# DÉTERMINATION ANALYTIQUE

## DES CONDITIONS D'ÉQUILIBRE ET DE STABILITÉ DES VOUTES D'ARÊTES.

Le mode de génération des surfaces apparentes dans les voûtes d'arêtes peut être défini de la manière suivante :

« Sur deux côtés contigus d'un parallélogramme pris pour axes, construisons deux ellipses dont les » seconds axes aient une même longueur quelconque ; relevons ensuite les deux courbes autour des » deux côtés de la figure pour les placer dans des plans perpendiculaires au plan des lignes données. » Que nous adoptions alors ces ellipses pour directrices de deux cylindres ayant leurs génératrices res- » pectivement parallèles aux côtés du parallélogramme, il arrivera que les deux surfaces se coupent sui- » vant deux lignes planes elliptiques telles, que leurs projections sur le plan de la figure coïncident avec » les diagonales de celle-ci.

Les cylindres dont il vient d'être parlé constituent les surfaces d'intrados visibles, et les arêtes elliptiques sont précisément ces lignes auxquelles le système doit sa dénomination (*). On peut directement démontrer comme suit la propriété énoncée par la définition : Soient (fig. 1) AA′ BB′ le parallélogramme donné, $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ les seconds axes égaux des deux ellipses. Pour obtenir divers points des intersections des cylindres, il suffit de couper le système par des plans tels que R, parallèles au plan de la figure ; ce dernier plan coupe l'une des surfaces suivant deux génératrices projetées en $Nn$ et $N_1n_1$. Les intersections de ces quatre droites fournissent autant de points des courbes cherchées ; reste à faire voir que l'un quelconque P de ces points est situé sur une diagonale du parallélogramme : En effet, les deux ellipses directrices ont deux axes de même longueur ; les abscisses correspondant aux ordonnées MN et $M_1N_1$ égales sont dans le même rapport que les axes de longueur inégale ; on a par conséquent

$$\frac{\alpha N}{\alpha' N_1} = \frac{AA'}{AB} \text{ ; donc aussi } \frac{AN}{AN_1} = \frac{AA'}{AB},$$

ce qui exige que P soit un point de la diagonale AB.

Cette propriété résulte aussi, comme cas particulier, d'un théorème relatif aux surfaces du second

(*) Ces courbes de pénétration sont saillantes dans les voûtes d'arêtes proprement dites, tandis qu'elles sont rentrantes dans les systèmes connus sous le nom de voûtes en arc de clôture.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

degré et dont voici l'énoncé : « Lorsque deux surfaces du second degré ont deux plans tangents com-
» muns et parallèles, elles ne peuvent se couper que suivant deux courbes planes passant l'une et l'autre
» par la droite, qui joint les points de contact.

On voit aisément que les deux cylindres qui nous occupent se trouvent dans les conditions des surfaces du second degré que considère le théorème, attendu que les plans tangents le long des arêtes les plus éloignées du plan du parallélogramme, sont parallèles entre eux et communs aux deux surfaces; la droite qui joint les points de contact est ici perpendiculaire au parallélogramme et se projette au point d'intersections de ses diagonales. Observons dès maintenant que le plus souvent, la rencontre des surfaces d'intrados se fait à angle droit, de sorte que les projections des intersections coïncident avec les diagonales d'un rectangle, l'un de ses côtés représentant l'ouverture du premier berceau, l'autre, celle de la seconde surface d'intrados.

Le jeu des forces dans une voûte d'arêtes dépend nécessairement du système de construction adopté, car de là résulte le mode de juxtaposition, de superposition et de distribution des matériaux employés; à ce point de vue on pourra diviser ces voûtes en deux grandes catégories :

La première classe embrasse tous les dispositifs qui se réduisent à de simples arcs diagonaux et transversaux en pierres de taille ou en briques, réunis entre eux par des matériaux légers faisant office de remplissages; ces derniers, ne chargeant pas sensiblement leurs appuis, peuvent presque complètement être écartés dans la question de l'étude de l'équilibre.

La seconde comprend tous les systèmes dans lesquels les deux berceaux sont entièrement exécutés en maçonnerie ou en pierres de taille; c'est le cas où toutes les parties des deux voûtes ont la même importance.

Dans le cas de voûtes d'arêtes en pierres de taille ou quelquefois dans celles en maçonnerie, les arêtes sont appareillées d'une manière toute spéciale : à ces lignes de rencontre les voussoirs se composent de deux parties taillées dans une même pierre, mais appartenant respectivement à chacun des deux berceaux. La détermination exacte des formes géométriques de ces parties ne peut se faire qu'à l'aide d'un tracé d'épure que nous jugeons pouvoir omettre ici, pour le remplacer par la description rapide des faces d'un pareil voussoir, représenté perspectivement dans la figure 2.

CDGT est la face cylindrique appartenant au premier berceau;

GKPT celle qui fait partie du second berceau;

BCST représente l'une des faces planes faisant partie du plan de joint correspondant au premier cylindre;

OPST est la face de joint appartenant au second berceau; ces deux faces de joint se coupent suivant la droite ST.

FDRG est la seconde face de joint appartenant au premier berceau, et

MRGK la seconde face de joint du second berceau.

Dans le cas que les deux berceaux seraient appareillés en extrados parallèle (plein cintre), il y aurait à ajouter aux faces qui viennent d'être décrites, deux portions cylindriques parallèles à DTCG et à KPTG; mais dans les voûtes en pierres de taille on termine ordinairement les voussoirs suivant un plan horizontal donnant naissance à la face plane ONQABS, et par deux faces verticales AFGR et MNQR.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## PREMIER SYSTÈME.

### Voûtes d'arêtes composées d'arcs transversaux et d'arcs diagonaux réunis par des matériaux de remplissage.

Ce système trouve surtout des applications dans la construction des églises ; son mode de génération toutefois n'est pas identique avec celui des systèmes rentrant directement dans la définition donnée à l'introduction, mais il en diffère par les éléments suivants : les arcs diagonaux sont déterminés *a priori* et ne résultent pas de la pénétration de cylindres donnés, attendu qu'on leur assigne d'avance une forme très-voisine de la circonférence de cercle et que leur ouverture est imposée par l'espacement en diagonale des appuis. D'autre part, on y adopte encore pour directrices des berceaux des demi-cercles ayant pour diamètres l'espacement entre deux piliers dans le sens transversal ; comme alors ces dernières courbes ont une montée différente de celle des arcs diagonaux, il en naît une différence de niveau entre les sommets des quatre courbes, qui ne peut plus être rachetée que par l'adoption de berceaux plus ou moins cylindriques, présentant une certaine inclinaison sur le plan des naissances. Le système ainsi obtenu peut être considéré comme tenant le milieu entre une voûte d'arêtes proprement dite et une voûte en dôme.

La question de l'équilibre de ce système comme pour tout autre d'ailleurs, est double et se divise en

*Étude des conditions d'équilibre dans la voûte considérée en elle-même, en supposant que les appuis soient stables*, (*) et

*Étude de l'équilibre et de la stabilité des supports, les premières conditions étant supposées vérifiées.*

La résolution de la première question fait l'objet du problème fondamental de la théorie générale des voûtes en plein cintre à extrados parallèle, car les trois arcs que nous considérons peuvent être considérés chacun comme une portion d'une voûte de l'espèce précitée. Fig. 3 (moitié de gauche).

Dans une pareille voûte, l'état d'équilibre de chacun des éléments qui la composent, reste le même, si nous supprimons une moitié du système, pourvu que nous ayons soin de la remplacer par une force convenablement choisie et appliquée en un point du plan de séparation placé à la clef. En raison de la parfaite symétrie de chaque demi-voûte par rapport à ce plan et par rapport au plan des naissances, cette force, appelée *poussée*, doit nécessairement être horizontale et normale à la face sur laquelle elle agit ; cette conclusion est de plus motivée par la circonstance que la force en question, prise en sens contraire, doit représenter la réaction de la moitié que nous considérons sur la moitié supprimée.

En supposant que cette force particulière, nommée poussée horizontale, se trouve appliquée au sommet de l'extrados, voici les raisonnements théoriques qui conduisent à sa détermination : une partie

(*) Pour l'étude de cette partie de la question qui constitue d'ailleurs le point de départ de nos recherches, nous avons cru pouvoir suivre le procédé tracé dans la note supplétive du nouveau Résumé de Sganzin, et rédigée par le savant belge E. Rofflaen, professeur de géologie et de constructions à l'école militaire de Bruxelles.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

quelconque de la voûte comprise entre la clef et le joint qui termine la partie sousjacente a la tendance soit de tourner autour de l'arête d'intrados, soit de glisser le long du joint et cela en vertu de l'action de la gravité exercée sur toutes ses parties; on conçoit aisément que chacun de ces mouvements puisse être empêché par l'action d'une force horizontale appliquée à la clef. Si nous appelons P cette force capable de contrebalancer la tendance à la rotation, Q le poids de la masse, $x$ et $y$ les distances de ces deux forces à l'axe de rotation, l'équilibre sera exprimé par l'équation des moments

$$Py = Qx \text{ , d'où } P = Q\frac{x}{y} \text{ .}$$

Les éléments Q, $x$ et $y$ dépendent des dimensions adoptées, ainsi que de l'angle $z$, qui fait avec la verticale le joint contenant l'axe de rotation. Afin d'arriver à une loi continue entre la force P et cet angle qui constitue la variable proprement dite dans l'expression précédente, les savants ont dû introduire l'hypothèse de l'existence d'une infinité de joints et par conséquent un nombre infini d'axes de rotation possibles.

Désignons par $z$ l'arc qui mesure l'angle NO$a$ correspondant au joint réel ou fictif considéré,
par $r$ le rayon du cercle d'intrados
et $r+e$ celui de l'extrados,
$e$ étant l'épaisseur uniforme de la voûte.

A cause de l'homogénéité que nous supposons exister dans toutes les parties du système, les poids pourront être remplacés par les aires, la longueur de voûte étant alors égale à l'unité.

Le théorème des moments appliqué aux aires fournit la relation :

$$\text{Moment MN}ab = \text{moment N}a\text{O} - \text{moment M}b\text{O.}$$

$$\text{D'un autre côté. Surface N}a\text{O} = \frac{1}{2} z\,(r+e)^2$$

$$\text{donc, Moment N}a\text{O} = \frac{1}{2} z\,(r+e)^2 \times \text{M'C. . . . . } (\alpha)$$

$$\text{D'un autre côté. M'C} = \text{OM'} - \text{OC} = r \sin z - \text{OK'} \sin \frac{z}{2} \text{ ;}$$

K' étant le centre de gravité du secteur N$a$O, la théorie du centre de gravité des figures et aires donne pour la distance de ce point au centre

$$\text{OK'} = \frac{2}{3}\,\text{ON}\,\frac{\text{corde N}a}{\text{arc N}a} \text{ ,}$$

$$\text{ou bien OK'} = \frac{2}{3}(r+e)\frac{\text{N}a}{z\,(r+e)} = \frac{2}{3}\frac{2\,\text{N}v}{z} = \frac{4}{3}\,\frac{(r+e)\sin\frac{z}{2}}{z} \text{ ;}$$

$$\text{D'un autre côté OC} = \text{K'C'} = \text{K'O'} \sin\frac{z}{2} = \frac{4}{3}\,\frac{(r+e)\sin^2\frac{z}{2}}{z} \text{ ,}$$

$$\text{de sorte que M'C} = r \sin z - \frac{4}{3}\,\frac{(r+e)\sin^2\frac{z}{2}}{z}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Substituant cette valeur de M'C dans l'expression ($\alpha$), il vient

$$\text{Moment } NaO = \frac{1}{2} z (r+e)^2 \left[ r \sin z - \frac{4}{3} \frac{(r+e) \sin^2 \frac{z}{2}}{z} \right].$$

Quant au moment du secteur $MbO$, il se déduira du précédent, quand on remplace $r+e$ par $r$

$$\text{ainsi Moment } MbO = \frac{1}{2} z r^2 \left( r \sin z - \frac{4}{3} \frac{r \sin^2 \frac{z}{2}}{z} \right).$$

Par suite :

$$Py = Qx = \text{Moment } MNab = \frac{1}{2} z (r+e)^2 \left[ r \sin z - \frac{4}{3} \frac{(r+e) \sin^2 \frac{z}{2}}{z} \right] - \frac{1}{2} z r^2 \left( r \sin z - \frac{4}{3} \frac{r \sin^2 \frac{z}{2}}{z} \right),$$

relation qui peut encore s'écrire

$$Qx = \frac{1}{2} z\, r \sin z \left[ (r+e)^2 - r^2 \right] - \frac{2}{3} \sin^2 \frac{z}{2} \left[ (r+e)^3 - r^3 \right],$$

ou bien, en éliminant les lignes trigonométriques de l'arc $\frac{z}{2}$, à l'aide de la relation

$$2 \sin^2 \frac{z}{2} = 1 - \cos z,$$

$$Qx = \frac{1}{2} z\, r \sin z \left[ (r+e)^2 - r^2 \right] - \frac{1}{3} (1 - \cos z) \left[ (r+e)^3 - r^3 \right].$$

La même figure donne pour $y$ en fonction de $z$

$$y = r + e - r \cos z \;;$$

donc

$$P = Q \frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2} z\, r \sin z \left[ (r+e)^2 - r^2 \right] - \frac{1}{3} (1 - \cos z) \left[ (r+e)^3 - r^3 \right]}{r + e - r \cos z}.$$

$$\text{Posons } \frac{r+e}{r} = K \text{ d'où } r + e = Kr,$$

et l'expression précédente devient

$$P = r^2 \frac{\frac{1}{2} (K^2 - 1) z \sin z - \frac{1}{3} (K^3 - 1) (1 - \cos z)}{K - \cos z} \quad \ldots (\beta)$$

Cette valeur de P nous montre que, pour des voûtes de divers rayons $r$ et correspondant à une même valeur de K, la poussée est une même fraction du carré du rayon, attendu que l'angle $z$ ne dépend que du rapport K. Cette propriété remarquable a été exposée pour la première fois par MM. Lamé et Clapeyron dans un mémoire inséré dans le temps aux Annales des mines de France.

La relation ($\beta$) est dûe à M. Audoy; elle montre comment la valeur de l'action horizontale varie avec l'angle $z$ que le joint d'appui fait avec la verticale; la valeur particulière de P exigée pour rendre

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

impossible le mouvement de rotation autour d'une arête quelconque de l'intrados est fournie par le maximum de la fonction P, maximum correspondant à l'angle $z$ donné par l'équation

$$\frac{dP}{dz} = 0 \ldots (\gamma)$$

En la résolvant, on trouve la position du joint dit *dangereux* ou l'angle $z$ correspondant, appelé *angle de rupture*.

A l'aide des équations ($\beta$) et ($\gamma$), et en opérant par tâtonnements, le colonel Petit, du génie français, a dressé des tables qui font connaître la valeur de l'angle de rupture et celle de la poussée, pour des valeurs très-rapprochées du rapport K; ces tables s'appliquent donc immédiatement à toutes les voûtes semblables, c'est-à-dire, à toutes celles répondant à une même valeur de K.

**Calcul de la fonction $\frac{dP}{dz}$ ou $f(P,z)$.**

La formule ($\gamma$) donne, en dérivant par rapport à $z$

$$\frac{dP}{dz} = r^2 \frac{(K - \cos z)\left[\frac{1}{2}(K^2-1)(\sin z + z\cos z) - \frac{1}{3}(K^3-1)\sin z\right]}{(K-\cos z)^2}$$

$$- r^2 \frac{\sin z\left[\frac{1}{2}(K^2-1)\, z \sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)\right]}{(K-\cos z)^2}.$$

Cette expression doit être égalée à 0; or le numérateur des deux fractions devra être nul pour cela, le dénominateur ne pouvant être infini, et $r$ étant différent de 0; on aura donc

$$(K-\cos z)\left[\frac{1}{2}(K^2-1)(\sin z + z\cos z) - \frac{1}{3}(K^3-1)\sin z\right] - \sin z\left[\frac{1}{2}(K^2-1)\, z\sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)\right] = 0;$$

équation qui devient, en mettant en facteurs $(K^2-1)$ et $K^3-1$,

$$\frac{1}{2}(K^2-1)\left[(\sin z + z\cos z)(K-\cos z) - z\sin^2 z\right] - \frac{1}{3}(K^3-1)\,K-1)\sin z = 0.$$

On en tire

$$\frac{K\sin z + K z\cos z - \sin z\cos z - z\cos^2 z - z\sin^2 z}{\sin z} = \frac{2}{3}\,\frac{K^3-1}{K+1}.$$

Les deux derniers termes au numérateur se réduisant à $-z$, il vient, en séparant les fractions

$$K + Kz\frac{\cos z}{\sin z} - \cos z - \frac{z}{\sin z} = \frac{2}{3}\,\frac{K^3-1}{K+1},$$

ou en changeant les signes

$$\cos z + \frac{z}{\sin z}(1 - K\cos z) = K - \frac{2}{3}\,\frac{K^3-1}{K+1} \ldots (\gamma')$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Cette équation est transcendante, parce qu'elle contient, outre les lignes trigonométriques de l'arc $z$, cet arc lui-même; on ne peut donc la résoudre que par tâtonnements.

L'équation ($\gamma'$) peut être remplacée par une expression algébrique du 3e degré, et qui admet une racine positive très-peu différente de la valeur $\cos\frac{z'}{2}$, $z'$ étant la valeur particulière qui résout l'équation précédente; voici par quel raisonnement on peut établir la fonction dont il est question.

Représentons par $c$ la corde de l'arc $z$, et par $\lambda$ le rapport de ces deux quantités, ainsi

$$\frac{z}{c} = \lambda \text{ , d'où } z = \lambda c \text{ ;}$$

$$\text{donc aussi } \frac{z}{\sin z} = \frac{\lambda c}{\sin z} \text{ .}$$

L'angle de rupture $z$ étant compris dans tous les cas ordinaires de la pratique, entre les limites 50° et 70°, répondant aux limites 1, 15 et 1, 8 du rapport K, il sera permis de considérer le rapport $\lambda$ comme constant entre ces mêmes limites et égal à la valeur spéciale qui le représente lorsque $z = 60°$; on a pour ce dernier rapport

$$\frac{z_{60°}}{C60°} = \lambda_{60°} = \frac{2\pi}{6} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 60° + (1 - \cos 60°)^2}} \text{ ;}$$

$$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ et } \cos 60° = \frac{1}{2} \text{ ,}$$

$$\text{on trouve } \lambda_{60°} = \frac{\pi}{3} \text{ .}$$

Le facteur $\frac{z}{\sin z}$ de l'équation trigonométrique, étant remplacé par l'expression très-peu différente $\frac{\pi}{3}\frac{C_z}{\sin z}$ entre les limites indiquées, on obtient l'équation

$$\cos z + \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{\sin^2 z + (1 - \cos z)^2}}{\sin z}(1 - K\cos z) = K - \frac{2}{3}\frac{K^3 - 1}{K + 1} \text{ .}$$

Réduisant l'expression sous le radical et posant le second membre égal à K', il vient

$$\cos z + \frac{\pi\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{1 - \cos z}}{\sin z}(1 - K\cos z) = K' \text{ .}$$

Cette équation qui n'est plus trancendante, peut être tranformée en une autre, fonction de l'arc $\frac{z}{2}$ :

$$\text{On sait que } \cos z = \cos^2\frac{z}{2} - \sin^2\frac{z}{2}$$

$$\text{et } \sin z = 2\sin\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2} \text{ ;}$$

en introduisant les lignes de l'arc $\frac{z}{2}$ dans l'équation précédente, elle devient, après simplification

$$2\cos^3\frac{z}{2} - (K' + 1)\cos\frac{z}{2} + \frac{\pi}{3}\left(1 - K - 2K\cos^2\frac{z}{2}\right) = 0$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Posons $\cos\frac{z}{2} = x$, et nous arriverons à l'équation algébrique

$$x^3 - \frac{K\pi}{3}x^2 - \frac{K'+1}{2}x + \frac{\pi}{6}(K+1) = 0 .$$

Cette équation de degré impair admettra au moins une racine réelle de signe contraire à celui du dernier terme qui est positif; il est aisé de s'assurer que les deux autres racines sont aussi réelles et que l'une d'elles est positive pour toutes les valeurs de K comprises entre 1 et 2.

| | |
|---|---|
| Pour la valeur $z = 0$ on a $x = 1$ | Le premier nombre de l'équation se réduit à $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{K\pi + 3K'}{6} \quad . . . (1)$ |
| Pour la valeur $z = 90^\circ$ on a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ | Le premier nombre devient $\frac{\pi}{6} - \frac{K'}{2\sqrt{2}} \quad . . . (2)$ |
| Pour $K = 2$ | L'expression (2) donne $\frac{\pi}{6} - \frac{4}{18\sqrt{2}}$, résultat positif<br>» (1) » $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{12}{54}$, résultat négatif. |
| Pour $K = 1, 2$ | (1) donne $\frac{\pi}{6} - \frac{0,9794}{2\sqrt{2}}$ résultat positif<br>(2) donne $\frac{1}{2} - \frac{0,8\pi}{6} - \frac{193,92}{396}$ résultat négatif. |

Pour ces valeurs limites de K, les résultats de la substitution de 1 et de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ respectivement à la place de $x$ sont de signes contraires, donc l'équation admettra une racine réelle et positive correspondant à une valeur de $z$ comprise entre 0 et 90°; la troisième racine de l'équation doit donc être réelle aussi et nécessairement négative. Il est facile de s'assurer que les mêmes changements de signes se manifestent pour toute autre valeur de K comprise entre 1 et 2; nous avons préféré commencer les substitutions par $K = 1, 2$ parce que l'expression (1) devient nulle pour $K = 1$.

## Équilibre de glissement.

Q représentant le poids de la partie située au-dessus du joint répondant à l'angle $z$, Q cos $z$ sera sa composante parallèle et Q sin $z$ sa composante normale. Appelons P' la force horizontale à appliquer à la clef, et capable d'empêcher le mouvement de glissement sur le joint d'appui; P' cos $z$ est la composante normale de cette force et P' sin $z$ sa composante parallèle, cette dernière agissant en sens inverse de la force Q cos $z$.

Les résistances parallèles au joint MN engendrées par le frottement, ont, d'après la théorie générale du frottement, pour valeur

$$fQ \sin z \text{ et } fP' \cos z .$$

$f$ étant le coefficient du frottement qui répond à la nature des matériaux en contact.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Observons que la composante parallèle de P′, savoir P′ sin $z$ agit dans le même sens que les deux résistances précitées, en s'opposant à la descente; ce dernier mouvement ne pourra pas se produire aussi longtemps que l'inégalité

$$Q \cos z < P' \sin z + fP' \cos z + fQ \sin z$$

sera satisfaite, ou bien pour toute valeur de P′ telle que

$$P' \geqq Q \frac{\cos z - f \sin z}{\sin z + f \cos z}.$$

La valeur particulière de l'angle $z$ correspondant au maximum de P′ sera donnée par l'équation

$$\frac{dP'}{dz} = 0$$

Appelons $\theta$ l'angle du frottement; on sait que $f = \text{tang}\,\theta$, la valeur de P′ pourra s'écrire

$$P' = Q \frac{\cos z - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \sin z}{\sin z + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos z} = Q \frac{\cos z \cos \theta - \sin z \sin \theta}{\sin z \cos \theta + \sin \theta \cos z}$$

$$= Q \frac{\cos (z + \theta)}{\sin (z + \theta)} = Q \frac{1}{\text{tang}\,(z + \theta)}.$$

Le poids Q de la portion de voûte tendant à glisser peut être représenté par l'aire correspondante $\frac{1}{2} z \left[(r + e)^2 - r^2\right]$, et comme $\frac{r + e}{r} = K$, sa valeur se représente aussi par

$$z r^2 (K^2 - 1),$$

d'où par substitution

$$P' = r^2 \frac{\frac{1}{2} (K^2 - 1) z}{\text{tang}\,(2 + \theta)} = \mu \frac{z}{\text{tang}\,(z + \theta)},$$

$\mu$ représentant le facteur proportionnel au carré du rayon d'intrados.

Le numérateur de la dérivée de P′ prise par rapport à $z$ a pour valeur

$$\sin (z + \theta) \cos (z + \theta) - z;$$

le dénominateur ne pouvant être nul, cette quantité doit l'être et l'équation qui donne l'angle $z$ répondant au maximum de P′ est la suivante

$$\sin (z + \theta) \cos (z + \theta) = z$$
$$\text{ou } \sin (2z + 2\theta) = 2z.$$

On en déduira la valeur de $z$ par tâtonnements.

En calculant le maximum de P et celui de P′ pour différentes valeurs de K, on arrive à ce résultat qui consiste en ce que, pour toutes les valeurs de K inférieures à 1, 4, le glissement n'est plus à craindre, car on trouve qu'au-dessous de cette valeur

$$\text{Maximum de P} > \text{Maximum de P}'.$$

On peut donc conclure de là, que pour les voûtes et arcs de dimensions ordinaires, la poussée, exigée pour combattre les tendances à mouvement et résultant des effets de la gravité, est chaque fois représentée par le maximum de P.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Après avoir calculé la valeur de la poussée pour les trois arcs en pierres que nous considérons, nous devrons encore nous assurer s'ils sont stables sur leurs naissances ; à cet effet nous aurons à vérifier si le moment du poids de chaque demi-voûte par rapport à l'arête d'extrados à la naissance l'emporte (ou est au moins égal) sur le moment de cette poussée par rapport à la même arête. En déterminant ces deux moments pour des voûtes de même ouverture mais d'épaisseurs différentes, on trouve que l'équilibre sur les naissances est assuré pour tous les systèmes dans lesquels le rapport de l'épaisseur à l'ouverture n'est pas inférieur à la fraction $\frac{1}{14}$.

## Courbes de pression.

L'hypothèse principale sur laquelle est basée la méthode analytique qui vient d'être employée pour la détermination de la poussée et du joint de rupture dans une voûte en plein cintre d'égale épaisseur, concerne le point d'application de la poussée, que nous avons supposé connu d'avance et placé au sommet de l'extrados. Or, ce point est tout-à-fait inconnu parce que nous ignorons la loi suivant laquelle se répartissent les pressions entre les surfaces en contact; le point d'application de la résultante de ces pressions serait le point qui nous occupe, c'est-à-dire le centre de pression. Soit $abA'B'$ un demi-arc de voûte comme les arcs qui entrent dans notre voûte d'arêtes considérée (Fig. 3, moitié de droite); il est rendu libre dans l'espace et tenu en équilibre par les forces suivantes :

1) Le poids de tous les voussoirs appliqué au point $a'''$,

2) La force horizontale ou poussée appliquée au point I du joint vertical à la clef;

3) La réaction R′ du plan des naissances et appliquée au point I′, force égale et contraire à la résultante des deux précédentes.

On voit que la poussée pourrait être déterminée si l'on connaissait les points I et I′, points dont la position dépend du mode de répartition des pressions sur les surfaces en contact; en effet, on n'aurait qu'à mener par I une normale au joint de la clef, et joindre l'intersection de cette droite et de la verticale menée par le centre de gravité $a'''$, avec le point I′; par là on connaitrait les directions d'une résultante, celles de ses deux composantes et la grandeur de l'une d'elles, ce qui conduirait immédiatement à connaître la seconde force.

La poussée étant ainsi trouvée, et $a$, $a'$ $a''$, $a'''$ représentant respectivement les centres de gravité du premier voussoir, des deux premiers réunis, des trois premiers etc., si l'on construit successivement les résultantes des poids de ces quatre masses et de la poussée et qu'on marque les points $m$, $m'$ $m''$ et I′ dans lesquels ces résultantes coupent leur joint correspondant, on obtient les sommets d'un polygone qui trace ou indique la marche suivie par les pressions dans l'intérieur de la voûte. Or, supposant ensuite qu'il existe une infinité de joints de séparation possibles, le polygone dégénère en une courbe continue à laquelle on a donné le nom de *courbes des pressions*.

Une courbe de ce genre est déterminée de forme et de position dans les cas suivants :

*a*) Connaissant le point d'application de la poussée et la valeur de cette force,

*b*) le point d'application de la poussée et un autre point quelconque $m$ de la courbe;

*c*) deux points quelconques $m$ et $m'$ de cette ligne.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Dans le premier cas il suffira de déterminer les centres de gravité $a$, $a'$ etc. et de construire autant de parallélogrammes des forces sur les poids et la poussée.

Supposons, comme l'indique le second cas, que les points I et $a$ soient connus; on arrivera immédiatement à la valeur de la poussée en remarquant que par rapport à la masse $bac'd$, les points $a$ et I jouent le même rôle que les points I et I' par rapport à la masse de la demi-voûte lorsqu'il s'agissait du premier cas; il suffira donc de joindre $a$ au point de rencontre $u$ de la verticale passant par $a$, et on aura la direction de la résultante, celle de ses composantes, ainsi que la valeur de l'une d'elles.

Voici comment on pourra opérer dans le dernier cas, pour le ramener aux deux précédents :

Rapportons le système à deux axes rectangulaires $a$Y et $a$X. Les coordonnées du point d'application I inconnu sont $y_1 = a$I et $x_1 = 0$; soient $x'$ et $y'$ celles du point $m$; $x''y''$ les éléments analogues du point $m'$. Nommons $p_1$ le poids de la masse reposant sur le joint du point $m$, et $x_1$ l'abscisse du dernier point; $p_2$ et $x_2$ seront les éléments analogues correspondant au point $m'$. Appelons P la poussée inconnue,

et posons
$$x' - X_1 = a \text{ et } y' - y_1 = b \ldots (1)$$
$$x'' - X_2 = a' \qquad y'' - y_1 = b' \ldots (2)$$

Le point $m'$ étant situé sur la résultante des forces P et $p_1$, on a par le théorème des moments la relation
$$Pb = ap_1 \ldots (3);$$
de même, le point $m'$ étant un point de la résultante des forces P et $p_2$, on a aussi
$$Pb' = a'p_2 \ldots (4)$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) contenant les quatre inconnues $b$, $b'$, P et $y_1$ serviront à calculer les inconnues principales P et $y_1$; on trouve par (3) et (4) après avoir remplacé $b$ par sa fonction en $b'$ tirée de (1) et (2),
$$P = \frac{ap_1 - a'p_2}{y' - y''}$$
$$\text{et } y_1 = y' - \frac{ap_1}{P}.$$

Cela posé, il est facile de reconnaitre la condition nécessaire et suffisante, pour que chacun des arcs ou demi-voûtes puisse se maintenir en équilibre sur les naissances : il faut pour cela 1° que la courbe réelle des pressions reste partout comprise entre les lignes d'intrados et d'extrados, 2° que la tangente en un point quelconque de cette courbe fasse avec le joint correspondant un angle inférieur ou tout au plus égal à l'angle du frottement, angle qui est compris entre 30° et 38°. La première de ces conditions se rapporte à la rotation, la seconde, au glissement; comme le dernier mouvement est le moins à craindre, nous nous occuperons dans la suite uniquement du premier.

On conçoit *a priori*, que dans une voûte stable il existe un certain nombre de courbes satisfaisant aux conditions qui viennent d'être énoncées; pour trouver la courbe suivant laquelle se transmettent effectivement les pressions et à laquelle correspond par conséquent la poussée réellement développée, les savants ont dû se baser sur une nouvelle loi de mécanique, connue sous le nom de *Principe de la moindre résistance*, et qui a été introduite dans la science par Moseley et exposée dans son *Philosophical Magazine*, 1833, et *Philosophical transactions*, 1837.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ce principe peut s'énoncer de la manière suivante :

« Lorsqu'un système, dont les parties sont en contact par des surfaces, est en équilibre sous l'action » de forces extérieures ayant une résultante unique, et qu'il s'y trouve un certain nombre de réactions » possibles, si l'on décompose ces dernières en composantes parallèles et normales à cette résultante » générale, l'équilibre correspondra en réalité au groupe de réactions dont les composantes normales à » la résultante générale sont simultanément des minimum. »

D'après cela, la question proposée se réduit à trouver parmi toutes les courbes des pressions possibles pour maintenir le système donné en équilibre, celle à laquelle correspond une poussée minimum et qui représente alors l'action effectivement développée à la clef. Pour faciliter la recherche de ce minimum, il peut être utile de déterminer la courbe correspondant au maximum de P ; car l'existence d'un maximum ou d'un minimum susceptible de satisfaire à l'équilibre stable entraine l'existence d'autres valeurs de cette action. Si donc il sera possible de construire l'une des deux courbes, l'autre sera possible, et il suffira alors de constater l'existence de l'une d'elles pour s'assurer que la voûte est stable. Il est évident que dans le cas de l'équilibre strict les deux courbes doivent se confondre et il ne pourra exister d'autre courbe possible puisque cette nouvelle ligne devrait être comprise entre un maximum et un minimum. Il résulte de tout ce qui précède que l'arc de voûte (diagonal ou transversal) ne pourra se maintenir en équilibre si aucune des deux courbes correspondant aux limites extrêmes de la poussée ne pourra être construite en satisfaisant d'ailleurs aux conditions imposées à ces courbes en vertu des conséquences qui découlent du principe de la moindre résistance.

Voici les diverses circonstances à observer dans l'étude de cet équilibre. On commencera par tracer la courbe partant du point culminant *a* de l'extrados et aboutissant au point extrême B de la naissance à l'intrados ; ensuite on tracera celle qui réunira les deux points C et A. Il est visible qu'à la première courbe correspond le minimum absolu de la poussée, le bras de levier de cette action étant le plus grand possible, tandis que la seconde ligne est caractérisée par un maximum de la même force, le bras de levier étant alors le plus petit possible. Si la courbe des pressions correspondant au minimum ou au maximum ne devait pas rester comprise entre l'intrados et l'extrados et ne pas satisfaire aux conditions imposées par le principe de Moseley, il faudrait renoncer à ce minimum en abandonnant l'un des points *a* ou B, en abaissant le premier vers C ou remontant le second vers A ; l'un et l'autre de ces mouvements entraine un accroissement dans la valeur de la poussée, parce qu'il produit une diminution dans le bras de levier. Eu égard à ces propriétés, la question se précise entièrement et se pose comme suit :

« Inscrire dans l'intérieur de l'espace compris entre l'intrados et l'extrados une courbe telle que son » point le plus élevé soit le plus haut possible et son point inférieur sur la naissance le plus rapproché » possible du plan du joint vertical. »

Indépendamment de ces conditions relatives à la situation des deux courbes-limites, il en existe d'autres qui résultent du principe de la moindre résistance et auxquelles ces lignes doivent satisfaire ; voici, d'après le Dr Scheffler, l'exposé de ces conditions :

1) Chacune des deux courbes doit présenter un point de contact avec l'extrados et un point analogue sur l'intrados ; ces points doivent se trouver au sommet ou aux naissances, ou bien en un point intermédiaire des deux courbes-contours,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) Ces points de contact doivent toujours se trouver au-dessous de l'horizontale cE (fig. 4, moitié de gauche) menée par le point d'application de la poussée, à moins que le point de contact sur l'extrados et le point d'application c ne se confondent en *a*, ou que les points G et c ne se confondent en *b*, circonstances qui se présentent lorsque les points de contact F et G se trouvent sur les tangentes en *a* et *b* aux courbes-contours.

Propriétés distinctives des deux courbes :

1) Lorsque le point de contact F avec l'extrados est plus haut que le point de contact G sur l'intrados, la courbe des pressions répond à un minimum, que le point F précède ou suive le point G (cFGC ou cGFC). Dans le premier cas qui accuse une prépondérance des voussoirs supérieurs, il arrivera souvent que le point F se confonde avec le sommet *a* ou bien que G vienne en B; dans le second cas, la tendance à la rupture se trouve du côté des voussoirs inférieurs et il peut arriver que le point G se confonde avec le point de départ *b* ou que le point F tombe en A. Quoi qu'il arrive, dans les voûtes stables, la courbe des pressions n'aura jamais qu'un point sur l'extrados et un autre sur l'intrados, et de plus une seule de ces deux courbes répondant au minimum pourra se présenter.

On peut conclure de ce qui précède, que le point de départ d'une courbe des pressions possibles quelconque dans une voûte stable, sera plus bas que celui de la courbe minimum, et que si le point d'arrivée C′ de la courbe du minimum est plus bas que le point de contact G′ de l'intrados, le point d'arrivée de la courbe possible viendra entre C et A; le caractère correspondant à la courbe du maximum consiste en ce que le point de contact F avec l'extrados est plus bas que le point G sur l'intrados, mais il faut ici que G précède le point F (fig. 4, moitié de droite); on peut en conclure qu'au-dessous du point de départ C′ de la courbe du maximum, il n'existe dans une voûte donnée aucune courbe des pressions possibles et que le point d'arrivée de cette dernière sera placé en-deçà du point C′ de la courbe-limite en question.

Il résulte finalement des deux conclusions relatives aux deux courbes-limites, que les points de départ et d'arrivée de toutes les courbes des pressions possibles, sont limités d'une part entre *c* et *c*′, et d'autre part, entre C et C′. Dans le cas de l'équilibre strict, les deux courbes-limites n'en forment plus qu'une seule, jouissant à la fois des propriétés des deux lignes, c'est-à-dire, cette courbe unique aura à la fois deux points de contact avec l'une ou l'autre des courbes-contours.

Ces diverses propriétés des courbes-limites étant ainsi connues, voici quelles sont les constructions à effectuer pour apprécier le degré de stabilité de l'arc transversal et de chacun des arcs diagonaux que nous envisageons : On tracera une courbe des pressions passant par les points *a* et B (fig. 5); cette ligne coupera généralement l'intrados en un ou plusieurs points. Afin d'obtenir un point de tangence sur cette courbe-contour, condition exigée d'une courbe minimum, on devra remonter le point d'arrivée sur le joint des naissances; si la courbe peut être comprise entre l'intrados et l'extrados, comme *a*GC, on pourra conclure que la voûte est stable et que les pressions se transmettent réellement le long de cette ligne en vertu de la loi de Moseley : lorsqu'au contraire on doit faire sortir le point d'arrivée hors du plan des naissances, pour réaliser le point de tangence G′, ce sera un signe que la voûte ne pourra tenir, la seule courbe des pressions possible coupant alors l'extrados comme la ligne *a*G′V. Dans le cas de la courbe *a*GC, il existe encore un grand nombre de courbes des pressions possibles ayant leur point de départ plus bas que le sommet *a* et leur point d'arrivée entre C et A et cela en raison des conclusions qui précèdent.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Avant de terminer ce qui est relatif à ces courbes de pression, il importe de faire observer que nous avons attribué aux matériaux une incompressibilité complète, car, admettre les axes de rotation, soit à l'intrados, soit à l'extrados, c'est au fond supposer les surfaces de contact incompressibles. Afin de nous rapprocher autant que possible de la réalité, nous devrons déplacer les courbes-contours d'une certaine quantité vers l'intérieur de la voûte pour arriver ainsi à une zône à laquelle les résultats précédents puissent être appliqués; l'épaisseur de cette zône, nécessairement variable avec la nature des matériaux, pourra être prise égale à la moitié de $e$ lorsqu'il s'agit de pierres ou voussoirs d'une dureté et compressibilité moyennes.

## Équilibre et stabilité du support.

L'étude des conditions d'équilibre du pilier exige la connaissance de la valeur exacte de toutes le forces qui le sollicitent ainsi que celle de tous les points d'application et directions de ces actions.

Quant aux forces provenant de l'action des arcs sur le support, elles se réduisent nécessairement à deux forces agissant dans le plan vertical BG, fig. 6 (plan), et cela à cause de la position symétrique des arcs diagonaux par rapport à ce plan. Représentons par $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ les longueurs ou épaisseurs des arcs dans le sens horizontal, par $r$ le rayon de l'arc transversal, par $\Phi$ et $\Phi'$ les poussées des trois arcs; d'après la formule ($\gamma$) on peut poser

$$\Phi = \Sigma r^2 \, F\,(Z,k) \text{ et } \Phi' = \Sigma' \frac{r^2}{\cos^2\sigma} \, F\,(Z,k)\,,$$

en admettant que $k$ soit le même dans les trois arcs et représentant par le symbole F la fonction de $z$ et de $k$ qui multiplie le carré du rayon d'intrados dans l'expression précitée; dans les formules qui vont suivre, nous remplacerons ces fonctions par les lettres $\lambda$ et $\lambda'$ pour abréger les notations.

Les valeurs précédentes des deux poussées sont exprimées par des volumes, ce qui est conforme à notre hypothèse relative au poids spécifique des voussoirs; les poids $\Pi$ et $\Pi'$ des demi-arcs exprimés de la même manière, seront

$$\Pi = \frac{1}{k}\,\varepsilon\pi\,[(r+e)^2 - r^2] = \frac{e\varepsilon\pi}{k}\,(2r+e) \text{ pour l'arc transversal,}$$

$$\text{et } \Pi' = \frac{e\,\varepsilon'\pi}{k}\left(\frac{2r}{\cos\alpha} + e'\right) \text{ pour chacun des deux autres arcs;}$$

($\sigma$ est l'angle que font les projections horizontales des arcs diagonaux avec l'arc transversal.)

Si nous représentons par S' la résultante des forces $\Phi'$ et $\Pi'$, il vient pour chaque demi-arc

$$S' = \varepsilon' \sqrt{\left(\frac{r^2}{\cos^2\alpha}\right)^2 \lambda'^2 + \frac{\pi^2 e'^2}{16}\left(\frac{2r}{\cos\alpha} + e'\right)^2}\,.$$

L'angle $\mu'$ que cette résultante fait avec la verticale se trouve à l'aide de la formule

$$\cos\mu' = \frac{\Pi'}{S'}\,.$$

Pour définir complètement la position de cette force dans son plan, il faudra chercher son point de rencontre avec la direction de la force $\Phi'$; à cet effet, il suffira de trouver la valeur de l'abscisse du centre de gravité du demi-arc par rapport à l'axe vertical A. Exprimons que le moment du demi-arc,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

qui a la forme d'une portion de couronne circulaire, par rapport au joint d'application de la poussée, est égal à la différence des moments des secteurs circulaires qui ont pour différence de surface celle de l'arc; si $\delta'$ représente la distance du centre de gravité du quart de cercle d'intrados au centre, on a

$$\delta' = \frac{2}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right) \times \frac{\text{corde du quart de cercle}}{\text{arc} \quad » \quad »}$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right) \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right).$$

La projection de cette longueur sur la direction de la poussée vaut

$$\delta' \cos 45^\circ = \frac{\delta\sqrt{2}}{2} = \tau, \text{ d'où}$$

$$\tau = \frac{4}{3\pi}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right).$$

Le moment du secteur correspondant à l'arc d'extrados a pour valeur

$$M = \frac{\pi}{4}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)^2 \times \frac{4}{3\pi}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)^3.$$

On trouverait de même pour la valeur du moment du secteur limité par la courbe d'intrados

$$M' = \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^3.$$

D'après cela, le moment de l'aire correspondant au demi-arc diagonal a pour valeur

$$m' = \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{r}{\cos\alpha}\right)^3.$$

Quant à l'abscisse du centre de gravité de cette aire par rapport au sommet de l'extrados, elle se trouve par la relation connue

$$x' = \frac{4}{3\pi e'} \frac{\left(\frac{r}{\cos\alpha} + e'\right)^3 - \frac{r^3}{\cos^3\alpha}}{\frac{2r}{\cos\alpha} + e'}.$$

Ensuite, remarquons que les plans axiaux des trois arcs se coupent suivant la verticale projetée en B; en ce point se coupent aussi les deux résultantes S' des poids et poussées correspondant aux arcs diagonaux.

$$\text{La longueur } AB = AC = \frac{a}{\sin\alpha};$$

les résultantes précitées coupent la verticale B en un point distant de la direction de $\Phi'$ d'une quantité

$$y = \left(\frac{a}{\sin\alpha} - x'\right) \operatorname{tang} \mu',$$

attendu que la projection de la force $\Phi'$ sur la dernière direction a pour expression $AB - x'$.



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Les deux forces S′ répondant aux arcs diagonaux se composent en une résultante qui a pour valeur

$$R' = \sqrt{2\,S'^2 - 2\,S'^2 \sin 2\omega}\ ,$$

$\omega$, représentant l'angle que forment entre elles les forces S′, angle dont la projection horizontale est exactement égale à $\alpha$.

On arrive à déterminer $\omega$ ainsi que l'angle $v'$ que la force R′ fait avec la verticale, en se basant sur les considérations suivantes :

Les directions des forces S′, R′ et celle de la verticale B constituent les trois arêtes d'un angle trièdre rectangle dans lequel on connait un angle dièdre $\alpha$ et une face $\mu'$ ; les autres faces, qui sont précisément les angles inconnus $\omega$ et $v'$, se déterminent à l'aide des relations suivantes de la trigonométrie sphérique :

$$\operatorname{tang} v' = \cos\alpha \operatorname{tang}\mu'$$
$$\operatorname{tang}\omega = \sin v' \operatorname{tang}\alpha\ ;$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sin\alpha \operatorname{tang}\mu'}{\sqrt{1+\cos^2\alpha \operatorname{tang}^2\mu'}}\ .$$

Quant à l'arc transversal, on aura de même

$$R = \varepsilon\sqrt{2\lambda r^4 + \frac{\pi^2 e^2}{4}(2r+e)^2}\ .$$

$$\text{et } \cos\mu = \frac{e\,\varepsilon\,(2r+e)}{S}\ ;$$

l'abscisse du point d'intersection de la résultante S avec la poussée $\Phi$ a pour valeur

$$x = \frac{4}{5\,e\pi}\,\frac{(r+e)^3 - r^3}{2r+e}\ ,$$

et la résultante coupe la verticale A, en un point éloigné de la direction de la poussée d'une quantité $y$, donnée par l'équation

$$y = (a - x)\operatorname{tang}\mu\ .$$

Après avoir calculé ainsi ces divers éléments, nous sommes en état de résoudre la seconde question concernant les conditions d'équilibre du système considéré ; cette question, comme il a été dit à l'introduction, examine les conditions à remplir pour garantir l'invariabilité des appuis ou supports. Soit (fig. 6, élévation) FF′HH′ la section verticale du pilier sur lequel appuient les trois arcs de voûte, L sa longueur et $l$ la largeur, et $\varphi$ le poids spécifique des matériaux qui le composent. Ce support peut céder de deux manières, d'abord par glissement sur le plan de fondation, ensuite par rotation autour de l'arête extérieure F.

### A) *Premier mode de déplacement.*

Les forces extérieures qui sollicitent le pilier sont :

1) Le poids P de la maçonnerie qui le compose, poids qui se représente par une force appliquée au centre de gravité du massif,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2) La force R précédemment calculée et appliquée en un point I dont les distances aux plans FF et FH valent respectivement

$$IL = h + r - y \text{ et } IJ = l + r - AB \operatorname{cotg} \alpha ,$$

3) La force R′ analogue à R et appliquée en I′, dont les distances aux mêmes plans valent

$$I'L = h + r - y' \quad I'J' = l + r - AB \operatorname{cotg} \alpha .$$

Cela posé, il est aisé de voir que les forces qui tendent à provoquer le glissement, sont les composantes horizontales des actions R et R′, savoir :

$$R \sin \mu \text{ et } R' \sin \mu' ;$$

les résistances contraires sont

$$f'P,\ f'R \cos \mu \text{ et } f'R' \cos \mu ;$$

le mouvement dont il est question ne pourra pas se produire si les éléments donnés satisfont à l'inégalité

$$R \sin \mu + R' \sin \mu' < f' (P + R \cos \mu + R' \cos \mu'),$$

$f'$ étant le coëfficient du frottement relatif aux surfaces en contact.

B) *Second mode de déplacement.*

Les forces qui ont la tendance à faire tourner le massif du support autour de l'arête extérieure, de l'intérieur vers l'extérieur sont

les composantes horizontales $R \sin \mu$ et $R' \sin \mu'$ ;

les actions qui tendent à contrebalancer les effets de ces forces, sont le poids P et les composantes

$$R \cos \mu \text{ et } R' \cos \mu' .$$

Le théorème des moments appliqué à ce système de forces qui tendent à opérer une rotation autour d'un axe, conduit à la condition de l'équilibre strict :

$$R \sin \mu (h + r - y) + R' \sin \mu' (h + r - y') = P \frac{l}{2} + R \cos \mu (l + r - AB \operatorname{cotg} \alpha) + R' \cos \mu' (l + r - AB \operatorname{cotg} \alpha),$$

$$\text{ou bien } = P \frac{l}{2} + (R \cos \mu + R' \cos \mu') (l + r - AB \operatorname{cotg} \alpha) .$$

Cette condition constitue pour chaque cas d'application, une équation en $l$ qui permettra de calculer la largeur qu'il convient de donner au pilier pour que celui-ci soit en état de résister à tous les efforts qui tendent à le renverser; la stabilité permanente du massif exige néanmoins qu'on majore cette quantité théorique de $\frac{2}{3}$ à $\frac{3}{3}$ de sa valeur afin d'éviter que la résultante de toutes les forces ne se rapproche pas trop de l'arête extérieure F; autrement cette région aurait à supporter une pression telle que la résistance permanente de la matière pourrait être compromise. Observons encore que le premier mode de déplacement est en général le moins à craindre, et qu'il suffit ordinairement de vérifier la condition qui exprime la limite de possibilité du second mouvement.

La détermination analytique qui précède peut être remplacée dans chaque cas, par une construction géométrique et que nous nous proposons d'indiquer, lorsque nous traiterons des applications numériques relatives à cette théorie.

---

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

## SECOND SYSTÈME.

### Voûtes d'arêtes en maçonnerie ou en pierres de taille à arêtes vives.

Les systèmes de cette catégorie constituent les voûtes d'arêtes proprement dites, et dans lesquelles toutes les parties ont la même importance, en raison de l'homogénéité des matériaux, et de l'uniformité observée dans leur disposition et leurs dimensions.

Afin d'arriver à des résultats qui rendent compte le mieux possible du phénomène d'équilibre tel qu'il est réalisé dans un pareil système, nous raisonnerons dans deux hypothèses limites, concernant le mode de construction des deux berceaux : La première hypothèse consiste à attribuer aux joints verticaux de la maçonnerie une continuité complète dans le sens de la section droite des deux cylindres; d'après la seconde, nous tiendrons non seulement compte de la discontinuité de ces joints telle qu'elle est observée dans les applications, mais chaque assise de briques ou de pierres sera considérée comme ne formant qune seule pièce sur toute sa longueur.

#### 1er CAS. — **Continuité des joints dans le sens transversal.**

Admettre la continuité complète dans un sens perpendiculaire aux axes des cylindres, revient au fond à supposer chaque berceau divisé en zônes minces indépendantes les unes des autres. En vue de pouvoir apprécier plus facilement ce qui se passe dans la région des courbes de pénétration, nous admettronsque les arêtes vives, considérées matériellement, soient formées de petits voussoirs mixtes de la forme de celui représenté par la fig. 2, et nous supposerons de plus que les deux intrados cylindriques aient des sections circulaires identiques (fig. 7). La partie entière du système qui effectue sa retombée sur le support II', soit directement, soit indirectement, se trouve projetée suivant le rectangle XOOX'; elle se compose de deux portions symétriques XOYI et X'O'Y'X' et d'une portion du berceau complet IYY'I, Dans les deux premières, les actions se transmettent indirectement à l'appui, tandis que ce transport a lieu d'une manière directe dans la troisième. La partie de voûte répondant à XOYI, pourra être considérée comme étant composée de l'arc diagonal IO appareillé comme il vient d'être admis, et sur lequel s'appuient les portions de voussettes minces et indépendantes en arc de cercle, dont les angles d'ouverture passent par toutes les valeurs comprises entre 0° et 180°.

L'équilibre existera dans le système XOYI, s'il est assuré pour chaque zône telle que $\alpha\beta\alpha'$ ou encore si cet équilibre a lieu dans l'arc elliptique IO; or cet arc sera en équilibre lorsque pour l'un quelconque de ses voussoirs la pression des arcs qui s'y appuient, rencontre le point correspondant en un point situé entre les deux courbes-contours, et qu'en outre cette pression ne puisse provoquer le glissement le long du même joint. Ces deux conditions peuvent être remplies en adoptant une épaisseur suffisante exigée chaque fois qu'il s'agit de l'équilibre d'un arc devant être stable sur ses naissances; dès lors aucun des mouvements dont le voussoir mixte est susceptible ne pourra se produire, et l'arc sera en équilibre.

Cela posé, il importe de faire observer que dans chaque partie de voûte projetée suivant l'un quelconque des triangles OXI et OX'I, il existe duex régions bien distinctes l'une de l'autre, eu égard aux

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

conditions particulières dans lesquelles les éléments s'y trouvent placés; en effet, une partie des arcs élémentaires tels que $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta$ se compose d'une série d'arcs infiniment minces dont les joints de rupture se trouvent à la naissance, tandis que dans tous les éléments de l'autre partie, la position de ces joints est invariablement la même. Cette différence de conditions résulte des propriétés générales de l'équilibre des voûtes en arc de cercle et dont, pour notre objet, il suffira de citer la suivante :

« Dans les voûtes en arc de cercle d'égale épaisseur, le joint de rupture se trouve toujours au joint » d'appui; seulement les arcs correspondant à un angle d'ouverture supérieur à l'angle de rupture d'un » berceau complet ayant les mêmes éléments géométriques, sont à traiter comme des voûtes complètes » en demi-cercle. »

Appelons Z l'angle de rupture des arcs en plein cintre tels que IX et IY, et supposons que les valeurs de $r$ et de $e$ pour tous les arcs élémentaires aient été choisies de telle sorte que tous se trouvent en équilibre sur eux-mêmes; il ne restera plus alors qu'à évaluer les pressions qu'ils exercent sur le voussoir diagonal sur lequel ils prennent appui, et que ce dernier transmet au pilier; quant à la valeur relative des deux pressions qui s'exercent sur les deux branches d'un même voussoir mixte, leur égalité doit exister dans le système régulier que nous considérons.

**Calcul des pressions exercées par tous les arcs dont le joint de rupture se trouve à la face d'appui.**

Reprenons la formule ($\gamma$)

$$P = r\,\frac{\frac{1}{2}(K^2-1)\,z\sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)}{K-\cos z}$$

dans laquelle P représente, pour l'unité de longueur, la valeur de la force horizontale appliquée à la clef et capable d'équilibrer, par rotation, la masse reposant sur le joint qui correspond à l'angle quelconque $z$. Soient $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta$ deux éléments des deux berceaux et appuyant sur le même voussoir diagonal; soit $s$ l'abscisse du point d'appui de ces arcs sur l'intrados par rapport à l'origine des coordonnées placée au centre de la section transversale.

On a $s = r\sin z$ et $ds = r\cos z\,dz$.

La poussée correspondant à chacun des éléments $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta$ de longueur $ds$ sera visiblement

$$P\,ds = p\ ,$$

c'est-à-dire

$$p = r^3\,\frac{\frac{1}{2}(K^2-1)\,z\sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)}{K-\cos z}\cos z\,dz\ ;$$

il est clair aussi que les couples à introduire par le transport de chacune des actions $p$ et $p'$, à la face d'appui de l'arc diagonal, s'entre-détruisent comme ayant le même moment, mais de signes contraires.

La valeur S de l'action totale pour toute l'étendue de la zône considérée s'obtiendra, en intégrant l'expression précédente entre les limites $z = 0$ et $z = Z$, ainsi

$$S = r^3\int_0^Z \frac{\frac{1}{2}(K^2-1)\,z\sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)}{K-\cos z}\cos z\,dz\ .$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

**Intégrations.**

$$r^3 \int_0^Z \frac{\frac{1}{2}(K^2-1)\,z \sin z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos z)}{K-\cos z} \cos z\, dz = \frac{1}{2} r^3 (K^2-1) \int_0^Z \frac{z \sin z \cos z\, dz}{K-\cos z}$$

$$- \frac{r^3 (K^3-1)}{3} \int_0^Z \frac{\cos z\, dz}{K-\cos z} + \frac{r^3 (K^3-1)}{3} \int_0^Z \frac{\cos^2 z\, dz}{K-\cos z}.$$

1) $\int \frac{z \sin z \cos z\, dz}{K-\cos z}$ pourra s'obtenir par un développement en série; la formule de Taylor donne

$$f(a) = f(z) + f'(z)(a-z) + f \text{ et } f''(z)\,(2)\,\frac{(a-z)^2}{1.2} + \text{etc.},$$

$f(a)$ représentant la quantité ou constante arbitraire de l'intégrale cherchée; on tire de cette formule

$$f(z) = C + (z-a)\,f'(z) - \frac{(z-a)^2}{1.2} f''(z) + \text{etc.}$$

et on disposera de l'indéterminée $a$ pour rendre convergente la série ainsi obtenue entre les limites $z=0$ et $z=Z$.

2) $\int \frac{\cos z\, dz}{K-\cos z}$, donne en intégrant par parties

$$\frac{\sin z}{K-\cos z} + \int \frac{\sin^2 z\, dz}{(K-\cos z)^2}.$$

Posons $K-\cos z = x$, d'où $\sin z\, dz = dx$, et la dernière intégrale devient après substitution

$$\int x - \sqrt{1-(K-x)^2}\, dx.$$

Pour transformer la différentielle irrationnelle en une autre qui soit rationnelle, on peut opérer de la manière suivante :

Nommons $a$ et $a'$ les racines de l'équation

$$1-(K-x)^2 = 0,$$

alors la quantité sous le radical pourra être remplacée par le produit

$$(x-a)(a'-x);$$

posons maintenant

$$\sqrt{(x-a)(a'-x)} = y(a'-x),$$

on en tire

$$x = \frac{a+a'y^2}{1-y^2} \text{ et } dx = \frac{2(a'-a)\,y\,dy}{(1-y^2)^2}.$$

En remplaçant le radical, $x^{-2}$ et $dx$ par leur fonction en $z$, on aura à intégrer

$$\int \frac{2(a'-a)\,y^2\,dy}{(1+y^2)(a+a'y^2)^2}.$$

A cet effet décomposons $\frac{1}{(1+y^2)(a+a'y^2)^2}$ en une somme de fractions rationnelles, dont les dénominateurs soient des facteurs du dénominateur de la proposée, ainsi posons

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{1}{(1+y^2)\,(a+a'y^2)^2}=\frac{Ay+B}{1+y^2}+\frac{Cy+D}{(a+a'y^2)^2}+\frac{Ey+F}{a+a'y^2}\;;$$

réduisant au même dénominateur, il vient

$$\frac{1}{(1+y^2)\,(a+a'y^2)^2}=\frac{A\,(a\,y^2+a'^2\,y^5+2\,aa'\,y^3)+B\,(a'+a'^2\,y^4+2aa'\,y^2)+C(y+y^3)+D\,(1+y^2)}{d}$$
$$+\frac{E\,(a\,y+a'\,y^3+a\,y^3+a'\,y^5)+F\,(a+a'\,y^2+a\,y^2+a'\,y^4)}{d}\,.$$

Réduisons les termes semblables, et nous aurons pour calculer les indéterminées A, B, C, D, E et F, les six équations suivantes :

| | |
|---|---|
| $A\,a'^2+E\,a'=0$ . . . . . (1) | $A\,a^2+C+E\,a=0$ . . . . . (4) |
| $B\,a'^2+F\,a'=0$ . . . . . (2) | $2\,B\,aa'+D+F\,a'+F\,a=0$ . . . (5) |
| $2\,Aaa'+C+E\,a'+E\,a=0$ . . . (3) | $B\,a^2+D+F\,a=0$ . . . . . (6) |

On en tire

$$A=0\,,\;B=\frac{1}{(a+a')^2}\,,\;F=-\frac{a'}{(a-a')^2}\,,\;E=0\,,\;C'=0\,,\;D=\frac{a'}{a'-a}\,.$$

Ces valeurs étant substituées dans les trois fractions partielles, nous aurons finalement à intégrer

$$\int\frac{y^2\,dy}{(1+y^2)\,(a+a'y^2)^2}=\frac{1}{(a-a')^2}\int\frac{y^2\,dy}{1+y^2}+\frac{a'}{a'-a}\int\frac{y^2\,dy}{(a+a'y^2)^2}-\frac{a'}{(a-a')^2}\int\frac{y^2\,dy}{a+a'\,y^2}\,.$$

Or
$$\int\frac{y^2\,dy}{1+y^2}=\int\left(1-\frac{1}{y^2+1}\right)dy=y-\text{arc tang}\,y$$

$$\int\frac{y^2\,dy}{(a+a'\,y^2)^2}=-\frac{\sqrt{aa'}}{2\,(a+a'\,y^2)}+\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{a'}{a}}\cdot y\,.$$

$$\int\frac{y^2\,dy}{a+a'\,y^2}=+\frac{\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}}\left[\sqrt{\frac{a'}{a}}\cdot y-\text{arc tang}\sqrt{\frac{a}{a}}\cdot y\right].$$

Donc

$$\int\frac{y^2\,dy}{(1+y^2)\,(a+a'\,y^2)^2}=\frac{1}{(a-a')^2}\,(y+\text{arc tang}\,y)+\frac{a'}{a'-a}\left(-\frac{\sqrt{aa'}}{2(a+a'\,y^2)}+\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang}\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y\right.$$
$$-\frac{a'}{(a-a')^2}\left[\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y-\text{arc tang}\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y\right]\frac{\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}}\,.$$

Donc enfin

$$\int\frac{2\,(a'-a)\,y^2\,dy}{1+y^2)\,(a+a'\,y^2)}=-\frac{2}{a-a'}\,(y-\text{arc tang}\,y)+a'\left(-\frac{\sqrt{aa'}}{a+a'\,y^2}+\text{arc tang}\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y\right)$$
$$+\frac{2\,a'}{a-a'}\left[\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y-\text{arc tang}\sqrt{\frac{a'}{a}}\,y\right]\frac{\sqrt{a}}{a'\sqrt{a'}}\,.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

3) $\int \frac{\cos^2 z\, dz}{K - \cos z}$. On posera encore $K - \cos z = x$ d'où $\sin z\, dz = dx$.

La préposée devient par substitution

$$\int \frac{(K-x)^2}{x} \frac{dx}{\sqrt{1-(K-x)^2}}.$$

Cette expression transformée comme la précédente se réduira à

$$\int \frac{2\,[a'(1+y^2)-(a+a'y^2)]^2\, dx}{(1-y^2)(a+a'y^2}.$$

Il existe cependant un autre procédé plus expéditif, et qu'il est avantageux d'employer chaque fois qu'il s'agit de différentielles pouvant être ramenées au type qui nous occupe : on commence par poser

$$K - x = u \text{ d'où } -dx = du,$$

l'intégrale devient

$$\int \frac{u^2\, du}{(K-u)\sqrt{1-u^2}}.$$

Or, le quotient $\frac{u^2}{K-u} = u + K - \frac{K^2}{K-u}$; la proposée se divise alors en trois intégrales séparées

$$\int \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2}},\ K\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\ -K^2\int \frac{du}{(K-u)\sqrt{1-u^2}}.$$

Les deux premières ont pour valeurs générales $-\sqrt{1-u}$ et K arc sin $u$; quant à la dernière, on la transformera en une autre, en posant

$$K - u = \frac{1}{z}$$

$$\text{d'où } du = \frac{dz}{z^2},$$

et il devient à intégrer

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2(1-K^2)+2Kz-1}}.$$

Comme $K > 1$, le coëfficient du carré de la variable est négatif comme le terme constant; en posant alors

$$z = z' + h$$

on transformera de nouveau l'intégrale en $z$ dans la suivante

$$\int \frac{dz}{\sqrt{h^2(1-K^2)+2Kh-1+2(K+h-hK^2)z'+(1-K^2)z'^2}}$$

On pourra disposer ensuite de l'indéterminée $h$ pour faire disparaitre le terme constant qui se trouve sous le radical; il suffit d'attribuer à cette lettre la valeur de l'une quelconque des racines de l'équation

$$h^2(1-K^2)+2Kh-1=0$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{d'où } h' = \frac{1}{K-1} \text{ et } h'' = \frac{1}{K+1}.$$

Représentons les coëfficients modifiés de $z'$ et de $z''$ respectivement par $a$ et $\beta^2$, l'intégrale deviendra

$$\int \frac{dz'}{\sqrt{dz' - \beta^2 z'^2}} = \int \frac{dz'}{\sqrt{\frac{a^4}{4\beta^2} - \left(\beta r' - \frac{a^2}{2\beta}\right)^2}}.$$

$$\text{Posant } \beta r' - \frac{a^2}{2\beta} = z'' \text{ et } \frac{a^2}{4\beta^2} = \gamma^2,$$

et on aura finalement

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\lambda^2 - \beta^2 z''}} = \frac{1}{\beta} \text{ arc sin } \frac{\beta}{\lambda} z''.$$

En remontant successivement de $z''$ à $z'$, de $z'$ à $z$, de $z$ à $x$ et enfin de $x$ à l'arc $z$ en fonction duquel se trouve imprimée l'intégrale première, on aura la valeur du troisième terme de l'intégrale générale qui représente l'action totale S.

Toutes ces intégrations étant ainsi effectuées, on connaitra la somme des actions transmises par l'arc OI et provenant de la poussée le long des arêtes OX et OY. Nous représentons ces sommes par S et $S_1$; la portion symétrique I'Y'O'X' fournira deux actions égales et symétriques S et $(-S_1)$. D'après cela, il est visible que les forces horizontales qui de ce chef sollicitent le pilier au renversement se réduisent à une force totale 2S, attendu que $S_1$ et $(-S_1)$ transportées dans le plan des naissances, s'y détruisent.

Si l'on considérait un pilier terminal, la résultante des forces de cette espèce aurait pour valeur

$$\sqrt{S^2 + S_1^2} = S\sqrt{2}, \text{ car } S = S_1.$$

### Méthode approchée.

Au procédé rigoureux qui vient d'être exposé, on pourra dans les applications, substituer la méthode suivante : L'angle de rupture dans les voûtes en plein cintre, se trouvant ordinairement compris entre 50° et 70°, on pourra remplacer la poussée $p$ variable d'un élément à l'autre, par la valeur particulière qui répond à l'angle $z = 45°$; de cette manière on se placera dans des conditions qui ne peuvent différer sensiblement de la réalité et la poussée constante $p'$ ainsi admise sera probablement supérieure à la valeur moyenne des poussées variables $p$.

La somme totale des forces à laquelle conduit cette hypothèse est représentée par

$$\Sigma = \int_0^Z p' = \int_0^Z P_{45°}\, r \cos z\, dz = r\, P_{45} \sin Z.$$

$$\text{Or } P_{45°} = r^2 \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{16}(K^2-1) - \frac{1}{6}(K-1)(2-\sqrt{2})}{K - \frac{\sqrt{2}}{2}};$$



Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

la valeur rigoureuse de S pourra donc être remplacée par l'expression approchée

$$\Sigma = r^3 \frac{\frac{\pi\sqrt{2}}{16}(K^2-1) - \frac{1}{6}(K^3-1)(2-\sqrt{2})}{K - \frac{\sqrt{2}}{2}} \sin Z .$$

Pour passer ensuite de cette valeur de $\Sigma$ exprimée par un volume, à l'expression de la force en poids, il suffira de multiplier par le poids spécifique des matériaux employés.

**Calcul des pressions exercées par tous les arcs dont l'angle d'ouverture est compris entre $z = Z$ et $z = 90^0$.**

C'est pour les éléments de cette région, que la règle concernant la position du joint de rupture des arcs à très-grand angle d'ouverture, trouve son application. Entre les deux limites dont il s'agit, la poussée des arcs élémentaires est constante et égale à

$$P_Z = r^2 \frac{\frac{1}{2}(K^2-1) Z \sin Z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos Z)}{K - \cos Z},$$

pour l'unité de longueur.

La force horizontale transportée au joint d'appui vaut pour un élément de longueur $ds$ de cette région

$$q = P_Z r \cos z \, dz$$

$z$, étant compris entre Z et 90°; la somme de ces actions est par conséquent

$$T = P_Z r \int_Z^{\frac{\pi}{2}} \cos z \, dz = r P_Z (1 - \sin Z).$$

En rapprochant cette valeur de celles trouvées tantôt et relatives au renversement du support, on aura pour la valeur de l'action totale favorable à ce mouvement et due aux régions où s'opère la pénétration

$$2S + 2T,$$

pour un pilier intermédiaire,

$$\text{et } \sqrt{(S+T)^2 + (S_1+T_1)^2}$$

orsqu'il s'agit d'un pilier terminal.

Reste à ajouter la poussée de la portion de voûte qui opère directement sa retombée sur le support et représentée en plan suivant le rectangle IYY'I'; si nous nommons $l$ la longueur II', cette action a pour valeur

$$r^2 \frac{\frac{1}{2}(K^2-1) Z \sin Z - \frac{1}{3}(K^3-1)(1-\cos Z)}{K - \cos Z} \times l .$$

De là suit que la résultante totale de toutes les forces horizontales et tendant à renverser le pilier, a pour valeur

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$R = 2S + 2T + r^2 \frac{\frac{1}{2}(K^2 - 1) Z \sin Z - \frac{1}{3}(K^3 - 1)(1 - \cos Z)}{K - \cos Z} \times l,$$

pour tout pilier intermédiaire,

$$\text{et } R' = \sqrt{(S + T)^2 + (S_1 + T_1)^2} + r^2 \frac{\frac{1}{2}(K^2 - 1) z \sin z - \frac{1}{3}(K^3 - 1)(1 - \cos z)}{K - \cos z} \times \lambda$$

pour les piliers terminaux, $\lambda$ représentant la longueur analogue à $l$ dans les supports de cette espèce.

Veut-on faire usage des valeurs approchées de la partie des forces horizontales du premier groupe, il n'y aura qu'à remplacer dans les dernières formules S et $S_1$ respectivement par $\Sigma$ et $\Sigma_1$.

Pour compléter l'évaluation des éléments dont la connaissance est exigée pour la détermination des conditions d'équilibre du pilier lui-même, cherchons l'expression des forces favorables à la stabilité et qui proviennent des charges que transmettent les voûtes supposées stables en elles-mêmes.

### Calcul des composantes verticales dues aux poids des matériaux des voûtes.

Le poids de chaque élément tel que $\alpha\beta$ ou $\alpha'\beta$ a pour expression le produit de son volume par le poids spécifique correspondant; nous pouvons pour le moment faire abstraction de ce dernier. Pour ce qui regarde le volume de ces parties, il est représenté par le produit $ads$, $a$ étant l'aire d'une portion de couronne circulaire et $ds$ l'épaisseur infiniment mince de l'arc; ainsi

$$v = \tfrac{1}{2}\left[(r + e)^2 - r^2\right] z\, ds$$

$$\text{or } ds = r \cos z\, dz,$$

$$\text{donc } v = \frac{r}{2}\left[(r + e)^2 - r^2\right] z \cos z\, dz.$$

Le volume total V des arcs projetés suivant le triangle rectangle XOI, a donc pour valeur

$$V = \frac{r}{2}\left[(r + e)^2 - \frac{r^2}{2}\right] \int_0^{\frac{\pi}{2}} z \cos z\, dz.$$

$$\text{On a } \int z \cos z\, dz = z \sin z - \int \sin z\, dz = z \sin z + \cos z + C;$$

cette valeur devient, eu égard aux limites de l'intégrale

$$\frac{\pi}{2} + C - (1 + C) = \frac{\pi}{2} - 1,$$

$$\text{donc } V = \frac{r}{2}\left[(r + e)^2 - \frac{r}{2}\right]\left[\frac{\pi}{2} - 1\right] = \frac{er}{2}(2r + e)\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Le volume V' de l'arc en plein cintre et de longueur $II' = l$ a pour valeur

$$V' = e\left[r + \frac{e}{2}\right]\frac{\pi}{2} \times l.$$

De là résulte que, pour tout pilier intermédiaire tel que II' la somme des composantes verticales dues à la gravité, est représentée par

$$4V + V',$$

le terme 4V répond aux quatre régions projetées suivant les espaces triangulaires qu'indique la figure.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Pour tout pilier terminal, l'action totale correspondante a pour valeur

$$2V + V''$$

$V''$ différant de $V'$ en ce que $l$ y est remplacé par $l'$, longueur de l'arc transversal reposant sur ce pilier.

Pour compléter ce qui est relatif aux composantes de cette espèce, il reste à évaluer les volumes des arcs qui s'appuient latéralement sur la saillie du support; ces arcs se trouvent projetés dans l'espace compris entre le mur et les lignes IX et I'X'. En représentant par $l_1$ ces côtés latéraux du pilier, chacun des arcs a un volume exprimé par

$$V_1 = e\frac{\pi}{2}\left(r + \frac{e}{2}\right) \times l_1 \; ;$$

et la charge totale qui agit de ce chef sur le support est représentée par

$$2V_1 = e\pi\, l_1 \left(r + \frac{e}{2}\right) .$$

Les raisonnements et calculs qui précèdent supposent que les cylindres qui se pénètrent aient même montée; s'il n'en était pas ainsi et que l'un des cylindres eût une directrice elliptique de même axe vertical que la directrice circulaire, il y aurait lieu d'opérer de la façon suivante pour arriver à une valeur approchée des forces horizontales dues à la poussée : On substituerait au système donné un système régulier à deux cylindres circulaires identiques, dont la projection sur le plan des naissances s'obtiendrait en menant les bissectrices $L\gamma$ et $L'\gamma'$ des angles droits en L et L' (la moitié du système irrégulier se trouvant projetée sur l'espace I'X'LF). Tout en conservant la longueur II' du support donnée, on y supposerait appuyé l'arc transversal du système substitué, arc dont la longueur serait égale à $II' + 2I'\gamma$. Il est visible que par là les actions favorables au renversement, ainsi que celles favorables à la stabilité se trouvent renforcées, de sorte qu'il y aura très-probablement compensation entre les variations de ces deux groupes d'efforts. Il va de soi que ce procédé expéditif ne pourra être employé que lorsque la différence entre les longueurs des demi-axes inégaux I'X et I'F est comprise entre des limites assez étroites, ce qui est très-souvent le cas dans la pratique.

### 2e CAS. — **Discontinuité des joints dans le sens de la section droite des cylindres.**

Dans la construction des murs et des voûtes, on a soin de disposer les matériaux de telle façon que les joints d'une assise ne correspondent pas à ceux des assises qui la comprennent. Cette disposition a pour effet d'accorder à tous les élements d'une même rangée une solidarité plus ou moins complète et que, dans notre hypothèse, nous supposons être assez grande, pour qu'il soit permis de considérer toutes les parties d'une même assise comme ne formant qu'une seule pièce, qu'un seul voussoir (Fig. 8).

En ce qui concerne d'abord l'équilibre intérieur de l'un quelconque MDE'M' de ces berceaux, on arrivera à en établir les conditions, en l'assimilant à une voûte cylindrique en plein cintre, composée de voussoirs de même épaisseur, mais d'une longueur variable depuis celle qui correspond à la naissance MM' jusqu'à celle de l'arête culminante DE, conformément à l'hypothèse admise. Abstraction faite

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

des actions qui pourraient tenir lieu des appuis latéraux, on voit aisément que les forces qui sollicitent le système, sont les suivantes :

1) Le poids de ses parties constitutives,

2) Un système de forces horizontales, normales au joint DE, et remplaçant l'actiou du demi-berceau supprimé.

Nous laisserons de côté, comme il vient d'être dit, les actions dûes à l'appui que prêtent les portions FDM et M'EF', attendu que ces forces n'exercent pas d'influence sur l'équilibre intérieur du berceau principal MDEM'.

### Détermination du joint de plus facile rupture.

Nommons $z$ l'angle correspondant au joint de plus facile rupture, $z'$ l'angle variable qui fixe la position d'un voussoir quelconque infiniment mince de longueur $2\lambda$ (plan) : soit $d\Sigma$ sa section infiniment petite, on aura

$$d\Sigma = \tfrac{1}{2}(r+e)^2\,dz' - \tfrac{1}{2}r\,dz' = \frac{e}{2}(2r+e)\,dz'.$$

Le volume $v$ de cet élément sera

$$v = 2\lambda d\Sigma.$$

Posons $ii'$ ou $MM' = 2m$, $DE = 2m'$ et $NR = \delta$ ; on pourra exprimer $2\lambda$ en fonction de l'angle $z'$ comme suit :

Le triangle DMN donne la proportion

$$\frac{\lambda - m}{m' - m} = \frac{r - \delta}{r}\,;\ \text{or}\ \delta = OS = r\sin z',$$

$$\text{donc}\ \lambda = m' - (m' - m)\sin z'\,;$$

de là par substitution

$$v = e\,(2r+e)\,[m' - (m' - m)\sin z']\,dz' \quad . \ . \ . \ (a)$$

Soit V la somme des volumes de tous les voussoirs appuyés sur le joint de rupture, sa valeur est

$$V = e\,(2r+e)\int_{z'=0}^{z'=z} [m' - (m' - m)\sin z']\,dz' \quad . \ . \ . \ (b)$$

Passons maintenant à l'évaluation des moments des forces qui sollicitent la masse à tourner autour de l'arête placée à l'intrados ; à cette fin, nommons $x$ le bras de levier du volume $v$, on aura ensuite

$$x = TO - K'O = r\sin z - \tfrac{1}{2}(2r+e)\sin z'.$$

Désignons par X le bras de levier du volume total V, nous aurons, en vertu du théorème des moments

$$V\,X = \int_{z'=0}^{z'=z} v\,x = \int_{z'=0.}^{z'=z} [m' - (m' - m)\sin z']\,[r\sin z - \tfrac{1}{2}(2r+e)\sin z']\,dz'.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\text{Posant } \frac{m'-m}{m} = K_0 \text{ et } \frac{r+\frac{e}{2}}{r} = K',$$

l'intégrale peut s'écrire

$$V\,X = em'\,r\,(2\,r+e)\int_{z'=0}^{z'=z} (1 - K_0 \sin z') \sin z' - K' \sin z')\,dz' \;.$$

ou encore

$$V\,X = em'\,r\,(2\,r+e)\int_{z'=0}^{z'=z} [\sin z - (K_0 \sin z + K') \sin z' = K'\,K_0 \sin^2 z']\,dz' \;.$$

Les deux premiers termes s'intègrent immédiatement; quant au troisième, on le transformera en un autre, en posant

$$\sin z' = u; \quad \text{d'où} \quad \cos z'\,dr' = du,$$

et ce terme devient

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{1-u^2} + \tfrac{1}{2} \text{ arc} \sin u \;,$$

donc en fonction de $z'$

$$K'K_0 \left(\frac{z'}{2} - \frac{\sin z' \cos z'}{2}\right) - \frac{K'K_0\,z'}{2}$$

eu égard aux limites de l'intégrale.

Les trois intégrations partielles étant ainsi faites et leur résulat substitué dans l'expression de VX, celle-ci devient

$$V\,X = em'r\,(2\,r+e)\left[(z-K_0)\sin z + K_0\left(-\frac{K'}{2}\right)\sin z \cos z + K'(\cos z - 1) + \frac{K_0 K' z}{2}\right].$$

Si nous représentons par P la force horizontale capable d'équilibrer la masse considérée, et par Y son bras de levier par rapport à l'axe de rotation placé dans le plan du joint d'appui et à l'intrados, le théorème des moments donnera

$$PY = VX\,;$$
$$\text{or} \quad Y = LI = r + e - r\cos z\,.$$

De là on tire

$$P = \frac{em'r\,(2r+e)\left[(z-K_0)\sin z + K_0\left(1-\frac{K'}{2}\right)\sin z\cos z + K'(\cos z - 1) + \frac{K'_0 K z}{2}\right]}{e - r\,(1-\cos z)} \quad \ldots (c)$$

La valeur de la poussée réellement développée et exigée pour l'espèce d'équilibre qui nous occupe, correspond à l'angle particulier fourni par l'équation

$$\frac{dP}{dz} = 0.$$

Cette équation fort compliquée est transcendante et ne pourra être résolue que par tâtonnements; mieux vaudra de calculer directement le maximum de P′ par la formule (c) à l'aide de substitutions numériques directes.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

### Équilibre de glissement.

Nommons P′ la force horizontale à appliquer à la clef et capable d'empêcher le massif de voussoirs situé au-dessus du joint considéré, de glisser le long de ce joint. Nous avons trouvé pour condition de cet équilibre dans le cas d'une voûte d'égale longueur

$$P' \geqq Q \frac{\cos z = f \sin z}{\sin z + f \cos z}$$

P′ et Q étant exprimés par des volumes.

Or, dans le cas de la discontinuité admise, Q′ est non seulement fonction de $z$, mais dépend aussi de $m$ et de $m'$. En ayant égard à la valeur de Q exprimée par la formule ($b$), la condition d'équilibre devient

$$P' \geqq \left[ m' z - (m' - m) \cos z - (m' - m) \right] \frac{\cos z - f \sin z}{\sin z + f \cos z} e (2 r + e) .$$

Le maximum de cette valeur sera la poussée horizontale nécessitée par la condition d'équilibre de glissement le long d'un joint quelconque ou plutôt pour tel joint, le long duquel la rupture de cet équilibre est le plus à craindre.

Le plus grand des maximum de P et de P′ représentera la valeur de l'action réellement développée sur toute la longueur du joint vertical.

L'équilibre intérieur étant assuré, il faudra vérifier la condition d'immobilité sur les naissances MM′. Pour cela, on devra nécessairement tenir compte de la circontance en vertu de laquelle le berceau MDEM′ prête un appui suffisant aux deux portions de voûtes FDM et F′EM′, et qu'il ne pourra se déplacer ni par glissement ni par rotation sans entrainer ces parties ; le mouvement d'entraînement se traduira dans tous les cas X soit par un glissement sur la tête du pilier, soit par une rotation autour d'un certain axe extérieur parallèle au diamètre horizontal FM. Il sera toujours aisé de réaliser l'équilibre dont il s'agit par le choix d'une disposition et de dimensions convenables, de sorte qu'il ne restera plus alors qu'à évaluer les actions qui de la part des voûtes s'exercent sur le support en tendant à le renverser.

### Équilibre du pilier.

Voici de quelle manière, en nous basant toujours sur la rigidité attribuée par notre hypothèse à chacun des trois demi-berceaux, nous pensons pouvoir envisager l'équilibre du système et effectuer en conséquence l'évaluation dont il est question : Les deux berceaux FDM et M′EM′ se trouvent maintenus dans la position qu'ils occupent d'abord par les faces horizontales appliquées normalement aux arêtes culminantes respectives, et ensuite par des réactions exercées de la part des plans fictifs d'appui, qui renferment les coupes de pénétration. Quant aux forces de la dernière espèce, nous n'aurons à tenir compte que de leurs composantes parallèles aux génératrices des berceaux considérés ; il est visible que sans la présence de ces dernières forces, les deux berceaux, soutenus uniquement par les forces horizontales provenant de la poussée, tendraient à descendre en raison de la position de leurs centres de gravité U et U′, en tournant d'une pièce autour de l'axe FF′.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nommons M le moment et chaque demi-berceau par rapport à cet axe de rotation ; alors la force qu'on devra appliquer au milieu de l'arête culminante du berceau MDEM', et exigée pour empêcher ce mouvement aura pour valeur,

$$\frac{2M}{r+e}$$

Soit $\Phi$ le maximum des forces P et P', dont les valeurs générales ont été données précédemment ; nous aurons pour l'expression $\Phi_1$ de la force horizontale totale appliquée au milieu de DE

$$\Phi_1 = \Phi + \frac{2M}{r+e} .$$

Cette force peut être transportée dans le plan de naissance des voûtes, en ayant soin toutefois d'introduire un couple appelé à équilibrer les couples dûs au poids des éléments.

Nommons $\Pi$, $\Pi'$ et $\Pi''$ les poids des demi-voûtes et celui du pilier, nous aurons alors pour condition de l'équilibre de rotation du support par rapport à l'arête extérieure, la relation

$$\Phi_1 H = (\Pi + \Pi')\, x + \Pi'' \frac{x}{2} ,$$

H représentant la hauteur du pilier et $x$ son épaisseur.

On en tire

$$x = \Phi_1 \frac{2H}{2\Pi + 2\Pi' + \Pi''} .$$

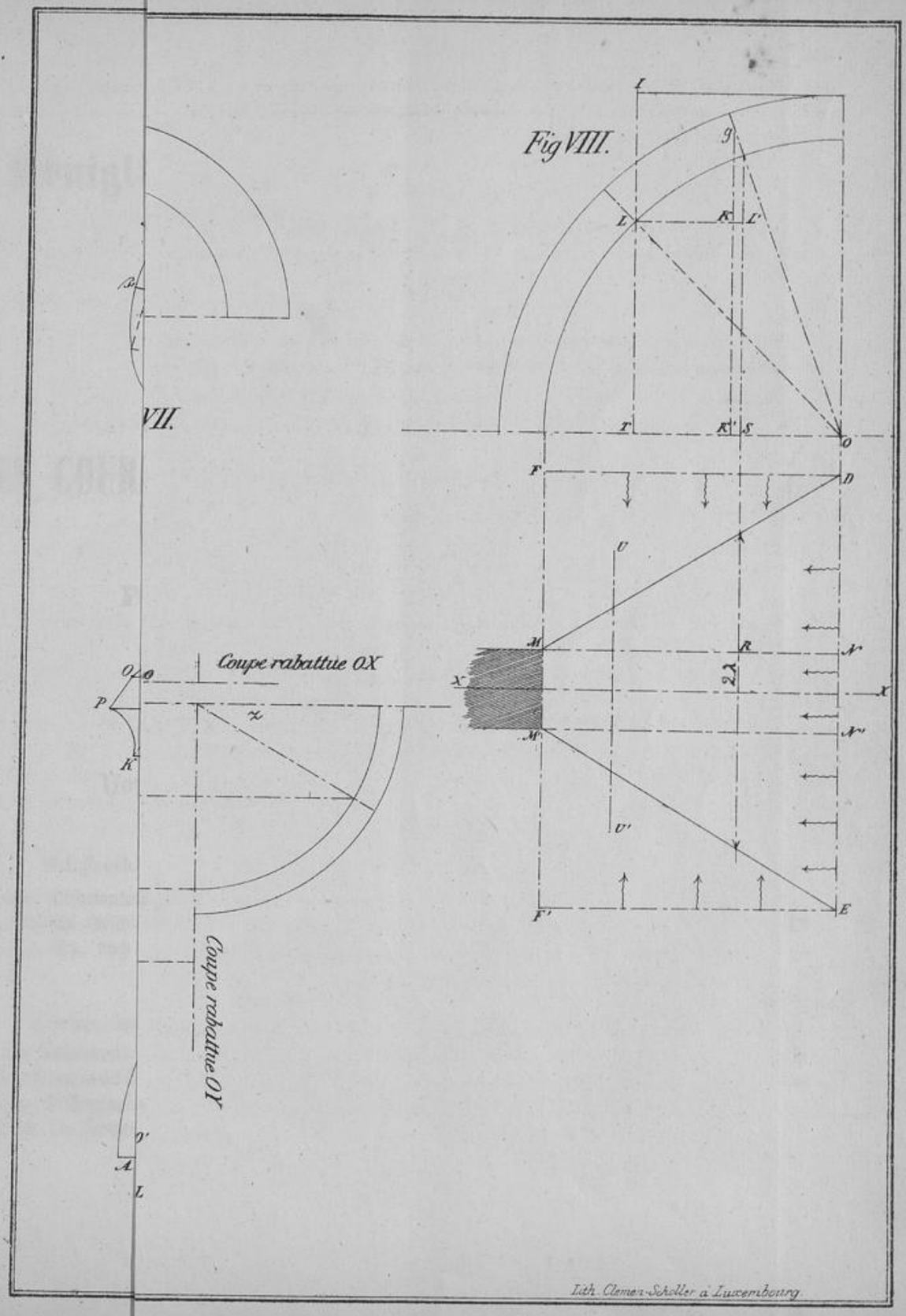
L'épaisseur $x'$, qui procurera un degré suffisant de stabilité permanente, aura pour expression

$$x = \Phi_1 \frac{H5}{2\Pi + 2\Pi' + \Pi''} ,$$

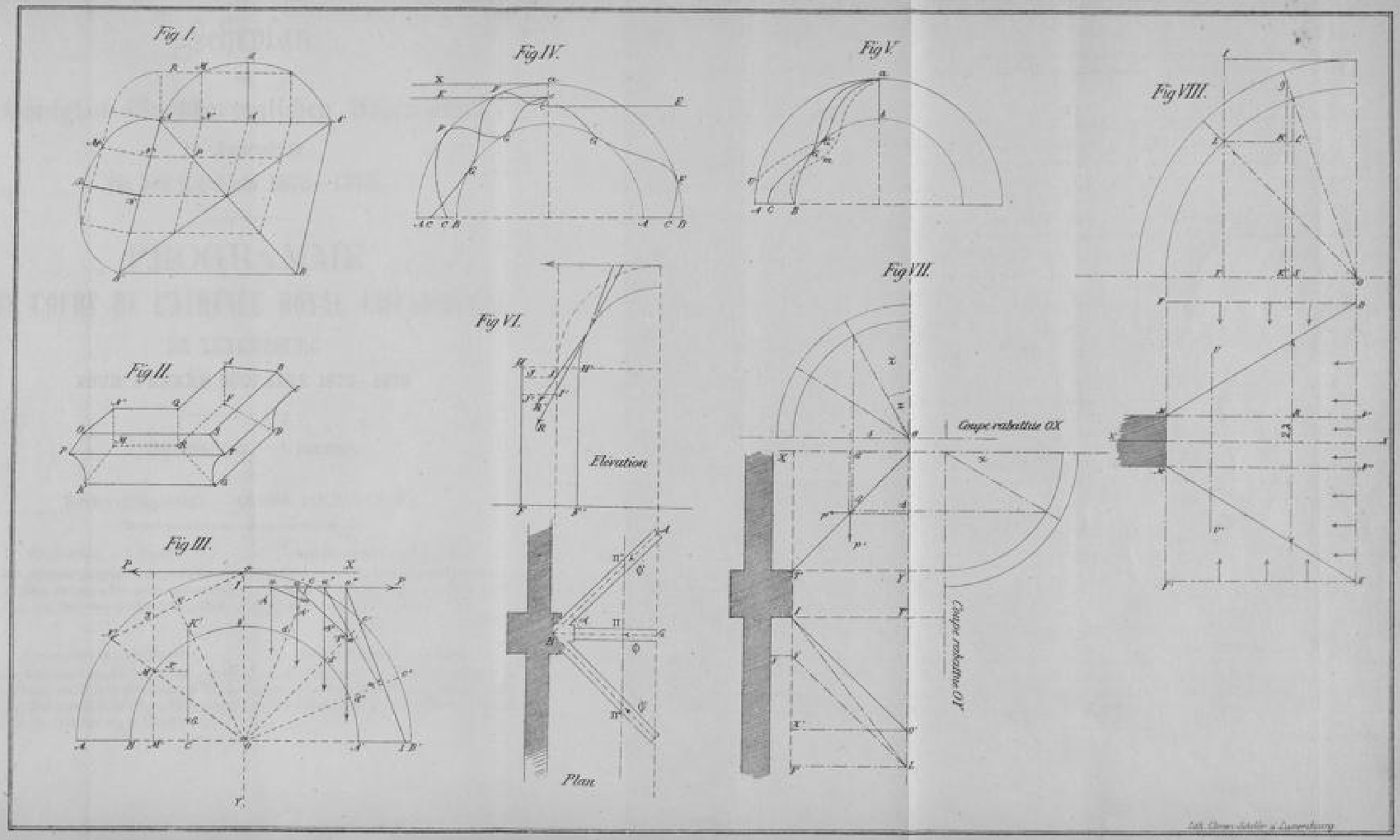
ou en séparant la poussée $x' = \left(\Phi + \frac{2M}{r+e}\right) \frac{3H}{2\Pi + 2\Pi' + \Pi''}$ .

E. FERRON, Ingénieur,
Professeur.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf




Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf




Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf