, deren einer $BA=c$ nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, während der andere $P_bP_a=3c$ nach dem Verhältnis $t_b:t_a$ harmonisch teilt. Dadurch ist C bestimmt. Man kann jedoch den zweiten Apollonischen Kreis durch einen anderen ersetzen, der einen geometrischen Ort für den Schwerpunkt S des gesuchten Dreiecks darstellt. Dieser Apollonische Kreis teilt BA harmonisch nach dem Verhältnis $t_b:t_a$. Dann ist noch die früher behandelte Hilfsaufgabe zu lösen: Durch T_c einen Strahl zu ziehen, der den einen Kreis im Punkte S, den anderen in C so schneidet, das $T_cS:T_cC=1:3$ ist. Die Aufgabe hat nur eine Lösung, weil T_c auf der Zentrale der beiden Apollonischen Kreise liegt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Noch sind drei besondere Fälle der allgemeinen Aufgabe g, $a:b$, $t_a:t_b$ zu beachten. Die Aufgabe a, b, $t_a:t_b$ (Borth, S. 115, Aufgabe 45) wird dadurch gelöst, daß CB um sich selbst bis D verlängert und D mit A verbunden wird. Der eine Ort für A ist der Apollonische Kreis, der $DT_a = \frac{3}{2}a$ nach dem Verhältnis $2t_b:t_a$ harmonisch teilt, der andere ist der Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius b. Auf dieselbe Weise kann auch die allgemeine Aufgabe g, $a:b$, $t_a:t_b$ gelöst werden. Eine zweite spezielle Aufgabe ist t_a, t_b, $a:b$. (Borth, S. 115, Aufgabe 42.) Man verlängert AT_a über T_a um $\frac{1}{3}t_a$ bis D und schlägt den Apollonischen Kreis, der AT_a nach dem Verhältnis $b:\frac{a}{2}$ harmonisch teilt. Der Kreisbogen um den Mittelpunkt D mit dem Radius $\frac{2}{3}t_b$ stellt einen zweiten geometrischen Ort für den Punkt C dar. Auch die allgemeine Aufgabe kann so gelöst werden. Die dritte besondere Aufgabe t_c, $a:b$, $t_a:t_b$ wird von Borth (S. 111, Aufgabe 43) so gelöst, daß zunächst $CT_c = t_c$ um sich selbst bis D verlängert wird. Dann wird auf T_cC $\frac{1}{3}$ T_cC bis S und auf T_cD dieselbe Strecke $\frac{1}{3}T_cC$ bis S' abgetragen. Der eine geometrische Ort für A ist der Apollonische Kreis, der DC nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, der andere ist der Apollonische Kreis, der $S'S$ nach dem Verhältnis $t_b:t_a$ harmonisch teilt.

Zu einer zweiten Lösung der speziellen Aufgabe t_c, $a:b$, $t_a:t_b$ gelangt man, wenn man P_a mit C und D verbindet. P_aC ist $= 2t_a$ und $P_aD = 2t_b$. Also kann der zweite Apollonische Kreis durch einen anderen ersetzt werden, der $DC = 2t_c$ nach dem Verhältnis $t_b:t_a$ harmonisch teilt. Dann ist noch die Hilfsaufgabe zu lösen: Durch T_c einen Strahl zu ziehen, der den einen Kreis in A, den anderen in P_a so schneidet, daß $T_cA:T_cP_a = 1:3$ ist. Da T_c auf der Zentrale der beiden Kreise liegt, hat die Aufgabe nur eine Lösung.

III. Außer c und $a:b$ ist die Differenz der Quadrate je zweier der 9 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben.

Behufs Feststellung der Vorzeichen der sich ergebenden Quadratdifferenzen ist zunächst zu erinnern, daß für ein spitzwinkliges Dreieck, in welchem $3\beta > \alpha$ ist, die Ungleichungen:

$$w'_c > a > t_c > w_c > t'_c > h_c$$

bestehen. Ferner ist:

$$4t_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2 \text{ und}$$
$$4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2,$$
$$\text{also: } 4(t_b^2 - t_a^2) = 3(a^2 - b^2);$$

daher ist $t_b > t_a$, weil $a > b$ sein soll.

Da nun $w'_c > 2t_b$ vorausgesetzt werden darf, weil im Grenzfalle des gleichschenkligen Dreiecks mit der Basis AB, für welches die Ungleichung $3\beta > \alpha$ stets gilt, $w'_c = \infty$ ist, während t_b endlich bleibt, so können folgende Ungleichungen bestehen:

$$w'_c > 2t_b > 2t_a > a > t_c > w_c > t'_c > h_c.$$

Enthält die gegebene Quadratdifferenz die Höhe h_c, so ist H_c unmittelbar bestimmt, und die in H_c auf AB errichtete Senkrechte stellt den einen geometrischen Ort für C dar, während der andere

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Apollonische Kreis ist, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Enthält aber die Quadratdifferenz die Höhe h_c nicht, so erkennt man zunächst an der Aufgabe: c, a^2-b^2, $a:b$, daß wegen $\frac{a^2-b^2}{c}=p-q$ H_c auch bestimmt ist, und die in H_c auf AB errichtete Senkrechte ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Quadrate der Entfernungen von B und A konstant ist. Sind nun P und Q zwei beliebige Punkte von gegebener Entfernung, und besteht die Gleichung: $\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2=d^2$, in welcher d eine gegebene Konstante bedeutet, so ergibt sich ein Punkt des geometrischen Ortes, wenn man ein rechtwinkliges Dreieck zeichnet mit der einen Kathete d und beliebiger, nur genügend langer Hypotenuse und anderer Kathete und mit den beiden letzten Strecken als Radien um P, bez. Q als Mittelpunkte Kreisbogen schlägt und miteinander schneidet. Die durch den Schnittpunkt gehende Senkrechte auf PQ stellt den einen Ort für C dar; der andere ist der Apollonische Kreis. Es lassen sich also folgende Aufgaben lösen:

Gegeben sind: c, $a:b$ und 1. $t_c^2-h_c^2$, 2. $t'^2_c-h_c^2$, 3. $w_c^2-h_c^2$, 4. $w'^2_c-h_c^2$, 5. $4t_a^2-h_c^2$, 6. $a^2-h_c^2$, 7. $t_c^2-t'^2_c$, 8. $t_c^2-w_c^2$, 9. $w'^2_c-t_c^2$, 10. $4t_a^2-t_c^2$, 11. $a^2-t_c^2$, 12. $w_c^2-t'^2_c$, 13. $w'^2_c-t'^2_c$, 14. $4t_a^2-t'^2_c$, 15. $a^2-t'^2_c$, 16. $w'^2_c-w_c^2$, 17. $4t_a^2-w_c^2$, 18. $a^2-w_c^2$, 19. $w'^2_c-4t_a^2$, 20. $w'^2_c-a^2$, 21. $t_b^2-t_a^2$, 22. $4t_a^2-a^2$, 23. $4t_a^2-b^2$, 24. a^2-b^2. Die Aufgabe 7 läßt sich auch auf eine der Fundamentalaufgaben $c, t_c, a:b$ oder $c, t'_c, a:b$ zurückführen, die Aufgabe 16 auch auf $c, w_c, a:b$ oder $c, w'_c, a:b$, weil $w'^2_c+w_c^2=4r_c^2$ ist. In Aufgabe 24 lassen sich a und b durch Berechnung leicht finden.

IV. Außer c und $a:b$ ist die Summe der Quadrate je zweier der 9 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben.

Wenn die gegebene Quadratsumme die Höhe h_c nicht enthält, so sieht man an der Aufgabe c, a^2+b^2, $a:b$, daß wegen $c^2+4t_c^2=2(a^2+b^2)$ t_c durch c und a^2+b^2 bestimmt ist. Der mit dem Radius t_c um T_c als Mittelpunkt geschlagene Kreis stellt mithin den geometrischen Ort aller Punkte C dar, für welche die Quadratsumme $\overline{CB}^2+\overline{CA}^2$ konstant ist. Sind daher zwei feste Punkte P und Q gegeben, deren Entfernung l ist, und ist für einen beliebigen Punkt C die Quadratsumme $\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2$ gleich der gegebenen Konstanten k^2, so ist der Ort für C der Kreis, der die Mitte von PQ als Zentrum hat und dessen Radius R durch: $4R^2=2k^2-l^2$ bestimmt ist, sodaß R bei gegebenen k und l leicht konstruiert werden kann. Es lassen sich also zunächst folgende Aufgaben lösen:

Gegeben sind: c, $a:b$ und 1. $t_c^2+t'^2_c$, 2. $t_c^2+w_c^2$, 3. $t_c^2+w'^2_c$, 4. $t_c^2+4t_a^2$, 5. $t_c^2+a^2$, 6. $t'^2_c+w_c^2$, 7. $t'^2_c+w'^2_c$, 8. $t'^2_c+4t_a^2$, 9. $t'^2_c+a^2$, 10. $w_c^2+4t_a^2$, 11. $w_c^2+a^2$, 12. $w'^2_c+4t_a^2$, 13. $w_c^2+a^2$, 14. $t_a^2+t_b^2$, 15. $a^2+4t_a^2$, 16. $b^2+4t_a^2$, 17. a^2+b^2. Die Aufgabe 18 c, $a:b$, $w_c^2+w'^2_c$ ist wegen $w_c^2+w'^2_c=4r_c^2$ unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich. Die Aufgabe 1 kann auf eine Fundamentalaufgabe zurückgeführt werden, und in Aufgabe 17 sind a und b durch Berechnung leicht zu finden.

19. c, $h_c^2+t_c^2$, $a:b$. Die gegebene Quadratsumme werde $=k^2$ gesetzt. Die Ellipse mit der langen Halbachse k und der kurzen Halbachse $\frac{k}{\sqrt{2}}$ ist der geometrische Ort aller Punkte C, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von einem festen Punkte und einer durch ihn gehenden festen Geraden gleich der Konstanten k^2 ist. Der feste

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Punkt ist der Mittelpunkt der Ellipse, die feste Gerade ihre Hauptachse. Denn legt man durch T_c als Anfangspunkt ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abszissenachse AB ist, so lautet die Gleichung der Ellipse: $x^2 + 2y^2 = k^2$.

Nun sind im Allgemeinen die Schnittpunkte eines Kegelschnitts und eines Kreises mit Zirkel und Lineal nicht bestimmbar. Hier aber haben Kreis und Ellipse eine so besondere Lage zueinander, daß die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Denn der Apollonische Kreis mit dem Mittelpunkte M_c und dem Radius r_c hat, wenn man die bekannte Entfernung $M_c T_c = l$ setzt, in bezug auf dasselbe Koordinatensystem die Gleichung: $(x - l)^2 + y^2 = r_c^2$. Eliminiert man aus dieser und der Ellipsengleichung y^2, so erhält man: $x^2 - 4lx + k^2 + 2l^2 - 2r_c^2 = 0$ als Gleichung eines der Y-Achse parallelen Geradenpaares, welches durch seine Schnittpunkte mit dem Apollonischen Kreise die gesuchten Punkte C bestimmt.

In ähnlicher Weise wird gezeigt, daß sich auch die Aufgaben: 20. c, $h_c^2 + t'^2_c$, $a:b$; 21. c, $h_c^2 + 4t_a^2$, $a:b$ und 22. c, $h_c^2 + a^2$, $a:b$ mit Zirkel und Lineal lösen lassen. Bei algebraischer Lösung dieser Aufgaben erhält man Gleichungen, die für die Unbekannten a^2 oder b^2 quadratisch sind.

23. c, $h_c^2 + w_c^2$, $a:b$. Man setzt wieder die gegebene Quadratsumme $= k^2$. Es ist $\overline{H_c W'^2_c} = w'^2_c - h_c^2 = 4r_c^2 - k^2$. Hat man den Apollonischen Kreis geschlagen, der BA nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, so trägt man die gegebene Strecke k von W_c aus als Sehne in den Kreis ein. Der Kreisbogen, der W'_c als Mittelpunkt und die Entfernung des gefundenen Punktes von W'_c zum Radius hat, schneidet $W'_c W_c$ in H_c. Die Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der Hypotenuse und der Summe der Quadrate der einen Kathete und der Höhe, ist also auch mit Zirkel und Lineal lösbar. 24. c, $h_c^2 + w'^2_c$, $a:b$. Man hat für das rechtwinklige Dreieck dieselbe Aufgabe zu lösen.

V. In derselben Weise fortfahrend kann man die Aufgaben lösen, die entstehen, wenn außer c und $a:b$ die algebraische Summe der Quadrate von je 3, je 4,... sämtlicher 9 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben ist.

Es läßt sich zeigen, daß alle diese Aufgaben mit Zirkel und Lineal lösbar sind. Fehlt zunächst unter den genannten Strecken die Höhe, so hat man die allgemeine Aufgabe, den geometrischen Ort des Punktes C zu finden, für welchen die algebraische Summe der Quadrate seiner Entfernungen von n gegebenen Punkten konstant ist. Sind die Koordinaten der n Punkte $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots a_n, b_n$, und wird die algebraische Summe der Quadrate $= k^2$ gesetzt, so ergibt sich bei Zugrundelegung eines rechtwinkligen Achsensystems für den gesuchten geometrischen Ort die Gleichung:

$$\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa [(x - a_\varkappa)^2 + (y - b_\varkappa)^2] = k^2,$$

und dabei ist: $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_2^2 = 1$, ... $\varepsilon_n^2 = 1$. Da sämtliche gegebenen Punkte in einer Geraden liegen, die zur X-Achse des Koordinatensystems genommen werden kann, so sind alle $b_\varkappa = 0$; also lautet dann die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$(x^2 + y^2) \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa - 2x \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zwei Fälle sind zu unterscheiden. Ist nämlich $\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa = 0$, d. h. ist die Anzahl der gegebenen Punkte gerad, und hat die eine Hälfte der Glieder in der gegebenen algebraischen Summe der Quadrate der Entfernungen das positive, die andere das negative Vorzeichen, so wird der gesuchte geometrische Ort dargestellt durch eine auf der Abszissenachse senkrechte Gerade mit dem Abstande:

$$x = \frac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^{\,2} - k^2}{2 \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa}$$

von der Ordinatenachse und durch die unendlich ferne Gerade der Ebene. Denn bei verschwindender $\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa$ wird die Gleichung: $(x^2 + y^2) \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa - 2x \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^{\,2} = k^2$ noch für $x = \infty$ erfüllt.

Ist aber die Summe der ε von Null verschieden, also $\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa \gtrless 0$, was bei ungeradem n stets der Fall ist und bei geradem dann, wenn die Anzahl der positiven Glieder in der gegebenen Quadratsumme die der negativen überwiegt oder umgekehrt, so stellt der gesuchte geometrische Ort eine Kreislinie dar, die ihren Mittelpunkt auf der Abszissenachse hat. Denn da die Summe der ε nicht $= 0$ ist, kann man beiderseits durch $\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa$ dividieren und erhält dann die Gleichung des Kreises in der Form:

$$\left(x - \frac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa}{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa} \right)^2 + y^2 = \frac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa \cdot \left(k^2 - \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^{\,2} \right) + \left(\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa \right)^2}{\left(\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa \right)^2}.$$

Die Mittelpunktsabszisse des Kreises ist also:

$$\frac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa}{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa}$$

und das Quadrat seines Radius ist gleich dem auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehenden Ausdruck.

Haben insbesondere sämtliche Glieder der gegebenen Quadratsumme das positive Zeichen, so ist $\sum^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa = n$ und die Gleichung des Kreises heißt dann:

$$\left(x - \frac{1}{n} \sum_1^n \varkappa\, a_\varkappa \right)^2 + y^2 = \frac{n \left(k^2 - \sum_1^n \varkappa\, a_\varkappa^{\,2} \right) + \left(\sum_1^n \varkappa\, a_\varkappa \right)^2}{n^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Die Mittelpunktsabszisse des Kreises ist also in diesem Falle das arithmetische Mittel der Abszissen der n gegebenen, auf der Abszissenachse liegenden Punkte.

Wenn daher in der gegebenen Quadratsumme das Höhenquadrat fehlt, so lassen sich alle hierher gehörigen Aufgaben mit Zirkel und Lineal lösen, da als geometrische Örter, die mit dem Apollonischen Kreise zu schneiden sind, nur Kreise oder Gerade auftreten. Die Kreise haben ihre Mittelpunkte auf der Geraden, in der die gegebenen Punkte liegen und auf welcher die als geometrische Örter sich ergebenden Geraden senkrecht stehen.

Befindet sich unter den in der gegebenen Quadratsumme enthaltenen Größen auch das Quadrat der Höhe, so erhält man die Gleichung des neuen geometrischen Ortes aus der früher gefundenen:

$$(x^2+y^2)\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa - 2x\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2$$

dadurch, daß man auf der linken Seite das Glied $\varepsilon_o y^2$ addiert; $\varepsilon_o^2 = 1$. Also heißt die Gleichung des neuen geometrischen Ortes:

$$x^2\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa + y^2\left(\varepsilon_o + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa\right) - 2x\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2$$

oder: $$x^2\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa + y^2\sum_0^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa - 2x\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen einen Kegelschnitt dar, nie einen Kreis. Ehe wir die Art dieser Kegelschnitte untersuchen, wollen wir den Beweis zu Ende führen. Legen wir hierzu die Ordinatenachse durch den Mittelpunkt M_c des Apollonischen Kreises mit dem Radius r_c, so ist die Gleichung des Kreises $x^2+y^2=r_c^2$. Durch Elimination von y^2 aus dieser und der vorigen Gleichung ergibt sich aber eine für x quadratische Gleichung, die ein zur Ordinatenachse paralleles Geradenpaar darstellt, welches durch seine Schnittpunkte mit dem Apollonischen Kreise die gesuchten Punkte C bestimmt.

Schließlich bleibt es übrig, nachzusehen, welche Kegelschnitte durch die Gleichung:

$$x^2\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa + y^2\sum_0^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa - 2x\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2$$

dargestellt werden können. Ist zunächst die Anzahl der auf der Abszissenachse gegebenen Punkte gerad, und hat die eine Hälfte der Quadrate der von ihnen ausgehenden Strecken das positive, die andere das negative Zeichen, so ist $\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa = 0$ und die Gleichung des geometrischen Ortes heißt dann:

$$\varepsilon_o y^2 - 2x\sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\,\varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Führt man eine der Y-Achse parallele Y'-Achse ein durch $x = x' + l$, so nimmt die Gleichung des Ortes für $l = \dfrac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 - k^2}{2 \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa}$ die Form an:

$$y^2 = 2\, \varepsilon\, x' \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa;\ \varepsilon^2 = 1.$$

ε ist $= \pm 1$, je nachdem das Vorzeichen des Höhenquadrates das positive oder negative ist.

Die Kurve stellt also eine Parabel dar mit dem Parameter $\varepsilon \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa$. Die Hauptachse der Parabel ist die Abszissenachse.

Ist ferner $\sum_0^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa = 0$, d. h. überwiegt die Anzahl der positiven Quadrate der von den Punkten auf der X-Achse ausgehenden Strecken die der negativen um eine Einheit oder umgekehrt, was nur möglich ist, wenn die Anzahl der Punkte ungerad ist, so lautet die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\varepsilon\, x^2 - 2\, x \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2;\ \varepsilon^2 = 1,$$

d. h. die Gleichung stellt ein zur Y-Achse paralleles Geradenpaar dar. ε ist $= +1$, wenn das Höhenquadrat das negative Vorzeichen hat, und umgekehrt.

In allen anderen Fällen stellt die Gleichung:

$$x^2 \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa + y^2 \sum_0^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa - 2\, x \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa + \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2 = k^2$$

eine Ellipse dar. Die Hyperbel ist ausgeschlossen, da die Koeffizienten von x^2 und y^2 stets gleiche Vorzeichen haben. Führt man eine der Y-Achse parallele Y'-Achse ein durch:

$$x' = x - \frac{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa}{\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa},$$

so heißt die Gleichung der Ellipse:

$$\left(\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa\right)^2 x'^2 + \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa \cdot \sum_0^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa\, y^2 = \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa \cdot \left(k^2 - \sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa^2\right) + \left(\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa a_\varkappa\right)^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn im Besonderen die Quadrate der von den Punkten auf der X-Achse ausgehenden Strecken sämtlich das positive Vorzeichen haben, so ist $\sum_1^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa = n$, $\sum_0^n \varkappa\, \varepsilon_\varkappa = n \pm 1$, je nachdem h_c^2 das positive oder negative Zeichen hat, und die Ellipsengleichung lautet:

$$n^2 x'^2 + n(n \pm 1) y^2 = n\left(k^2 - \sum_1^n \varkappa\, a_\varkappa^2\right) + \left(\sum_1^n \varkappa\, a_\varkappa\right)^2.$$

Ist außer c und $a:b$ die algebraische Summe der Quadrate von je drei der neun Strecken: h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben, so soll zur Feststellung der Anzahl der hierher gehörigen Aufgaben zunächst vorausgesetzt werden, daß sämtliche Quadrate das positive Vorzeichen haben. Bleiben $2t_b$ und b vorläufig außer Betracht, so ist die Anzahl der möglichen Aufgaben 35. Die Strecken $2t_a$, $2t_b$, a und b können dann nur noch auftreten in den Ausdrücken: $4t_a^2 + 4t_b^2$, $4t_a^2 + b^2$ und $a^2 + b^2$. Da jede dieser Größen mit den Quadraten von h_c, t_c, t'_c, w_c und w'_c verbunden werden kann, so ergeben sich weitere 15 Aufgaben; zusammen also 50. Diese Anzahl vervierfacht sich durch die Vorzeichenkombinationen. Denn sind z. B. h_c, t'_c und w_c die in der algebraischen Summe der Quadrate auftretenden Größen, so sind folgende vier Fälle möglich: $+h_c^2 + t'^2_c + w_c^2$, $+h_c^2 + t'^2_c - w_c^2$, $+h_c^2 - t'^2_c + w_c^2$, $-h_c^2 + t'^2_c + w_c^2$. Also gibt es im ganzen 200 Aufgaben. Ihre Zahl reduziert sich auf 190 durch die Erwägung, daß sich die 10 Aufgaben: $w_c^2 + w'^2_c \pm h_c^2$, $w_c^2 + w'^2_c \pm t_c^2$, $w_c^2 + w'^2_c \pm t'^2_c$, $w_c^2 + w'^2_c \pm 4t_a^2$ und $w_c^2 + w'^2_c + a^2$ wegen $w_c^2 + w'^2_c = 4r_c^2$ unmittelbar auf Grundaufgaben zurückführen lassen.

Befindet sich unter den in der gegebenen Quadratsumme vorkommenden Strecken die Höhe nicht, so kann als geometrischer Ort nur der Kreis auftreten; die Gerade ist ausgeschlossen. Ist aber die Höhe in der Quadratsumme vorhanden, so ergibt sich als geometrischer Ort eine Parabel, wenn die Quadrate der beiden anderen Strecken entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Fall dagegen, in welchem sich ein zur Ordinatenachse paralleles Geradenpaar als geometrischer Ort darstellt, kann hier nicht eintreten. Haben die Quadrate der beiden anderen Strecken gleiches, d. h. hier positives Vorzeichen, so ist der geometrische Ort eine Ellipse.

Sind von den neun Strecken je vier gegeben, und fehlt in einer Quadratsumme das Höhenquadrat, so kann der geometrische Ort sowohl eine Gerade als auch ein Kreis sein. Wenn aber die Höhe in der Quadratsumme auftritt, so ist wegen der ungeraden Anzahl der Punkte auf der Abszissenachse die Parabel als geometrischer Ort nicht möglich, wohl aber ein zur Ordinatenachse paralleles Geradenpaar, nämlich dann, wenn die eine Hälfte der Quadrate der vier Strecken das positive, die andere das negative Vorzeichen hat. Die Ellipse stellt sich ein, wenn die Vorzeichen der Quadrate der drei von den gegebenen Punkten ausgehenden Strecken positiv sind.

Allgemein kann gesagt werden, daß bei ungerader Anzahl der gegebenen Strecken und fehlender Höhe nur der Kreis als geometrischer Ort in Frage kommt; ist die Höhe in der Quadratsumme vorhanden, so ergeben sich als geometrische Örter Parabel und Ellipse. Bei gerader Anzahl der gegebenen Strecken und fehlender Höhe kommen Gerade und Kreis als geometrische Örter vor, und wenn die Höhe in der Quadratsumme enthalten ist, das Parallelenpaar und die Ellipse. In keiner der sieben Untergruppen, in die die

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

vorliegende Aufgabengruppe zerfällt, können mithin alle fünf möglichen Fälle zugleich vorkommen; nur Kreis und Ellipse stellen sich als in allen Gruppen auftretende geometrische Örter heraus, ersterer bei in der gegebenen Quadratsumme fehlender, letztere bei vorhandener Höhe.

VI. Außer c und $a:b$ ist die Summe je zweier der 9 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben.

1. c, $h_c + t_c$, $a:b$. Die gegebene Summe werde $= k$ gesetzt. Als geometrischer Ort aller Punkte, für welche die Summe der Entfernungen von einem festen Punkte und einer durch ihn gehenden festen Geraden gleich der Konstanten k ist, ergibt sich die Parabel, deren Hauptachse die im gegebenen Punkte auf der gegebenen Geraden errichtete Senkrechte ist, welche ferner der Geraden ihre konkave Seite zuwendet und die Gerade in der Sehne von der Länge $2k$ schneidet. Die Scheitelordinate ist $= + \frac{k}{2}$. Denn legt man durch T_c ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Abszissenachse $T_c H_c$ ist, so lautet die Parabelgleichung: $x^2 = k^2 - 2ky$. Für unterhalb der Abszissenachse gelegene Parabelpunkte tritt wegen des Zeichenwechsels der Ordinate an die Stelle der konstanten Summe der Entfernungen deren Differenz. Setzt man die bekannte Strecke $T_c M_c = l$, so ist die Gleichung des Apollonischen Kreises für dasselbe Achsensystem: $(x - l)^2 + y^2 = r_c^2$. Durch Elimination von y aus dieser und der Parabelgleichung: $x^2 = k^2 - 2ky$ ergibt sich die für x biquadratische, unzerlegbare Gleichung: $(x - l)^2 + \frac{(k^2 - x^2)^2}{4k^2} = r_c^2$

$$\text{oder:} \quad x^4 + 2k^2x^2 - 8k^2lx + k^4 + 4k^2l^2 - 4k^2r_c^2 = 0.$$

Die Aufgabe läßt sich also nicht mit Zirkel und Lineal lösen. Dasselbe gilt für die Aufgaben: 2. c, $h_c + t'_c$, $a:b$; 3. c, $h_c + w_c$, $a:b$; 4. c, $h_c + w'_c$, $a:b$; 5. c, $h_c + 2t_a$, $a:b$ und 6. c, $h_c + a$, $a:b$. Man könnte bei den Aufgaben 3 und 4 an der Richtigkeit der gemachten Behauptung zweifeln, weil ja in diesen Fällen die besondere Aufgabe vorliegt: Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der Summe der einen Kathete und der Höhe zu zeichnen; allein man erhält die die vorliegende Aufgabe lösende Gleichung, wenn man in der obigen biquadratischen Gleichung $l = r_c$ setzt, da der Apollonische Kreis hier durch den Anfangspunkt geht. Durch diese Einsetzung erhält man folgende Gleichung: $x^4 + 2k^2x^2 - 8k^2r_cx + k^4 = 0$. Die Gleichung ändert also ihren Grad nicht und bleibt auch unzerlegbar.

7. c, $t_c + t'_c$, $a:b$. Die Aufgabe läßt sich auf eine Fundamentalaufgabe reduzieren. Man kann sie jedoch auch durch folgende Überlegung lösen: Setzt man die konstante Entfernungssumme: $t_c + t'_c = 2k$, $T_cT'_c = 2e$ und $k^2 - e^2 = l^2$, so ist der Ort des Punktes C die Ellipse mit der Gleichung: $\left(\frac{x}{k}\right)^2 + \left(\frac{y}{l}\right)^2 = 1$, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsensystem, dessen Abszissenachse $T_cT'_c$ und dessen Ordinatenachse die Mittelsenkrechte auf $T_cT'_c$ ist. Ist m die Entfernung des Mittelpunktes M_c des Apollonischen Kreises vom Koordinatenanfangspunkt, so ist die Gleichung des Kreises: $(x - m)^2 + y^2 = r_c^2$. Durch Elimination von y^2 aus dieser und der Gleichung der Ellipse ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{r_c^2 - (x - m)^2}{l^2} = 1 \quad \text{oder:} \quad (k^2 - l^2)x^2 - 2k^2mx + k^2(l^2 + m^2 - r_c^2) = 0,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

woraus also auch hervorgeht, daß die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist. Dasselbe ist der Fall, da obige Überlegung allgemein gilt, weil sie die besonderen Eigenschaften der Strecken t_c und t'_c nicht benutzt, für die folgenden Aufgaben, bei denen außer c und $a:b$ gegeben ist: 8. $t_c + w_c$, 9. $t_c + w'_c$, 10. $t_c + 2t_a$, 11. $t_c + a$, 12. $t'_c + w_c$, 13. $t'_c + w'_c$, 14. $t'_c + 2t_a$, 15. $t'_c + a$, 16. $w_c + 2t_a$, 17. $w_c + a$, 18. $w'_c + 2t_a$, 19. $w'_c + a$, 20. $t_a + t_b$, 21. $2t_a + a$, 22. $2t_a + b$. Die Aufgabe 23 c, $a + b$, $a:b$ ist ganz einfach; die letzte Aufgabe 24 c, $w_c + w'_c$, $a:b$ läßt sich z. B. dadurch lösen, daß man über $W'_c W_c$ als Sehne den Kreisbogen schlägt, der den Winkel von 45^0 faßt, und in den Kreisabschnitt von W_c oder W'_c aus die gegebene Streckensumme $w_c + w'_c$ als Sehne einträgt. Letztere schneidet den Apollonischen Kreis in C.

VII. Außer c und $a:b$ ist die Differenz je zweier der 9 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, $2t_a$, $2t_b$, a und b gegeben.

1. c, $t_c - h_c$, $a:b$. Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die Differenz der Entfernungen von einem gegebenen Punkte und einer durch ihn gehenden gegebenen Geraden konstant ist, muß auch eine Parabel sein. Das geht bereits aus der früheren Überlegung hervor. Denn dort trat für unterhalb der Abszissenachse gelegene Parabelpunkte an die Stelle der konstanten Summe die Differenz der Entfernungen. Hier liegt der Parabelscheitel unterhalb der Abzissenachse, d. h. unterhalb der gegebenen, festen Geraden; die Ordinatenachse, die im gegebenen Punkte auf der gegebenen Geraden errichtete Senkrechte, ist die Hauptachse der Parabel, welche der Abszissenachse ihre konkave Seite zukehrt. Für unterhalb der X-Achse gelegene Parabelpunkte tritt wegen des Zeichenwechsels der Ordinate an die Stelle der konstanten Entfernungsdifferenz die Entfernungssumme. Die Parabelgleichung lautet: $x^2 = d^2 + 2dy$, wenn d die gegebene Abstandsdifferenz ist. Die Kurve schneidet die Abszissenachse in der Sehne von der Länge $2d$; die Scheitelordinate ist $= -\frac{d}{2}$. Im Übrigen läßt sich in ähnlicher Weise wie bei der entsprechenden Aufgabe der vorigen Gruppe zeigen, daß auch die vorliegende Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist, und die übrigen, bei welchen in der konstanten Entfernungsdifferenz die Höhe auch auftritt, gleichfalls nicht. Das sind die folgenden fünf Aufgaben, bei denen also außer c und $a:b$ gegeben ist: 2. $t'_c - h_c$, 3. $w_c - h_c$, 4. $w'_c - h_c$, 5. $2t_a - h_c$ und 6. $a - h_c$. Die spezielle Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der Differenz der einen Kathete und der Höhe zu zeichnen, läßt sich mithin ebenfalls nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

Die folgenden Aufgaben, bei welchen außer c und $a:b$ gegeben ist: 7. $t_c - t'_c$, 8. $t_c - w_c$, 9. $w'_c - t_c$, 10. $2t_a - t_c$, 11. $a - t_c$, 12. $w_c - t'_c$, 13. $w'_c - t'_c$, 14. $2t_a - t'_c$, 15. $a - t'_c$, 16. $2t_a - w_c$, 17. $a - w_c$, 18. $w'_c - 2t_a$, 19. $w'_c - a$, 20. $t_b - t_a$, 21. $2t_a - a$ und 22. $2t_a - b$ sind mit Zirkel und Lineal lösbar. An die Stelle der Ellipse in der vorigen Gruppe tritt hier die Hyperbel in die Betrachtung ein. Die Aufgabe 7 kann durch Zurückführung auf eine Fundamentalaufgabe erledigt werden.

Die Aufgabe 23 c, $a - b$, $a:b$ ist ganz einfach, die Aufgabe 24 c, $w'_c - w_c$, $a:b$ kann z. B. dadurch gelöst werden, daß man über $W'_c W_c$ als Sehne den Kreisbogen schlägt, der den Winkel von 135^0 faßt, in den Kreisabschnitt von W'_c aus die gegebene Differenz $w'_c - w_c$ als Sehne einträgt und letztere bis zum Treffpunkte C mit dem Apollonischen Kreise verlängert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Außer c und $a:b$ ist die algebraische Summe der drei Strecken w'_c, w_c und h_c gegeben.

Die vier Aufgaben, um die es sich hier handelt, sind folgende: Gegeben: c, $a:b$ und 1. $w'_c + w_c + h_c$, 2. $w'_c + w_c - h_c$, 3. $w'_c - w_c + h_c$ und 4. $-w'_c + w_c + h_c$; sie lassen sich also auf die Aufgaben zurückführen: Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der algebraischen Summe der Katheten und der Höhe zu zeichnen. Zu bemerken ist, daß sowohl w_c länger sein kann als die Summe $w'_c + h_c$ als auch w'_c länger als $w_c + h_c$; dann müssen die gegebenen algebraischen Summen $w'_c - w_c + h_c$ und $-w'_c + w_c + h_c$ durch $w_c - w'_c - h_c$, bez. $w'_c - w_c - h_c$ ersetzt werden.

Sind zur Lösung der ersten Aufgabe a und b die Katheten, c die Hypotenuse und h die Höhe des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks, und wird die gegebene Streckensumme $a + b + h = k$ gesetzt, so ist $c^2 + 2ch = (k-h)^2$ oder $h^2 - 2(k+c)h + k^2 - c^2 = 0$.

Da $k > c$ ist, so sind zwar beide Wurzeln dieser quadratischen Gleichung:

$$h_1 = k + c + \sqrt{2c(k+c)} \text{ und: } h_2 = k + c - \sqrt{2c(k+c)}$$

positiv, aber nur die zweite ist hier brauchbar. Aus der letzteren Formel folgt eine einfache Konstruktion der Höhe des rechtwinkligen Dreiecks, das die Aufgabe löst. In ähnlicher Weise sind auch die drei übrigen Aufgaben lösbar.

Die oben benutzte Gleichung: $c^2 + 2ch = (k-h)^2$ kann auch in der Form geschrieben werden: $(c+h)^2 = (a+b)^2 + h^2$; also gehört zu jedem rechtwinkligen Dreieck ein anderes, dessen eine Kathete die Summe der Katheten des ursprünglichen und dessen andere Kathete die Höhe des ersten ist, während die Hypotenuse des neuen Dreiecks die Summe von Hypotenuse und Höhe des Urdreiecks ist. Zum rechtwinkligen Dreieck (3, 4, 5) z. B. gehört das Dreieck ($2\frac{2}{5}$, 7, $7\frac{2}{5}$) oder (12, 35, 37). Gleichzeitig sieht man aus der oben abgeleiteten Formel, daß in jedem rechtwinkligen Dreieck die Summe von Hypotenuse und Höhe länger ist als die der Katheten.

Bei Lösung der dritten Aufgabe findet man die Gleichung: $(c-h)^2 = (a-b)^2 + h^2$, mithin gehört zu jedem rechtwinkligen Dreieck ein drittes, dessen eine Kathete die Differenz der Katheten des ersten und dessen andere Kathete die Höhe des Urdreiecks ist; die Hypotenuse des neuen Dreiecks ist gleich der Differenz von Hypotenuse und Höhe des ursprünglichen. Zum Dreieck (3, 4, 5) gehört das Dreieck (1, $2\frac{2}{5}$, $2\frac{2}{5}$) oder (5, 12, 13). Zu letzterem gehören die Dreiecke (60, 221, 229) und (60, 91, 109). Ferner ist in jedem rechtwinkligen Dreieck die Differenz zwischen Hypotenuse und Höhe länger als die Kathetendifferenz

IX. Außer c und $a:b$ ist das Produkt je zweier der 7 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, t_a und t_b gegeben.

1. c, $h_c t_c$, $a:b$. Macht man T_c zum Anfangspunkt und $H_c T_c$ zur X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist, wenn das gegebene Produkt $h_c t_c = k^2$ gesetzt wird, $y^2(x^2 + y^2) = k^4$ die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, deren Entfernungen von einer festen Geraden und einem auf ihr liegenden festen Punkte ein konstantes Produkt haben. Diese Kurve vierter Ordnung muß mit dem Apollonischen Kreise geschnitten werden. Setzt man $M_c T_c = l$, so ist die Kreisgleichung: $(x-l)^2 + y^2 = r_c^2$, woraus: $x^2 + y^2 = 2lx - l^2 + r_c^2$ und $y^2 = 2lx - x^2 - l^2 + r_c^2$ hervorgeht; also ist: $(2lx - l^2 + r_c^2)(2lx - x^2 - l^2 + r_c^2) = k^4$ oder: $2lx^3 - (5l^2 - r_c^2)x^2 + 4l(l^2 - r_c^2)x + (l^2 - r_c^2)^2 + k^4 = 0$. Die Aufgabe läßt sich mithin nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. c, $h_c w_c$, $a:b$. Setzt man in der vorigen Gleichung $l = r_c$, so erhält man $2 r_c x^3 - 4 r_c^2 x^2 + k^4 = 0$. Da die Gleichung kubisch bleibt, ist also auch diese Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösbar, folglich auch nicht die Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und dem Produkt aus der einen Kathete und der Höhe zu zeichnen.

Gleiches gilt von den übrigen Aufgaben, in denen die Höhe im Produkt enthalten ist, nämlich: 3. c, $h_c t'_c$, $a:b$; 4. c, $h_c w'_c$, $a:b$ und 5. c, $h_c t_a$, $a:b$.

6. c, $t_c w_c$, $a:b$. Macht man $T_c W_c$ zur Abszissenachse und die Mittelsenkrechte auf $T_c W_c$ zur Ordinatenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ist, wenn das gegebene konstante Produkt $t_c w_c = k^2$ und $T_c W_c = 2l$ gesetzt wird:

$$[y^2 + (x+l)^2][y^2 + (x-l)^2] = k^4$$

oder: $(x^2 + y^2)^2 + 2l^2(y^2 - x^2) = k^4 - l^4$ die Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, deren Entfernungen von zwei gegebenen festen Punkten ein konstantes Produkt haben. Diese Kurve vierter Ordnung ist die bekannte Cassinische Kurve, deren mannigfache Formen auf geometrischem Wege untersucht werden können, denn sie ist die Schnittlinie einer Ebene mit einer gewissen Ringfläche, die durch Rotation einer Kreislinie um eine in ihrer Ebene gelegene, den Kreis verfehlende Achse entsteht. Mit dieser Kurve ist der Apollonische Kreis, der die Gleichung: $(x-m)^2 + y^2 = r_c^2$ hat, zu schneiden. m ist die Entfernung des Mittelpunktes M_c des Apollonischen Kreises vom Koordinatenanfangspunkt. Durch Elimination von y^2 aus den beiden letzten Gleichungen erhält man, da:

$$x^2 + y^2 = r_c^2 - m^2 + 2mx$$

und: $y^2 - x^2 = r_c^2 - m^2 + 2mx - 2x^2$ ist:

$$(r_c^2 - m^2 + 2mx)^2 + 2l^2(r_c^2 - m^2 + 2mx - 2x^2) = k^4 - l^4$$

oder: $4(l^2 - m^2)x^2 - 2m(2l^2 - m^2 + r_c^2)x + k^4 - (l^2 + m^2 - r_c^2)^2 = 0.$

Die Aufgabe ist daher mit Zirkel und Lineal lösbar. Dasselbe läßt sich aussagen von dem Reste der Aufgaben in der vorliegenden Gruppe, bei denen also außer c und $a:b$ gegeben ist: 7. $t_c w'_c$, 8. $t_c t'_c$, 9. $t_c t_a$, 10. $t'_c w_c$, 11. $t'_c w'_c$, 12. $t'_c t_a$, 13. $w_c w'_c$, 14. $w_c t_a$, 15. $w'_c t_a$ und 16. $t_a t_b$. Bei den Aufgaben 8 und 13 ist unmittelbar ersichtlich, daß sie sich mit Zirkel und Lineal lösen lassen: erstere, weil t_c und t'_c einzeln bestimmt, letztere, weil Fläche und Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $W'_c W_c C$ bekannt sind, die Höhe sich also finden läßt. Setzt man das konstante Produkt $w_c w'_c = k^2$, so ist $h_c = \frac{k^2}{2 r_c}$.

Bei algebraischer Lösung der Aufgaben 6 bis 16 erhält man Gleichungen, die in bezug auf die Unbekannten a^2 oder b^2 quadratisch sind.

Schließlich ist zu erwähnen, daß die Anzahl der bisher behandelten Aufgaben durch Einführung von Daten eine große Vermehrung erfährt. Außer c, r_c und $a:b$ bestehen z. B. noch folgende Data: c, $u-v$, $a:b$; c, $u'+v'$, $a:b$; c, $u'+u$, $a:b$; c, $u'-u$, $a:b$; c, $u+v'$, $a:b$; c, $u-v'$, $a:b$; c, $T_c T'_c$, $a:b$; c, u^2+v^2, $a:b$; c, $u'^2+v'^2$, $a:b$; c, u'^2+u^2, $a:b$; c, u'^2-u^2, $a:b$; c, $u^2+v'^2$, $a:b$; c, $u^2-v'^2$, $a:b$; c, uv, $a:b$; c, $u'v'$, $a:b$; c, uu', $a:b$ und c, uv', $a:b$.

Also kann in sämtlichen Aufgaben die Basis c durch die Strecken: r_c, $u-v$, $u'+v'$, $u'+u$, $u'-u$, $u+v'$, $u-v'$ und $T_c T'_c$ oder durch die Flächen: u^2+v^2, $u'^2+v'^2$, u'^2+u^2, u'^2-u^2, $u^2+v'^2$, $u^2-v'^2$, uv, $u'v'$, uu' und uv' ersetzt werden. Auch können z. B. an Stelle von c und $a:b$ c und r_c, u und v, u' und v', u und u', u und v' usw. gegeben sein.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) Die Basis $p-q$.

Diese Basis erfordert eine besondere Behandlung, weil bei gegebenen $p-q$ und $a:b$ einfache Beziehungen zu den Winkelhalbierenden w_c und w'_c sowohl als auch zur Mittellinie t_a nicht bestehen. Setzt man ein spitzwinkliges Dreieck voraus und schlägt um C als Mittelpunkt mit dem Radius b einen Kreisbogen, der die Basis $AB=c$ zum zweiten Male in A' schneidet, so hat das Dreieck $A'BC$ $p-q$ als Grundlinie, a und b als ihr anliegende Seiten und $\alpha-\beta$ als Winkel an der Spitze. Ist α stumpf, so ist $A'B=p+q$; dagegen bleibt der Winkel an der Spitze $=\alpha-\beta$. Die Halbierende des Außenwinkels an der Spitze des Dreiecks $A'BC$ bildet mit der Grundlinie den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und der nach der Spitze führende Radius des Apollonischen Kreises, der BA' nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt, ist gegen die Grundlinie um den Winkel γ geneigt. Ferner ist hier das Datum: $p-q$, h_c, t_c wichtig, von welchem schon früher Gebrauch gemacht wurde. In Verbindung mit dem anderen Datum: t_c, t'_c, $a:b$ sind alle Aufgaben mit h_c, t_c und t'_c lösbar. Denn kommt zu den Gleichungen: $t_c^2-h_c^2=\frac{(p-q)^2}{4}$ und $\frac{t_c}{t'_c}=\frac{a^2+b^2}{2ab}$ eine beliebige dritte Gleichung $f(h_c, t_c, t'_c)=0$ hinzu, und lassen sich aus diesen drei Gleichungen h_c, t_c und t'_c als Unbekannte bestimmen, so sind dadurch alle solche Aufgaben auf die Grundaufgabe: $p-q$, h_c, $a:b$ reduziert.

I. Außer $p-q$ und $a:b$ ist eine der 6 Strecken h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c und t_a gegeben.

1. $p-q$, h_c, $a:b$. Diese Aufgabe ist bereits behandelt worden.

2. $p-q$, t_c, $a:b$. $h_c^2=t_c^2-\frac{(p-q)^2}{4}$.

3. $p-q$, t'_c, $a:b$. $h_c^2=\frac{(a^2+b^2)^2 t'^2_c}{4a^2b^2}-\frac{(p-q)^2}{4}$, oder, wenn $a:b=m:n$ gesetzt wird: $h_c^2=\frac{(m^2+n^2)^2 t'^2_c-m^2n^2(p-q)^2}{4m^2n^2}$.

4. $p-q$, w_c, $a:b$. Ist $a:b=m:n$, so erhält man für c die quadratische Gleichung:

$$c^2-\frac{m+n}{m-n}(p-q)\,c+\frac{(m+n)^2}{mn}w_c^2=0.$$

Man hat also zunächst zwei vierte Proportionalen k und l zu konstruieren; erstere mit Hilfe der Proportion: $(m-n):(m+n)=(p-q):k$ und letztere aus: $\sqrt{mn}:(m+n)=w_c:l$. Zeichnet man dann ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse k und der Höhe l, so sind die von letzterer auf ersterer gebildeten Abschnitte die Grundlinien c_1 und c_2 der beiden gesuchten Dreiecke, die die Aufgabe im Allgemeinen lösen. Dadurch ist die gestellte Aufgabe entweder auf die Fundamentalaufgabe: c, w_c, $a:b$ oder auch auf die Aufgabe: p, q, $a:b$ zurückgeführt.

5. $p-q$, w'_c, $a:b$. Setzt man wieder $a:b=m:n$, so ergibt sich die quadratische Gleichung:

$$c^2-\frac{m-n}{m+n}(p-q)\,c-\frac{(m-n)^2}{mn}w'^2_c=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zunächst sind mithin die Proportionalen k und l aus: $(m+n):(m-n)=(p-q):k$ und: $\sqrt{mn}:(m-n)=w'_c:l$ zu zeichnen, und dann ist wegen des negativen absoluten Gliedes in der quadratischen Gleichung der Tangentensatz anzuwenden. Hierdurch ist die Aufgabe auf c, w'_c, $a:b$ oder p, q, $a:b$ zurückgeführt.

6. $p-q$, t_a, $a:b$. Für $a:b=m:n$ erhält man die quadratische Gleichung:

$$c^2-\frac{m^2-2n^2}{2(m^2-n^2)}(p-q)c-2t_a^2=0.$$

Die Lösung erfordert also ebenso wie die der vorigen Aufgabe die Anwendung des Tangentensatzes. Dann läßt sich die Aufgabe sowohl auf c, t_a, $a:b$ als auch auf die ganz einfache Aufgabe: p, q, t_a reduzieren.

II. Außer $p-q$ und $a:b$ ist das Verhältnis je zweier der 7 Strecken: h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c, t_a und t_b gegeben.

Sämtliche Aufgaben dieser Gruppe sind Spezialfälle der allgemeinen Aufgaben in der entsprechenden Gruppe des vorigen Abschnitts. Mehrere lassen noch besondere Lösungen zu, sowohl wegen des Bestehens der Daten $p-q$, h_c, t_c und t_c, t'_c, $a:b$, als auch weil in einigen Fällen der Winkel $\alpha-\beta$ bestimmt ist.

1. $p-q$, $a:b$, $h_c:t_c$. Die Aufgabe läßt sich ohne Benutzung eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks lösen, weil h_c und t_c einzeln bestimmt sind. Also läßt sie sich auf die Grundaufgabe $p-q$, h_c, $a:b$ zurückführen, wie schon oben erwähnt. Setzt man $h_c:t_c=$ $=k:l$, so ist: $h_c^2=\frac{k^2(p-q)^2}{4(l^2-k^2)}$.

2. $p-q$, $a:b$, $h_c:t'_c$. Die besondere Lösung wird hier durch die Bemerkung erhalten, daß durch das Verhältnis $h_c:t'_c$ und $a:b$ auch $h_c:t_c$ bestimmt ist. Wird $a:b=m:n$ und $h_c:t'_c=k:l$ gesetzt, so ist: $h_c^2=\frac{k^2m^2n^2(p-q)^2}{l^2(m^2+n^2)^2-4k^2m^2n^2}$.

3. $p-q$, $a:b$, $h_c:w_c$. Eine Lösung ohne Verwendung eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks ergibt sich, weil $\alpha-\beta$ bestimmt ist. Also erhält man das Dreieck $A'BC$, wenn man den Apollonischen Kreis schlägt, der $BA'=p-q$ nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt und mit dem den Winkel $\alpha-\beta$ fassenden Kreisbogen über $p-q$ als Sehne schneidet. Man kann auch die Lösung damit beginnen, daß man aus $a:b$ und $\alpha-\beta$ ein dem Dreieck $A'BC$ ähnliches Dreieck zeichnet. Dann ist der Apollonische Kreis entbehrlich.

4. $p-q$, $a:b$, $h_c:w'_c$. Die besonderen Lösungen sind dieselben wie die der vorigen Aufgabe. 5. $p-q$, $a:b$, $h_c:t_a$. 6. $p-q$, $a:b$, $t_c:t'_c$. Die Aufgabe ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich. $p-q$, $a:b$ und 7. $t_c:w_c$; 8. $t_c:w'_c$; 9. $t_c:t_a$; 10. $t'_c:w_c$; 11. $t'_c:w'_c$; 12. $t'_c:t_a$; 13. $w_c:w'_c$. Die besonderen Lösungen sind dieselben wie in Aufgabe 3. 14. $w_c:t_a$; 15. $w'_c:t_a$ und 16. $t_a:t_b$.

III. 1. $p-q$, $t_c^2-h_c^2$, $a:b$. Die Aufgabe ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich.

2. $p-q$, $t'^2_c-h_c^2$, $a:b$. Setzt man: $t'^2_c-h_c^2=d^2$ und $a:b=m:n$, so ist:

$$h_c^2=\frac{m^2n^2(p-q)^2-(m^2+n^2)^2d^2}{(m^2-n^2)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. $p-q$, $t_c^2-t'^2_c$, $a:b$. Ist $t_c^2-t'^2_c=d^2$ und $a:b=m:n$, so erhält man:

$$h_c^2=\frac{4(m^2+n^2)^2d^2-(m^2-n^2)^2(p-q)^2}{4(m^2-n^2)^2}.$$

IV. 1. $p-q$, $t_c^2+h_c^2$, $a:b$. Für $t_c^2+h_c^2=k^2$ und $a:b=m:n$ ist:

$$h_c^2=\frac{4k^2-(p-q)^2}{8}.$$

2. $p-q$, $t'^2_c+h_c^2$, $a:b$. Wird $t'^2_c+h_c^2=k^2$ und $a:b=m:n$ gesetzt, so ergibt sich:

$$h_c^2=\frac{(m^2+n^2)^2k^2-m^2n^2(p-q)^2}{m^4+6m^2n^2+n^4}.$$

3. $p-q$, $t_c^2+t'^2_c$, $a:b$. Für $t_c^2+t'^2_c=k^2$ und $a:b=m:n$ ist:

$$h_c^2=\frac{4(m^2+n^2)^2k^2-(m^4+6m^2n^2+n^4)(p-q)^2}{4(m^4+6m^2n^2+n^4)}.$$

Hierzu kommt: 4. $p-q$, $w_c^2+w'^2_c$, $a:b$, weil c bestimmt ist.

V. 1. $p-q$, $t_c^2+t'^2_c+h_c^2$, $a:b$. Wenn: $t_c^2+t'^2_c+h_c^2=k^2$ und $a:b=m:n$ gesetzt wird, so ist:

$$h_c^2=\frac{4(m^2+n^2)^2k^2-(m^4+6m^2n^2+n^4)(p-q)^2}{8(m^4+4m^2n^2+n^4)}.$$

2. $p-q$, $t_c^2+t'^2_c-h_c^2$, $a:b$; 3. $p-q$, $t_c^2-t'^2_c+h_c^2$, $a:b$; 4. $p-q-t_c^2+t'^2_c+h_c^2$, $a:b$.

VI. 1. $p-q$, t_c+h_c, $a:b$. Für $t_c+h_c=k$ und $a:b=m:n$ ist:

$$h_c=\frac{4k^2-(p-q)^2}{8k}.$$

2. $p-q$, t'_c+h_c, $a:b$. Setzt man: $t'_c+h_c=k$ und $a:b=m:n$, so erhält man für h_c die quadratische Gleichung:

$$(m^2-n^2)^2h_c^2-2(m^2+n^2)^2kh_c+(m^2+n^2)^2k^2-m^2n^2(p-q)^2=0.$$

3. $p-q$, $t_c+t'_c$, $a:b$. Für $t_c+t'_c=k$ und $a:b=m:n$ ist:

$$h_c^2=\frac{4(m^2+n^2)^2k^2-(m+n)^4(p-q)^2}{4(m+n)^4}.$$

VII. 1. $p-q$, t_c-h_c, $a:b$. Wird $t_c-h_c=d$ und $a:b=m:n$ gesetzt, so ist:

$$h_c=\frac{(p-q)^2-4d^2}{8d}.$$

2. $p-q$, t'_c-h_c, $a:b$. Ist: $t'_c-h_c=d$ und $a:b=m:n$, so erhält man für h_c die quadratische Gleichung:

$$(m^2-n^2)h_c^2+2(m^2+n^2)^2dh_c+(m^2+n^2)^2d^2-m^2n^2(p-q)^2=0.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. $p-q$, $t_c-t'_c$, $a:b$. Ist: $t_c-t'_c=d$ und $a:b=m:n$, so folgt:

$$h_c^2=\frac{4(m^2+n^2)^2 d^2+(m-n)^4(p-q)^2}{4(m-n)^4}.$$

VIII. 1. $p-q$, $t_c+t'_c+h_c$, $a:b$. Setzt man: $t_c+t'_c+h_c=k$ und $a:b=m:n$, so erhält man für h_c die biquadratische Gleichung:

$$16m^4n^4[4h_c^2+(p-q)^2]^2-8m^2n^2(m^2+n^2)^2[4h_c^2+(p-q)^2][8h_c^2-8kh_c+4k^2+(p-q)^2]+$$
$$+(m^2+n^2)^4[8kh_c-4k^2+(p-q)^2]^2=0.$$

Auch die drei übrigen Aufgaben, nämlich: $p-q$, $a:b$ und 2. $t_c+t'_c-h_c$; 3. $t_c-t'_c+h_c$; 4. $-t_c+t'_c+h_c$, sind mit Zirkel und Lineal nicht lösbar.

IX. 1. $p-q$, h_ct_c, $a:b$. Wird $h_ct_c=k^2$ und $a:b=m:n$ gesetzt, so ergibt sich für h_c^2 die quadratische Gleichung:

$$4h_c^4+(p-q)^2h_c^2-4k^4=0.$$

2. $p-q$, $h_ct'_c$, $a:b$. Wenn $h_ct'_c=k^2$ und $a:b=m:n$ ist, so erhält man für h_c^2 die quadratische Gleichung:

$$4m^2n^2h_c^4+m^2n^2(p-q)^2h_c^2-(m^2+n^2)^2k^4=0.$$

3. $p-q$, $t_ct'_c$, $a:b$. Für $t_ct'_c=k^2$ und $a:b=m:n$ ist:

$$h_c^2=\frac{2(m^2+n^2)k^2-mn\,(p-q)^2}{4mn}.$$

Diese Aufgaben lassen sich vermehren, wenn an Stelle von $a:b$ die ihm gleichen Verhältnisse gesetzt werden.

c) Die Winkelgegentransversale der Höhe.

Zunächst ist daran zu erinnern, daß r_c, h_c und h'_c ein Datum bilden, weil h_c Höhe des rechtwinkligen Dreiecks $M_cH'_cC$ mit den Katheten r_c und h'_c ist.

1. c, h'_c, $a:b$. Da r_c bekannt ist, so läßt sich h_c finden.

2. c, $h_c:h'_c$, $a:b$. Da $\frac{h_c}{h'_c}=\cos(\alpha-\beta)$ ist, so ist dadurch die Aufgabe auf c, $a:b$, $\alpha-\beta$ reduziert. Der Spezialfall h_c, h'_c, $a:b$ läßt sich z. B. dadurch lösen, daß man nach Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks $H_cH'_cC$ den Winkel bei C halbiert, wodurch man $CW_c=w_c$ findet. Dann hat man auch W'_c und durch harmonische Teilung von W'_cW_c nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ A und B. Die Aufgabe a, b, $h_c:h'_c$ ist die auch ohne den Apollonischen Kreis lösbare Aufgabe a, b, $\alpha-\beta$.

3. c, $h'^2_c-h_c^2$, $a:b$. $H_cH'_c$ ist bekannt. Da nun W'_c, W_c und H_c, H'_c zugeordnete harmonische Punktepaare sind, hat man die beiden bekannten Strecken W'_cW_c und $H_cH'_c$ so aufeinander zu legen, daß ihre Endpunkte zugeordnete harmonische Punkte sind, d. h. man hat die in der Einleitung behandelte dritte Fundamentalaufgabe zu lösen.

Hiermit ist auch die Aufgabe gelöst: Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der einen Kathete und dem der anderen anliegenden, von der Höhe auf der Hypotenuse

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

gebildeten Abschnitt. Nennt man zur algebraischen Lösung dieser Aufgabe a und b die Katheten des bei C rechtwinkligen Dreiecks ABC, c seine Hypotenuse, p und q die a, bez. b anliegenden Hypotenusenabschnitte, so erhält man bei gegebenen b und p für c die quadratische Gleichung: $c^2 - pc - b^2 = 0$. Die hier allein brauchbare positive Wurzel dieser Gleichung, nämlich: $c = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + b^2}$, gestattet eine einfache Konstruktion der Hypotenuse. Man legt $DP = p$ hin — wenn D den Fußpunkt der Höhe bedeutet — und errichtet in D die Senkrechte von der Länge b. Ein mit der Entfernung des so gefundenen Punktes von der Mitte von DB als Radius um letzteren Punkt als Mittelpunkt geschlagener Kreisbogen schneidet die Verlängerung von BD über D in A. Und wenn der um A als Mittelpunkt mit dem Radius b gezeichnete Kreis BD, bez. seine Verlängerung in E und F schneidet, so sind B, D und E, F zugeordnete harmonische Paare. Man hat also eine neue Lösung der in der Einleitung behandelten dritten Grundaufgabe.

Andere, ähnlich zu lösende Aufgaben sind: c, r_c, $h'^2_c - h_c^2$; t_c, r_c, $h'^2_c - h_c^2$; t'_c, r_c, $h'^2_c - h_c^2$; $T_cT'_c$, r_c, $h'^2_c - h_c^2$; a, r_c, $h'^2_c - h_c^2$ und t_a, r_c, $h'^2_c - h_c^2$. Zur Lösung der letzten Aufgabe hat man zu bedenken, daß die Punkte P_a, W'_c und W_c bestimmt sind; also sind es auch die Strecken $P_aW_c = \frac{c(a+2b)}{a+b}$ und $P_aW'_c = \frac{c(a-2b)}{a-b}$. Dabei wird vorausgesetzt, daß $w'_c < 2t_a$ ist. $\Big($Ist $w'_c = 2t_a$, so fallen die Punkte W'_c und P_a zusammen; das Verhältnis $a:b$ ist $= 2:1$, mithin $c = \frac{3}{2}\, r_c$. Wenn $w'_c > 2t_a$ ist, so ergibt sich $P_aW'_c = \frac{c(2b-a)}{a-b}$.$\Big)$ Löst man die beiden letzten Gleichungen nach einer der Unbekannten c oder $\frac{a}{b} = \varkappa$ auf, so erhält man für c die quadratische Gleichung:

$$4c^2 - 3(P_aW_c + P_aW'_c)\,c + 2P_aW_c \cdot P_aW'_c = 0$$

und für $\varkappa$:

$$2r_c\varkappa^2 - (P_aW_c + P_aW'_c)\,\varkappa - 4r_c = 0.$$

Die Aufgabe läßt sich also mit Zirkel und Lineal lösen.

Die der vorliegenden entsprechende Aufgabe für die Mittellinie und die Symmediane, nämlich c, $T_cT'_c$, $a:b$, ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich, weil die drei genannten Größen, wie schon früher erwähnt, ein Datum darstellen.

4. $c, h'^2_c + h_c^2, a:b$. Da r_c bekannt ist, so hat man die Aufgabe: Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus der einen Kathete und der Summe der Quadrate der anderen Kathete und der Höhe. Setzt man die gegebene Quadratsumme $= k^2$ und nimmt die Hypotenuse $M_cH'_c$ des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks $M_cH'_cC$ als Unbekannte x, so ist:

$$h_c^2 + h'^2_c = k^2,$$

und man erhält die für x^2 quadratische Gleichung:

$$x^4 - k^2x^2 - r_c^4 = 0.$$

Nur der positive, für x^2 sich ergebende Wert, nämlich:

$$x_1^2 = \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4r_c^4}}{2}$$

ist brauchbar. Die gestellte Aufgabe ist hiermit auf c, h_c, $a:b$ reduziert.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. c, $h'_c + h_c$, $a:b$. Hier hat man die Aufgabe zu lösen: Ein rechtwinkliges Dreieck aus der einen Kathete und der Summe der anderen Kathete und der Höhe zu zeichnen. Wird die gegebene Summe $h'_c + h_c = k$ gesetzt und die Hypotenuse des Dreiecks als Unbekannte x eingeführt, so ergibt sich die für x^2 biquadratische Gleichung:

$$x^8 - 2(k^2 + 2r_c^2)x^6 + (k^4 + 6r_c^4)x^4 + 2r_c^4(k^2 - 2r_c^2)x^2 + r_c^8 = 0.$$

Die Aufgabe läßt sich mithin nicht mit Zirkel und Lineal lösen.

6. c, $h'_c - h_c$, $a:b$. Diese Aufgabe ist gleichfalls nicht mit Zirkel und Lineal lösbar.

7. c, $h_c h'_c$, $a:b$. Wird $h_c h'_c = k^2$ gesetzt, so findet man für die Hypotenuse x des gesuchten rechtwinkligen Dreiecks die quadratische Gleichung:

$$x^2 - \frac{k^2}{r_c}x - r_c^2 = 0.$$

Nur die positive Wurzel:

$$x_1 = \frac{k^2 + \sqrt{k^4 + 4r_c^4}}{2r_c}$$

dieser Gleichung ist hier brauchbar.

d) Aufgaben, in welchen außer einer der 7 Strecken c, h_c, t_c, t'_c, w_c, w'_c und t_a die Glieder je eines der 8 Verhältnisse:

$$\frac{a}{b} = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{h_b}{h_a} = \frac{t_c + \sqrt{t_c^2 - t'^2_c}}{t'_c} = \frac{l_b}{l_a} = \frac{l'_b}{l'_a} = \frac{\varrho''_c + \varrho'_c}{\varrho''_c - \varrho'_c}$$

einzeln gegeben sind.

Zunächst müssen mehrere für die Lösung der folgenden Aufgaben gebrauchte Data abgeleitet werden. Die von A und B auf w'_c gefällten Lote $AL'_a = l'_a$ und $BL'_b = l'_b$ sind w_c parallel; also ist:

$$l'_a : w_c = W'_c A : W'_c W_c = v' : 2r_c = \frac{bc}{a-b} : \frac{2abc}{a^2 - b^2} = \frac{a+b}{2a};$$

mithin bilden l'_a, w_c und $a:b$ ein Datum und in allen Aufgaben, in denen w_c und $a:b$ vorkommen, kann also l'_a für w_c gesetzt werden. Ferner hat man:

$$l'_b : w_c = W'_c B : W'_c W_c = u' : 2r_c = \frac{ac}{a-b} : \frac{2abc}{a^2 - b^2} = \frac{a+b}{2b};$$

mithin bilden auch l'_b, w_c und $a:b$ ein Datum.

Addiert man die Gleichungen: $\frac{w_c}{l'_a} = \frac{2a}{a+b}$ und: $\frac{w_c}{l'_b} = \frac{2b}{a+b}$, so folgt: $\frac{1}{l'_a} + \frac{1}{l'_b} = \frac{2}{w_c}$; also bilden auch w_c, l'_a und l'_b ein Datum.

Ferner ist: $l_a : w'_c = AW_c : W'_c W_c = v : 2r_c = \frac{bc}{a+b} : \frac{2abc}{a^2 - b^2} = \frac{a-b}{2a}$, woraus hervorgeht, daß l_a, w'_c und $a:b$ ein Datum darstellen. $l_b : w'_c = W_c B : W'_c W_c = u : 2r_c = \frac{ac}{a+b} : \frac{2abc}{a^2 - b^2} = \frac{a-b}{2a}$; d. h. auch l_b, w'_c und $a:b$ bilden ein Datum, und weil $\frac{1}{l_a} - \frac{1}{l_b} = \frac{2}{w'_c}$ ist, so bilden schließlich noch l_a, l_b und w'_c ein Datum.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Endlich folgt aus den früher abgeleiteten Gleichungen: $2\triangle = (a+b)\varrho'_c$ und $2\triangle = (a-b)\varrho''_c$:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}=\frac{1}{\varrho'_c} \text{ und: } \frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}=\frac{1}{\varrho''_c}; \text{ und hieraus:}$$

$$\frac{2}{h_a}=\frac{1}{\varrho'_c}+\frac{1}{\varrho''_c}; \quad \frac{2}{h_b}=\frac{1}{\varrho'_c}-\frac{1}{\varrho''_c}.$$

I. In dieser Gruppe sind folgende vier Aufgaben bemerkenswert:

1. c, t_c, t'_c. Diese Aufgabe läßt sich auf eine Fundamentalaufgabe reduzieren.

2. c, l_a, l_b. Die Grundlinie $BA = c$ wird nach dem Verhältnis $l_b : l_a$ innen geteilt und dadurch W_c gefunden. Dann werden über den Durchmessern AW_c und W_cB auf verschiedenen Seiten von AB Halbkreise geschlagen und in den ersten von A aus l_a, in den zweiten von B aus l_b als Sehne eingetragen. Dadurch findet man L_a und L_b. Zuletzt bestimmt man den vierten, W_c zugeordneten, harmonischen Punkt C zu L_b, L_a und W_c.

Eine zweite Lösung der Aufgabe besteht darin, den Apollonischen Kreis zu schlagen, der BA nach dem gegebenen Verhältnis $l_b : l_a$ harmonisch teilt und nur einen der beiden Halbkreise zu benutzen, was zur Bestimmung der Richtung der Winkelhalbierenden w_c ausreicht.

Schließlich kann die Aufgabe auch auf die Grundaufgabe c, w'_c, $a:b$ zurückgeführt werden, da durch l_a und l_b w'_c und $a:b$ bestimmt sind.

3. c, l'_a, l'_b. Die drei Lösungen, die auch diese Aufgabe zuläßt, sind denen der vorigen ähnlich.

4. c, ϱ'_c, ϱ''_c. Man teilt BA harmonisch nach dem bekannten Verhältnis $\frac{\varrho''_c+\varrho'_c}{\varrho''_c-\varrho'_c}$ und schlägt um W_c und W'_c als Mittelpunkte die Kreise mit den Radien ϱ'_c, bez. ϱ''_c. Die gemeinschaftlichen äußeren und inneren Tangenten an diese Kreise bestimmen zwei Dreiecke, die beide den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Eine zweite Lösung folgt aus der Überlegung, daß h_a und h_b durch ϱ'_c und ϱ''_c bestimmt sind, die vorliegende Aufgabe also auf c, h_a, h_b reduziert wird. Auch diese Aufgabe wird durch zwei Dreiecke gelöst, da man die eine der beiden Höhen h_a und h_b in beide Hälften des über c als Durchmesser geschlagenen Kreises als Sehne eintragen kann.

II. Zu erwähnen sind folgende Aufgaben:

1. h_c, t_c, t'_c. Diese Aufgabe läßt sich auf die schon früher gelöste: h_c, t_c, $a:b$ zurückführen. Eine zweite Lösung erhält man, wenn man nach Zeichnung der rechtwinkligen Dreiecke $CH_cT'_c$ und CH_cT_c den Winkel T'_cCT_c halbiert und die Halbierende bis zur Basis verlängert. Dadurch findet man w_c. Dann hat man auch w'_c und die Aufgabe ist auf die in der Einleitung gelöste: t_c, w_c, w'_c reduziert. Auch auf die Aufgaben: $p-q$, $a:b$, $\alpha-\beta$; $p-q$, h_c, $a:b$ und $p-q$, h_c, $\alpha-\beta$ ist die vorliegende Aufgabe zurückführbar.

2. h_c, l_a, l_b. Da durch l_a und l_b w'_c und $a:b$ bestimmt sind, so ist die Aufgabe auf die bereits früher behandelte: h_c, w'_c, $a:b$ reduzierbar.

Bei algebraischer Lösung findet man:

$$b^2=\frac{4l_a^3l_b(l_al_b+h_c^2)}{4l_a^2l_b^2-(l_b-l_a)^2h_c^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis c und dem Schenkel b ist $b^2 = \frac{c^2}{4} + h_c^2$, denn $l_a = l_b = \frac{c}{2}$.

3. h_c, l'_a, l'_b. Die Aufgabe läßt sich auf die schon gelöste: h_c, w_c, $a:b$ reduzieren. Bei algebraischer Lösung ergibt sich:

$$b^2 = \frac{4 l'^3_a l'_b (l'_a l'_b - h_c^2)}{4 l'^2_a l'^2_b - (l'_a + l'_b)^2 h_c^2}.$$

Für das gleichschenklige Dreieck mit der Basis c, der Basishöhe h_c und dem Schenkel b wird $l'_a = l'_b = h_c$ und b^2 erscheint in der unbestimmten Form: $\frac{0}{0}$.

4. h_c, ϱ'_c, ϱ''_c. Die Aufgabe läßt sich auf h_a, h_b, h_c zurückführen, weil h_a und h_b durch ϱ'_c und ϱ''_c bestimmt sind.

III. 1. a, b, t_c. Diese Aufgabe wird durch Zurückführung auf eine Parallelogrammaufgabe gelöst.

Eine Apollonische Lösung wird dadurch ermöglicht, daß man eine beliebige Strecke hinlegt, sie verdoppelt und den Apollonischen Kreis schlägt, der die verdoppelte Strecke nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Dann schlägt man einen zweiten Apollonischen Kreis, der die eine einfache Strecke nach dem Verhältnis $a:t_c$ oder einen dritten, der die andere nach dem Verhältnis $t_c:b$ harmonisch teilt. Die drei Apollonischen Kreise schneiden sich in dem Punkte C, welcher mit den Endpunkten der verdoppelten Strecke ein dem gesuchten ähnliches Dreieck bestimmt. Diese Lösung wäre anzuwenden, wenn gefordert würde, das durch c, $a:b:t_c$ bestimmte Dreieck ohne Hilfe eines ihm ähnlichen zu finden.

Eine dritte Lösung der Aufgabe ist folgende: Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $a+b$ und $a-b$ wird gezeichnet und über der Hypotenuse als Durchmesser ein Halbkreis geschlagen. Dann wird in den Halbkreis von dem einen Endpunkt des Durchmessers aus $2t_c$ als Sehne eingetragen. Die andere Kathete des entstehenden zweiten rechtwinkligen Dreiecks ist c.

2. l_a, l_b, t_c. Durch l_a und l_b sind w'_c und $a:b$ bestimmt, also läßt sich die Aufgabe auf die früher gelöste: t_c, w'_c, $a:b$ zurückführen.

Bei algebraischer Lösung der vorliegenden Aufgabe erhält man:

$$b^2 = \frac{4 l_a^2 (t_c^2 + l_a l_b)}{(l_b + l_a)^2}.$$

Hat man b konstruiert, so kann man das Dreieck AL_aC zeichnen, dann findet man auch die Richtung von CB und den Punkt B, wenn man zu CL_a die Parallele im Abstande l_b zieht. Der obige Ausdruck nimmt für das gleichschenklige Dreieck, für welches $t_c = h_c$ ist, die Form an: $b^2 = \frac{c^2}{4} + h_c^2$.

3. l'_a, l'_b, t_c. Die Aufgabe läßt sich auf t_c, w_c, $a:b$ zurückführen.

Bei algebraischer Lösung findet man:

$$b^2 = \frac{4 l'^2_a (t_c^2 - l'_a l'_b)}{(l'_b - l'_a)^2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Für das gleichschenklige Dreieck ABC mit der Basis AB ist $l'_a = l'_b = h_c = t_c$; also erscheint dann b^2 unter der unbestimmten Form: $\frac{0}{0}$.

4. ϱ'_c, ϱ''_c, t_c. Die Aufgabe läßt sich auf h_a, h_b, t_c zurückführen.

IV. 1. a, b, t'_c läßt sich auf a, b, t_c reduzieren.
2. h_a, h_b, t'_c „ „ „ h_a, h_b, t_c „
3. l'_a, l'_b, t'_c „ „ „ l'_a, l'_b, t_c „
4. ϱ'_c, ϱ''_c, t'_c „ „ „ ϱ'_c, ϱ''_c, t_c „

V. 1. a, b, w_c. Die Aufgabe wird mit Hilfe des Satzes von der Teilung der Grundlinie durch die Halbierende des Winkels an der Spitze dadurch gelöst, daß man zunächst die vierte Proportionale d zu b, $a+b$ und w_c zeichnet. Dann konstruiert man das gleichschenklige Dreieck aus $BD = d$ als Basis und a als Schenkel. Durch die Spitze C dieses Dreiecks wird die Parallele zu DB von der Länge $w_c = CW_c$ gezogen. A ist der Schnittpunkt der Verlängerungen von DC und BW_c. (Fischer, S. 209, Borth, S. 124.)

Zu einer zweiten Lösung gelangt man, wenn man $CW_c = w_c$ nach dem Verhältnis $(a+b):(a-b)$ harmonisch teilt, wodurch man die Punkte L_a und L_b gewinnt, in denen man auf CW_c auf verschiedenen Seiten dieser Strecke Senkrechte errichtet. Kreisbogen um C als Mittelpunkt und mit den Radien a und b schneiden die Senkrechten in A, bez. B.

Eine dritte Lösung ist folgende: Man schlägt den Apollonischen Kreis, der eine beliebige Strecke nach dem Verhältnis $a:b$ harmonisch teilt. Dann schlägt man einen zweiten Apollonischen Kreis, der die lange Teilstrecke zwischen dem einen Endpunkt und dem inneren Teilpunkt nach dem Verhältnis $a:w_c$ oder einen dritten, der die kurze Teilstrecke nach dem Verhältnis $w_c:b$ harmonisch teilt, wodurch man in dem Schnittpunkte C der drei Apollonischen Kreise und den Endpunkten der zuerst harmonisch geteilten Strecke ein dem gesuchten ähnliches Dreieck erhält. Diese Lösung empfiehlt sich besonders dann, wenn die Aufgabe c, $a:b:w_c$ vorliegt.

2. h_a, h_b, w_c. Zuerst findet man dieselbe Strecke $BD = d$ wie in der vorigen Aufgabe aus der Proportion: $h_a:(h_b+h_a) = w_c:d$. Ist ferner H_b der Fußpunkt der Höhe $h_b = BH_b$, so läßt sich zunächst das Dreieck BDH_b, dann das Dreieck BDC zeichnen. (Fischer, S. 210, Borth, S. 125.)

Eine zweite Lösung erhält man, wenn man bedenkt, daß ϱ'_c durch h_a und h_b bestimmt ist; durch w_c und ϱ'_c ist aber γ bestimmt.

3. t_c, t'_c, w_c. Die Aufgabe ist ein Spezialfall der in der zweiten Gruppe des ersten Abschnitts behandelten allgemeinen Aufgaben g, $a:b$, $t_c:w_c$ oder g, $a:b$, $t_c:w'_c$.

4. l_a, l_b, w_c. $CW_c = w_c$ wird innen in L_a und außen in L_b nach dem bekannten Verhältnis $(l_b+l_a):(l_b-l_a)$ harmonisch geteilt und in den Teilpunkten L_a und L_b auf w_c auf verschiedenen Seiten dieser Strecke die Senkrechten $L_aA = l_a$ und $L_bB = l_b$ errichtet.

Da durch l_a und l_b w'_c und $a:b$ bestimmt sind, so läßt sich die Aufgabe auch auf die schon gelöste: w_c, w'_c, $a:b$ zurückführen.

5. l'_a, l'_b, w_c. Die Aufgabe ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich, weil die drei Strecken ein Datum bilden.

6. ϱ'_c, ϱ''_c, w_c. Die Aufgabe läßt sich auf h_a, h_b, w_c zurückführen, weil ϱ'_c und ϱ''_c h_a und h_b bestimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VI. 1. a, b, w'_c. Auch für diese Aufgabe gibt es drei Lösungen, die denen der ersten Aufgabe der vorigen Gruppe ähnlich sind.

2. h_a, h_b, w'_c. Die Aufgabe hat wie die entsprechende der vorigen Gruppe zwei Lösungen. In der zweiten Lösung bestimmt man hier ϱ''_c durch h_a und h_b, dann hat man auch den Winkel γ.

3. t_c, t'_c, w'_c läßt sich auf t_c, w'_c, $a:b$ oder t'_c, w'_c, $a:b$ zurückführen.

4. l_a, l_b, w'_c. Die Aufgabe ist unbestimmt oder ihre Lösung unmöglich, weil l_a, l_b und w'_c ein Datum bilden.

5. l'_a, l'_b, w'_c. $CW'_c = w'_c$ wird nach dem bekannten Verhältnis $(l'_b + l'_a):(l'_b - l'_a)$ harmonisch geteilt und in den Teilpunkten L'_a und L'_b auf w'_c auf derselben Seite dieser Strecke die Senkrechten $l'_a = L'_a A$ und $l'_b = L'_b B$ errichtet. (Auf Seite 13, Zeile 12 und 13 von unten, ist an die Stelle von: „auf beiden Seiten" zu setzen: „auf derselben Seite".)

Die Aufgabe läßt sich auch auf w_c, w'_c, $a:b$ reduzieren.

6. ϱ'_c, ϱ''_c, w'_c. Die Aufgabe läßt sich auf h_a, h_b, w'_c zurückführen.

VII. 1. t_a, t_c, t'_c. Die Aufgabe läßt sich auf die schon früher gelöste: t_a, t_c, $a:b$ zurückführen.

2. l_a, l_b, t_a. Die Aufgabe läßt sich auf w'_c, t_a, $a:b$ zurückführen.

Bei algebraischer Lösung findet man:

$$b^2 = \frac{4 l_a^2 (t_a^2 - 2 l_a l_b)}{(2 l_a - l_b)^2}.$$

Für das gleichschenklige Dreieck mit der Basis c und dem Schenkel $a = b$ ist $a^2 + 2c^2 = 4 t_a^2$.

3. l'_a, l'_b, t_a. Die Aufgabe läßt sich auf w_c, t_a, $a:b$ reduzieren.

Bei algebraischer Lösung erhält man:

$$b^2 = \frac{4 l'^2_a (t_a^2 + 2 l'_a l'_b)}{(2 l'_a + l'_b)^2}.$$

Für das gleichschenklige Dreieck mit der Basis c und dem Schenkel $a = b$ ist $l'_a = l'_b = h_c$, also $a^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + 2 h_c^2)$ oder $4 t_a^2 = 9 a^2 - 8 h_c^2 = a^2 + 2 c^2$.

4. ϱ'_c, ϱ''_c, t_a. Die Aufgabe wird auf h_a, h_b, t_a zurückgeführt.

B. Das Verhältnis $\frac{a+b}{c}$.

a) Die Basis w_c.

Aus $u = \frac{ac}{a+b}$ folgt: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{u}$ und aus $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$ ergibt sich: $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{u-v}$, also: $\frac{a+b}{c} = \frac{a-b}{u-v}$. Da ferner aus $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$ unter Voraussetzung eines spitzwinkligen Dreiecks: $(a+b)(a-b) = c(p-q)$ hervorgeht (ist das Dreieck bei A stumpfwinklig, so ist $p-q$ durch $p+q$ zu ersetzen), so ist auch: $\frac{a+b}{c} = \frac{p-q}{a-b}$. Weiter erhält man durch Multiplikation der Gleichungen $p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}$ und $u - v = c \cdot \frac{a-b}{a+b}$:

$$(p-q)(u-v) = (a-b)^2.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Daraus ergibt sich wieder die schon abgeleitete Beziehung: $\frac{a-b}{u-v}=\frac{p-q}{a-b}$. Dividiert man aber jene Gleichungen durcheinander, so hat man: $\frac{p-q}{u-v}=\frac{(a+b)^2}{c^2}$, mithin:

$$\frac{a+b}{c}=\sqrt{\frac{p-q}{u-v}}.$$

Bezeichnet man den Inkreisradius des Dreiecks ABC mit ϱ und mit ϱ_c den Radius des dem Dreieck angeschriebenen Kreises, der c und die Verlängerungen von a und b berührt, so bestehen, wenn $a+b+c=2s$ gesetzt wird und $\triangle$ die Fläche des Dreiecks ABC bedeutet, die Gleichungen: $\varrho=\frac{\triangle}{s}$ und $\varrho_c=\frac{\triangle}{s-c}$, folglich $\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}=\frac{a+b}{c}$. Da ferner: $\frac{1}{\varrho}-\frac{1}{\varrho_c}=\frac{2}{h_c}$, so hat man: $\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}=\frac{h_c-\varrho}{\varrho}=\frac{h_c+\varrho_c}{\varrho_c}$.

Schließlich ist $\varrho'_c=\frac{2\triangle}{a+b}$; mithin: $\frac{a+b}{c}=\frac{\varrho}{\varrho'_c-\varrho}$ und $\frac{a+b}{c}$ auch $=\frac{\varrho_c}{\varrho_c-\varrho'_c}$.

Nennt man N den Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC und N_c den Mittelpunkt des dem Dreieck angeschriebenen Kreises, der c und die Verlängerungen von a und b berührt, so wird $CW_c=w_c$ innen in N und außen in N_c nach dem Verhältnis $\frac{a+b}{c}$ harmonisch geteilt; wir können also unsere bisherigen Ergebnisse in folgendem Satze niederlegen:

Satz: Der Umkreis des Sehnenvierecks $ANBN_c$ ist der Apollonische Kreis, der $CW_c=w_c$ nach dem Verhältnis: $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{u}=\frac{a-b}{u-v}=\frac{p-q}{a-b}=\sqrt{\frac{p-q}{u-v}}=\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}=$ $=\frac{h_c-\varrho}{\varrho}=\frac{h_c+\varrho_c}{\varrho_c}=\frac{\varrho}{\varrho'_c-\varrho}=\frac{\varrho_c}{\varrho_c-\varrho'_c}$ harmonisch teilt; der innere Teilpunkt ist N, der äußere N_c. Der Durchmesser N_cN des Apollonischen Kreises wird nach dem Verhältnis:

$$\frac{a+b+c}{a+b-c}=\frac{s}{s-c}=\frac{a+u}{a-u}=\frac{(a-b)+(u-v)}{(a-b)-(u-v)}=\frac{(p-q)+(a-b)}{(p-q)-(a-b)}=$$

$$=\frac{\sqrt{p-q}+\sqrt{u-v}}{\sqrt{p-q}-\sqrt{u-v}}=\frac{\varrho_c}{\varrho}=\frac{h_c}{h_c-2\varrho}=\frac{h_c+2\varrho_c}{h_c}=\frac{\varrho}{2\varrho-\varrho'_c}=\frac{2\varrho_c-\varrho'_c}{\varrho'_c}$$

harmonisch geteilt. Der innere Teilpunkt ist W_c, der äußere C.

Der Mittelpunkt des Apollonischen Kreises liegt auf dem Umkreise des Dreiecks ABC; ist letzteres spitzwinklig, so ist der Mittelpunkt die Mitte des kurzen Umkreisbogens AB, und wenn Dreieck ABC bei C stumpfwinklig ist, so liegt das Zentrum des Apollonischen Kreises in der Mitte des langen Umkreisbogens AB. Überdies ist der innerhalb des Umkreises des Dreiecks ABC liegende Bogen AB des Apollonischen Kreises der geometrische Ort der Inkreismittelpunkte der dem Umkreise des Dreiecks ABC eingeschriebenen Dreiecke mit der gemeinschaftlichen Basis AB, und der außerhalb des Umkreises liegende Bogen AB des Apollonischen Kreises ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte der den Dreiecken ABC angeschriebenen Kreise, welche c und die Verlängerungen von a und b berühren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Was die auf der Grundlinie AB des Dreiecks ABC liegenden Strecken betrifft, so ist zunächst $H_cW_c = \frac{p-q}{2}$, wie schon früher erwähnt wurde; ferner ist $T_cW_c = \frac{u-v}{2}$, und wenn man von N und N_c auf AB die Lote $NN' = \varrho$ und $N_cN'_c = \varrho_c$ fällt, so ist $N'N'_c = a-b$ und T_c ist auch Mitte von $N'N'_c$. Da weiter jedes harmonische Büschel durch eine beliebige Gerade in harmonischen Punkten geschnitten wird, so sind die Punkte H_c, W_c und N', N'_c zugeordnete harmonische Paare; also ist: $N'H_c : N'W_c = N'_cH_c : N'_cW_c$ und: $W_cN'_c : W_cN' = H_cN'_c : H_cN'$. Das Teilungsverhältnis für N'_cN' ist das Verhältnis $\frac{\varrho_c}{\varrho} = \frac{a+b+c}{a+b-c} = \frac{s}{s-c}$; mithin wird H_cW_c innen in N' und außen in N'_c nach dem Verhältnis $\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho} = \frac{a+b}{c}$ harmonisch geteilt.

I. Außer w_c und $\frac{a+b}{c}$ ist eine der 12 Strecken a, u, $a-b$, $u-v$, $p-q$, h_c, t_c, ϱ, ϱ_c, $\varrho_c-\varrho$, ϱ'_c und r gegeben, wenn r den Umkreisradius des Dreiecks ABC bedeutet.

1. w_c, a, $\frac{a+b}{c}$. Der Apollonische Kreis wird von dem Kreisbogen um C als Mittelpunkt mit a als Radius in B geschnitten. Also hat man das Dreieck W_cBC, welches man leicht zum Dreieck ABC ergänzen kann. Man kann mithin auch die folgenden Aufgaben lösen: w_c, a, $\frac{a-b}{u-v}$; w_c, a, $\frac{p-q}{a-b}$; w_c, a, $\frac{p-q}{u-v}$; w_c, a, $\frac{\varrho_c}{\varrho}$; w_c, a, $\frac{h_c}{\varrho}$; w_c, a, $\frac{h_c}{\varrho_c}$; w_c, a, $\frac{\varrho}{\varrho'_c}$ und w_c, a, $\frac{\varrho_c}{\varrho'_c}$ oder mit Hilfe eines dem gesuchten ähnlichen Dreiecks die folgenden: $\frac{w_c}{a}$ $a+b$, c; $\frac{w_c}{a}$, $a-b$, $u-v$; $\frac{w_c}{a}$, $p-q$, $a-b$; $\frac{w_c}{a}$, $p-q$, $u-v$; $\frac{w_c}{a}$, ϱ_c, ϱ; $\frac{w_c}{a}$, h_c, ϱ; $\frac{w_c}{a}$, h_c, ϱ_c; $\frac{w_c}{a}$ ϱ, ϱ'_c und $\frac{w_c}{a}$, ϱ_c, ϱ'_c. Beide Gruppen sind, wenn g, wie früher, irgend ein die Größe des Dreiecks bestimmendes Stück bedeutet, in den allgemeinen Aufgaben: g, $w_c : a$, $(a+b) : c$ usw. enthalten. Ähnliche Bemerkungen gelten für die Aufgaben in dieser und der folgenden Gruppe.

2. w_c, u, $\frac{a+b}{c}$. Der um den Mittelpunkt W_c mit dem Radius u geschlagene Kreisbogen schneidet den Apollonischen Kreis in B.

3. w_c, $a-b$, $\frac{a+b}{c}$. Da $u-v$ als vierte Proportionale zu $a+b$, c und $a-b$ bestimmt ist, so kennt man auch in dem rechtwinkligen Dreieck $N'W_cN$ die Kathete $N'W_c$, denn sie ist $= \frac{(a-b)-(u-v)}{2}$. Hat man also den Apollonischen Kreis geschlagen, so findet man die Richtung von AB, wenn man in den Halbkreis über W_cN als Durchmesser jene Kathete von W_c aus als Sehne einträgt. Man kann die Konstruktion auch mit der bekannten Kathete W_cN_c des rechtwinkligen Dreiecks $W_cN'_cN_c$ ausführen, denn:

$$W_cN'_c = \frac{(a-b)+(u-v)}{2}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zu einer zweiten Lösung gelangt man, wenn man bedenkt, daß durch $a-b$ und $\frac{a+b}{c}$ auch $p-q$ bestimmt ist. Hat man also den Apollonischen Kreis geschlagen, so findet man H_c, wenn man in den Halbkreis über CW_c als Durchmesser von W_c aus $\frac{(p-q)-(u-v)}{2}$ als Sehne einträgt.

Man kann endlich auch $a-b=N_cN'_c$ nach dem bekannten Verhältnis: $\frac{a+b+c}{a+b-c}=$ $=\frac{s}{s-c}$ harmonisch teilen, wodurch man W_c als inneren und H_c als äußeren Teilpunkt findet, also hat man auch den Punkt C. Senkrechte in N' und N'_c auf $N'N'_c$ ergeben die Punkte N und N_c, und der Apollonische Kreis schneidet die Verlängerungen von $N'N'_c$ in A und B.

4. w_c, $u-v$, $\frac{a+b}{c}$. Da durch $u-v$ und $\frac{a+b}{c}$ $a-b$ und $p-q$ bestimmt sind, so kommt man auf die vorige Aufgabe zurück.

5. w_c, $p-q$, $\frac{a+b}{c}$. Durch $p-q$ und $\frac{a+b}{c}$ sind sowohl $a-b$ als auch $u-v$ bestimmt.

6. w_c, h_c, $\frac{a+b}{c}$. Zuerst wird das rechtwinklige Dreieck H_cW_cC gezeichnet, dann der Apollonische Kreis geschlagen.

7. w_c, t_c, $\frac{a+b}{c}$. Nennt man D den Mittelpunkt des Apollonischen Kreises, so wird über DW_c als Durchmesser der Halbkreis geschlagen, der von dem Kreisbogen um den Mittelpunkt C mit dem Radius t_c in T_c geschnitten wird.

8. w_c, ϱ, $\frac{a+b}{c}$. In den Halbkreis über N_cW_c als Durchmesser wird ϱ_c von N_c aus als Sehne eingetragen und dadurch N' gefunden.

9. w_c, ϱ_c, $\frac{a+b}{c}$. In den Halbkreis über N_cW_c als Durchmesser wird ϱ_c von N_c aus als Sehne eingetragen und dadurch N'_c gefunden.

10. w_c, $\varrho_c-\varrho$, $\frac{a+b}{c}$. Ist D der Mittelpunkt des Apollonischen Kreises, so wird der Halbkreis über DW_c als Durchmesser geschlagen, in ihn von D aus $\frac{\varrho_c-\varrho}{2}$ als Sehne eingetragen und dadurch T_c gefunden.

Eine zweite Lösung ist folgende: $\varrho_c-\varrho$ wird von N_c aus in den Apollonischen Kreis als Sehne eingetragen, der gefundene Punkt mit N verbunden und zur Verbindungslinie durch C die Parallele gezogen, die den Apollonischen Kreis in A, bez. B schneidet.

11. w_c, ϱ'_c, $\frac{a+b}{c}$. An den um den Mittelpunkt W_c mit ϱ'_c als Radius geschlagenen Kreis wird von C aus die eine Tangente gelegt, welche den Apollonischen Kreis in A, bez. B schneidet.

12. w_c, r, $\frac{a+b}{c}$. Ist DE der durch den Mittelpunkt D des Apollonischen Kreises gehende Umkreisdurchmesser des Dreiecks ABC, so schneidet der um D als Mittelpunkt mit dem Radius $2r$ geschlagene Kreisbogen die Richtung der Außenwinkelhalbierenden w'_c in E.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Außer w_c und $\frac{a+b}{c}$ ist das Verhältnis je zweier der 12 Strecken a, u, $a-b$, $u-v$, $p-q$, h_c, t_c, ϱ, ϱ_c, $\varrho_c-\varrho$, ϱ'_c und r gegeben.

1. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{u}$. Die Aufgabe ist unbestimmt.

2. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{a-b}$. Die Gestalt des gesuchten Dreiecks ist bestimmt, denn wenn $\frac{a}{a-b}$ bekannt ist, so ist es auch $\frac{a}{b}$. Nun ist: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ und $\frac{a}{b} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$. Also sind Summe und Quotient der Verhältnisse $\frac{a}{c}$ und $\frac{b}{c}$ bekannt, wodurch sie sich einzeln finden lassen.

3. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{u-v}$. Da $\frac{a+b}{c} = \frac{a-b}{u-v}$ ist, so ist auch $\frac{a}{a-b}$ bekannt und die Aufgabe auf die vorige zurückgeführt.

4. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{p-q}$. Wieder ist $\frac{a}{a-b}$ bekannt.

5. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{h_c}$. β ist bekannt, also ist die Gestalt des gesuchten Dreiecks bestimmt. Will man letzteres ohne Hilfe eines änlichen Dreiecks finden, so hat man über $CW_c = w_c$ als Sehne den Kreisbogen zu schlagen, der den Winkel β faßt und den Apollonischen Kreis in B schneidet.

6. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a}{t_c}$. Da die Winkelhalbierende ihre eigene Gegentransversale darstellt, so ergibt sich als ein Spezialfall des schon früher benutzten Satzes: Das Produkt zweier Winkelgegentransversalen, die eine bis zur Gegenseite, die andere bis zum Umkreise gerechnet, ist konstant, nämlich gleich dem Produkt der einschließenden Seiten (Fuhrmann, S. 93) der folgende: Das Produkt zweier Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Produkt der Halbierenden des von ihnen eingeschlossenen Winkels und der bis an den Umkreis verlängerten Winkelhalbierungslinie. (Fischer, S. 222.) Also bilden w_c, ab und $\frac{a+b}{c}$ ein Datum. Dies geht auch aus der Formel: $w_c^2 = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$ hervor. Setzt man nun das bekannte Produkt $ab = k^2$ und das gegebene Verhältnis: $\frac{a+b}{c} = \varkappa$, so ist $a+b = \varkappa c$ und $a^2+b^2 = \varkappa^2c^2 - 2k^2$, sowie: $2a^2 = \varkappa^2c^2 - 2k^2 + \varkappa c\sqrt{\varkappa^2c^2 - 4k^2}$. Ist ferner das andere bekannte Verhältnis $\frac{4t_c^2}{a^2} = \lambda$, so erhält man durch Substitution der Werte von a^2+b^2 und $2a^2$ in die Gleichung: $2(a^2+b^2) - c^2 = \lambda a^2$ die folgende:

$$2((2\varkappa^2-1)c^2 - 4k^2) = \lambda(\varkappa^2c^2 - 2k^2 + \varkappa c\sqrt{\varkappa^2c^2 - 4k^2})$$

und hieraus: $[2((2\varkappa^2-1)c^2 - 4k^2)^2 - \lambda(\varkappa^2c^2 - 2k^2)]^2 = \varkappa^2\lambda^2c^2(\varkappa^2c^2 - 4k^2)$.

Diese für c^2 quadratische Gleichung zeigt, daß die Aufgabe mit Zirkel und Lineal ist lösbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

7. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{\varrho}$. Setzt man das bekannte Produkt $ab = k^2$ und $\frac{a+b}{c} = \varkappa$, so ist: $(a-b)^2 = \varkappa^2 c^2 - 4k^2$ und: $2a^2 = \varkappa^2 c^2 - 2k^2 + \varkappa c \sqrt{\varkappa^2 c^2 - 4k^2}$. Wenn ferner das andere bekannte Verhältnis $\frac{\varrho^2}{a^2} = \lambda$ ist, so ergibt sich durch Einsetzung der Werte von $(a-b)^2$ und $2a^2$ in die Gleichung: $(s-a)(s-b)(s-c) = \lambda a^2 s$ oder:

$$(c^2 - (a-b)^2)(\varkappa - 1) = 4\lambda(\varkappa + 1)a^2 \text{ die folgende:}$$

$$(\varkappa - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2) = 2\lambda(\varkappa + 1)(\varkappa^2 c^2 - 2k^2 + \varkappa c\sqrt{\varkappa^2 c^2 - 4k^2})$$

oder: $[(\varkappa - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2) - 2\lambda(\varkappa + 1)(\varkappa^2 c^2 - 2k^2)]^2 = 4\varkappa^2\lambda^2(\varkappa + 1)^2 c^2(\varkappa^2 c^2 - 4k^2)$.

Da diese Gleichung in bezug auf c^2 als Unbekannte quadratisch ist, so läßt sich die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösen.

8. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{\varrho_c}$. Die Aufgabe läßt sich auf die vorige zurückführen, da das Verhältnis $\frac{a}{\varrho}$ bekannt ist. Mithin ist auch die vorliegende Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar.

9. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{\varrho_c - \varrho}$. Der reziproke Wert des gegebenen Verhältnisses ist $\frac{\varrho_c}{a} - \frac{\varrho}{a}$. Ferner ist das Verhältnis $\frac{\varrho_c}{\varrho} = \frac{\varrho_c}{a} : \frac{\varrho}{a}$ bekannt; also sind $\frac{\varrho_c}{a}$ und $\frac{\varrho}{a}$ einzeln bekannt. Folglich läßt sich auch diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösen.

10. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{\varrho'_c}$. Durch eine der obigen ähnliche Rechnung erhält man die Gleichung:

$$[(\varkappa^2 - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2) - \varkappa^2\lambda(\varkappa^2 c^2 - 2k^2)]^2 = \lambda^2\varkappa^6 c^2(\varkappa^2 c^2 - 4k^2) \text{ für } \lambda = \frac{2\varrho'^2_c}{a^2},$$

sodaß also auch diese Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man erwägt, daß das Verhältnis: $\frac{\varrho}{\varrho'_c} = \frac{a}{\varrho'_c} : \frac{a}{\varrho}$ bekannt ist, folglich wegen des gegebenen Verhältnisses $\frac{a}{\varrho'_c}$ auch das Verhältnis $\frac{a}{\varrho}$, wodurch die Aufgabe auf 7 reduziert ist.

11. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{a}{r}$. α ist bestimmt. Man findet das gesuchte Dreieck auch ohne Benutzung eines ihm ähnlichen, wenn man den Apollonischen Kreis mit dem den Winkel α fassenden Kreisbogen über w_c als Sehne schneidet. Der Schnittpunkt ist A.

Da $u = a \cdot \frac{c}{a+b}$ und das Verhältnis $\frac{c}{a+b}$ bekannt sind, so läßt sich je eine der folgenden Aufgaben auf eine der vorigen reduzieren:

Gegeben: $w_c, \frac{a+b}{c}$ und 12. $\frac{u}{a-b}$; 13. $\frac{u}{u-v}$; 14. $\frac{u}{p-q}$; 15. $\frac{u}{h_c}$; 16. $\frac{u}{t_c}$; 17. $\frac{u}{\varrho}$; 18. $\frac{u}{\varrho_c}$; 19. $\frac{u}{\varrho_c - \varrho}$; 20. $\frac{u}{\varrho'_c}$ und 21. $\frac{u}{r}$; und zwar ist Aufgabe 12 auf 2, 13 auf 3, u. s. f. 21 auf 11 reduzierbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

22. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{u-v}$. Unbestimmt. 23. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{p-q}$. Unbestimmt.

24. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{h_c}$. Die Verhältnisse $\frac{p-q}{a-b}$ und $\frac{u-v}{a-b}$ sind bekannt; folglich sind es auch $\frac{p-q}{h_c}$ und $\frac{u-v}{h_c}$. Mithin ist auch die Differenz dieser Verhältnisse bekannt, d. h. die Richtung von AB.

Bei algebraischer Auflösung erhält man, wenn man, wie früher, $ab = k^2$ und $\frac{a+b}{c} = \varkappa$ setzt, und wenn ferner das bekannte Verhältnis: $\frac{h_c^2}{(a-b)^2} = \lambda$ ist:

$$[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = 4\lambda c^2 (a-b)^2$$

oder durch Substitution von $(a-b)^2 = \varkappa^2 c^2 - 4k^2$ in die letzte Gleichung:

$$(\varkappa^2 - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2) = 4\lambda(\varkappa^2 c^2 - 4k^2).$$

Die Gleichung ist also für c^2 linear.

25. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{t_c}$. Da $\frac{p-q}{a-b}$ und $\frac{u-v}{a-b}$ bekannt sind, so sind es auch die Verhältnisse $\frac{p-q}{t_c}$ und $\frac{u-v}{t_c}$. Also ist wieder die Richtung der Grundlinie AB bekannt.

Haben k und $\varkappa$ die bisherige Bedeutung und wird $\frac{4t_c^2}{(a-b)^2} = \lambda$ gesetzt, so erhält man die Gleichung:

$$(2\varkappa^2 - 1)c^2 - 2k^2 = \lambda(\varkappa^2 c^2 - k^2),$$

mithin eine für c^2 lineare Gleichung.

26. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{\varrho}$. Da noch $\frac{u-v}{\varrho}$ bekannt ist, so läßt sich wieder, da man auch die Differenz der beiden Verhältnisse, nämlich: $\frac{(a-b)-(u-v)}{\varrho}$ kennt, die Richtung von AB finden. Setzt man $\frac{\varrho^2}{(a-b)^2} = \lambda$, so erhält man bei algebraischer Lösung der Aufgabe die für c^2 lineare Gleichung:

$$(\varkappa - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2) = 4(\varkappa + 1)\lambda(\varkappa^2 c^2 - 4k^2).$$

27. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{\varrho_c}$. Auch hier läßt sich die Richtung der Grundlinie finden.

28. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{\varrho_c - \varrho}$. Die Verhältnisse $\frac{a-b}{\varrho_c}$ und $\frac{a-b}{\varrho}$ sind einzeln bestimmt und damit ist die Aufgabe auf eine der beiden vorigen reduziert.

29. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{\varrho'_c}$. D $\frac{\varrho}{\varrho'_c} = \frac{a-b}{\varrho'_c} : \frac{a-b}{\varrho}$, so ist $\frac{a-b}{\varrho}$ bekannt, weil es $\frac{\varrho}{\varrho'_c}$ ist.

30. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{a-b}{r}$. Das Verhältnis $\frac{a-b}{p-q}$ ist bekannt; also auch $\frac{p-q}{r}$, d. h. der Winkel $\alpha - \beta$. Zur Ableitung der die Aufgabe lösenden Gleichung hat man:

$$4r\triangle = k^2 c \text{ für } k^2 = ab \text{ oder: } \frac{(a-b)^2}{r^2} = \lambda = \frac{16\triangle^2 (a-b)^2}{k^4 c^2};$$

$$\text{hieraus folgt: } [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2] = \lambda k^4 c^2$$

$$\text{oder: } (\varkappa^2 - 1)(4k^2 - (\varkappa^2 - 1)c^2)(\varkappa^2 c^2 - 4k^2) = \lambda k^4.$$

Die Gleichung ist also für c^2 quadratisch.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

31. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{p-q}$. Unbestimmt.

32. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{h_c}$. Das Verhältnis $\frac{p-q}{h_c}$ ist bekannt.

33. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{t_c}$. Das Verhältnis $\frac{p-q}{t_c}$ läßt sich finden.

34. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{\varrho}$; 35. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{\varrho_c}$; 36. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{\varrho_c-\varrho}$; 37. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{\varrho'_c}$; 38. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{u-v}{r}$; 39. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{h_c}$; 40. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{t_c}$; 41. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{\varrho}$; 42. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{\varrho_c}$; 43. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{\varrho_c-\varrho}$; 44. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{\varrho'_c}$; 45. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{p-q}{r}$; 46. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{t_c}$. Die Aufgabe läßt sich auf 39 oder 40 reduzieren, aber auch unabhängig von ihnen lösen. Hat man nämlich den Apollonischen Kreis mit dem Zentrum D gezeichnet, so schlägt man den Kreisbogen über $CW_c = w_c$ als Sehne, der den bekannten Winkel $\sphericalangle t_c, w_c$ faßt, und schneidet den Bogen mit dem Halbkreise über W_cD als Durchmesser. Dadurch findet man T_c.

47. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{\varrho}$. Unbestimmt. 48. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{\varrho_c}$. Unbestimmt. 49. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{\varrho_c-\varrho}$. Unbestimmt. 50. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{\varrho'_c}$. Unbestimmt. 51. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{h_c}{r}$. Da $\triangle = \frac{k^2c}{4r} = \frac{ch_c}{2}$ ist, wenn $ab = k^2$ gesetzt wird, so folgt $k^2 = 2rh_c$; also sind r und h_c einzeln bestimmt. k ist die Seite des dem Rechteck aus $CW_c = w_c$ und CD gleichen Quadrates. Die Formel $ab = 2rh_c$ ergibt sich auch als ein Spezialfall eines früher erwähnten Satzes.

52. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{t_c}{\varrho}$. Da das Verhältnis $\frac{h_c}{\varrho}$ bekannt ist, so sind auch $\frac{p-q}{h_c}$ oder $\frac{p-q}{t_c}$ bekannt und die Aufgabe auf früher behandelte Aufgaben reduziert.

Die Rechnung liefert die für c^2 lineare Gleichung:

$$(\varkappa+1)((2\varkappa^2-1)c^2-4k^2) = \lambda(\varkappa-1)\,(4k^2-(\varkappa^2-1)c^2) \text{ für } \lambda = \frac{t_c^{\,2}}{\varrho^2}.$$

53. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{t_c}{\varrho_c}$. Hier ist zu berücksichtigen, daß das Verhältnis $\frac{h_c}{\varrho_c}$ bekannt ist.

54. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{t_c}{\varrho_c-\varrho}$. Das Verhältnis $\frac{t_c}{\varrho_c+\varrho}$ ist bekannt, mithin lassen sich $\frac{t_c}{\varrho}$ und $\frac{t_c}{\varrho_c}$ einzeln finden, und dadurch ist die Aufgabe auf eine der beiden vorigen reduziert.

55. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{t_c}{\varrho'_c}$. 56. $w_c, \frac{a+b}{c}, \frac{t_c}{r}$. Bei algebraischer Lösung erhält man die für c^2 quadratische Gleichung:

$$(\varkappa^2-1)((2\varkappa^2-1)c^2-4k^2)(4k^2-(\varkappa^2-1)c^2) = 4\lambda k^4 \text{ für } \lambda = \frac{t_c^{\,2}}{r^2}.$$

Also ist die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

57. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho}{\varrho_c}$. Unbestimmt. 58. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho}{\varrho_c-\varrho}$. Unbestimmt.

59. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho}{\varrho'_c}$. Unbestimmt.

60. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho}{r}$. Es ist: $c^2 = \frac{2k^2(2\varkappa-\lambda-2)}{(\varkappa+1)(\varkappa-1)^2}$ für $\lambda = \frac{\varrho}{r}$. Man hat also c in den Apollonischen Kreis als Sehne einzutragen und an den konzentrischen Kreis, der die Sehne berührt, von W_c aus eine Tangente zu legen.

Man kann jedoch die Aufgabe auch ohne Rechnung lösen. Da nämlich das Verhältnis $\frac{\varrho_c}{\varrho}$ bekannt ist, so ist es auch $\frac{\varrho_c-\varrho}{r}$. Zieht man durch den Inkreismittelpunkt N die Parallele zu CB bis an den Apollonischen Kreis, so ist die Länge der erhaltenen Sehne $= c$ und die andere Kathete des entstehenden rechtwinkligen Dreiecks mit dem Apollonischen Durchmesser NN_c als Hypotenuse ist $= \varrho_c - \varrho$, wovon bei der zweiten Lösung der Aufgabe 10 der vorigen Gruppe bereits Gebrauch gemacht wurde. Es müssen also c, $\varrho_c - \varrho$ und γ ein Datum bilden, und da c, r und γ auch ein Datum darstellen, so müssen es auch $\varrho_c - \varrho$, r und γ. Da nun in der vorliegenden Aufgabe das Verhältnis $\frac{\varrho_c-\varrho}{r}$ bekannt ist, so ist γ bestimmt. Aus $tg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_c-\varrho}{c}$ und $2\sin\gamma = \frac{c}{r}$ folgt durch Multiplikation beider Gleichungen: $4\sin^2\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_c-\varrho}{r}$ oder: $\cos\gamma = 1 - \frac{\varrho_c-\varrho}{2r}$, woraus sich eine einfache Konstruktion des Winkels γ ergibt.

61. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho_c}{\varrho_c-\varrho}$. Unbestimmt. 62. w_c, $\frac{a+b}{r}$, $\frac{\varrho_c}{\varrho'_c}$. Unbestimmt. 63. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho_c}{r}$. Die Aufgabe läßt sich auf 60 reduzieren. 64. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho_c-\varrho}{\varrho'_c}$. Unbestimmt. 65. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho_c-\varrho}{r}$. Die Aufgabe wurde schon gelöst. 66. w_c, $\frac{a+b}{c}$, $\frac{\varrho'_c}{r}$. Diese Aufgabe läßt sich auf die vorige reduzieren.

b) Aufgaben, in welchen außer einer der 13 Strecken: w_c, a, u, $a-b$, $u-v$, $p-q$, h_c, t_c, ϱ, ϱ_c, $\varrho_c-\varrho$, ϱ'_c und r die Glieder je eines der 10 Verhältnisse: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{u} = \frac{a-b}{u-v} = \frac{p-q}{a-b} = \sqrt{\frac{p-q}{u-v}} = \frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho} = \frac{h_c-\varrho}{\varrho} = \frac{h_c+\varrho_c}{\varrho_c} = \frac{\varrho}{\varrho'_c-\varrho} = \frac{\varrho_c}{\varrho_c-\varrho'_c}$ einzeln gegeben sind.

I. 1. w_c, $a+b$, c. Folgende Lösung wird von Fischer (S. 210) und Borth (S. 126) gegeben: (Fig. 9) $CW_c = w_c$ wird in N nach dem Verhältnis $(a+b):c$ innen geteilt und in den Halbkreis über CN als Durchmesser $CN'' = \frac{a+b-c}{2} = s-c$ von C aus als Sehne eingetragen. NN'' ist der Inkreisradius ϱ. Dann wird der Inkreis geschlagen und an ihn von C aus die andere Tangente gezogen. Die durch W_c gelegte Inkreistangente schneidet die beiden ersten in A und B. Diese Lösung benutzt also nur den

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

inneren Teilpunkt N. Zeichnet man (Fig. 10) den Apollonischen Kreis, der w_c nach dem Verhältnis $(a+b):c$ harmonisch teilt, und trägt von N aus c als Sehne NP in den Kreis ein, so hat man durch C zur eingetragenen Sehne die Parallele zu ziehen, die einen der Punkte A oder B liefert. Den anderen erhält man, wenn man den gefundenen Punkt P mit W_c verbindet und die Verbindungslinie bis zum Schnittpunkte mit dem Apollonischen Kreise verlängert.

2. w_c, a, u. Die drei gegebenen Strecken sind die Seiten eines Dreiecks, das zum gesuchten zu ergänzen ist.

3. w_c, $a-b$, $u-v$. Man kennt auf der Grundlinie AB die Punkte N', W_c, T_c und N'_c. Der vierte harmonische Punkt zu N'_c, N' und W_c (N'_c und N' bilden das eine zugeordnete Paar) ist H_c. Dadurch findet man C und kann jetzt den Apollonischen Kreis schlagen, der A und B liefert.

4. w_c, $p-q$, $a-b$. Jetzt sind die Punkte H_c, N', T_c und N'_c bekannt und W_c läßt sich finden.

5. w_c, $p-q$, $u-v$. Die Punkte H_c, W_c und T_c sind bekannt. Da $\sqrt{\frac{p-q}{u-v}} = \frac{a+b}{c}$, so hat man dann die Aufgabe, zwei Strecken zu zeichnen, die sich wie die Quadratwurzeln aus zwei gegebenen verhalten. Man hat also $p-q$ und $u-v$ als von der Höhe auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gebildete Abschnitte aneinander anzutragen. Die Katheten des Dreiecks verhalten sich wie $(a+b):c$.

Durch Wiederholung dieser Konstruktion kann man die Aufgabe auch für die 2^nte Wurzel lösen.

Aber eine allgemeine, der früheren, für die $n$ten Potenzen erhaltenen, analoge Lösung der Aufgabe existiert nicht, da letztere für andere als die 2^nten Wurzeln nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

Die drei letzten Aufgaben 3; 4 und 5 lassen sich nach Bestimmung der Punkte H_c, W_c und T_c auch auf die in der Einleitung gelöste Fundamentalaufgabe: t_c, w_c, w'_c zurückführen.

6. w_c, ϱ, ϱ_c. Nach Zeichnung des Apollonischen Kreises, der w_c nach dem bekannten Verhältnis $\frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}$ harmonisch teilt, findet man einen der Punkte N' oder N'_c.

7. w_c, h_c, ϱ. Man beginnt mit der Konstruktion des Dreiecks H_cW_cC und schlägt dann den Apollonischen Kreis,

8. w_c, h_c, ϱ_c. 9. w_c, ϱ, ϱ'_c. Die Aufgabe kann sowohl direkt gelöst als auch auf die Aufgabe 6 zurückgeführt werden, da wegen des Bestehens der Relation: $\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho_c} = \frac{2}{\varrho'_c}$ die Radien ϱ, ϱ_c und ϱ'_c ein Datum darstellen.

10. w_c, ϱ_c, ϱ'_c.

II. 1. a, $a+b$, c; 2. a, $a-b$, $u-v$; 3. a, $p-q$, $a-b$; 4. a, $p-q$, $u-v$. Wegen $(p-q)(u-v)=(a-b)^2$ ist $a-b$ bestimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

5. a, ϱ, ϱ_c. Aus $\frac{a+b}{c} = \frac{\varrho_c+\varrho}{\varrho_c-\varrho}$ folgt: $c = \frac{(a+b)(\varrho_c-\varrho)}{\varrho_c+\varrho}$. Setzt man diesen Wert von c in die Gleichung:

$$\varrho\varrho_c = (s-a)(s-b) \text{ oder: } 4\varrho\varrho_c = c^2-(a-b)^2 \text{ ein,}$$

so erhält man eine Gleichung für die Unbekannte b, nämlich:

$$(a+b)^2(\varrho_c-\varrho)^2-(a-b)^2(\varrho_c+\varrho)^2 = 4\varrho\varrho_c\,(\varrho_c+\varrho)^2$$

$$\text{oder:} \qquad \varrho\varrho_c(a^2+b^2)-(\varrho^2+\varrho_c^2)\,ab+\varrho\varrho_c(\varrho+\varrho_c)^2 = 0.$$

Die Aufgabe ist also mit Zirkel und Lineal lösbar. Das sieht man auch ohne Rechnung ein, da sie sich auf die folgende reduzieren läßt.

6. a, h_c, ϱ. Die Lösung ist einfach, da β bestimmt ist.

7. a, h_c, ϱ_c. Die Lösung ist der der vorigen Aufgabe ähnlich.

8. a, ϱ, ϱ'_c. Da $\frac{a+b}{c}$ bekannt ist, so läßt sich die Aufgabe: auf a, ϱ, $\frac{a+b}{c}$ reduzieren. Setzt man das bekannte Verhältnis $= \varkappa$, so erhält man nach Substitution von $b = \varkappa c - a$ in die Gleichung:

$$\varrho^2 s = (s-a)(s-b)(s-c) \text{ oder: } 4\varrho^2(a+b+c) = (a+b-c)(c^2-(a-b)^2)$$

eine Gleichung für die Unbekannte c. Die Rechnung ergibt:

$$4(\varkappa+1)\,\varrho^2 = (\varkappa-1)(4\varkappa ac-(\varkappa^2-1)\,c^2-4a^2).$$

Die Aufgabe läßt sich also mit Zirkel und Lineal lösen. Das ist auch ohne Rechnung ersichtlich, denn ϱ und ϱ'_c bestimmen ϱ_c; ϱ_c und ϱ'_c bestimmen aber h_c, weil $\frac{1}{\varrho_c}-\frac{1}{\varrho'_c}=\frac{1}{h_c}$ ist. Mithin läßt sich die Aufgabe auf 6 reduzieren.

9. a, ϱ_c, ϱ'_c. Die Aufgabe ist auf die vorige zurückführbar.

III. Die Aufgaben dieser Gruppe, nämlich: Gegeben u und 1. $a+b$, c; 2. $a-b$, $u-v$; 3. $p-q$, $a-b$; 4. $p-q$, $u-v$; 5. ϱ_c, ϱ; 6. h_c, ϱ; 7. h_c, ϱ_c; 8. ϱ, ϱ_c und 9. ϱ_c, ϱ'_c llassen sich auf die der vorigen reduzieren, da in allen Fällen a bekannt ist.

IV. 1. $a-b$, $a+b$, c; 2. $a-b$, a, u. $u-v$ ist bekannt. 3. $a-b$, $p-q$, $u-v$. Unbestimmt wegen: $(a-b)^2 = (p-q)(u-v)$. 4. $a-b$, ϱ, ϱ_c. In den Endpunkten von $N'N'_c = a-b$ werden auf $N'N'_c$ auf verschiedenen Seiten dieser Strecke Senkrechte errichtet und auf der in C' errichteten ϱ, auf der anderen ϱ_c abgetragen und dadurch die Punkte N und N_c gefunden. Schlägt man den Apollonischen Kreis und zieht den Durchmesser N_cN, so hat man A, B und W_c. Den Punkt C findet man als vierten, W_c zugeordneten, harmonischen Punkt zu N_c, N und W_c.

5. $a-b$, h_c, ϱ. ϱ_c ist bestimmt. 6. $a-b$, h_c, ϱ_c; 7. $a-b$, ϱ, ϱ'_c; 8. $a-b$, ϱ_c, ϱ'_c.

V. Sämtliche Aufgaben dieser Gruppe, nämlich: Gegeben $u-v$ und 1. $a+b$, c; 2. a, u; 3. $p-q$, $a-b$; 4. ϱ, ϱ_c; 5. h_c, ϱ; 6. h_c, ϱ_c; 7. ϱ, ϱ'_c und 8. ϱ_c, ϱ'_c, lassen sich mit Ausnahme der dritten, welche unbestimmt ist, auf die der vorhergehenden zurückführen, da $a-b$ stets bestimmt ist.

VI. Gleiches gilt von den Aufgaben dieser Gruppe, in denen $p-q$ beständig vorkommt.

VII. 1. h_c, $a+b$, c. Die Aufgabe läßt sich auf verschiedenen Wegen lösen, z. B. durch Reduktion auf ϱ, $a+b$, c. (Siehe die erste Aufgabe der Gruppe IX.)

2. h_c, a, u. β ist bestimmt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3. h_c, $a-b$, $u-v$. Da durch $a-b$ und $u-v$ auch $p-q$ bestimmt ist, und t_c durch $p-q$ und h_c, so bieten sich verschiedene Wege zur Lösung dar, z. B. durch Reduktion auf die Fundamentalaufgabe: t_c, w_c, w'_c.

4. h_c, $p-q$, $a-b$; 5. h_c, $p-q$, $u-v$; 6. h_c, ϱ, ϱ_c. Unbestimmt. 7. h_c, ϱ, ϱ'_c. Die Aufgabe läßt sich auf die vorige zurückführen, ist also auch unbestimmt. 8. h_c, ϱ_c, ϱ'_c. Unbestimmt.

VIII. 1. t_c, $a+b$, c. Erst wird das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten c und $2t_c$ gezeichnet. Dann wird über der Hypotenuse als Durchmesser ein Halbkreis geschlagen und in ihn von dem einen Endpunkte des Durchmessers aus $a+b$ als Sehne eingetragen. Die andere Kathete des dadurch bestimmten zweiten rechtwinkligen Dreiecks ist $a-b$. Die Aufgabe: t_c, $a-b$, c läßt sich also auch lösen.

2. t_c, a, u. Setzt man $c=\frac{(a+b)u}{a}$ in $2b^2-c^2=4t_c^2-2a^2$ ein, so erhält man die für b quadratische Gleichung: $(2a^2-u^2)b^2-2au^2b+a^2(2a^2-u^2-4t_c^2)=0$. Die Aufgabe ist also mit Zirkel und Lineal lösbar.

3. t_c, $a-b$, $u-v$. Da $p-q$ und h_c bestimmt sind, so läßt sich die Aufgabe auf die dritte der vorigen Gruppe reduzieren.

4. t_c, $p-q$, $a-b$; 5. t_c, $p-q$, $u-v$; 6. t_c, ϱ, ϱ_c. h_c und $p-q$ sind bestimmt, also sind auch noch $a-b$ und $u-v$ bekannt.

7. t_c, h_c, ϱ; 8. t_c, h_c, ϱ_c; 9. t_c, ϱ, ϱ'_c; 10. t_c, ϱ_c, ϱ'_c. Die vier letzten Aufgaben sind auf die Aufgabe 6 reduzierbar.

IX. 1. ϱ, $a+b$, c. Durch ϱ und $s-c$ ist das rechtwinklige Dreieck CNN'' bestimmt, in welchem N'' den auf CB liegenden Fußpunkt des Radius ϱ bedeutet. Hat N''_c entsprechende Bedeutung für N_c, so ist $CN''_c=s$; mithin ist der Apollonische Kreis bestimmt, der CN'' in B schneidet. Die von B oder C aus an den Inkreis gezogenen Tangenten schneiden den Apollonischen Kreis in A.

Die übrigen Aufgaben dieser Gruppe lassen sich auf die der Gruppe VII reduzieren. Dasselbe gilt von den Aufgaben der Gruppen X, XI und XII.

XIII. 1. r, $a+b$, c. Setzt man das bekannte Verhältnis: $\frac{a+b}{c}=\varkappa$, so erhält man durch Substitution von $b=\varkappa c-a$ in die Gleichung: $16r^2\triangle^2=a^2b^2c^2$ die folgende:

$$(\varkappa^2-1)r^2(c^2-(2a-\varkappa c)^2)=a^2(\varkappa c-a)^2$$

oder: $a^4-2\varkappa ca^3+(\varkappa^2c^2+4(\varkappa^2-1)r^2)a^2-4\varkappa(\varkappa^2-1)r^2ca+(\varkappa^2-1)^2r^2c^2=0.$

Diese für die Unbekannte a biquadratische Gleichung zeigt, daß die Aufgabe nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

2. r, a, u. Da $\frac{a+b}{c}=\varkappa$ bekannt ist, so läßt sich die Aufgabe auf: r, a, $\frac{a+b}{c}$ zurückführen. Dann zeigt die obige, für c quadratische Gleichung, daß die Aufgabe mit Zirkel und Lineal lösbar ist.

3. r, $a-b$, $u-v$. Durch $a-b$ und $u-v$ ist $p-q$, und durch $p-q$ und r ist $\alpha-\beta$ bestimmt; hierdurch ist die Aufgabe auf: $a-b$, $u-v$, $\alpha-\beta$ reduziert, welche eine einfache Lösung zuläßt.

4. r, $p-q$, $a-b$; 5. r, $p-q$, $u-v$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

6. r, ϱ, ϱ_c. Der Umkreis mit dem Durchmesser $DE = 2r$ wird gezeichnet und auf dem Durchmesser von dem einen Endpunkte D aus $\frac{\varrho_c - \varrho}{2} = DT_c$ abgetragen. Die in T_c errichtete Senkrechte schneidet den Kreis in A und B. Die Parallele zu AB im Abstande der durch ϱ und ϱ_c bestimmten Höhe h_c liefert die Spitze C. Ähnlich lassen sich folgende Aufgaben lösen: r, ϱ_a, ϱ_b; r, $\varrho_c - \varrho$, h_c; r, $\varrho_a + \varrho_b$, h_c; r, $\varrho_c - \varrho$, t_c; r, $\varrho_a + \varrho_b$, t_c; r, $\varrho_c - \varrho$, h_a; r, $\varrho_a + \varrho_b$, h_a; h_c, t_c, $\varrho_c - \varrho$; h_c, t_c, $\varrho_a + \varrho_b$; h_c, w_c, $\varrho_c - \varrho$; h_c, w_c, $\varrho_a + \varrho_b$; h_c, w'_c, $\varrho_c - \varrho$; h_c, w'_c, $\varrho_a + \varrho_b$; w_c, w'_c, $\varrho_c - \varrho$ und w_c, w'_c, $\varrho_a + \varrho_b$.

Die Aufgaben 7. r, h_c, ϱ; 8. r, h_c, ϱ_c; 9. r, ϱ, ϱ'_c und 10. r, ϱ_c, ϱ'_c sind auf die Aufgabe 6 zurückführbar.

C. Das Verhältnis $\frac{c}{a-b}$.

Neben dem im vorigen Abschnitte behandelten besteht ein zweiter Apollonischer Kreis, der auch durch A und B geht und die Entfernung N_aN_b der Mittelpunkte der beiden anderen, dem Dreieck ABC anbeschriebenen, Kreise zum Durchmesser hat. Das Zentrum dieses Kreises liegt auf der Mitte des Ergänzungsbogens zum Umkreisbogen AB, sodaß die Mittelpunkte der beiden Apollonischen Kreise die Endpunkte des auf der Grundlinie senkrechten Umkreisdurchmessers sind. Dieser Apollonische Kreis teilt die Außenwinkelhalbierende $W'_cC = w'_c$ innen in N_b und außen in N_a nach dem Verhältnis $\frac{c}{a-b}$ harmonisch, und es besteht der Satz:

Satz: Der Umkreis des Sehnenvierecks ABN_aN_b ist der Apollonische Kreis, der $W'_cC = w'_c$ innen in N_b und außen in N_a nach dem Verhältnis:

$$\frac{c}{a-b} = \frac{u'}{a} = \frac{u'+v'}{a+b} = \frac{a+b}{p-q} = \sqrt{\frac{u'+v'}{p-q}} = \frac{\varrho_a+\varrho_b}{\varrho_a-\varrho_b} = \frac{\varrho_a}{\varrho_a-h_c} = \frac{\varrho''_c+\varrho_a}{\varrho_a}$$

harmonisch teilt. Der Durchmesser N_aN_b des Apollonischen Kreises wird innen in C und außen in W'_c nach dem Verhältnis:

$$\frac{c+a-b}{c-a+b} = \frac{s-b}{s-a} = \frac{u'+a}{u'-a} = \frac{(u'+v')+(a+b)}{(u'+v')-(a+b)} = \frac{(a+b)+(p-q)}{(a+b)-(p-q)} =$$

$$= \frac{\sqrt{u'+v'}+\sqrt{p-q}}{\sqrt{u'+v'}-\sqrt{p-q}} = \frac{\varrho_a}{\varrho_b} = \frac{2\varrho_a-h_c}{h_c} = \frac{\varrho''_c+2\varrho_a}{\varrho''_c}$$

harmonisch geteilt.

Die Lösung von Aufgaben kann unterbleiben, da letztere denen des vorigen Abschnittes ähnlich sind; nur soll noch auf drei neue Gruppen von Aufgaben hingewiesen werden, die ohne Weiteres lösbar sind. Kombiniert man nämlich irgend eins der Verhältnisse: $\frac{a}{b} = \frac{u}{v} = \ldots$ mit einem der im zweiten Abschnitt behandelten: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{u} = \ldots$, so bestimmen beide Verhältnisse die Gestalt des Dreiecks ABC; ebenso ist die Form des Dreiecks bestimmt, wenn eins der Verhältnisse $\frac{a}{b}$ und eins der Verhältnisse $\frac{c}{a-b}$ gegeben sind. Gleiches gilt für irgend eins der Verhältnisse $\frac{a+b}{c}$ und eins des Verhältnisse $\frac{c}{a-b}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Schließlich ist zu bemerken, daß die Untersuchung auch auf andere als die drei behandelten Apollonischen Kreise ausgedehnt werden kann. Bezeichnet man z. B. den Schnittpunkt von $W_a W_b$ und CW_c mit V_c, so ist der Umkreis des rechtwinkligen Dreiecks $W'_c V_c C$ der Apollonische Kreis, der $W_a W_b$ nach dem Verhältnis $\frac{a+c}{b+c}$ harmonisch teilt. Auch für die Teilungsverhältnisse $\frac{a+c}{b-c}$ und $\frac{a-c}{b-c}$ existieren Apollonische Kreise.

D. Aufgaben, in denen die Verhältnisse $\frac{a}{b}$, $\frac{a+b}{c}$ und $\frac{c}{a-b}$ nicht gegeben sind.

a) Gegebene Bestimmungsstücke sind: a, b, c, t_a, t_b, t_c, t'_c, h_c, h'_c, w_c, w'_c, $u-v$, $u'+v'$, p und q.

I. Gegeben: b, c und 1. $a:t_a$; 2. $a:t_b$; 3. $t_a:t_b$; 4. $t_b:t_c$.

II. Gegeben: c, h_c und 1. $a:t_a$; 2. $a:t_b$; 3. $a:t_c$; 4. $t_a:t_b$; 5. $t_a:t_c$.

III. Gegeben: p, q und 1. $a:t_a$; 2. $a:t_b$; 3. $a:t_c$; 4. $t_a:t_b$; 5. $t_a:t_c$.

IV. Gegeben: c, t_a und 1. $a:t_b$; 2. $b:t_b$; 3. $a:t_c$; 4. $b:t_c$; 5. $t_b:t_c$.

V. Gegeben: c, t_c und 1. $a:t_a$; 2. $a:t_b$; 3. $t_a:t_b$.

VI. Gegeben: c, $a:h_c$ und 1. $b:t_a$; 2. $b:t_b$; 3. $b:t_c$; 4. $t_a:t_b$; 5. $t_a:t_c$; 6. $t_b:t_c$.

VII. Gegeben: c, $t_a:h_c$ und 1. $a:t_b$; 2. $b:t_b$; 3. $a:t_c$; 4. $b:t_c$; 5. $t_b:t_c$.

VIII. Gegeben: c, $t_c:h_c$ und 1. $a:t_a$; 2. $a:t_b$; 3. $t_a:t_b$.

IX. Gegeben: c, $a:t_a$ und 1. $b:t_b$; 2. $b:t_c$; 3. $t_b:t_c$.

X. Gegeben: c, $a:t_b$ und 1. $b:t_a$; 2. $b:t_c$; 3. $t_a:t_c$.

XI. Gegeben: c, $a:t_c$, $t_a:t_b$.

XII. Gegeben: c, $a:t_a$ und 1. $a^2-h_c^2$; 2. $b^2-h_c^2$; 3. $4t_a^2-h_c^2$; 4. $4t_b^2-h_c^2$; 5. $t_c^2-h_c^2$; 6. a^2-b^2; 7. $4t_a^2-a^2$; 8. $4t_a^2-b^2$; 9. $a^2-t_c^2$; 10. $t_c^2-b^2$; 11. $t_b^2-t_a^2$; 12. $4t_a^2-t_c^2$; 13. $4t_b-t_c^2$; 14. a^2+b^2; 15. $4t_a^2+a^2$; 16. $4t_a^2+b^2$; 17. $a^2+t_c^2$; 18. $t_c^2+b^2$; 19. $t_b^2+t_a^2$; 20. $4t_a^2+t_c^2$; 21. $4t_b^2+t_c^2$.

XIII. Gegeben: c, $a:t_b$ und dieselben algebraischen Summen zweier Quadrate wie in der vorigen Gruppe.

XIV. Gegeben: c, $a:t_c$ und dieselben Quadratsummen wie in Gruppe XII.

XV. Gegeben: c, $t_a:t_b$ und dieselben Quadratsummen wie in Gruppe XII.

XVI. Gegeben: c, $t_a:t_c$ und dieselben algebraischen Summen wie in Grnppe XII.

XVII. Folgende Aufgaben lassen sich auf die Fundamentalaufgabe: t_c, w_c, w'_c reduzieren: 1. r_c, h_c, t_c; 2. r_c, h_c, t'_c; 3. r_c, h'_c, t'_c; 4. h_c, h'_c, t_c; 5. h_c, h'_c, t'_c; 6. h_c, t'_c, w_c; 7. h_c, t'_c, w'_c; 8. t_c, t'_c, w_c; 9. t_c, t'_c, w'_c; 10. t'_c, w_c, w'_c; 11. $u-v$, t_c, w_c; 12. $u'+v'$, t_c, w'_c.

XVIII. 1. $u-v$, h_c, $t_c:w_c$; 2. $u'+v'$, h_c, $t_c:w'_c$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XIX. 1. c, t_c, w_c oder: a^2+b^2, c, w_c. Die Aufgabe wird durch die für $(a+b)^2$ quadratische Gleichung:

$$(a+b)^4-[(a^2+b^2)+c^2+2w_c^2](a+b)^2+(a^2+b^2)c^2=0$$

auf die früher gelöste Aufgabe: $a+b, c, w_c$ zurückgeführt. Zwar sind beide Wurzeln:

$$(a+b)_1^2=\frac{(a^2+b^2)+c^2+2w_c^2+\sqrt{[(a^2+b^2)+c^2+2w_c^2]^2-4(a^2+b^2)c^2}}{2}$$

$$\text{und: } (a+b)_2^2=\frac{(a^2+b^2)+c^2+2w_c^2-\sqrt{[(a^2+b^2)+c^2+2w_c^2]^2-4(a^2+b^2)c^2}}{2}$$

dieser Gleichung positiv, aber nur der aus der ersten Wurzel für $a+b$ sich ergebende Wert ist hier brauchbar, denn der aus der zweiten folgende Wert für $a+b$ ist $< c$.

2. c, t_c, w'_c oder a^2+b^2, c, w'_c wird auf $a-b, c, w'_c$ reduziert.

XX. 1. p, q, w_c oder: a^2-b^2, c, w_c. Die Aufgabe führt auf die für $(a+b)^2$ kubische Gleichung:

$$(a+b)^6-(c^2+4w_c^2)(a+b)^4-(a^2-b^2)^2(a+b)^2+(a^2-b^2)^2c^2=0,$$

ist also nicht mit Zirkel und Lineal lösbar.

2. Gleiches gilt von der Aufgabe: p, q, w'_c oder: a^2-b^2, c, w'_c, welche zu der für $(a-b)^2$ kubischen Gleichung führt:

$$(a-b)^6-(c^2+4w'^2_c)(a-b)^4-(a^2-b^2)^2(a-b)^2+(a^2-b^2)^2c^2=0.$$

3. p, q, t'_c oder: a^2-b^2, c, t'_c. Die Aufgabe wird durch die für $(a+b)^2$ bikubische Gleichung gelöst:

$$(a+b)^{12}-(c^2+4t'^2_c)(a+b)^{10}-(a^2-b^2)^2(a+b)^8+2(a^2-b^2)^2(c^2-4t'^2_c)(a+b)^6-$$
$$-(a^2-b^2)^4(a+b)^4-(a^2-b^2)^4(c^2+4t'^2_c)(a+b)^2+(a^2-b^2)^6=0.$$

b) Gleichschenkliges Dreieck aus Schenkelhöhe und Schenkelmittellinie.

Die Basis des gleichschenkligen Dreiecks ABC ist AB, die Basishöhe CD, die gegebene Schenkelhöhe AE und die Schenkelmittellinie AF; der Schwerpunkt des Dreiecks heisst S. Nach Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks AEF hat man den Apollonischen Kreis zu schlagen, der AF nach dem Verhältnis $2:1$ harmonisch teilt und die Verlängerung von EF in C schneidet. Der innere Teilpunkt ist S.

Diese einfache Aufgabe läßt noch mehrere Lösungen ohne Benutzung des Apollonischen Kreises zu. Die einfachste Lösung erhält man, wenn man nach Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks AEF um S als Mittelpunkt mit SA als Radius einen Kreisbogen schlägt, der die Verlängerung von FE in B schneidet. Man kann auch im Dreieck AEF die Mittelparallele zu EF zeichnen, die den Kreisbogen um den Mittelpunkt S mit dem Radius SF in der Mitte des anderen Schenkels schneidet. Zieht man ferner die Parallele zu EF im Abstande des Viertels der gegebenen Schenkelhöhe von EF und schneidet sie mit dem über SF als Durchmesser geschlagenen Kreise, so findet man die Mitte der Basishöhe CD des gesuchten Dreiecks. Schneidet man ferner die Parallele durch S zu EF mit dem um F als Mittelpunkt geschlagenen Kreisbogen, der $\frac{2}{3}$ der gegebenen Mittellinie zum Radius hat, so schneidet die durch den so gefundenen Punkt G zu AF gezogene

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Parallele die Verlängerung von EF in der Spitze C des gesuchten Dreiecks. Trägt man schließlich auf der Verlängerung von EF über F hinaus eine beliebige Strecke FC' ab und schlägt mit der verdoppelten Strecke als Radius um C' als Mittelpunkt einen Kreisbogen, der die Verlängerung von FA über A in A' schneidet, so trifft die Parallele durch A zu $A'C'$ FC' in C. Ist $AF > AE$, so gibt es stets zwei Dreiecke; der Winkel an der Spitze des einen ist $< 60^0$; der an der Spitze des anderen ist $> 60^0$.

c) c, w_c, γ. Fischer (S. 246), Borth (S. 125), Gustav Hoffmann (S. 103) und C. R. Müller (S. 46) lösen die Aufgabe mit Hilfe des Tangentensatzes (Fig. 11). Wird im Dreieck ABC die Winkelhalbierende $CW_c = w_c$ bis zum Treffpunkt D auf der Mitte des Umkreisbogens AB verlängert, und verbindet man A mit D, so besteht wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und W_cAD die Proportion: $AD : CD = W_cD : AD$, woraus: $CD \cdot W_cD = AD^2$ hervorgeht, und da $CD - W_cD = w_c$ ist, so sind Produkt und Differenz von CD und W_cD bekannt. Diese Lösung ist eine algebraische.

Eine synthetische Lösung mit Benutzung des in Abschnitt B betrachteten Apollonischen Kreises ist folgende: Zunächst wird das rechtwinklige Dreieck NN_cP aus $NP = c$ als der einen Kathete und dem ihr anliegenden Winkel $N_cNP = \frac{\gamma}{2}$ gezeichnet. Dann sind die Strecken $CW_c = w_c$ und NN_c so aufeinander zu legen, daß C, W_c und N, N_c zugeordnete harmonische Paare bilden, d. h. es ist mit diesen Strecken die in der Einleitung behandelte dritte Fundamentalaufgabe zu lösen. Bedient man sich der zweiten dort gegebenen Lösung, so hat man durch den Mittelpunkt D des Apollonischen Kreises mit dem Durchmesser NN_c einen beliebigen Radius zu ziehen und an seinen Endpunkt die Tangente von der Länge $\frac{w_c}{2}$ zu legen. Man wird also den schon vorhandenen Radius mit dem Endpunkte N benutzen. Schlägt man mit der Entfernung des nicht auf dem Kreise gelegenen Endpunktes der Tangente vom Mittelpunkte D des Apollonischen Kreises um letzteren Punkt einen Kreisbogen, der die Verlängerung von N_cN in Q trifft, so schneidet der um den Mittelpunkt Q mit dem Radius $\frac{w_c}{2}$ geschlagene Kreis N_cN in W_c und C. Die durch C zu NP gezogene Parallele schneidet den Apollonischen Kreis in A und die Verlängerung von AW_c trifft denselben Kreis in B.

Bequemer ist es jedoch, zunächst zur Gewinnung des Apollonischen Radius $\frac{NN_c}{2}$ (Fig. 12) das rechtwinklige Dreieck mit der einen Kathete $\frac{c}{2}$ und dem ihr anliegenden Winkel $\frac{\gamma}{2}$ als Hilfsfigur zu zeichnen und dann die zweite Lösung der Grundaufgabe 3 anzuwenden.

Bedient man sich der vierten Lösung dieser Grundaufgabe, so hat man (Fig. 13) nach Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks NN_cP in N an NN_c $w_c = NR$ unter rechtem Winkel anzutragen und auf der Verlängerung von N_cR $RS = NN_c$ und $ST = w_c$ zu machen. Die durch S zu TN gezogene Parallele trifft N_cN in W_c. W_cC ist $= w_c$.

Da der Winkel γ z. B. durch $\frac{\varrho_c - \varrho}{c}$, $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{c}$, $\frac{\varrho_c - \varrho}{r}$, $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{r}$, $\frac{\varrho_a + \varrho_b}{\varrho_c - \varrho}$, $\frac{\varrho_c + \varrho}{a + b}$ und $\frac{\varrho_a - \varrho_b}{a - b}$ bestimmt ist, so lassen sich auf die gelöste Aufgabe verschiedene andere zurückführen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

E. Berechnung der Seiten und der Flächen der vier Dreiecke, deren Ecken die Endpunkte der drei Innenwinkelhalbierenden oder je einer Innenwinkelhalbierenden und der beiden anderen Außenwinkelhalbierenden sind.

Im Dreieck ABC (Fig. 14) sei $a > b > c$, $a + b + c = 2s$, der Umkreisradius sei r, ϱ der Inkreisradius, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c die Radien der angeschriebenen Kreise und die Fläche des Dreiecks sei $\triangle$. Bezeichnet man ferner den Abstand des Umkreismittelpunktes M vom Inkreismittelpunkte N mit d, so ist $d^2 = r^2 - 2r\varrho$; und wenn d_a die Entfernung des Mittelpunktes M von dem Zentrum N_a des angeschriebenen Kreises ist, der die Seite a und die Verlängerungen von b und c berührt, so ist $d_a^2 = r^2 + 2r\varrho_a$; dieser entsprechend gelten noch die Relationen: $d_b^2 = r^2 + 2r\varrho_b$ und $d_c^2 = r^2 + 2r\varrho_c$. Früher waren schon die Formeln abgeleitet worden: $a + b = \frac{2\triangle}{\varrho'_c}$, $a + c = \frac{2\triangle}{\varrho'_b}$, $b + c = \frac{2\triangle}{\varrho'_a}$, $a - b = \frac{2\triangle}{\varrho''_c}$, $a - c = \frac{2\triangle}{\varrho''_b}$ und $b - c = \frac{2\triangle}{\varrho''_a}$. Überdies liegen die Endpunkte je zweier Innenwinkelhalbierenden und der dritten Außenwinkelhalbierenden, sowie die Endpunkte der drei Außenwinkelhalbierenden je auf einer Geraden, wie mit Hilfe der Umkehrung vom Satze des Menelaos bewiesen werden kann. Die vier Geraden sind also: $W_aW_bW'_c$, $W_aW_cW'_b$, $W_bW_cW'_a$ und $W'_aW'_bW'_c$. Werden schließlich die Seiten des Dreiecks $W_aW_bW_c$ mit a_1, b_1 und c_1 bezeichnet, so daß $a_1 = W_bW_c$, $b_1 = W_aW_c$ und $c_1 = W_aW_b$ ist, so hat man wegen $AW_b = \frac{bc}{a+c}$ und $AW_c = \frac{bc}{a+b}$:

$$a_1^2 = \left(\frac{bc}{a+c} - \frac{bc}{a+b}\right)^2 + \frac{4b^2c^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{(a+c)(a+b)};$$

darin ist: $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$,

$$\text{also: } a_1^2 = \frac{b^2c^2(b-c)^2 + bc(a^2 - (b-c)^2)(a+c)(a+b)}{(a+c)^2(a+b)^2}$$

$$= \frac{bc\,[bc((b-c)^2 + a^2 - (b-c)^2) + a(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]}{(a+c)^2(a+b)^2}$$

$$= \frac{abc\,(abc + (a+b+c)(a-b+c)(a+b-c))}{(a+c)^2(a+b)^2}$$

$$= \frac{4r\triangle(4r\triangle + 8\varrho_a\triangle)}{(a+c)^2(a+b)^2} = \frac{16\,d_a^2\triangle^2\varrho'^2_b\varrho'^2_c}{16\triangle^4} = \frac{d_a^2\varrho'^2_b\varrho'^2_c}{\triangle^2},$$

folglich: $a_1 = \frac{d_a\varrho'_b\varrho'_c}{\triangle}$ und dementsprechend: $b_1 = \frac{d_b\varrho'_a\varrho'_c}{\triangle}$; $c_1 = \frac{d_c\varrho'_a\varrho'_b}{\triangle}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Im Dreieck $W_a W'_b W'_c$ sei: $W'_b W'_c = a_2$, $W_a W'_c = b_2$ und $W_a W'_b = c_2$. Ferner ist: $AW'_c = \frac{bc}{a-b}$ und $AW'_b = \frac{bc}{a-c}$, d. h. $AW'_c > AW'_b$, und:

$$a_2^2 = \left(\frac{bc}{a-b} - \frac{bc}{a-c}\right)^2 + \frac{4b^2c^2}{(a-b)(a-c)} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$= \frac{bc\,[bc\,(b-c)^2 + (a^2-(b-c)^2)(a-b)(a-c)]}{(a-b)^2(a-c)^2}$$

$$= \frac{abc\,[abc - (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]}{(a-b)^2(a-c)^2}$$

$$= \frac{16\,d^2 \triangle^2 \varrho''^2_b \varrho''^2_c}{16 \triangle^4} = \frac{d^2 \varrho''^2_b \varrho''^2_c}{\triangle^2};$$

$$a_2 = \frac{d\,\varrho''_b \varrho''_c}{\triangle}.$$

Zur Berechnung von b_2 hat man im Dreieck $W'_c B W_a$:

$$W'_c B = \frac{ac}{a-b} \text{ und } BW_a = \frac{ac}{b+c};$$

mithin ist: $b_2^2 = \left(\frac{ac}{a-b} + \frac{ac}{b+c}\right)^2 - \frac{4a^2c^2 \cos^2\frac{\beta}{2}}{(a-b)(b+c)}$

und: $\cos^2\frac{\beta}{2} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4ac}$,

also: $b_2^2 = \frac{ac\,[ac\,(a+c)^2 - ((a+c)^2 - b^2)(a-b)(b+c)]}{(a-b)^2(b+c)^2}$

$$= \frac{abc\,[abc + (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)]}{(a-b)^2(b+c)^2}$$

$$= \frac{d_c^2 \varrho''^2_c \varrho'^2_a}{\triangle^2};$$

$$b_2 = \frac{d_c \varrho''_c \varrho'_a}{\triangle};$$

analog: $c_2 = \frac{d_b \varrho''_b \varrho'_a}{\triangle}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks $W_b W'_a W'_c$ mit a_3, b_3 und c_3, sodaß: $a_3 = W_b W'_c$, $b_3 = W'_a W'_c$ und $c_3 = W_b W'_a$ ist, so ergibt sich:

$$a_3 = \frac{d_c \varrho'_b \varrho''_c}{\triangle}, \quad b_3 = \frac{d \varrho''_a \varrho''_c}{\triangle}, \quad c_3 = \frac{d_a \varrho'_b \varrho''_a}{\triangle}.$$

Nennt man endlich die Seiten des letzten Dreiecks $W_c W'_a W'_b$ a_4, b_4 und c_4, so ist:

$$a_4 = \frac{d_b \varrho'_c \varrho''_b}{\triangle}, \quad b_4 = \frac{d_a \varrho'_c \varrho''_a}{\triangle}, \quad c_4 = \frac{d \varrho''_a \varrho''_b}{\triangle}.$$

Probe. Es müssen die Identitäten bestehen:

$$a_3 - b_2 + c_1 = 0,$$
$$a_4 + b_1 - c_2 = 0,$$
$$a_1 + b_4 - c_3 = 0,$$
$$a_2 - b_3 + c_4 = 0.$$

Das sind aber die früher abgeleiteten Relationen:

$$\frac{1}{\varrho'_a} - \frac{1}{\varrho'_b} + \frac{1}{\varrho''_c} = 0;$$

$$\frac{1}{\varrho'_b} - \frac{1}{\varrho'_c} + \frac{1}{\varrho''_a} = 0;$$

$$\frac{1}{\varrho'_a} - \frac{1}{\varrho'_c} + \frac{1}{\varrho''_b} = 0;$$

$$\frac{1}{\varrho''_a} - \frac{1}{\varrho''_b} + \frac{1}{\varrho''_c} = 0.$$

Ferner ist:

$$a_3 : b_2 : c_1 = \frac{1}{\varrho'_a} : \frac{1}{\varrho'_b} : \frac{1}{\varrho''_c} = (b+c):(a+c):(a-b),$$

$$a_4 : b_1 : c_2 = \frac{1}{\varrho'_a} : \frac{1}{\varrho''_b} : \frac{1}{\varrho'_c} = (b+c):(a-c):(a+b),$$

$$a_1 : b_4 : c_3 = \frac{1}{\varrho''_a} : \frac{1}{\varrho'_b} : \frac{1}{\varrho'_c} = (b-c):(a+c):(a+b),$$

$$a_2 : b_3 : c_4 = \frac{1}{\varrho''_a} : \frac{1}{\varrho''_b} : \frac{1}{\varrho''_c} = (b-c):(a-c):(a-b).$$

Da sich diese Proportionen auf geometrischem Wege leicht ableiten lassen, so wird dadurch die Berechnung der Seiten der vier Dreiecke vereinfacht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Berechnung der vier Dreiecksflächen, die der Reihe nach mit $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ und $\triangle_4$ bezeichnet werden mögen, während $\triangle$ die Fläche des Grunddreiecks ABC ist, hat man zunächst für das Dreieck $W_a W_b W_c$ mit der Flächenmaßzahl $\triangle_1$:

$$\frac{AW_bW_c}{\triangle} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)},$$

$$\frac{BW_aW_c}{\triangle} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)},$$

$$\frac{CW_aW_b}{\triangle} = \frac{ab}{(a+c)(b+c)},$$

mithin:
$$\frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{(a+b)(a+c)(b+c) - ab(a+b) - ac(a+c) - bc(b+c)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$
$$= \frac{2abc}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Für das gleichseitige Dreieck ist: $\frac{\triangle_1}{\triangle} = \frac{2a^3}{8a^3} = \frac{1}{4}$.

Führt man die Radien ϱ'_a, ϱ'_b, ϱ'_c und r ein, so hat man auch: $\triangle\triangle_1 = \varrho'_a \varrho'_b \varrho'_c r$.

Zur Berechnung der Fläche $\triangle_2$ des Dreiecks $W_a W'_b W'_c$ können zwei Wege eingeschlagen werden. Der längere besteht darin, die Flächen der fünf Dreiecke $W_a W_b W_c$, AW_bW_c, $AW'_bW'_c$, $AW_bW'_c$ und AW'_bW_c, in die das Dreieck $W_a W'_b W'_c$ zerfällt, zu addieren. Dadurch erhält man:

$$\triangle_2 = \triangle_1 + \frac{bc\triangle}{(a+b)(a+c)} + \frac{bc\triangle}{(a-b)(a-c)} + \frac{bc\triangle}{(a+c)(a-b)} + \frac{bc\triangle}{(a+b)(a-c)},$$

oder, weil $\triangle_1 = \frac{2abc\triangle}{(a+b)(a+c)(b+c)}$ ist:

$$\frac{\triangle_2}{\triangle} = \frac{2abc}{(b+c)(a-b)(a-c)}.$$

Kürzer gelangt man zum Ziel, wenn man die Dreiecke $W_a W_b W_c$ und $W_a W'_b W'_c$ direkt miteinander vergleicht. Dann ergibt sich:

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_2} = \frac{b_1 c_1}{b_2 c_2} = \frac{\varrho'_b \varrho'_c}{\varrho''_b \varrho''_c},$$

und da: $\triangle\triangle_1 = \varrho'_a \varrho'_b \varrho'_c r$ ist, so folgt:

$$\triangle\triangle_2 = \varrho'_a \varrho''_b \varrho''_c r.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Berechnung der Fläche $\triangle_3$ des Dreiecks $W_b W'_a W'_c$ hat man:

$$\frac{\triangle_2}{\triangle_3} = \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} = \frac{\varrho'_a \varrho''_b}{\varrho'_b \varrho''_a},$$

mithin: $$\triangle \triangle_3 = \varrho'_b \varrho''_a \varrho''_c r$$

und hieraus: $$\frac{\triangle_3}{\triangle} = \frac{2\,abc}{(a+c)(b-c)(a-b)}.$$

Für die Fläche $\triangle_4$ des letzten Dreiecks $W_c W'_a W'_b$ ist:

$$\frac{\triangle_1}{\triangle_4} = \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} = \frac{\varrho'_a \varrho'_b}{\varrho''_a \varrho''_b},$$

daher: $$\triangle \triangle_4 = \varrho'_c \varrho''_a \varrho''_b r$$

und: $$\frac{\triangle_4}{\triangle} = \frac{2\,abc}{(a+b)(a-c)(b-c)};$$

mithin: $$\triangle_1 : \triangle_2 : \triangle_3 : \triangle_4 =$$
$$= (a-b)(a-c)(b-c) : (a+b)(a+c)(b-c) : (a+b)(b+c)(a-c) : (a+c)(b+c)(a-b).$$

Schließlich ist zu bemerken, daß sich auch die Umkreisradien und die Höhen der vier betrachteten Dreiecke berechnen lassen, da sie nur von den Seiten und den Flächen abhängig sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Parallelogramm.

In Anlehnung an die behandelten Dreiecksaufgaben können solche für das Parallelogramm und die übrigen Vierecke gebildet werden. Im Parallelogramm $ABCD$ sei $AB = DC = a$, $AD = BC = b$; bezeichnet man ferner die auf a und b stehenden Höhen mit h_a und h_b, die Diagonalen AC und BD mit e und f und den einen der von ihnen gebildeten Winkel mit ε, so können folgende Aufgaben gestellt werden, von denen mehrere auch ohne Verwendung des Apollonischen Kreises lösbar sind:

I. 1. $a, b, e:f$; 2. $a:b, e, f$; 3. $a:b, e:f, h_a$; 4. $h_b, h_a, e:f$; 5. $h_b:h_a, e, f$; 6. $h_b:h_a, e:f, a$.

II. 1. $a, b, e:h_a$; 2. $a:b, e, h_a$; 3. $a:b, e:h_a, f$; 4. $a:b, e:h_a, h_b$. Die Aufgaben dieser Gruppe lassen sich auch ohne Verwendung des Apollonischen Kreises leicht lösen.

III. 1. $a, e, b:f$; 2. $a:e, b:f, h_a$.

IV. 1. $a, e, b:h_b$; 2. $a:e, b, h_b$; 3. $a:e, b:h_b, f$; 4. $a:e, b:h_b, h_a$.

V. 1. $a, h_a, e:f$; 2. $a:h_a, e, f$; 3. $a:h_a, e:f, b$; 4. $a:h_a, e:f, h_b$.

VI. 1. $a, h_b, b:e$; 2. $a:h_b, b, e$; 3. $a:h_b, b:e, f$; 4. $a:h_b, b:e, h_a$. Auch die Aufgaben dieser Gruppe sind ohne Benutzung des Apollonischen Kreises leicht lösbar.

VII. 1. $a, h_b, e:f$; 2. $a:h_b, e, f$; 3. $a:h_b, e:f, b$; 4. $a:h_b, e:f, h_a$.

VIII. 1. $e, h_a, b:f$; 2. $e:h_a, b, f$; 3. $e:h_a, b:f, a$; 4. $e:h_a, b:f, h_b$.

IX. $a, b:e$ und 1. $b^2 - h_a^2$; 2. $e^2 - h_a^2$; 3. $e^2 - b^2$; 4. $e^2 - f^2$; 5. $e^2 + b^2$; 6. $e^2 + f^2$.

X. $a, e:f$ und dieselben algebraischen Summen zweier Quadrate wie in der vorigen Gruppe.

XI. $e, a:b$ und 1. $a^2 - b^2$; 2. $4a^2 - f^2$; 3. $a^2 + b^2$; 4. $4a^2 + f^2$.

XII. $e, a:f$ und dieselben Quadratsummen wie in der vorigen Gruppe.

XIII. 1. $e, a:b, \varepsilon$; 2. $h_a, a:b, \varepsilon$; 3. a, b, ε; 4. h_a, h_b, ε. Die Lösung der dritten Aufgabe dieser Gruppe erfordert bei Verwendung des Apollonischen Kreises zunächst die Konstruktion eines dem gesuchten ähnlichen Hilfsdreiecks. Will man die Aufgabe nicht mit dem Apollonischen Kreise lösen, so kommt man ohne ein dem gesuchten ähnliches Dreieck aus. Man hat nur eine der Diagonalen parallel sich selbst zu verschieben. Dann erhält man ein Dreieck, in welchem die Grundlinie, ihre Mittellinie und der Winkel an der Spitze bekannt sind. Auch die beiden ersten Aufgaben lassen sich so lösen, nur daß man dann die Konstruktion eines ähnlichen Dreiecks nicht erspart, während man wenigstens

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

bei Lösung der ersten Aufgabe mit Verwendung des Apollonischen Kreises die Konstruktion eines Hilfsdreiecks nicht nötig hat. Die Lösung der vierten Aufgabe ist leicht auf die der zweiten zurückführbar.

Werden die Seiten des Parallelogramms $ABCD$, (Fig. 15) bez. ihre Verlängerungen von einer Geraden in den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 geschnitten, so bestehen die Proportionen:

$$AP_1 : AP_4 = BP_1 : BP_2 = CP_3 : CP_2 = DP_3 : DP_4;$$

ferner ist: $AP_1 : AB = P_1P_4 : P_2P_4$ und: $AP_4 : AD = P_1P_4 : P_1P_3$;

mithin: $$\frac{AP_1}{AP_4} = \frac{BP_1}{BP_2} = \frac{CP_3}{CP_2} = \frac{DP_3}{DP_4} = \frac{P_1P_3}{P_2P_4} \cdot \frac{AB}{AD}.$$

Sind also die vier Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4 und das Verhältnis $AB : AD$ der Seiten des Parallelogramms $ABCD$ gegeben, so hat man für jede der vier Ecken A, B, C und D einen Apollonischen Kreis als geometrischen Ort. Der Punkt A z. B. liegt auf dem Apollonischen Kreise, der die gegebene Strecke P_1P_4 nach dem bekannten Verhältnis $\frac{P_1P_3}{P_2P_4} \cdot \frac{AB}{AD}$ harmonisch teilt, usw. Das Parallelogramm selbst aber läßt sich nicht zeichnen, solange nicht noch ein Stück von ihm bekannt ist. Sind z. B. die Seiten AB und AD einzeln gegeben, so läßt sich zunächst wegen: $AP_1 : AB = P_1P_4 : P_2P_4$ AP_1 finden. Mithin ergibt sich die Ecke A als Schnittpunkt des oben erwähnten Apollonischen Kreises mit einem Kreisbogen, der P_1 als Mittelpunkt und die gefundene Strecke P_1A zum Radius hat. Die Apollonischen Kreise, die P_1P_2 und P_3P_4 nach dem gegebenen Verhältnis $\frac{P_1P_3}{P_2P_4} \cdot \frac{AB}{AD}$ harmonisch teilen, werden von AP_1 und AP_4 bez. in B und D geschnitten.

Ist außer den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und dem Seitenverhältnis $AB : AD$ die eine auf AB stehende Höhe h_a des Parallelogramms gegeben, so schneidet eine von P_1 an den Kreis mit dem Mittelpunkt P_3 und dem Radius h_a gelegte Tangente den Apollonischen Kreis, der P_1P_4 nach dem Verhältnis $\frac{P_1P_3}{P_2P_4} \cdot \frac{AB}{AD}$ harmonisch teilt, in der Ecke A. Die Ecken B und D findet man dann so, wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe. An Stelle des Verhältnisses der Seiten und der einen Höhe können auch das Verhältnis der Höhen und die eine Seite oder die beiden Höhen gegeben sein.

Ist außer P_1, P_2, P_3, P_4 und $AB : AD$ der Schnittpunkt der Diagonalen gegeben, so werden alle vier Apollonischen Kreise gebraucht. Hat man sie gezeichnet, so ist zweimal die Lösung der schon früher verwendeten Hilfsaufgabe erforderlich: Durch einen gegebenen Punkt eine Strecke zu ziehen, welche von den Peripherien zweier gegebenen Kreise halbiert wird.

Ist schließlich außer der Lage der vier Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 die Form des Parallelogramms gegeben oder sind die Bestimmungsstücke so gewählt, daß sich die Gestalt finden läßt, d. h. sind das Verhältnis der Seiten und der Parallelogrammwinkel bekannt, so hat man die Aufgabe: Ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm zu zeichnen,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so daß jede Seite, bez. ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht. Auch diese Aufgabe ist lösbar. Denn zunächst sind, wie früher, durch die vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und das Seitenverhältnis $AB:AD$ die vier Apollonischen Kreise bestimmt, deren jeder einen geometrischen Ort für eine der vier Ecken des Parallelogramms darstellt. Ferner sind aber mit Hilfe der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und des Parallelogrammwinkels vier neue geometrische Örter für die vier Ecken des Parallelogramms konstruierbar, nämlich die Umkreise der vier Dreiecke AP_1P_4, BP_1P_2, CP_2P_3 und DP_3P_4. Die diesen einander ähnlichen Dreiecken umgeschriebenen Kreise berühren sich paarweise in den vier gegebenen Punkten. Die Berührung ist eine innere, wenn die den Kreisen eingeschriebenen Dreiecke einen Winkel gemeinsam haben und eine äußere, wenn die gleichen Winkel Scheitelwinkel sind. Das ist leicht beweisbar. Die Aufgabe hat zwei Lösungen. (Fig. 15.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der Kreis.

Aufgabe: Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Gerade berührt.

Die verlängerte Verbindungslinie der gegebenen Punkte P_1 und P_2 schneide die gegebene Tangente in S. T sei der Berührungspunkt des einen gesuchten Kreises und M sein Mittelpunkt. Die in N auf P_1P_2 errichtete Mittelsenkrechte, die die gegebene Gerade in Q schneiden möge, ist der eine geometrische Ort für den Mittelpunkt M des gesuchten Kreises und der andere ist der Apollonische Kreis, der die bekannte Strecke QP_1 nach dem bekannten Verhältnis $MQ : MP_1 = MQ : MT = SQ : SN$ harmonisch teilt.

Der Apollonische Kreis schneidet die Mittelsenkrechte QN noch in dem Mittelpunkte M' des zweiten, die Aufgabe lösenden Kreises.

Ist die Verbindungslinie der gegebenen Punkte P_1 und P_2 der gegebenen Tangente parallel, so ist der Apollonische Kreis die Mittelsenkrechte auf QP_1.

Steht die Verbindungsstrecke P_1P_2 auf der gegebenen Geraden senkrecht, so kennt man den Radius des gesuchten Kreises, und der Apollonische Kreis ist identisch mit der Mittelsenkrechten auf P_1P_2.

Außer den hier behandelten habe ich noch viele andere Aufgaben untersucht. Namentlich habe ich sehr viel Zeit verloren bei meinen zum Teil vergeblichen Bemühungen, für gewisse Aufgaben Lösungen mit geometrischer Analysis zu finden. Es ist mir z. B. nicht gelungen, die Aufgabe $a - b$, c, w_c auf synthetischem Wege zu lösen, und auch in den mir zur Verfügung stehenden, in der Einleitung zitierten, Aufgabensammlungen habe ich keine Lösung mit geometrischer Analysis gefunden; nur in dem an unserer Realschule eingeführten Lehrbuche findet sich eine algebraische Lösung. Schließlich habe ich zu bemerken, daß ich mich nicht auf mit Zirkel und Lineal lösbare Aufgaben beschränkt habe. Abgesehen nämlich von den in der vorliegenden Arbeit behandelten Beispielen, die Kurven höherer Ordnung zu ihrer Lösung erfordern, habe ich noch andere derartige Aufgaben ins Bereich der Untersuchung gezogen. Aber eine erschöpfende Behandlung solcher Aufgaben macht eine eingehende Determination unerläßlich, bei der die Methoden der höheren Algebra häufig nicht zu umgehen sind. Das zweibändige Handbuch der höheren Algebra von Serret (deutsch von Wertheim, Leipzig, Teubner, 2. Auflage; 1. Band, 1878; 2. Band, 1879) erwies sich bei diesen Untersuchungen mehrfach als unzureichend, sodaß sie ein abgeschlossenes Ganzes noch nicht darstellen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anhang.

Pädagogische Bemerkungen.

Zuerst wird die harmonische Teilung einer gegebenen Strecke nach einem gegebenen Verhältnis für das Teilungsverhältnis 2:1 erklärt. Hierzu wird das Parallelogramm $ABCD$ gezeichnet und die sich in E schneidenden Diagonalen AC und BD, sowie die Mittellinie CF des Dreiecks ABC gezogen. Die Diagonale BD wird von der Mittellinie CF im Punkte S geschnitten. Dann ist: $SB:SE=2:1$ und $DB:DE$ auch $=2:1$, mithin: $SB:SE=DB:DE=2:1$. Die innen in S und außen in D nach demselben Verhältnis 2:1 geteilte Strecke BE wird eine nach jenem Verhältnis harmonisch geteilte Strecke genannt.

Alsdann wird die Aufgabe der harmonischen Teilung einer Strecke nach einem gegebenen Verhältnis $m:n$ allgemein gelöst und dabei zunächst vorausgesetzt, daß $m>n$ ist. Es wird zwar nur die in der Einleitung erwähnte Konstruktion behandelt, die sich in § 189 unseres Lehrbuches findet, wohl aber wird noch gezeigt, daß man für den Fall, in welchem $m<n$ ist, den Strahl durch den anderen Endpunkt der harmonisch zu teilenden Strecke zu legen und die Konstruktion mit der langen Strecke n zu beginnen hat und dabei doch dieselben Teilpunkte erhält. Dies geschieht, um zu erreichen, daß die eine Hälfte der Konstruktionsebene für den übrigen Teil der Figur frei bleibt.

Hierauf werden die Sätze von der Teilung der Grundlinie des Dreiecks durch die Halbierenden des Innen- und des Außenwinkels an der Spitze nebst ihren Umkehrungen bewiesen (§ 211 des Lehrbuches) und die beiden Konstruktionsfiguren zu einer einzigen vereinigt. Der auf der Grundlinie AB des Dreiecks ABC liegende Endpunkt der Innenwinkelhalbierenden heißt D und E der auf der Verlängerung von AB gelegene Endpunkt

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der Außenwinkelhalbierenden, sodaß im Dreieck DEC der Winkel bei C ein Rechter ist. Dann werden die Seiten CA und CB des Dreiecks ABC auf den Schenkeln eines beliebigen Winkels vom Scheitel S aus abgetragen und die durch die Abtragung erhaltenen Punkte P und Q verbunden. SP ist $= CA$ und $SQ = CB$. Ferner werden durch Ziehen von Parallelen zu PQ beliebig viele andere Streckenpaare SP', SQ'; SP'', SQ''; .... gewonnen, welche sich wie $SP : SQ = CA : CB$ verhalten. Zugleich werden die Grenzen angegeben, innerhalb welcher die Ziehung der Parallelen nur erfolgen darf, um Streckenpaare zu erhalten, die sich nicht nur wie $CA : CB$ verhalten, sondern auch als Seiten von Dreiecken über der gemeinschaftlichen Grundlinie AB dienen können. Hierzu werden DA und DB auf den Schenkeln SP und SQ vom Scheitel S aus abgetragen, so daß $SK = DA$ und $SL = DB$ ist und K und P auf dem einen, L und Q auf dem anderen Schenkel des Winkels liegen. Ist dann noch $SM = EA$ und $SN = EB$, und liegt M mit K, N mit L auf demselben Schenkel, so liefern alle Parallelen zwischen KL und MN brauchbare Seiten zur Konstruktion von Dreiecken, die die Grundlinie AB gemeinsam haben und deren andere Seiten sich wie $CA : CB$ verhalten. Alsdann wird z. B. mit SP' und SQ' als Seiten über AB als Grundlinie das Dreieck ABC' gezeichnet, so daß $C'A = SP'$ und $C'B = SQ'$ ist, und mit Hilfe der vorher bewiesenen Umkehrungen der Sätze von der Teilung der Grundlinie durch die Halbierenden des Innen- und des Außenwinkels an der Spitze gezeigt, daß die Halbierenden der Winkel an der Spitze C' des Dreiecks ABC' auch durch D, bez. E gehen. Dieselbe Konstruktion wird mit noch einigen Streckenpaaren CP'', CQ''; CP''', CQ'''; . . . wiederholt und dadurch werden die Dreiecke ABC'', ABC''' . . . gefunden. Da schließlich die Winkel DCE, $DC'E$, $DC''E$, . . . Rechte sind, so muß der Kreis über dem Durchmesser DE durch die Punkte C, C', C'' . . . hindurchgehen. Zuletzt wird der Kreis gezeichnet und „Apollonischer Kreis“ genannt.

Formulierung des Apollonischen Satzes: Der geometrische Ort der Spitzen aller Dreiecke, welche die Grundlinie gemeinsam haben, während die beiden anderen Seiten jedes Dreiecks in einem gegebenen, für alle Dreiecke gleichen, Verhältnis stehen, ist der Kreis über einem Durchmesser, dessen Endpunkte die gemeinschaftliche Grundlinie nach jenem Verhältnis harmonisch teilen.

Zum Schlusse bringe ich ein von den Schülern ausgearbeitetes einfaches Beispiel.

Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen aus dem Verhältnis der Grundlinie zu ihrer Mittellinie, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und aus dem Radius des umgeschriebenen Kreises. (Reifeprüfungsaufgabe Ostern 1906.) (Fig. 16.)

Formulierung. Gegeben sind die Strecken k, l, m, n und r; gesucht wird das Dreieck ABC, in welchem: 1. $AD = DB$; 2. $AB : CD = k : l$; 3. $CA : CB = m : n$ und 4. $MA = MB = MC = r$ ist.

Konstruktion. Ich ziehe $A'B' = k$ und schlage den Apollonischen Kreis, der $A'B'$ nach dem Verhältnis $m : n$ harmonisch teilt. Alsdann halbiere ich $A'B'$ in D' und schlage um D' mit l einen Kreisbogen, der den Apollonischen Kreis z. B. in C' schneidet. C' verbinde ich mit A' und B', zeichne den Umkreismittelpunkt M des Dreiecks $A'B'C'$ und verbinde M mit A', B' und C'. Ferner schlage ich um M mit r den Kreis, der MA' in A, MB' in B und MC' in C schneidet. Schließlich verbinde ich A, B und C miteinander.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Beweis. Den auf $A'B'$ liegenden Schnittpunkt des Apollonischen Kreises nenne ich E' und F' den auf der Verlängerung von $A'B'$. Die Grundlinie AB des Dreiecks ABC halbiere ich in D und ziehe CD. C' verbinde ich mit D'.

1. $AD = DB$ nach Hilfskonstruktion.

CD Mittellinie des Dreiecks ABC.

2. $MA = MB$ als Radien desselben Kreises.
$MA' = MB'$ „ „ „ „ .

$AB \parallel A'B'$, denn haben gleichschenklige Dreiecke den Winkel an der Spitze gemeinsam, so sind ihre Basen parallel.
$BC \parallel B'C'$, wie ebenso bewiesen werden kann.
$AC \parallel A'C'$, „ „ „ „ „ .

$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, denn Dreiecke mit paarweise parallelen Seiten sind ähnlich.
CD Mittellinie des Dreiecks ABC, wie bewiesen.
$C'D'$ „ „ „ $A'B'C'$ nach Konstruktion und Hilfskonstruktion.

$CD : C'D' = AB : A'B'$, denn entsprechende Mittellinien ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie entsprechende Seiten.

$AB : CD = A'B' : C'D'$ durch Vertauschung der Glieder in der obigen Proportion.
$A'B' = k$ nach Konstruktion.
$C'D' = l$ „ „ .

$AB : CD = k : l$, denn gleiche Größen kann ich für einander setzen.

3. $E'A' : E'B' = F'A' : F'B' = m : n$ nach der Konstruktion der harmonischen Teilpunkte.
$C'A' : C'B' = E'A' : E'B' = F'A' : F'B'$ nach dem Satze des Apollonius.

$C'A' : C'B' = m : n$, denn sind zwei Größen einer dritten gleich, so sind sie unter sich gleich.
$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, wie bewiesen.

$CA : CB = C'A' : C'B'$, denn in ähnlichen Dreiecken verhalten sich zwei Seiten des einen wie die entsprechenden des anderen.

$CA : CB = m : n$, denn gleiche Größen kann ich für einander setzen.

4. $MA = MB = MC = r$ nach Konstruktion.

Der Kreis um M mit r ist der dem Dreieck ABC umgeschriebene Kreis.

Determination. Ohne Beschränkung darf ich voraussetzen, daß $m > n$ ist. Ich erhalte ein Dreieck, wenn: $D'E' < l < D'F'$, d. h. wenn:

$$\frac{k(m-n)}{2(m+n)} < l < \frac{k(m+n)}{2(m-n)} .$$

ist. Setze ich das eine gegebene Verhältnis $\frac{l}{k} = \varkappa$ und das andere $\frac{m}{n} = \lambda$, so ist auch:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} < 2\varkappa < \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} .$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung: Die Formulierungsfigur betreffend ist zu erwähnen, daß die Streckenpaare k, l und m, n zwei verschiedenen, dem Ausgangsdreieck ähnlichen Dreiecken entnommen werden müssen. Entnimmt der Schüler die gegebenen Streckenpaare nur einem ähnlichen Dreieck, so verfällt er häufig in den Fehler, außer den gegebenen Verhältnissen $c:t_c$ und $a:b$ noch eins der vier Verhältnisse $a:c$, $b:c$, $a:t_c$ und $b:t_c$ als bekannt zu betrachten und zur Konstruktion zu verwenden. Eine ähnliche Gefahr liegt besonders dann vor, wenn die beiden gegebenen Streckenpaare von einem Punkte, z. B. von der Spitze des Dreiecks, ausgehen. In diesem Falle macht der Schüler leicht den Fehler, nur das eine gegebene Verhältnis und von dem anderen die eine Strecke zu benutzen. Ist z. B. die Aufgabe gestellt: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Grundlinie, dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und dem Verhältnis der Mittellinie nach der Grundlinie zur Halbierenden des Außenwinkels an der Spitze, so wird folgende falsche Konstruktion ausgeführt: Der Schüler zeichnet zunächst den Apollonischen Kreis, der die Grundlinie nach dem Verhältnis der ihr anliegenden Seiten harmonisch teilt, nnd schlägt dann um die Mitte der Grundlinie als Zentrum einen Kreisbogen, dessen Radius der der Mittellinie entsprechenden Strecke in dem anderen gegebenen Verhältnis gleich ist.

Die die gegebenen Verhältnisse bestimmenden Strecken werden behufs Erzielung größerer Genauigkeit der Konstruktion stets ähnlichen Dreiecken entnommen, die größer sind, das Ausgangsdreieck. In der Konstruktionsfigur werden sämtliche Geraden und Kreise mit Ausnahme des gesuchten Gebildes gestrichelt, und wenn die Konstruktionsfigur zur Beweisfigur vervollständigt wird, so sind sämtliche hinzukommenden, zum Beweise notwendigen Strecken oder Kreise zu strichpunktieren. Es wird streng darauf geachtet, daß nichts in der Konstruktion vorkommt, was in den Beweis gehört.

Wenn die Aufgabe determiniert wird, so hat dies vollständig zu geschehen; eher ist die Determination wegzulassen, als daß eine unvollständige Determination gestattet wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Anmerkung: Die Formulierungsfigur betref en-
paare k, l und m, n zwei verschiedenen, dem ken
entnommen werden müssen. Entnimmt der Sc nur
einem ähnlichen Dreieck, so verfällt er häufig in er-
hältnissen $c:t_c$ und $a:b$ noch eins der vier Ve als
bekannt zu betrachten und zur Konstruktion zu egt
besonders dann vor, wenn die beiden gegebenen B.
von der Spitze des Dreiecks, ausgehen. In dies len
Fehler, nur das eine gegebene Verhältnis und zu
benutzen. Ist z. B. die Aufgabe gestellt: Ein Dr nie,
dem Verhältnis der beiden anderen Seiten und der
Grundlinie zur Halbierenden des Außenwinkels che
Konstruktion ausgeführt: Der Schüler zeichnet zu die
Grundlinie nach dem Verhältnis der ihr anliegen ägt
dann um die Mitte der Grundlinie als Zentrum e der
Mittellinie entsprechenden Strecke in dem andere

Die die gegebenen Verhältnisse bestimmen ng
größerer Genauigkeit der Konstruktion stets ähnlich nd,
das Ausgangsdreieck. In der Konstruktionsfigur ise
mit Ausnahme des gesuchten Gebildes gestriche zur
Beweisfigur vervollständigt wird, so sind sämtlic ot-
wendigen Strecken oder Kreise zu strichpunktier laß
nichts in der Konstruktion vorkommt, was in d

Wenn die Aufgabe determiniert wird, so hat ist
die Determination wegzulassen, als daß eine un rd.

© The Tiffen Company, 2007
TIFFEN Gray Scale
R G B W G K C Y M
A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Herrn Kollegen GEISSLER für die freundliche Unterstützung bei der Durchsicht der Druckbogen meinen Dank zu sagen, ist mir eine angenehme Pflicht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

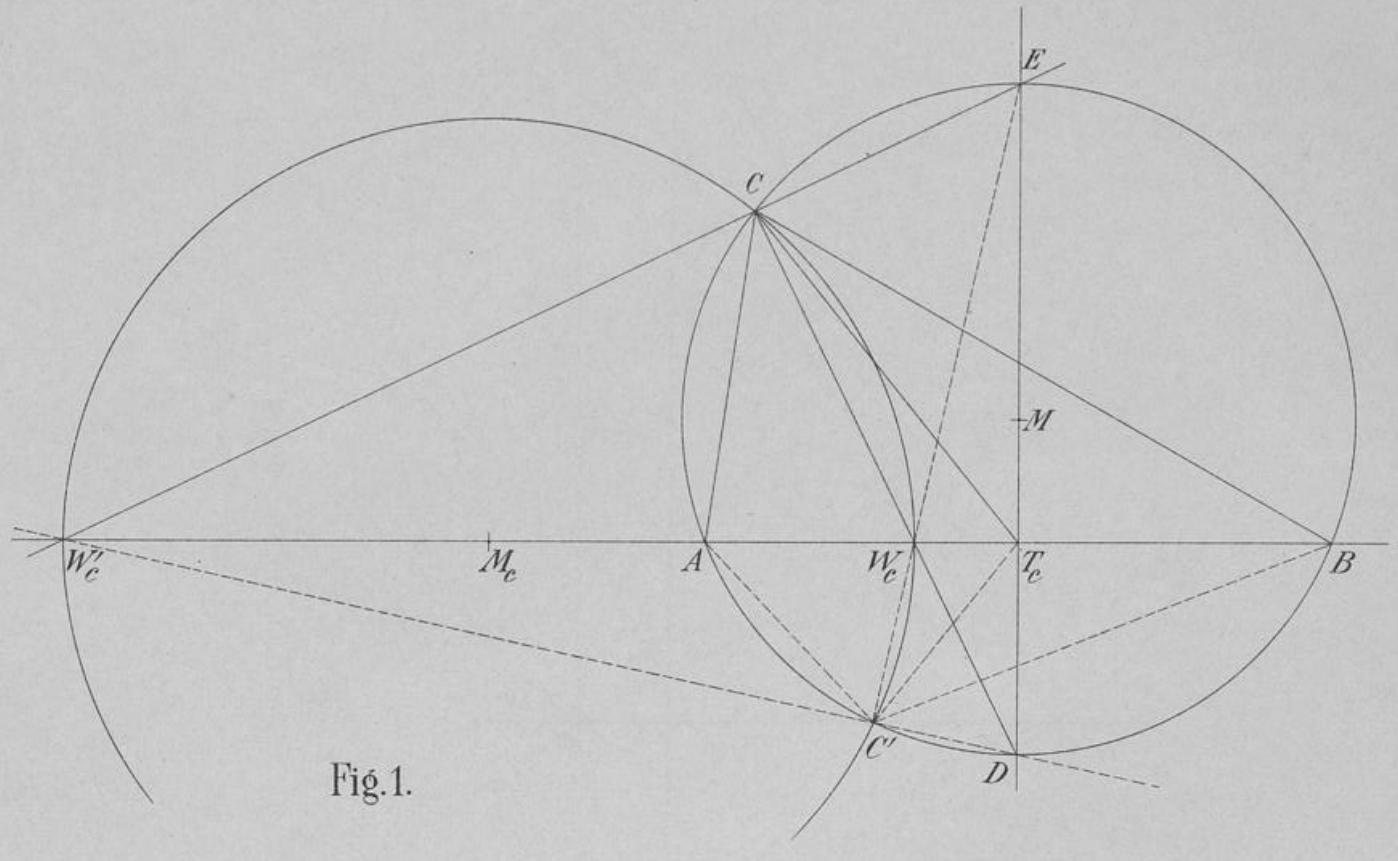


Fig. 1.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

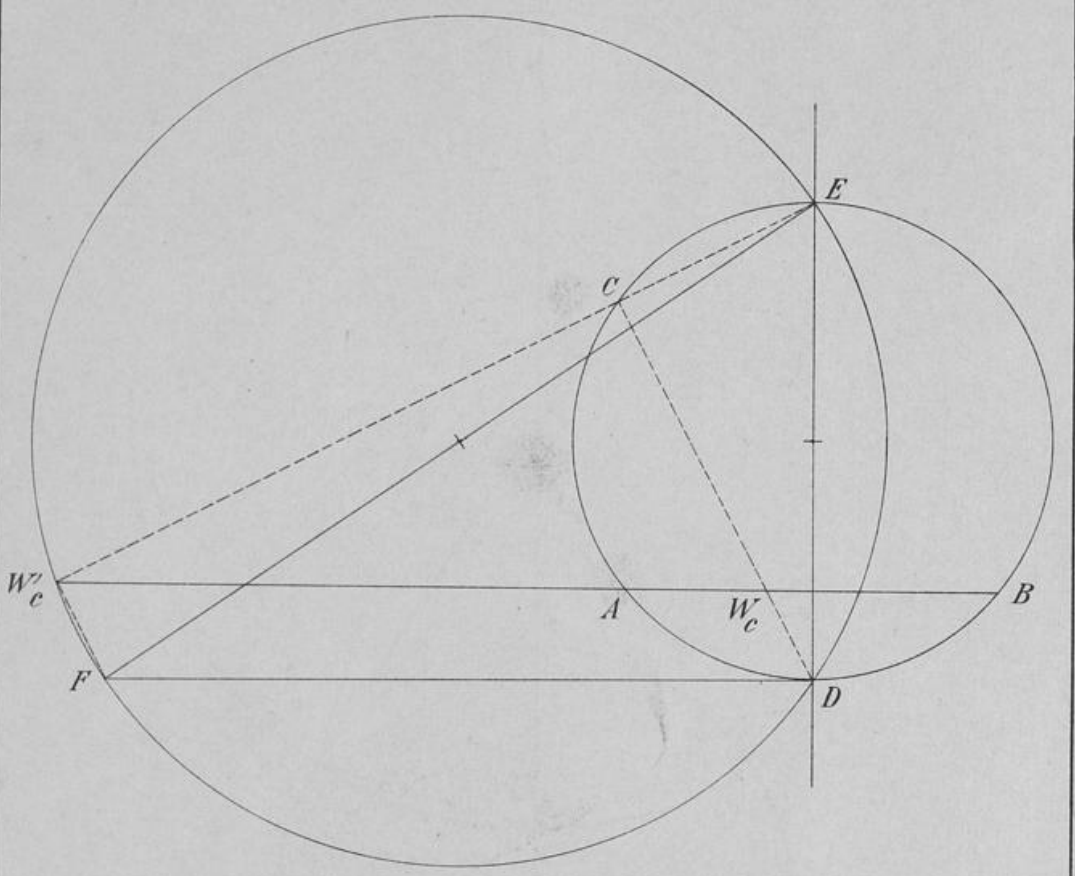


Fig. 2.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

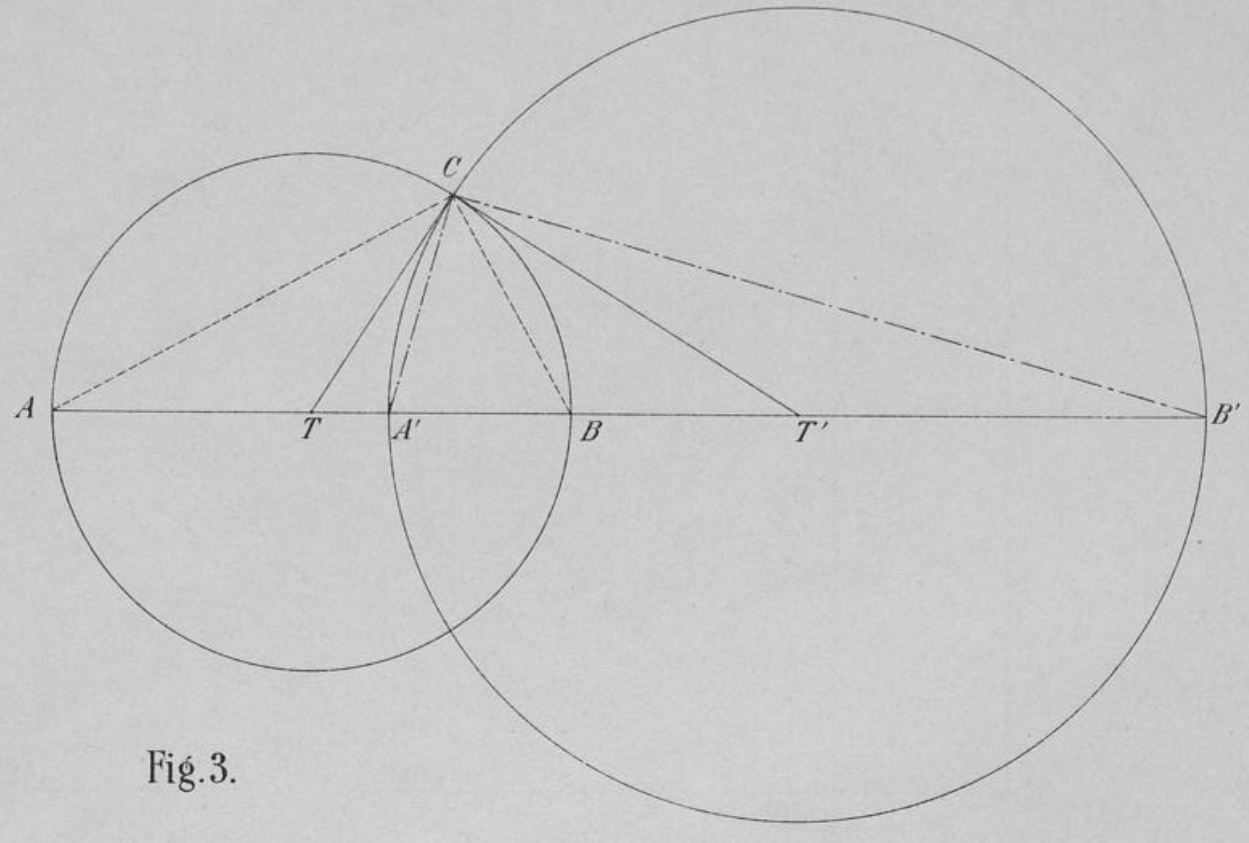


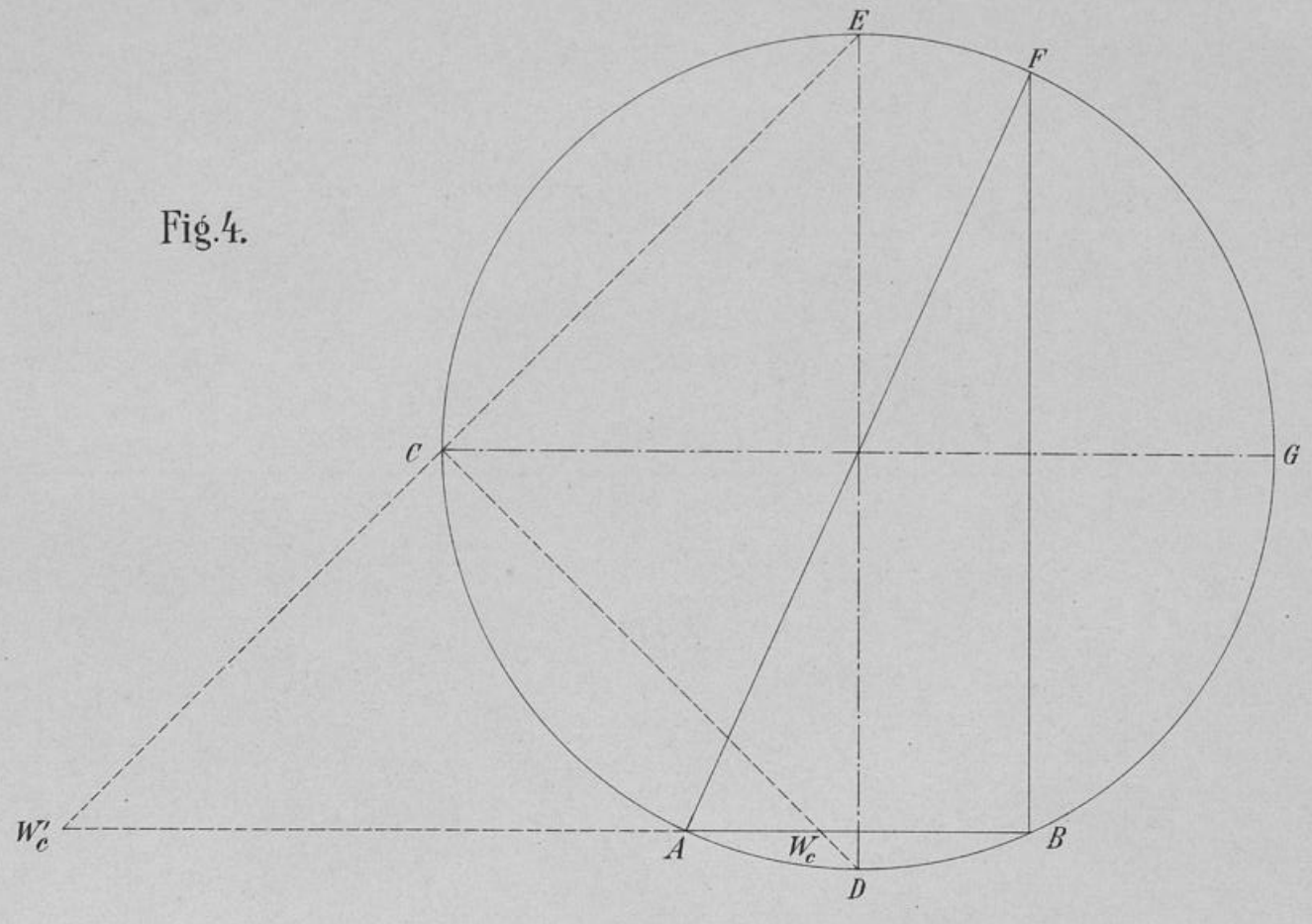
Fig. 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig. 4.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

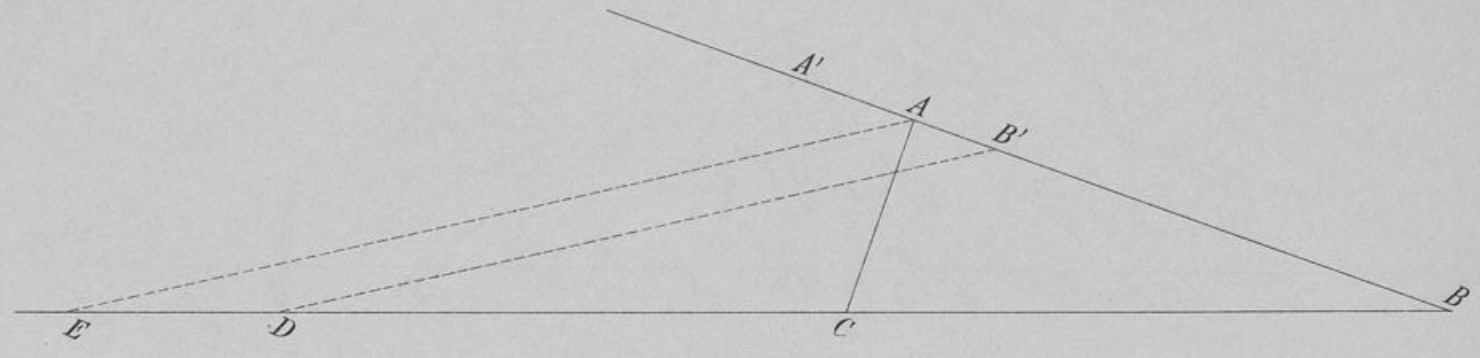


Fig. 5.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

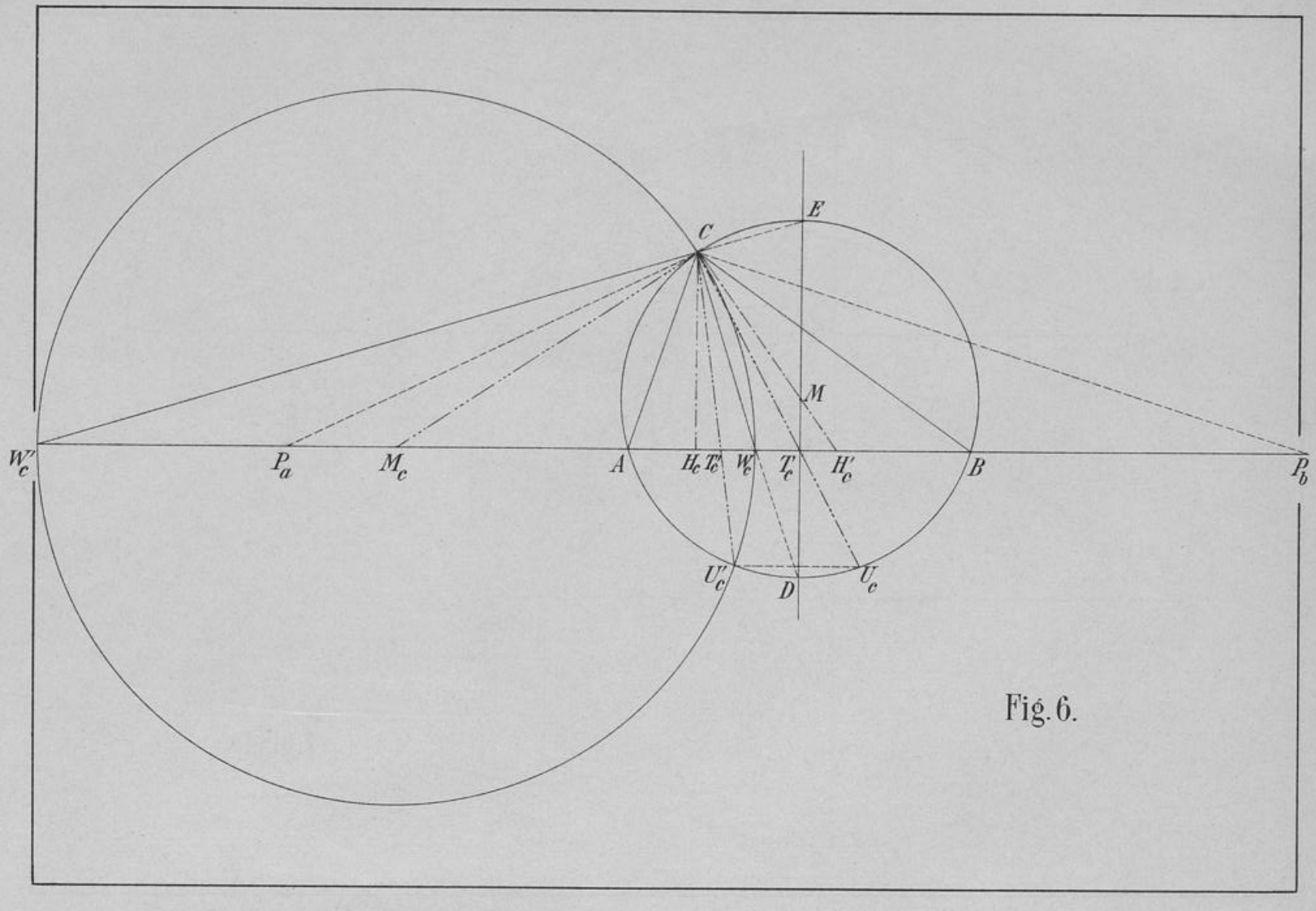


Fig. 6.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

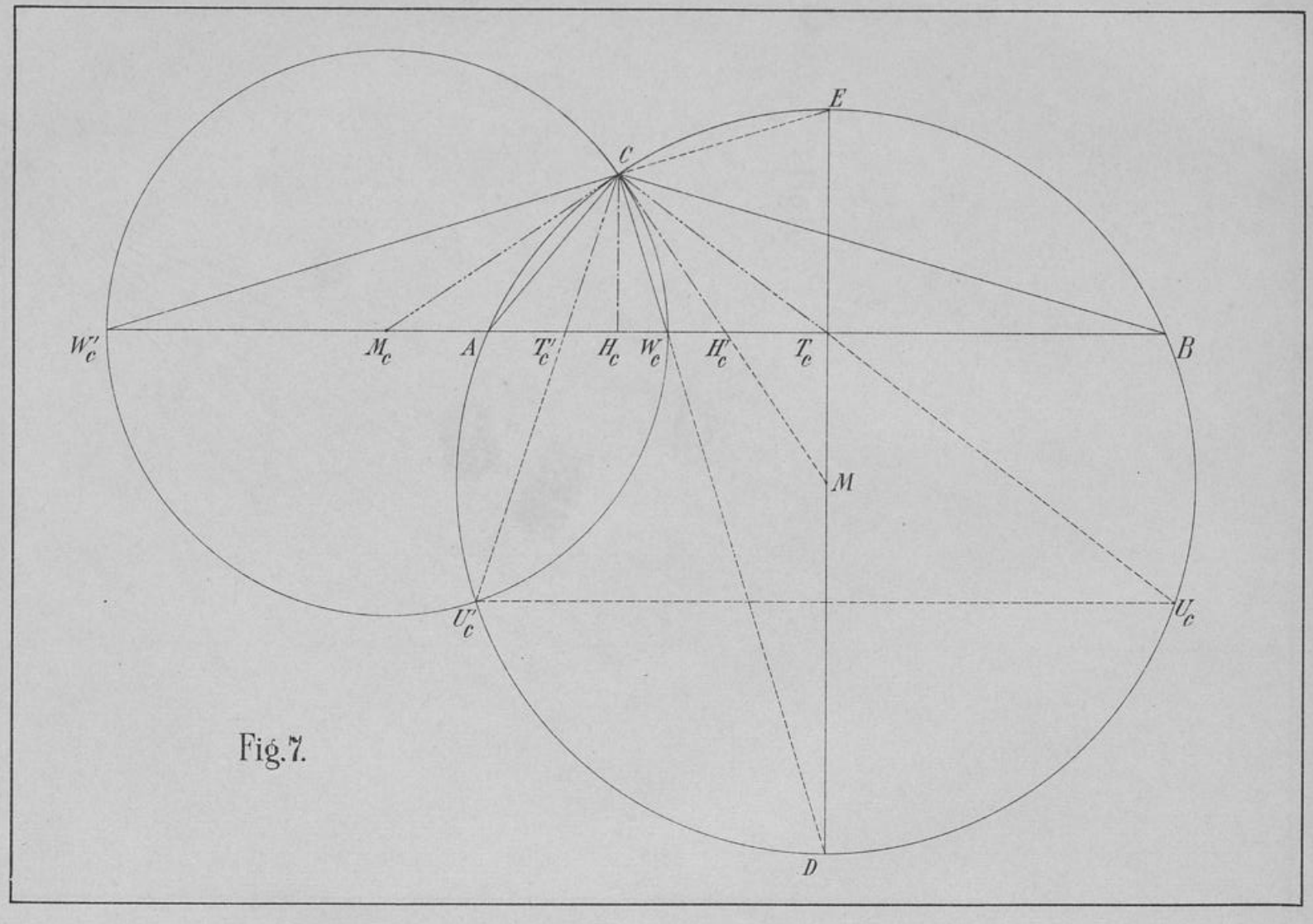
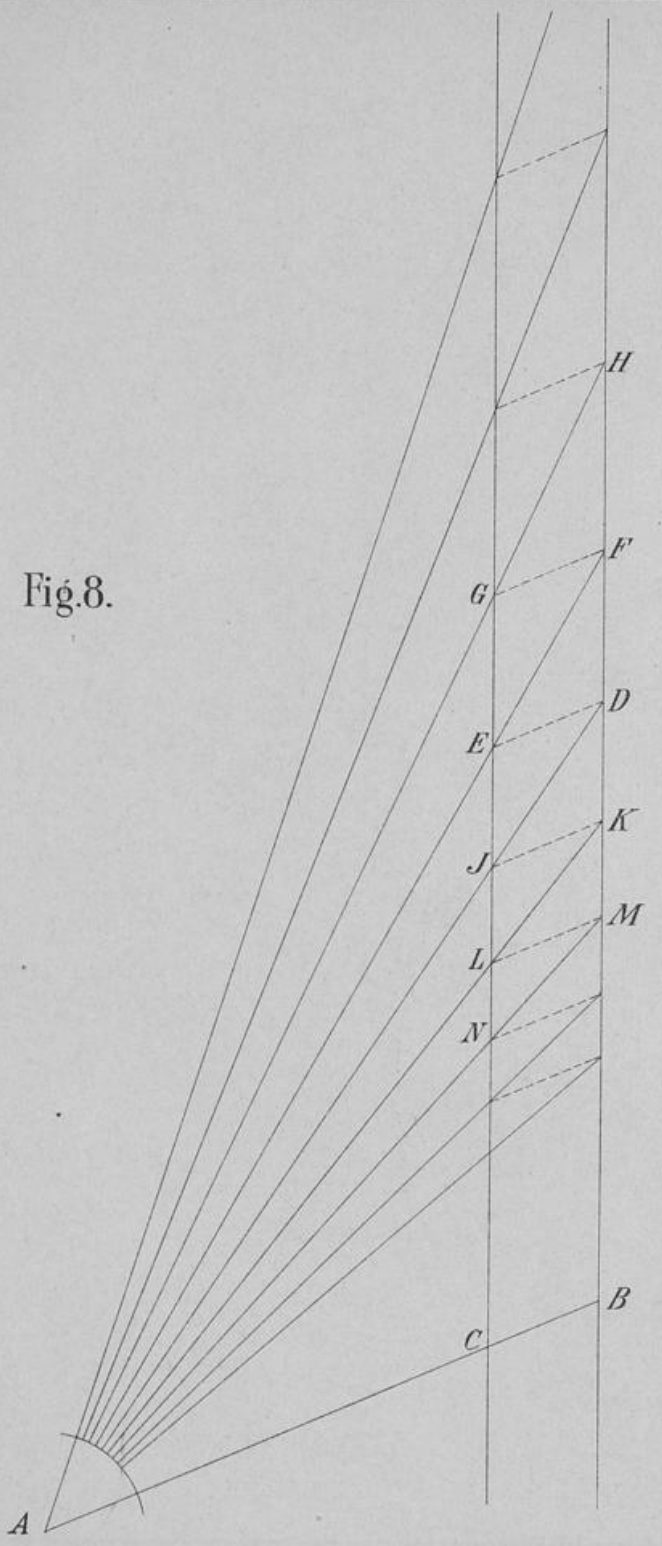


Fig. 7.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fig.8.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

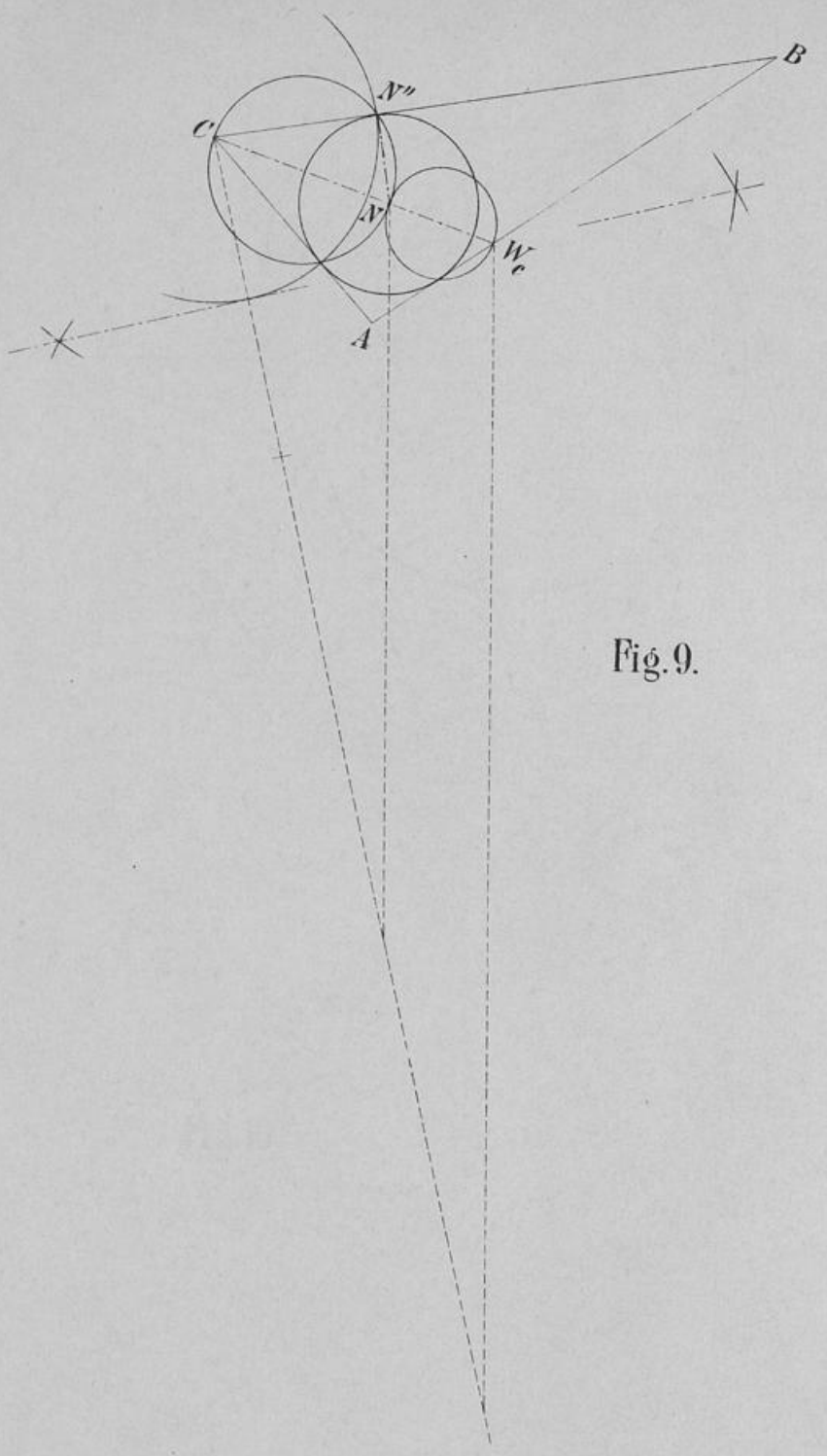


Fig. 9.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

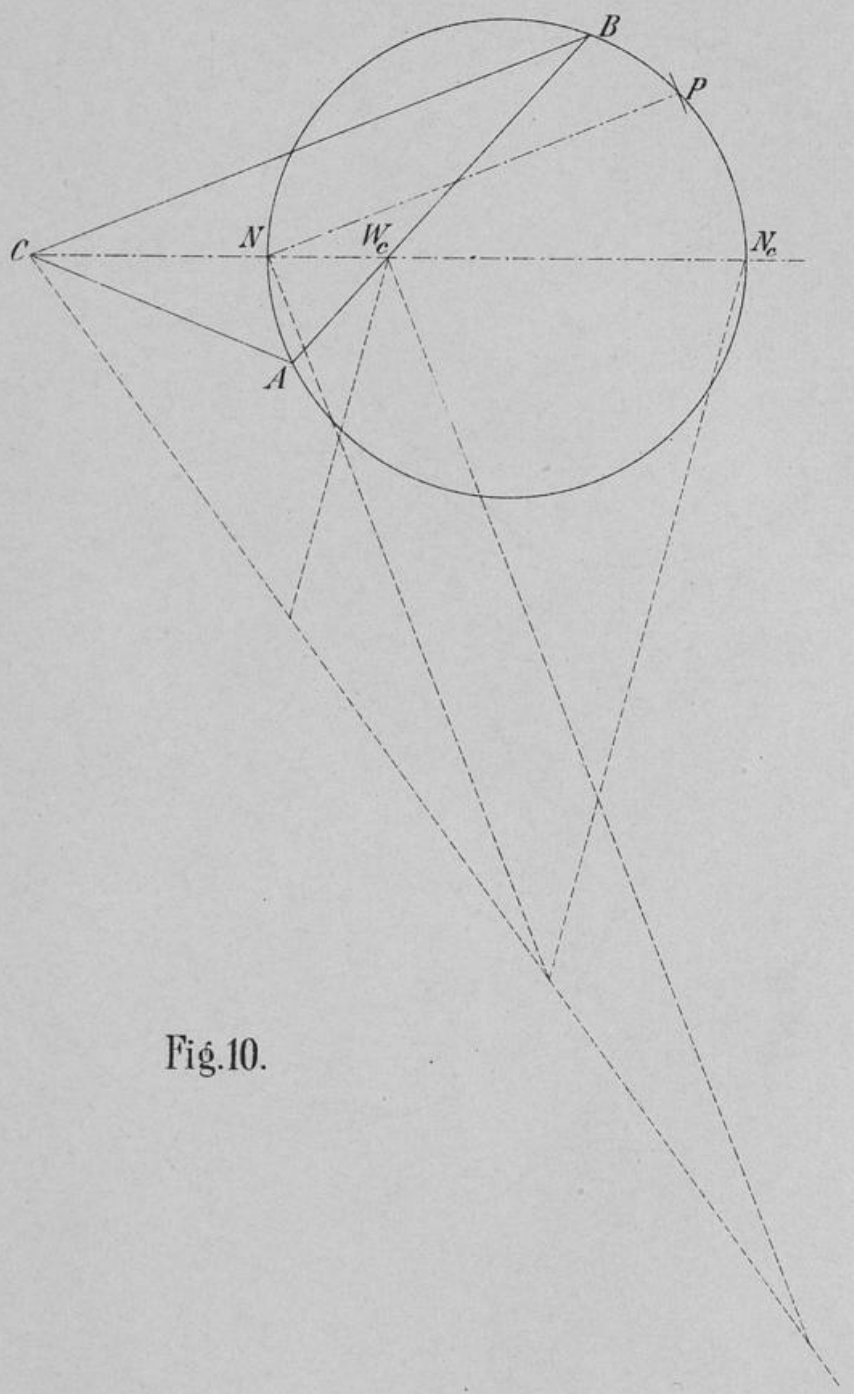


Fig. 10.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

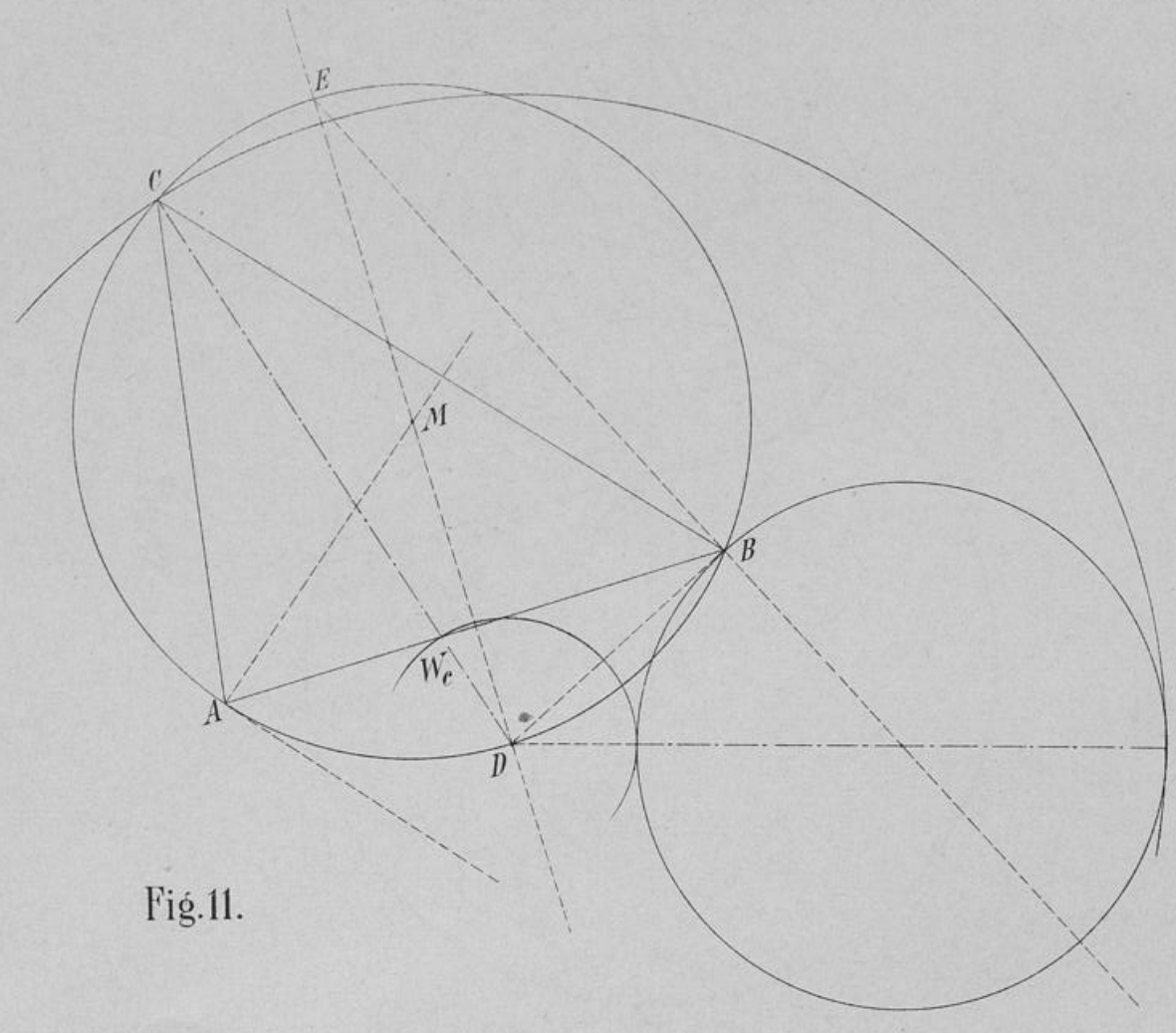


Fig. 11.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

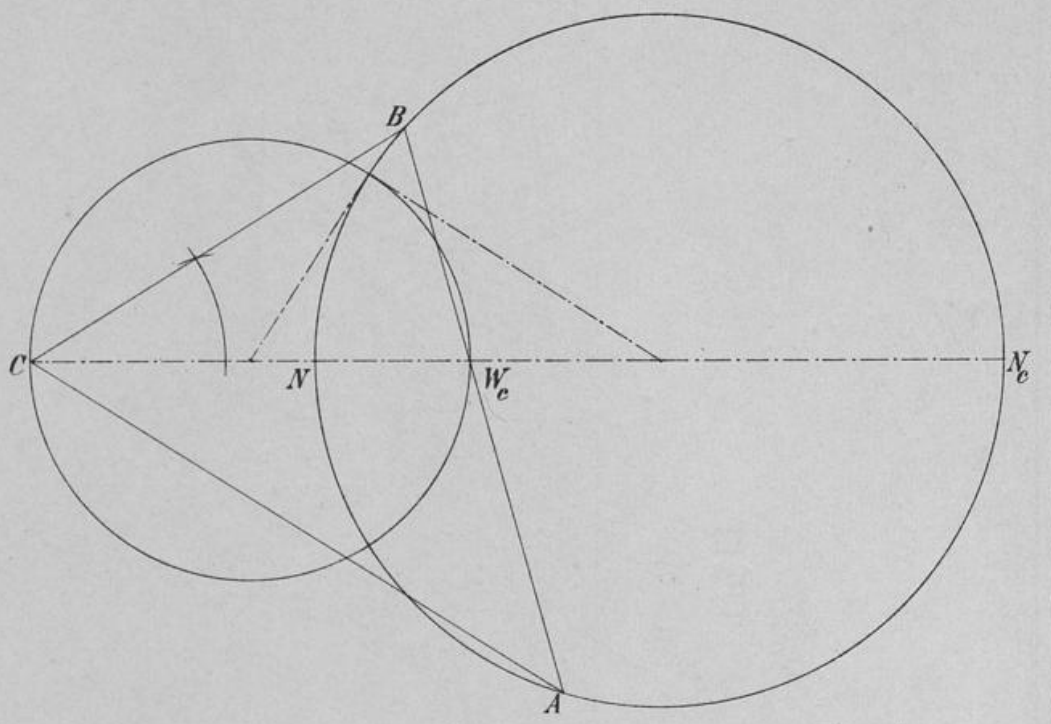


Fig. 12.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

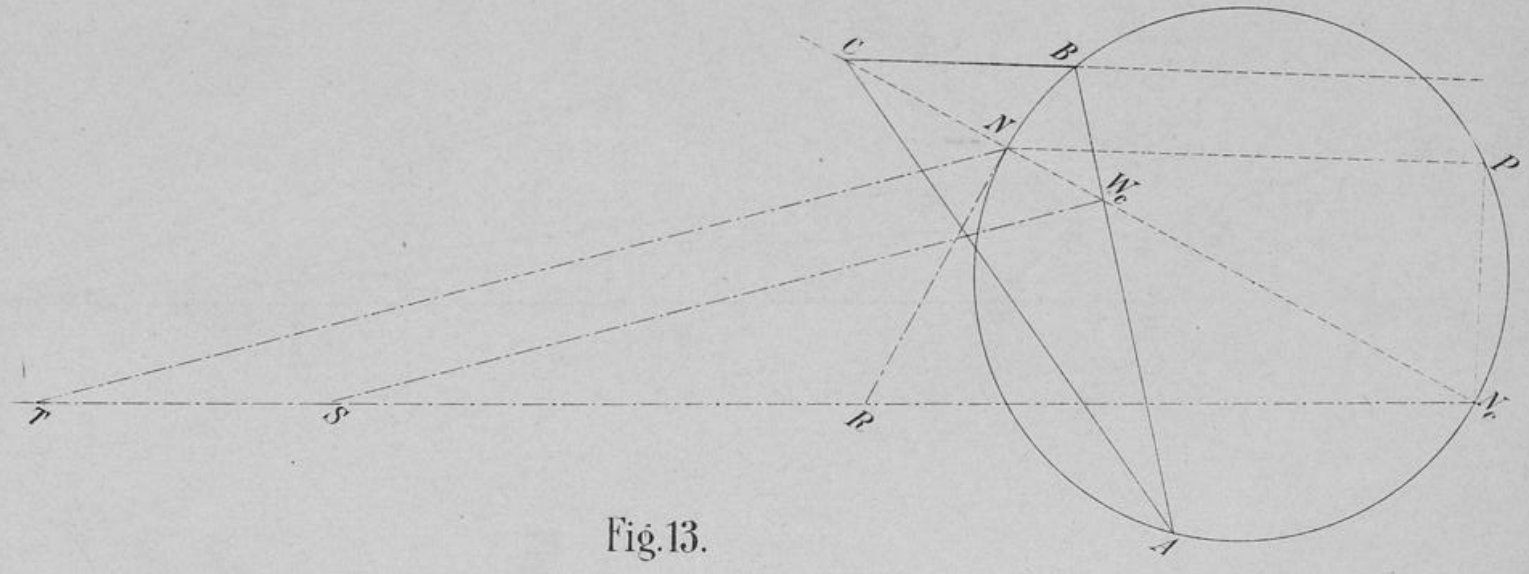


Fig. 13.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

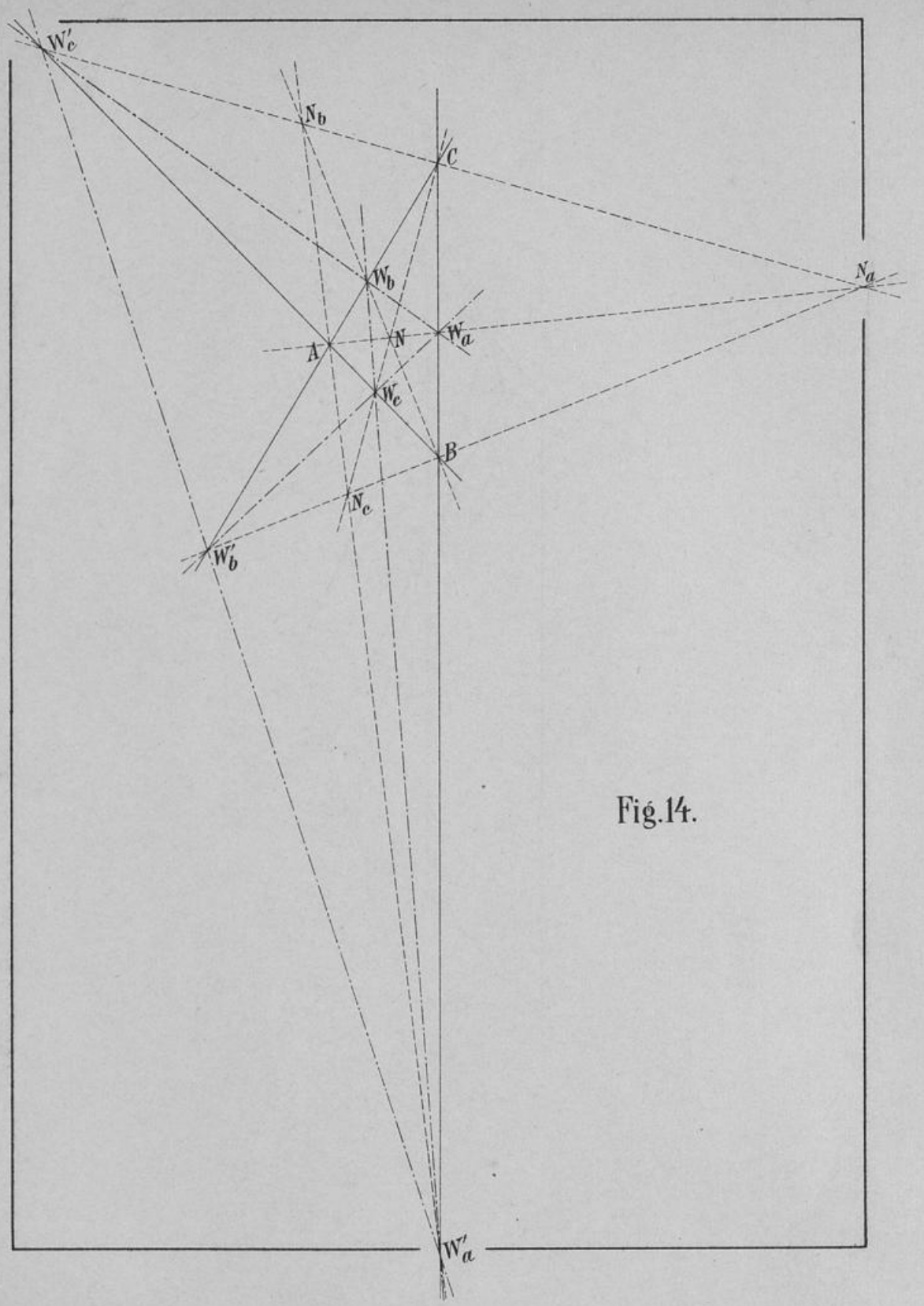


Fig. 14.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

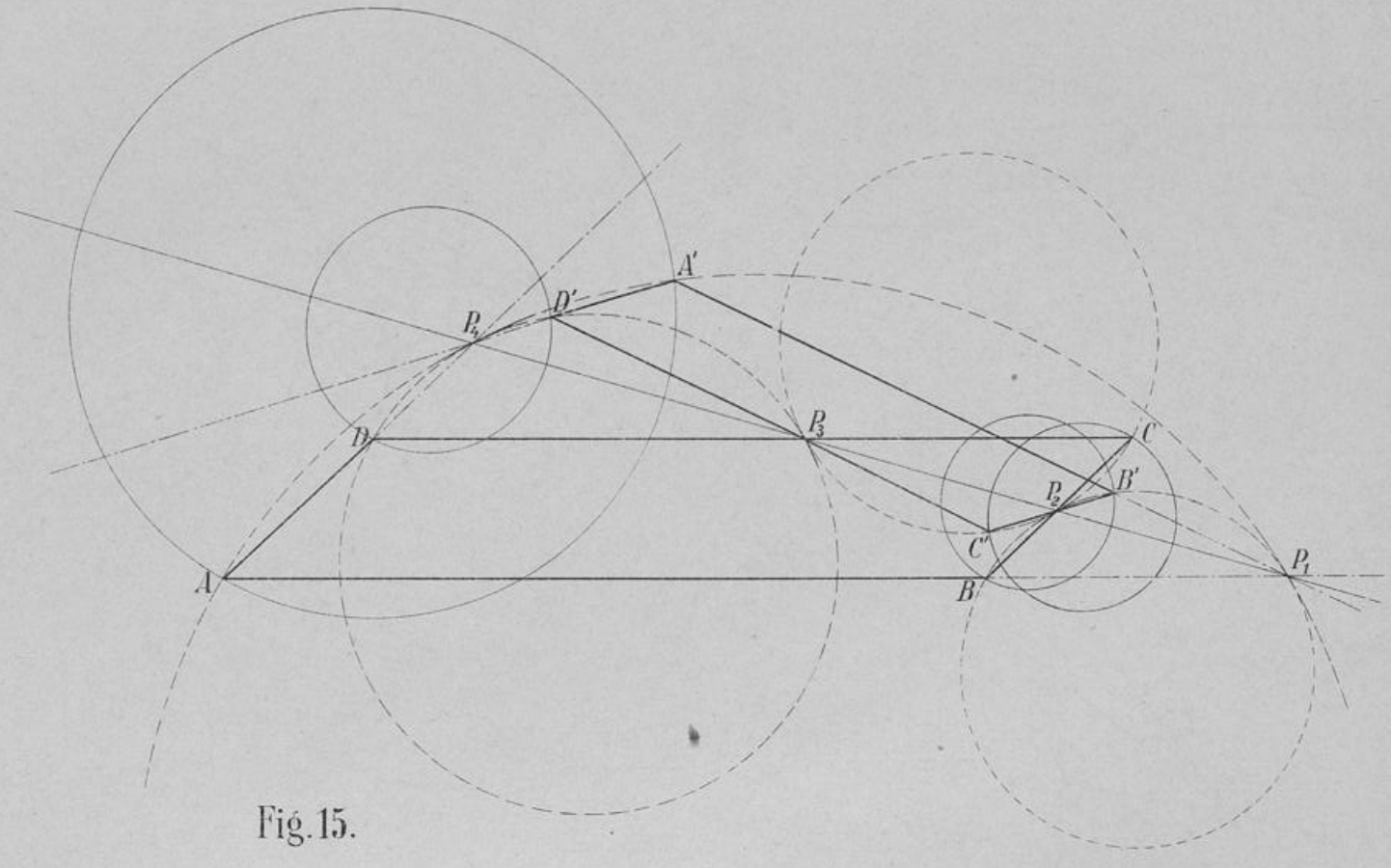


Fig. 15.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

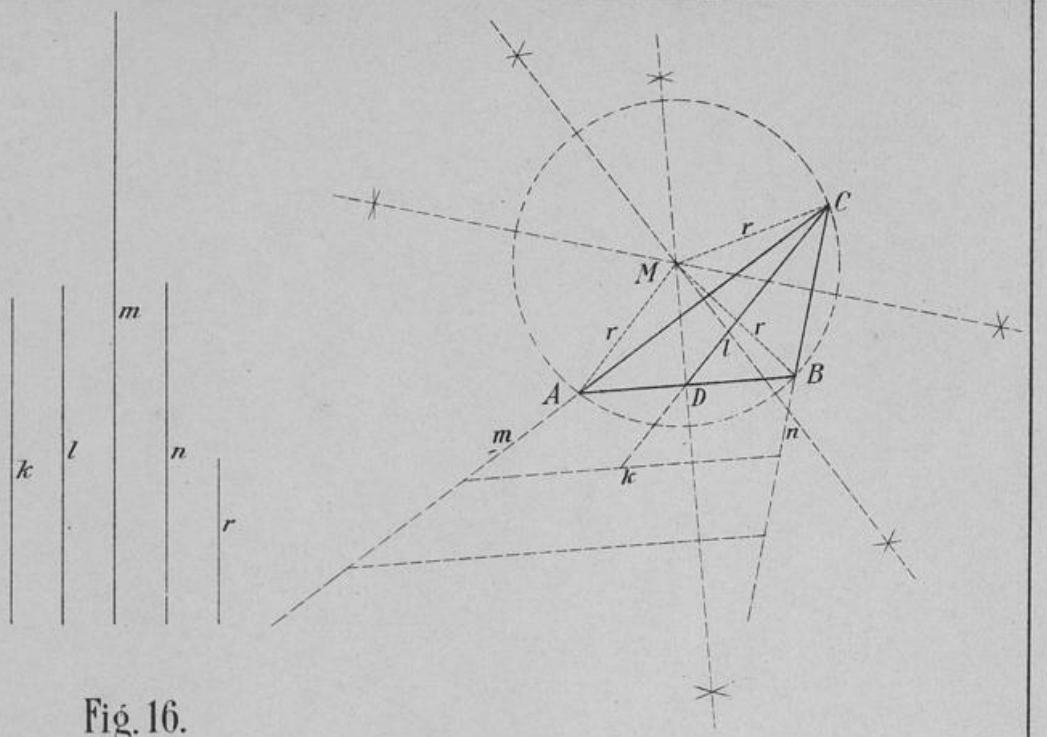
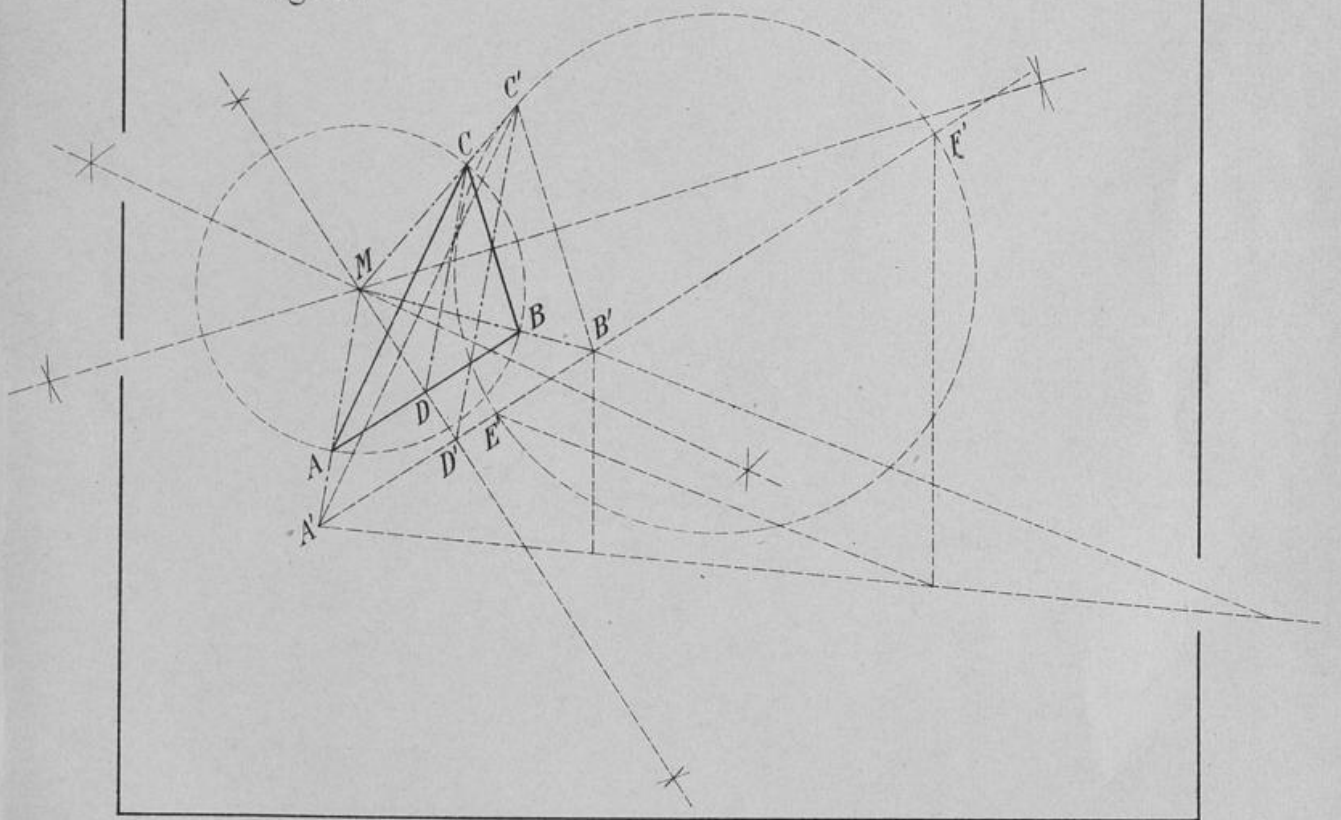


Fig. 16.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf